

**Monografías de Ingeniería Sísmica**  
Editor A. H. Barbat

**Análise Estocástica  
da Resposta Sísmica  
Não-Linear de Estruturas**

Álvaro A.M. F. Cunha



**Monografías de Ingeniería Sísmica**

Editor A. H. Barbat

**Análise Estocástica  
da Resposta Sísmica  
Não-Linear de Estruturas**

Álvaro A. M. F. Cunha

**Monografía CIMNE IS-9 1994**

CENTRO INTERNACIONAL DE METODOS NUMERICOS EN INGENIERIA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
C/ Gran Capitán, s/n  
08034 Barcelona, España.

MONOGRAFIAS DE INGENIERIA SISMICA  
Editor A.H. Barbat

ISSN: 1134-3249

ANALISE ESTOCASTICA DA RESPOSTA SISMICA NAO-LINEAR DE ESTRUTURAS  
Monografia CIMNE IS-9  
© El autor

ISBN: 84-87867-47-2  
Depósito Legal: B-39989-94

IMPRESO EN ESPAÑA - PRINTED IN SPAIN



# ÍNDICE

## CAPÍTULO 1 - INTRODUÇÃO

- 1.1 - IMPORTÂNCIA, ANTECEDENTES E EVOLUÇÃO HISTÓRICA  
DA DINÂMICA ESTRUTURAL ESTOCÁSTICA 1
- 1.2 - ASPECTOS DESENVOLVIDOS NA MONOGRAFIA 4

## CAPÍTULO 2 - MÉTODOS DE ANÁLISE DA RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

- 2.1 - INTRODUÇÃO 7
- 2.2 - ABORDAGEM MARKOVIANA BASEADA NA SOLUÇÃO DA  
EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV 10
- 2.3 - SOLUÇÕES APROXIMADAS DA EQUAÇÃO DE FPK. O  
MÉTODO DA MÉDIA ESTOCÁSTICA 17
- 2.4 - O MÉTODO DE PERTURBAÇÃO 20
- 2.5 - O MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA  
EQUIVALENTE 22
  - 2.5.1 - Conceito de sistema linear equivalente 22
  - 2.5.2 - Formulação do método para sistemas de N-GL com  
não-linearidades simétricas sujeitos a excitações estacionárias  
de média nula 24
  - 2.5.3 - A hipótese de natureza gaussiana da resposta e as condições  
de Atalik-Utku 29
  - 2.5.4 - Alguns aspectos práticos sobre a utilização do método de  
linearização equivalente 31

2.5.5 - Consideração de não-linearidades não-simétricas ou de excitações estacionárias de média não-nula	33
2.5.6 - Extensão do método à análise da resposta a excitações não-estacionárias moduláveis	35
2.5.7 - Precisão dos resultados obtidos	41
2.6 - O MÉTODO DE NÃO-LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE	42
2.7 - OS MÉTODOS DE TRUNCATURA GAUSSIANA E NÃO-GAUSSIANA	44
2.8 - TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO ANALÓGICA OU DIGITAL	52
2.9 - RESUMO E CONCLUSÕES	55
2.10 - DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" NO DOMÍNIO DA ENGENHARIA SÍSMICA	57
2.10.1 - Aplicação da linearização estocástica equivalente à análise da resposta sísmica estacionária de um "shear-building" com comportamento bilinear elástico	57
2.10.2 - Descrição do programa de cálculo automático STBIL	63
2.10.3 - Exemplo de aplicação	66
 <b>CAPÍTULO 3 - ANÁLISE DA RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS HISTERÉTICOS PELO MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE</b>	
3.1 - INTRODUÇÃO	87
3.2 - OS MÉTODOS DE CAUGHEY E DE GOTO E IEMURA PARA ANÁLISE DA RESPOSTA ESTACIONÁRIA DE SISTEMAS DE 1-GL	89
3.3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE CAUGHEY À ANÁLISE DA RESPOSTA ESTACIONÁRIA DE SISTEMAS COM COMPORTAMENTO BILINEAR HISTERÉTICO	92

3.4 - A HIPÓTESE RESTRITIVA DE KRYLOV-BOGOLIUBOV E A UTILIDADE DOS MODELOS HISTERÉTICOS DIFERENCIAIS	95
3.5 - DESCRIÇÃO E UTILIZAÇÃO DE MODELOS HISTERÉTICOS DIFERENCIAIS	98
3.5.1 - O modelo de Bouc-Wen. Sua versatilidade e significado dos parâmetros intervenientes	98
3.5.2 - Consideração da degradação de rigidez e de resistência através do modelo de Baber-Wen	104
3.5.3 - Identificação dos parâmetros do modelo de Baber-Wen e sua validação experimental	105
3.5.4 - Linearização do modelo diferencial de Baber-Wen	108
3.5.5 - Resposta de sistemas de 1-GL caracterizados pelo modelo de Baber-Wen a excitações aleatórias de média nula	111
3.5.6 - Consideração de excitações de valor médio não-nulo	113
3.5.7 - Idealização do efeito de "pinching" através do modelo de Noori-Baber-Wen	115
3.5.8 - O modelo bi-axial de Park-Wen	121
3.5.9 - O modelo de Mochio-Samaras-Wen para problemas planos de tensão ou de deformação	125
3.5.10 - Os modelos diferenciais multilineares de Suzuki e Minai	125
3.6 - RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS HISTERÉTICOS DE N-GL CARACTERIZADOS POR MODELOS DIFERENCIAIS SIMÉTRICOS	130
3.6.1 - Análise da resposta estacionária	130
3.6.2 - Análise da resposta não-estacionária	132
3.7 - APLICAÇÃO DOS MODELOS DE WEN À ANÁLISE ESTOCÁSTICA DA RESPOSTA SÍSMICA DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS. DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" DE APLICAÇÃO	133
3.7.1 - Modelos estruturais utilizáveis	133
3.7.2 - Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de estruturas tipo "shear-building"	136

3.7.3 - Formulação modal complexa alternativa para análise da resposta não estacionária	143
3.7.4 - Descrição dos programas de cálculo automático STWEN e NSTWEN	146
3.7.5 - Exemplos de aplicação	153
3.7.6 - Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de pórticos planos com rótulas não-lineares histeréticas nas extremidades das barras	168
 <b>APÊNDICE A</b>	
<b>Hierarquias de grandezas estatísticas utilizadas na caracterização completa da estrutura probabilística de um processo estocástico</b>	175
 <b>APÊNDICE B</b>	
<b>Expressões dos coeficientes de linearização <math>c_{e_s}</math> e <math>k_{e_s}</math> relativos ao modelo histerético de Noori-Baber-Wen</b>	183
 <b>BIBLIOGRAFIA</b>	185

# Capítulo 1

## INTRODUÇÃO

### 1.1 - IMPORTÂNCIA, ANTECEDENTES E EVOLUÇÃO HISTÓRICA DA DINÂMICA ESTRUTURAL ESTOCÁSTICA

A necessidade cada vez mais sentida de quantificar de forma bastante rigorosa o efeito que, sobre o comportamento das estruturas, é exercido por forças associadas a diversos fenómenos naturais, apenas susceptíveis de serem convenientemente caracterizados em termos probabilísticos, fruto de diversas aleatoriedades de natureza temporal e espacial, fez recair sobre a Teoria das Probabilidades um papel da maior relevância no âmbito da Dinâmica Estrutural, à semelhança aliás do que tem vindo a suceder noutras áreas da Engenharia, das Ciências da Terra e da Economia.

Desse modo, é hoje viável a aplicação de métodos probabilísticos à análise de problemas tão diversos como o da quantificação dos efeitos dos sismos ou do vento sobre edifícios, pontes e barragens, do efeito das ondas do mar sobre estruturas oceânicas, de pressões exercidas sobre aviões ou engenhos aeroespaciais em resultado de fenómenos de turbulência, ou da irregularidade dos pavimentos sobre veículos automóveis.

Nesse sentido, não só foram criados modelos matemáticos capazes de permitir uma adequada caracterização de diferentes tipos de excitações de natureza aleatória, como também foram desenvolvidas formulações teóricas com vista à quantificação dos seus efeitos sobre o comportamento estrutural.

E se inicialmente o recurso a abordagens probabilísticas era essencialmente justificado pela natureza aleatória das acções actuantes, recentemente o seu campo de aplicação tem-se tornado cada vez mais vasto, podendo contemplar-se a própria incerteza estatística associada à definição das propriedades estruturais.

Por outro lado ainda, do estudo de problemas locais ou de curto prazo, como a análise da resposta estrutural a uma excitação aleatória idealizada de forma estocástica, tem-se tentado passar ao estudo de problemas globais ou de longo prazo, nos quais se procura caracterizar a evolução temporal da fiabilidade estrutural de um sistema submetido a uma sequência de múltiplas acções aleatórias ao longo do seu período de

vida útil, como pode suceder, por exemplo, com as estruturas de edifícios sujeitas a sucessivas acções sísmicas, ou com estruturas aeronáuticas na sequência da realização de um grande número de voos [141].

Apesar de os principais trabalhos de investigação no campo da Dinâmica Estrutural Estocástica terem surgido somente a partir dos anos sessenta, e de os conhecimentos relativos a esta área se encontrarem bem menos disseminados por entre estudantes e investigadores que os relativos à Dinâmica Estrutural Determinística, data logo do início do século a primeira aplicação de métodos estocásticos ao estudo de fenómenos físicos. Com efeito, foi Einstein [67] quem pela primeira vez utilizou o conceito de processo estocástico na modelação do movimento Browniano de partículas livres, campo em que se registaram posteriormente outras contribuições valiosas até aos anos quarenta, designadamente por parte de Smoluchowski [145], Fokker [69], Planck [124], Ornstein [114], Uhlenbeck [163] e Wang [168].

Não foi, no entanto, apenas nesses desenvolvimentos teóricos registados no mundo da Física que se veio posteriormente a apoiar a Dinâmica Estrutural Estocástica, já que entretanto outros estudos de grande utilidade tiveram lugar nos domínios da teoria do controlo de sistemas e da teoria das comunicações, de que é paradigma a notável publicação de Rice [129], para além de, em paralelo com todos esses trabalhos de físicos e electrotécnicos, se ter consolidado uma sólida teoria matemática ligada aos processos estocásticos e à análise espectral, campo em que se destacam os contributos de Wiener [177], Khintchine [89] e Kolmogorov [94].

Foi porém apenas no decorrer da década de cinquenta que a Dinâmica Estrutural Estocástica recebeu um forte impulso no âmbito do estudo de vibrações em fuselagens de aviões a jacto causadas quer pela excitação acústica dos motores, quer por fenómenos de turbulência atmosférica [128]. Simplesmente, do aproveitamento de todo o trabalho anterior levado a cabo nos domínios da Física, da Matemática e da Electrotecnia, resultou com relativa facilidade uma teoria geral de análise do comportamento dinâmico de sistemas lineares sujeitos a excitações aleatórias gaussianas, posteriormente utilizada em variados domínios, nomeadamente na análise probabilística da resposta de estruturas oceânicas às acções das ondas do mar [151], de estruturas de edifícios e pontes a acções sísmicas [66, 164] ou do vento [64], e de veículos automóveis ou comboios devido às irregularidades do pavimento ou dos carris de apoio [137].

Sucedem contudo que muitos dos sistemas estruturais apresentam acentuadas formas de comportamento não-linear, tanto mais nítido quanto mais severas são as excitações actuantes e mais elevado é o nível das vibrações provocadas, facto que é, por exemplo, particularmente importante em estruturas de edifícios sujeitas a acções sísmicas.

Por essa razão, boa parte dos trabalhos de investigação a nível mundial têm incidido, especialmente ao longo das últimas três décadas, sobre a análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas não-lineares, muito embora os problemas que se colocam nesta área apresentem bem maior delicadeza e complexidade, dado não se ter conseguido ainda estabelecer uma teoria geral e exacta para o tratamento desta questão.

Sendo a excitação idealizável através de um ruído branco gaussiano, pode comprovar-se, atendendo à teoria matemática das equações diferenciais estocásticas, que a resposta pode ser traduzida por um processo de Markov [8, 42], obedecendo a correspondente função densidade de probabilidade de transição a uma equação diferencial estabelecida por Fokker, Planck e Kolmogorov.

Simplesmente esta forma de abordagem do problema, embora constitua actualmente a única via susceptível de conduzir a resultados exactos, é fortemente restritiva, particularmente nos casos de excitações não-estacionárias e de sistemas de múltiplos graus de liberdade, em virtude da inexistência de um procedimento geral para obtenção da solução analítica daquela equação diferencial [42].

Nessas circunstâncias, não é de estranhar que se tenha registado um grande número de tentativas de exploração de abordagens aproximadas, umas vezes baseadas na equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, e outras nas próprias equações de equilíbrio dinâmico [30, 131, 132, 160].

Embora sejam extremamente numerosos os métodos aproximados ensaiados, encontrando-se as respectivas formulações publicadas em teses, relatórios de investigação, comunicações de conferências e revistas internacionais, todos eles enfermam de limitações mais ou menos acentuadas.

De entre todas as vias possíveis de análise, destacam-se porém o método de linearização estocástica equivalente [149] e as técnicas de simulação digital [140] como aquelas que encerram maiores potencialidades no que concerne ao tratamento de estruturas de relativa complexidade, pesem embora algumas reservas que possam ser colocadas ao nível do rigor da análise de valores extremos da resposta não-gaussiana, no primeiro caso, ou da eficiência do método em termos de tempo de cálculo dispendido, no segundo.

Por esse motivo, as mais recentes aplicações de maior interesse prático dos métodos de análise estocástica no domínio da engenharia sísmica têm-se apoiado nessas duas vias, procurando-se simultaneamente ter em consideração o comportamento não-linear e o comportamento histerético-degradativo característico das estruturas de engenharia civil mais correntemente analisadas.

Para o efeito, houve necessidade de recorrer a modelos de comportamento hysterético que não só traduzissem com suficiente fidelidade o funcionamento estrutural, como também fossem susceptíveis de proporcionar um tratamento matemático eficiente do problema. Nesse sentido, e por esta última razão, tornou-se conveniente traduzir o comportamento hysterético dos sistemas mediante a consideração de variáveis auxiliares endócrinas, reguladas por equações diferenciais não-lineares, capazes de reflectir, em cada instante, a influência da história passada [28, 175], podendo vários dos parâmetros nelas intervenientes, condicionadores da configuração dos ciclos hysteréticos, ser determinados com base em técnicas de identificação de sistemas que entretanto têm vindo a ser desenvolvidas [152, 175].

De facto, se é certo que os modelos hysteréticos baseados em leis empíricas de carga-descarga [49], como os modelos bilinear, de Ramberg-Osgood, Clough, Takeda, ou de Costa e Costa são passíveis de fácil utilização quando se envereda pela via determinística de integração no tempo, e portanto também quando se recorre a técnicas de simulação digital, já o mesmo não sucede quando se procura seguir o método de linearização estocástica equivalente. Então, é francamente preferível recorrer a modelos diferenciais como o introduzido por Bouc e Wen, e mais recentemente desenvolvido por Baber [19], Noori [111], Park [119], Mochio e Samaras [108], possibilitando também simular os efeitos da degradação de rigidez e resistência, o efeito de "pinching", e mesmo a abordagem de problemas de flexão bidireccional de peças lineares, ou de estados de tensão plana.

Para além disso, tem-se registado um esforço crescente por incrementar o nível de sofisticação dos modelos estruturais utilizados, passando, por exemplo no caso da análise sísmica de estruturas porticadas, da consideração de modelos planos do tipo "shear-building" para modelos planos com rótulas inelásticas usualmente localizadas nas extremidades das barras [19, 32], ou mesmo, ainda mais recentemente, para modelos tridimensionais [37].

Desta forma, a evolução sofrida pela Dinâmica Estrutural Estocástica na óptica da Engenharia Sísmica, ao longo dos últimos anos, embora não possa classificar-se de extraordinariamente rápida, por virtude da grande complexidade do tema tratado, tem sido todavia suficientemente segura e progressiva para que se deva procurar utilizá-la como ferramenta de análise e dimensionamento no âmbito da Engenharia de Estruturas.

## 1.2 - ASPECTOS DESENVOLVIDOS NA MONOGRAFIA

A presente monografia comporta, para além de um capítulo de carácter introdutório (Capítulo 1), dois capítulos fundamentais (Capítulos 2 e 3), cuja



organização e desenvolvimento foram marcados pela preocupação de sistematizar adequadamente as mais importantes formulações teóricas que, no âmbito da Dinâmica Estrutural Estocástica, permitem efectuar a análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares, complementando cada capítulo com aspectos relativos ao desenvolvimento de programas de cálculo automático, propositadamente elaborados no sentido de fazer realçar as suas potencialidades à análise da resposta sísmica de estruturas, mediante a apresentação de alguns exemplos julgados elucidativos.

Deste modo, no Capítulo 2 começa por se efectuar uma caracterização dos principais métodos de análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares, designadamente das abordagens exactas e aproximadas baseadas na equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, dos métodos de perturbação, de linearização estocástica equivalente e de não-linearização estocástica equivalente, de truncatura gaussiana e não-gaussiana e das técnicas de simulação. São dessa forma avaliadas as potencialidades das diversas formulações, destacando-se de forma particular a importância da linearização equivalente como método aproximado da maior utilidade no tratamento de sistemas de múltiplos graus de liberdade, razão por que esta abordagem é especialmente aprofundada. Complementarmente, é descrito um programa de cálculo que, baseado nesta formulação, possibilita efectuar a análise sísmica de estruturas planas do tipo "shear-building" com comportamento bilinear elástico, apresentando-se exemplos de aplicação elucidativos, e confrontando-se os resultados obtidos por essa via com os alcançados através de uma técnica de simulação digital.

O Capítulo 3 é especialmente dedicado à análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares hysteréticos através do método de linearização estocástica equivalente, dada a enorme importância que este tipo de não-linearidades assume no contexto da engenharia civil. Assim, começam por ser focados os métodos de Caughey e de Goto e Iemura para análise da resposta estacionária de sistemas não-lineares de um grau de liberdade, e em particular com comportamento bilinear elástico, realçando-se de seguida a utilidade do recurso a modelos hysteréticos diferenciais como forma de ultrapassar os aspectos restritivos decorrentes da aproximação de Krylov e Bogoliubov. Efectua-se a descrição do modelo diferencial de Bouc-Wen, e de modelos dele resultantes a partir de aperfeiçoamentos posteriores introduzidos no sentido de contemplar diferentes aspectos, tal como a degradação de rigidez e de resistência, o efeito de "pinching" ou a flexão bi-axial, sendo também afluída uma técnica de identificação dos principais parâmetros característicos do modelo, e indicada a forma como pode ser efectuada a sua linearização. É realizada uma breve referência aos modelos diferenciais poli-lineares recentemente introduzidos por Suzuki e Minai, e descrita a metodologia geral de análise da resposta estacionária ou não-estacionária de

sistemas hysteréticos de múltiplos graus de liberdade caracterizados através de modelos hysteréticos diferenciais simétricos. A parte final do capítulo ocupa-se da aplicação do método de linearização equivalente ao estudo do comportamento sísmico de estruturas porticadas planas com comportamento hysterético caracterizado através dos modelos de Wen, apresentando-se o fundamento e a descrição de dois programas de cálculo automático propositadamente elaborados no sentido de possibilitar a análise da resposta sísmica estacionária e não-estacionária de estruturas de tipo "shear-building", referindo-se, no entanto ainda, o modo de adaptar a formulação utilizada de molde a aplicá-la a um outro modelo estrutural mais sofisticado, no qual se consideram as não-linearidades concentradas em rótulas localizadas nas extremidades das barras.

## Capítulo 2

# MÉTODOS DE ANÁLISE DA RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS NÃO-LINEARES

### 2.1 - INTRODUÇÃO

A análise estocástica do comportamento dinâmico de sistemas lineares sujeitos a acções aleatórias gaussianas estacionárias ou não-estacionárias é hoje um problema inteiramente dominado, em relação ao qual se dispõe de abordagens de grande generalidade, possibilitando o desenvolvimento de rotinas relativamente simples para efeito de utilização corrente [59].

Sucedem, porém, que muitos dos sistemas estruturais são marcados por acentuadas não-linearidades geométricas ou materiais, que inviabilizam, em princípio, a utilização dessas formulações.

Por outro lado, mesmo nos casos em que, por mera questão de simplicidade de cálculo, o comportamento dos sistemas é suposto linear, não se pode esquecer que estes apresentam sempre um limite de proporcionalidade a partir do qual as não-linearidades, elásticas ou inelásticas, começam a revelar-se de uma forma tanto mais nítida, quanto mais severas são as excitações actuantes e mais elevado é o nível de amplitude das vibrações provocadas, como sucede, por exemplo, no caso de muitas estruturas sujeitas a acções sísmicas.

Além disso, as não-linearidades podem envolver a caracterização das próprias acções actuantes, como sucede no caso das acções dinâmicas induzidas por ondas oceânicas sobre estruturas flexíveis, que podem considerar-se funções não-lineares da velocidade e da aceleração, quer das partículas da água, quer da estrutura, de acordo com a chamada equação de Morison [109].

Por estas razões, o princípio da sobreposição de efeitos, quer no domínio do tempo, quer no domínio da frequência, responsável aliás por uma apreciável simplicidade e eficiência dos métodos de análise de sistemas lineares, perde validade.

Um outro problema adicional, inerente aos sistemas não-lineares, advém do facto de a resposta a excitações de natureza gaussiana ser não-gaussiana, contrariamente ao que sucede nos sistemas lineares, tornando-se desse modo insuficiente o conhecimento dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem para assegurar a completa caracterização da distribuição probabilística da resposta. Este aspecto é aliás tanto mais importante, quanto as não-linearidades podem afectar de forma particular as caudas da distribuição, podendo por isso a deficiente consideração dos seus efeitos ser responsável por erros de avaliação da probabilidade de sobrevivência ou fiabilidade do sistema.

A resposta dinâmica de sistemas não-lineares sujeitos a excitações aleatórias deve pois ser conseguida à custa da resolução do sistema de equações diferenciais não-lineares tradutor do respectivo equilíbrio dinâmico, cujo tratamento matemático é, no entanto, bastante mais difícil que no caso de sistemas lineares. Sendo a excitação gaussiana e do tipo ruído branco, pode comprovar-se que a resposta de sistemas não-lineares elásticos é de natureza markoviana [8, 42], sendo a correspondente densidade de probabilidade de transição regulada por uma equação de Fokker-Planck-Kolmogorov [59]. Esta abordagem, que apresenta a vantagem fundamental de poder conduzir a resultados exactos, é infelizmente aplicável a um número limitado de situações, e particularmente restrito nos casos de excitações não-estacionárias e de sistemas de  $N$  graus de liberdade, em virtude da inexistência de um procedimento geral para obtenção da solução analítica exacta da equação de FPK.

Perante a grande dificuldade de resolução do referido sistema de equações diferenciais não-lineares estocásticas, é frequente, na prática, o recurso aos chamados métodos de simulação digital, também conhecidos por métodos de Monte-Carlo, que consistem em interpretar aquele sistema como um conjunto infinito de sistemas de equações diferenciais não-lineares determinísticos, gerando-se artificialmente um número teoricamente infinito de séries temporais da excitação, compatíveis com uma determinada estrutura probabilística pré-definida. Resolvendo sucessivamente cada um desses sistemas, através do recurso a programas de cálculo para análise dinâmica de estruturas não-lineares por integração no tempo, obtém-se o conjunto de realizações da resposta que, uma vez tratadas estatisticamente, possibilitam estimar a correspondente caracterização probabilística.

Sendo esta via de análise altamente dispendiosa e consumidora de tempo de cálculo, várias têm sido as tentativas no sentido de desenvolver abordagens aproximadas que, embora menos rigorosas, se revelam de aplicação mais acessível e eficiente.

Tais métodos podem classificar-se em dois grupos [30, 42, 131, 132, 150, 160], incluindo o primeiro todas as técnicas aproximadas que, baseadas numa abordagem markoviana da resposta, incidem sobre a equação de Fokker-Planck-Kolmogorov (FPK), e reunindo o segundo todas as formulações aplicáveis às equações de equilíbrio dinâmico.

As técnicas aproximadas baseadas na equação de FPK [42, 131], entre as quais se incluem, nomeadamente, as técnicas de truncatura, de média estocástica, iterativas, numéricas, de caminhos aleatórios e baseadas em desenvolvimentos em série, referem-se em geral apenas a sistemas de 1-GL, pelo que a sua utilização continua a ser limitada em termos práticos.

São por isso as formulações pertencentes ao segundo grupo aquelas que merecem maior atenção quando se pretende analisar sistemas de maior complexidade, sendo diversas as abordagens desenvolvidas por vários autores, designadamente as técnicas de perturbação [50, 162], os métodos de linearização estocástica equivalente [40, 167, 11, 146, 106] e a sua extensão mais recente conhecida por não-linearização equivalente [43, 134], e os métodos de representação em séries de funções [30, 132].

É assim objectivo do presente capítulo descrever com um certo detalhe as principais abordagens utilizáveis na análise estocástica da resposta de sistemas não-lineares, realçando as respectivas potencialidades e limitações, no sentido de destacar as vantagens inerentes à utilização do método de linearização estocástica equivalente, cujo tratamento será por isso posteriormente aprofundado no Capítulo 3, onde serão considerados os modelos de comportamento não-linear de maior interesse no domínio da análise sísmica de estruturas de edifícios, conhecidos por modelos histeréticos.

Admitir-se-á que o sistema é discretizável num conjunto de elementos finitos, podendo as não-linearidades incidir sobre as respectivas matrizes de rigidez ou de amortecimento. Começará por se fazer uma breve referência às soluções exactas alcançáveis com base na equação de FPK, bem como às abordagens aproximadas correspondentes, sendo depois descritos os métodos mais potentes em termos de aplicações, designadamente a técnica de perturbação, o método de linearização estocástica equivalente (ou não-linearização equivalente), as técnicas de truncatura e de simulação.

Para além de se realçar a importância prática assumida pela linearização equivalente, sublinha-se também o interesse da não-linearização equivalente e do método de truncatura não-gaussiana, como vias que possibilitam controlar os efeitos

das não-linearidades sobre o comportamento não-gaussiano da resposta, aspecto que assume particular importância em termos da avaliação da probabilidade de não-excedência de uma dada barreira.

Finalmente, é efectuada referência pormenorizada ao desenvolvimento de "software" específico para a análise sísmica de estruturas de tipo "shear-building" com comportamento bilinear elástico, apresentando-se exemplos de aplicação julgados elucidativos, tratados através de um programa de cálculo automático propositadamente elaborado para o efeito.

## 2.2 - ABORDAGEM MARKOVIANA BASEADA NA SOLUÇÃO DA EQUAÇÃO DE FOKKER-PLANCK-KOLMOGOROV

O problema da análise da resposta dinâmica de um sistema não-linear a excitações de natureza aleatória é uma questão cuja formulação matemática apresenta grande analogia com outras questões que se colocam noutras áreas do conhecimento, designadamente na teoria do controlo de sistemas não-lineares, na teoria das comunicações e na electrónica.

Por esse motivo, embora o trabalho mais antigo relativo a vibrações aleatórias de sistemas não-lineares se deva a Andronov et al [4], que se baseou numa abordagem markoviana da resposta e no uso da equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, e posteriormente se tenham registado outras contribuições do mesmo tipo na área da Dinâmica, como as de Crandall [51], Ariaratnam [6], Lyon [105], Smith [144], Klein [91] e Herbert [75], diversos trabalhos envolvendo técnicas semelhantes foram também desenvolvidos noutras áreas, em particular na Química por Kramers [95] e na teoria de controlo de sistemas não-lineares por Chuang e Kazda [47].

A aproximação markoviana da resposta de um sistema não-linear sujeito a uma excitação aleatória de banda larga resulta directamente da teoria dos sistemas de equações diferenciais estocásticos.

Com efeito, o equilíbrio dinâmico de um sistema não-linear elástico de N-GL sujeito a uma excitação aleatória  $\underline{p}^q(t)$  pode ser traduzido pelo sistema de N equações diferenciais

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) = \underline{p}^q(t) \quad (2.1)$$

sendo  $\underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$  um vector caracterizador das forças de restituição não-lineares. Introduzindo o vector de estado  $\underline{y}(t)^T = [\underline{q}(t)^T, \dot{\underline{q}}(t)^T]$ , aquele sistema pode transformar-se num outro sistema de 2N equações, definido por

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{a}(\underline{y}, t) + \underline{x}(t) \quad (2.2)$$

ou, se se preferir na forma diferencial

$$d\underline{y}(t) = \underline{a}(\underline{y}, t)dt + \underline{x}(t)dt \quad (2.3)$$

com

$$\underline{a}(\underline{y}, t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\underline{q}}(t) \\ -\underline{M}^{-1} \underline{g}(\underline{q}, \underline{q}, t) \end{array} \right\} \quad \underline{x}(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{M}^{-1} \underline{p}^q(t) \end{array} \right\} \quad (2.4)$$

Considerando-se a excitação actuante caracterizada pela relação formal

$$\underline{p}^q(t) = \underline{\theta}(t)\omega(t) = \underline{\theta}(t) \frac{dW(t)}{dt} \quad (2.5)$$

sendo  $\underline{\theta}(t)$  um vector de funções de modulação determinísticas,  $\omega(t)$  um processo gaussiano do tipo ruído branco de média nula, e  $W(t)$  o correspondente processo de Wiener, a equação (2.2), interpretada como uma equação de Itô [79], pode escrever-se sob a forma

$$d\underline{y}(t) = \underline{a}(\underline{y}, t)dt + \underline{b}(t)dW(t) \quad (2.6)$$

em que

$$\underline{b}(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \underline{M}^{-1} \underline{\theta}(t) \end{array} \right\} \quad (2.7)$$

Ora, de acordo com a teoria das equações diferenciais estocásticas [8, 42], a solução  $\underline{y}(t)$  relativa à equação (2.6) é um processo de Markov, sendo por isso a função densidade de probabilidade de transição da resposta regulada por uma equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, ou seja

$$\frac{\partial p_c(\underline{y}/\underline{y}_o)}{\partial t} = - \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial y_i} [\alpha_i p_c(\underline{y}|\underline{y}_o)] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [\beta_{ij} p_c(\underline{y}|\underline{y}_o)] \quad (2.8)$$

sendo  $\underline{y}_o$  e  $\underline{y}$  os vectores constituídos pelos valores do processo vectorial markoviano de resposta de dimensão  $2N$  nos instantes  $t_o$  e  $t$  ( $t_o < t$ ),  $y_i$  e  $y_j$  as componentes de ordem  $i$  e de ordem  $j$  do vector  $\underline{y}$ , e  $\alpha_i$  e  $\beta_{ij}$  os seguintes limites obtidos a partir dos momentos incrementais de primeira e segunda ordem

$$\alpha_i(\underline{y}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_i]}{\Delta t} \quad \beta_{ij}(\underline{y}, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_i \Delta y_j]}{\Delta t} \quad (2.9)$$

os quais podem ser calculados com base no conhecimento das equações de equilíbrio dinâmico.

Nas situações em que o processo de resposta assume natureza estacionária, o primeiro membro da equação (2.8) anula-se, sendo a densidade de probabilidade de transição  $p_c(\underline{y} | \underline{y}_0)$  substituída por uma função densidade de probabilidade  $p(\underline{y})$  independente do tempo e das condições iniciais, ou seja a equação de FPK assume a forma

$$-\sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial y_i} [\alpha_i p(\underline{y})] + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} \sum_{j=1}^{2N} \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} [\beta_{ij} p(\underline{y})] = 0 \quad (2.10)$$

Esta abordagem markoviana da resposta, embora apresente uma importante vantagem por poder conduzir a soluções exactas, reveste-se porém de sérios aspectos restritivos.

Um primeiro obstáculo decorre do pressuposto de a excitação actuante ser caracterizada por um ruído branco gaussiano de valor médio nulo, pois que, embora em muitos casos esta restrição possa ser contornada mediante o recurso a filtros susceptíveis de gerarem processos coloridos com características espectrais adequadas, tal procedimento leva a um aumento da dimensão do processo markoviano da resposta, envolvendo o conjunto sistema-filtro, introduzindo-se dessa maneira um agravamento da complexidade do problema.

A dificuldade maior reside, contudo, no facto de ser muito limitada a classe de sistemas não-lineares em relação aos quais é conhecida uma solução exacta da equação de FPK [42].

No domínio dos sistemas de 1-GL, a equação de FPK é resolúvel para equações do movimento da forma

$$\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + g(q, t) = \omega(t) \quad (2.11)$$

em que  $\omega(t)$  é um ruído branco gaussiano estacionário de valor médio nulo e densidade espectral de potência constante de valor  $S_\omega$ .

Introduzindo o vector de estado  $\underline{y}(t) = [q(t), \dot{q}(t)]^T$ , esta equação transforma-se em

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{\alpha}(\underline{y}, t) + \underline{x}(t) \quad (2.12)$$

traduzindo que

$$\begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ \ddot{q}(t) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ -c\dot{q}(t) - g(q, t) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{Bmatrix} \quad (2.13)$$



Os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\beta_{ij}$  da equação de FPK, associada ao processo bidimensional de Markov  $\underline{y}(t)$ , podem então ser quantificados, já que

$$\alpha_1 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_1]}{\Delta t} = y_2 \quad (2.14)$$

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\left\{[-c\dot{q}(t) - g(q, t)]\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \omega(u) du\right\}}{\Delta t} \\ &= -c\dot{q}(t) - g(q, t) \end{aligned} \quad (2.15)$$

$$\beta_{11} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_1^2]}{\Delta t} = 0 \quad (2.16)$$

$$\beta_{12} = \beta_{21} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_1 \Delta y_2]}{\Delta t} = 0 \quad (2.17)$$

$$\beta_{22} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E[\Delta y_2^2]}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{E\left\{\left[(-c\dot{q}(t) - g(q, t))\Delta t + \int_t^{t+\Delta t} \omega(u) du\right]^2\right\}}{\Delta t} \quad (2.18)$$

Desenvolvendo o quadrado indicado na expressão de  $\beta_{22}$  e tendo presente que a função de auto-correlação da excitação é  $R_\omega(\tau) = 2\pi S_\omega \delta(\tau)$ , conclui-se de imediato que

$$\beta_{22} = 2\pi S_\omega \quad (2.19)$$

sendo possível mostrar [41] que os limites dos momentos incrementais de ordem superior são nulos.

Nestas condições, a equação de FPK correspondente é a seguinte

$$\pi S_\omega \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} - \frac{\partial}{\partial y_1} (y_2 p) + \frac{\partial}{\partial y_2} \{[cy_2 + g(y_1)]p\} = 0 \quad (2.20)$$

Segundo Wang e Uhlenbeck [168], a solução respectiva é dada por

$$p(q, \dot{q}) = C \exp\left\{-\frac{c}{\pi S_\omega} \left[\frac{\dot{q}^2}{2} + \int_0^q g(u) du\right]\right\} \quad (2.21)$$

em que  $C$  é uma constante de normalização, determinável através da condição

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(q, \dot{q}) dq d\dot{q} = 1 \quad (2.22)$$

No caso particular de um sistema linear, em que

$$c = 2\xi w_n \quad g(q, t) = w_n^2 q(t) \quad (2.23)$$

a equação de FPK (2.20) reduz-se a

$$\pi S_o \frac{\partial^2 p}{\partial y_2^2} + (w_n^2 y_1 + 2\xi w_n y_2) \frac{\partial p}{\partial y_2} - y_2 \frac{\partial p}{\partial y_1} + 2\xi w_n p = 0 \quad (2.24)$$

podendo a respectiva solução exprimir-se em função de  $q$  e  $\dot{q}$  por

$$p(q, \dot{q}) = \frac{\xi w_n^2}{2\pi S_o} \exp \left[ -\frac{\xi w_n}{\pi S_o} (w_n^2 q^2 + \dot{q}^2) \right] \quad (2.25)$$

A equação de Fokker-Planck-Kolmogorov é ainda resolúvel de forma exacta, caso se introduza também uma não-linearidade no amortecimento, transformando-se a equação (2.11) em

$$\ddot{q}(t) + h(V)\dot{q}(t) + g(q, t) = \omega(t) \quad (2.26)$$

sendo  $h(V)$  uma função da energia total

$$V = \frac{\dot{q}^2}{2} + U(q) \quad (2.27)$$

com

$$U(q) = \int_0^q g(q) dq \quad (2.28)$$

obtendo-se nesse caso que [42]

$$p(q, \dot{q}) = C \exp \left[ -\frac{1}{\pi S_o} \int_0^V h(u) du \right] \quad (2.29)$$

A resposta estacionária de certos sistemas não-lineares de N-GL pode também ser determinada através da equação de FPK. Tal é possível no caso de as equações do movimento serem da forma

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \nabla \underline{U}_q(t) = \underline{\omega}^q(t) \quad (2.30)$$

em que  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$  são matrizes simétricas,  $\underline{\omega}^q(t)$  é um processo vectorial gaussiano estacionário do tipo ruído branco de valor médio nulo, com uma matriz de funções de inter-correlação proporcional à matriz de amortecimento, ou seja

$$E[\underline{\omega}^q(t)] = \underline{0} \quad \underline{R}_{\omega^q}(\tau) = 2d\underline{C}\delta(\tau) \quad (2.31)$$

e

$$\nabla_{\underline{q}} U = \left[ \frac{\partial U}{\partial q_1}, \frac{\partial U}{\partial q_2}, \dots, \frac{\partial U}{\partial q_N} \right]^T \quad (2.32)$$

representando  $U = U(\underline{q})$  uma energia potencial.

Nesse caso, introduzindo o problema de valores e vectores próprios

$$\underline{C}\underline{\phi}_i = \lambda_i \underline{M}\underline{\phi}_i \quad (2.33)$$

pode escrever-se que

$$\underline{\phi}^T \underline{M} \underline{\phi} = \underline{I} \quad \underline{\phi}^T \underline{C} \underline{\phi} = \underline{\lambda} \quad (2.34, 35)$$

em que  $\underline{\phi}$  é a matriz quadrada constituída pelos vectores próprios  $\underline{\phi}_i$  normalizados em relação à matriz de massa,  $\underline{I}$  é a matriz identidade e  $\underline{\lambda}$  é uma matriz diagonal constituída pelos valores próprios correspondentes.

Por outro lado, tendo em consideração que a introdução da transformação linear

$$\underline{q}(t) = \underline{\phi} \underline{z}(t) \quad (2.36)$$

implica que

$$\underline{\phi}^T \nabla_{\underline{q}} U(t) = \nabla_{\underline{z}} U(t) \quad (2.37)$$

a equação (2.30) pode transformar-se, tendo em conta as equações (2.34) a (2.37), no seguinte conjunto de N equações diferenciais independentes

$$\ddot{\underline{z}}(t) + \underline{\lambda} \dot{\underline{z}}(t) + \nabla_{\underline{z}} U(t) = \underline{\phi}^T \underline{\omega}^q(t) = \underline{\omega}^z(t) \quad (2.38)$$

ou

$$\ddot{z}_i(t) + \lambda_i \dot{z}_i(t) + \frac{\partial U(\underline{z})}{\partial z_i} = \omega_i^z(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.39)$$

sendo

$$E[\underline{\omega}^z(t)] = \underline{0} \quad \underline{R}_{\omega^z}(\tau) = 2d\underline{\lambda}\delta(\tau) \quad (2.40)$$

Recorrendo ao vector de estado  $\underline{y}(t)^T = [\underline{z}(t)^T, \dot{\underline{z}}(t)^T]$ , estas equações podem, por sua vez, transformar-se no seguinte sistema de 2N equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{y}_i(t) = y_{i+N}(t)$$

$$\dot{y}_{i+N}(t) = -\lambda_i y_{i+N}(t) - \frac{\partial U(\underline{y})}{\partial y_i} + \omega_i^z(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.41)$$

tornando-se viável calcular os coeficientes  $\alpha_i$  e  $\beta_{ij}$  da equação de FPK associada ao processo de Markov  $\underline{y}(t)$  de dimensão  $2N$ , caracterizador da resposta do sistema não-linear, seguindo um procedimento perfeitamente semelhante ao anteriormente utilizado para sistemas de 1-GL (eq. 2.14 a 2.19), resultando assim que

$$\alpha_i = y_{i+N} \quad \alpha_{i+N} = -\lambda_i y_{i+N} - \partial U(\underline{y}) / \partial y_i \quad (2.42)$$

$$b_{ij} = 0 \quad b_{i+N, j+N} = 0 \quad b_{ii} = 0 \quad b_{i+N, i+N} = 2d\lambda_i \quad (2.43)$$

$(i, j = 1, 2, \dots, N; i \neq j)$

Desta forma, a equação de FPK, que condiciona a função densidade de probabilidade estacionária  $p(\underline{y})$ , surge com o seguinte aspecto

$$\sum_{i=1}^{2N} d\lambda_i \frac{\partial^2 p}{\partial y_{i+N}^2} - \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial y_i} (y_{i+N} p) + \sum_{i=1}^{2N} \frac{\partial}{\partial y_{i+N}} \left[ \left( \lambda_i y_{i+N} + \frac{\partial U}{\partial y_i} \right) p \right] = 0 \quad (2.44)$$

A solução respectiva foi primeiro obtida por Ariaratnam [6] para sistemas de 2-GL, sendo posteriormente generalizada por Caughey [41], que chegou à seguinte expressão para  $p(\underline{y})$

$$p(\underline{y}) = \frac{\exp \left\{ -\frac{1}{d} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} y_{i+N}^2 + U(\underline{y}) \right] \right\}}{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp \left\{ -\frac{1}{d} \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{2N} y_{i+N}^2 + U(\underline{y}) \right] \right\} dy_1 \dots dy_{2N}} \quad (2.45)$$

À semelhança do que se passa nos sistemas de 1-GL, a equação de FPK é também resolúvel caso se verifique uma não-linearidade ao nível das forças de amortecimento, desde que a equação (2.39) seja substituída por uma equação da forma

$$\dot{z}_i(t) + c_i h(V) \dot{z}_i(t) + \frac{\partial U(\underline{z})}{\partial z_i} = \omega_i^z(t) \quad (i = 1, 2, \dots, N) \quad (2.46)$$

sendo

$$V = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \dot{z}_i^2 + U(\underline{z}) \quad (2.47)$$

e  $h(V)$  uma função positiva monotonamente crescente.  $\omega_i^z(t)$  é um ruído branco gaussiano de valor médio nulo, tal que

$$\underline{R}_{\omega^z}(\tau) = 2\underline{D}\delta(\tau) \quad (2.48)$$

sendo  $\underline{D}$  uma matriz diagonal relacionada com os coeficientes  $c_i$  através da relação

$$D_{ii}/c_i = d \quad (2.49)$$

Nesse caso, Caughey mostrou também que a solução de FPK correspondente conduz a que

$$p(\underline{y}) = \frac{\exp\left[-\frac{1}{d}\int_0^V h(u)du\right]}{\int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left[-\frac{1}{d}\int_0^V h(u)du\right] dy_1 \dots dy_{2N}} \quad (2.50)$$

### 2.3 - SOLUÇÕES APROXIMADAS DA EQUAÇÃO DE FPK. O MÉTODO DA MÉDIA ESTOCÁSTICA

Como se depreende da leitura da secção anterior, a abordagem markoviana da resposta baseada na resolução da equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, embora tenha a vantagem de poder conduzir a resultados exactos, apresenta severas restrições de aplicabilidade a sistemas de N-GL, mesmo no caso de excitações estacionárias, exigindo que, quer as não-linearidades, quer as matrizes das funções de inter-correlação da excitação actuante, obedeçam a relações em regra pouco compatíveis com as situações reais.

Por essa razão, diversos autores ensaiaram variados métodos aproximados de resolução da equação de FPK, empregando nomeadamente técnicas iterativas (Mayfield [107], Ilin e Khasminski [78] e Kushner [97]), técnicas utilizando desenvolvimentos em série (Atkinson [13], Payne [121], Stratonovitch [152] Bhandarri e Sherrer [25] e Wen [170]), técnicas de caminhos aleatórios (Toland e Yang [161]), técnicas de média estocástica (Roberts e Spanos [133]), técnicas numéricas (Wolaver [178] e Cumming [57]) e de truncatura (Dashevskii [61-63]).

Estes métodos aproximados, baseados na equação de FPK, referem-se em geral, no entanto, a sistemas não-lineares de 1-GL, pelo que o seu interesse prático continua a ser muito limitado.

Apesar disso porém, julga-se de interesse fazer referência a duas dessas formulações, nomeadamente ao método da média estocástica e aos métodos de truncatura, em virtude de, por um lado, o primeiro desses métodos constituir uma das formulações aproximadas mais potentes no domínio dos sistemas de 1-GL, e de, por outro lado, os métodos de truncatura encerrarem interessantes virtualidades,

encontrando-se intimamente relacionados com o método de linearização estocástica equivalente. Por esta última razão aliás, entende-se conveniente proceder neste ponto unicamente a uma breve descrição do método da média estocástica, reservando para fase posterior uma referência mais detalhada às técnicas de truncatura gaussiana e não-gaussiana.

O método da média estocástica ("stochastic averaging"), aplicável a sistemas não-lineares de 1-GL com baixo amortecimento, cuja resposta pode considerar-se de banda estreita, é devido a Stratonovitch [152], que generalizou uma técnica anteriormente utilizada por Bogoliubov e Mitropolsky [26], aplicada em análises de carácter determinístico.

Neste tipo de abordagem aproximada, aplicável a equações de equilíbrio da forma

$$\ddot{q}(t) + \epsilon g(q, \dot{q}, t) + \omega_0^2 q(t) = p(t) \quad (2.51)$$

em que  $g(q, \dot{q}, t)$  traduz as não-linearidades do sistema, e  $p(t)$  é um processo de banda larga, a resposta é analisada em termos da respectiva envolvente  $z$  e fase  $\phi$ , definidas pelas relações

$$q(t) = z(t) \cos[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (2.52)$$

$$\dot{q}(t) = -z(t)\omega_0 \sin[\omega_0 t + \phi(t)] \quad (2.53)$$

Conjugando as equações (2.51) a (2.53), pode obter-se que [133]

$$\dot{z} = \frac{\epsilon}{\omega_0} g(z \cos \phi, -z\omega_0 \sin \phi) \sin \phi - \frac{p(t)}{\omega_0} \sin \phi \quad (2.54)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\epsilon}{z\omega_0} g(z \cos \phi, -z\omega_0 \sin \phi) \cos \phi - \frac{p(t)}{z\omega_0} \cos \phi \quad (2.55)$$

em que

$$\Phi = \omega_0 t + \phi \quad (2.56)$$

Os segundos membros das equações (2.54) e (2.55) dependem não só explicitamente de  $z(t)$  e  $p(t)$ , mas também de  $\phi(t)$  e  $t$  através dos termos de natureza oscilatória  $\sin \phi$  e de  $\cos \phi$ . Como o andamento da envolvente  $z$  e da fase  $\phi$  é naturalmente caracterizado por variações muito lentas em sistemas de baixo amortecimento, e em que a resposta é traduzida por processos de banda estreita, pode introduzir-se uma aproximação que consiste em substituir as componentes oscilatórias por valores médios, calculados de forma determinística, no caso das primeiras parcelas

dos segundos membros das equações (2.54) e (2.55), ou de forma estocástica com base num teorema limite utilizado por Stratonovitch [152] e Khasminskii [88], no caso das segundas, função também do processo estocástico de banda larga  $p(t)$ .

Seguindo essa via, é possível demonstrar [133] que as equações (2.54) e (2.55) podem substituir-se de forma aproximada por

$$\dot{z} = \frac{\epsilon}{w_0} G_1(z) + \frac{\pi S_p(w_0, t)}{2z w_0^2} - \frac{\sqrt{\pi S_p(w_0, t)}}{w_0} \omega_1(t) \quad (2.57)$$

$$\dot{\phi} = \frac{\epsilon}{z w_0} G_2(z) - \frac{\sqrt{\pi S_p(w_0, t)}}{z w_0} \omega_2(t) \quad (2.58)$$

com

$$G_1(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z \cos \Phi, -z w_0 \sin \Phi) \sin \Phi d\Phi \quad (2.59)$$

$$G_2(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(z \cos \Phi, -z w_0 \sin \Phi) \cos \Phi d\Phi \quad (2.60)$$

em que  $S_p(w_0, t)$  é o valor do espectro de potência evolutivo da excitação actuante para  $w = w_0$ , e  $\omega_1(t)$  e  $\omega_2(t)$  são dois ruídos brancos unitários independentes. A equação (2.57) surge assim desligada da equação (2.58), podendo ser representada na forma diferencial traduzida pela equação (2.6), pelo que  $z(t)$  pode ser interpretado como um processo de Markov, cuja função densidade de probabilidade de transição  $p_c(z | z_0)$  é regulada pela equação de FPK [133]

$$\frac{\partial p_c}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[ \left( -\frac{\epsilon G_1(z)}{w_0} - \frac{\pi S_p(w_0, t)}{2z w_0^2} \right) p_c \right] + \frac{\pi S_p(w_0, t)}{2w_0^2} \frac{\partial^2 p_c}{\partial z^2} \quad (2.61)$$

equação que, no caso de excitações estacionárias, apresenta a seguinte solução exacta conhecida

$$p(z) = C z \exp \left\{ \frac{2\epsilon w_0}{\pi S_p(w_0)} \int_0^z G_1(u) du \right\} \quad (2.62)$$

Por outro lado, as equações (2.57) e (2.58) permitem também interpretar  $z(t)$  e  $\phi(t)$  como um processo de Markov bidimensional, ao qual está associada uma outra equação de FPK que, comparada com a equação (2.61), possibilita concluir que para excitações estacionárias

$$p(z, \phi) = p(z) p(\phi) = p(z) / 2\pi \quad (2.63)$$

Deste modo, atendendo às relações entre  $(q, \dot{q})$  e  $(z, \phi)$ , bem como à relação Jacobiana entre funções densidade de probabilidade [47], pode concluir-se também que a função densidade de probabilidade correspondente à resposta estacionária  $(q, \dot{q})$  é dada por

$$p(q, \dot{q}) = \frac{1}{2\pi w_o z} p(z) \quad (2.64)$$

com

$$z = \sqrt{q^2 + (\dot{q}/w_o)^2} \quad (2.65)$$

No caso particular de sistemas lineares, em que  $\epsilon g(q, \dot{q}) = 2\xi w_o \dot{q}$ , as equações (2.62) e (2.64) conduzem exactamente às distribuições de Rayleigh e de Gauss.

Sendo a excitação de carácter não-estacionário, a resolução da equação de FPK (2.61) torna-se extremamente difícil, dispondo-se apenas de uma solução geral para a situação específica de um sistema linear.

Como facilmente se compreende, a vantagem essencial deste método consiste em substituir o problema da determinação da distribuição de probabilidade do processo de Markov bidimensional  $(q, \dot{q})$  por um problema análogo em termos do processo de Markov unidimensional relativo à envolvente  $z$ , simplificando consideravelmente o problema em termos matemáticos, tornando-se viável posteriormente obter uma aproximação da distribuição de probabilidade relativa a  $(q, \dot{q})$ .

## 2.4 - O MÉTODO DE PERTURBAÇÃO

O método de perturbação é uma abordagem aproximada de análise da resposta aleatória de sistemas não-lineares de N-GL, que se apoia directamente nas respectivas equações de equilíbrio dinâmico.

Suponha-se estas equações expressas sob a forma

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) + \epsilon \underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) = \underline{p}^a(t) \quad (2.66)$$

em que  $\epsilon$  constitui um parâmetro de perturbação, tradutor do grau de importância das não-linearidades definidas pelo vector  $\underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$ , e considere-se que a solução  $\underline{q}(t)$  pode ser expressa através de um desenvolvimento em série de potências de  $\epsilon$ , isto é

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_0(t) + \epsilon \underline{q}_1(t) + \epsilon^2 \underline{q}_2(t) + \dots \quad (2.67)$$



Então, torna-se possível, substituindo (2.67) em (2.66), reunindo os termos correspondentes às mesmas potências de  $\epsilon$  e igualando-os a zero, transformar o problema não-linear traduzido pela equação (2.66) na seguinte cadeia de problemas lineares

$$M\ddot{\underline{q}}_0(t) + C\dot{\underline{q}}_0(t) + K\underline{q}_0(t) = \underline{p}^q(t) \quad (2.68)$$

$$M\ddot{\underline{q}}_1(t) + C\dot{\underline{q}}_1(t) + K\underline{q}_1(t) = -\underline{g}(\dot{\underline{q}}_0, \underline{q}_0, t) \quad (2.69)$$

.....

Desta forma, torna-se possível obter a caracterização probabilística da resposta do sistema não-linear, recorrendo apenas a métodos de análise de sistemas lineares.

Com efeito, desprezando o contributo dos termos correspondentes a potências de  $\epsilon$  de ordem superior à primeira, e supondo a excitação estacionária, conclui-se da equação (2.67) que o valor médio expectável da resposta é dado por

$$\underline{m}_q = E[\underline{q}(t)] = E[\underline{q}_0(t)] + \epsilon E[\underline{q}_1(t)] \quad (2.70)$$

obtendo-se os valores médios  $E[\underline{q}_0(t)]$  e  $E[\underline{q}_1(t)]$  a partir da resolução dos problemas lineares traduzidos pelas equações (2.68) e (2.69), para o que se torna necessário calcular o valor médio da excitação correspondente ao segundo problema,  $E[\underline{g}(\dot{\underline{q}}_0, \underline{q}_0, t)]$ , o que pode ser feito a partir do conhecimento da distribuição de probabilidade da resposta correspondente ao primeiro.

Por outro lado, a matriz das funções de inter-correlação instantânea da resposta é dada por

$$\underline{R}_q(o) = E[\underline{q}\underline{q}^T] = E[\underline{q}_0\underline{q}_0^T] + \epsilon \{E[\underline{q}_0\underline{q}_1^T] + E[\underline{q}_1\underline{q}_0^T]\} \quad (2.71)$$

sendo o conhecimento da matriz  $E[\underline{q}_0\underline{q}_0^T]$  decorrente da resolução do primeiro problema linear a que se refere a equação (2.68).

O cálculo da matriz  $E[\underline{q}_0\underline{q}_1^T]$  pode, por sua vez, fazer-se tendo em conta que as respostas  $\underline{q}_0(t)$  e  $\underline{q}_1(t)$  podem ser expressas sob a forma

$$\underline{q}_0(t) = \int_0^\infty \underline{h}_q(\tau) \underline{p}^q(t-\tau) d\tau \quad (2.72)$$

$$\underline{q}_1(t) = - \int_0^\infty \underline{h}_q(\tau) \underline{g}(\dot{\underline{q}}_0, \underline{q}_0, t-\tau) d\tau \quad (2.73)$$

pelo que

$$E[\underline{q}_0 \underline{q}_1^T] = - \int_0^\infty \int_0^\infty \underline{h}_q(\tau_1) E[\underline{p}^q(t - \tau_1) \underline{g}^T(\dot{q}_0, q_0, t - \tau_2)] \underline{h}_q^T(\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (2.74)$$

podendo o valor médio expectável  $E[\underline{p}^q(t - \tau_1) \underline{g}^T(\dot{q}_0, q_0, t - \tau_2)]$  calcular-se tendo em consideração a equação (2.72), as características da excitação aleatória  $\underline{p}^q(t)$  e as propriedades dos processos gaussianos [50]. No entanto, o cálculo de  $E[\underline{q}_0 \underline{q}_1^T]$  não se revela nada simples por esta via na maioria dos casos.

Esta abordagem de análise da resposta, inicialmente utilizada por Crandall [50] em sistemas de um ou dois graus de liberdade, foi posteriormente utilizada por Lyon [104] em sistemas contínuos, e por Tung [162], que baseando-se numa formulação de estado, conseguiu desligar as equações (2.68) e (2.69), criando um procedimento mais simples de cálculo da matriz das funções de inter-correlação da resposta em sistemas de N-GL.

As técnicas de perturbação apresentam, no entanto, sérias restrições, não só porque a utilização de termos do desenvolvimento em série (2.67) correspondentes a potências de  $\epsilon$  superiores à primeira leva a cálculos extraordinariamente pesados e trabalhosos, mas também porque não existe prova da convergência daquele desenvolvimento em série.

A comparação de resultados obtidos através desta técnica com os alcançados por técnicas de simulação, ou com o recurso a soluções exactas, permite porém concluir que o método de perturbação conduz a boas aproximações desde que as não-linearidades sejam pouco acentuadas.

## 2.5 - O MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE

### 2.5.1 - Conceito de sistema linear equivalente

O método de linearização estocástica equivalente teve a sua génese numa técnica aproximada criada por Krylov e Bogoliubov [96] para análise da resposta de um sistema não-linear a acções determinísticas, posteriormente generalizada por Booton [27] e Caughey [40] ao caso de excitações aleatórias.

A ideia básica subjacente ao desenvolvimento deste método consiste simplesmente em procurar aproximar a resposta do sistema não-linear pela resposta de um sistema linear equivalente, cujas características são determinadas de modo a minimizar alguma medida do erro cometido.

Considere-se então, para clarificar ideias, um sistema de 1-GL com comportamento não-linear em termos de amortecimento e de rigidez, sujeito a uma excitação aleatória, que vamos começar por supor estacionária e de valor médio nulo, sendo o equilíbrio dinâmico correspondente traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t) + g(\dot{q}, q, t) = p(t)/m \quad (2.75)$$

em que  $g(\dot{q}, q, t)$  é uma função caracterizadora das não-linearidades, suposta ímpar em  $q$  e  $\dot{q}$ , como sucede na maioria dos casos de interesse prático, levando a que a resposta  $q(t)$  tenha valor médio nulo por razões de simetria.

A resposta deste sistema não-linear pode ser aproximada pela resposta de um sistema linear equivalente, caracterizado pelos parâmetros  $\beta_e$  e  $w_e$ , obedecendo à equação de equilíbrio

$$\ddot{q}(t) + \beta_e \dot{q}(t) + w_e^2 q(t) = p(t)/m \quad (2.76)$$

A fixação dos valores de  $\beta_e$  e  $w_e$  é naturalmente função da diferença  $\epsilon$  entre os primeiros membros das equações (2.75) e (2.76), sendo

$$\epsilon(t) = g(\dot{q}, q, t) - \beta_e \dot{q}(t) - w_e^2 q(t) \quad (2.77)$$

Um critério adequado para a escolha dos parâmetros do sistema linear equivalente consiste em minimizar o valor quadrático médio  $E[\epsilon^2]$ , o que exige a satisfação das seguintes condições necessárias

$$\frac{\partial}{\partial \beta_e} E[\epsilon^2] = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial w_e} E[\epsilon^2] = 0 \quad (2.78)$$

Conjugando estas condições com a equação (2.77), e resolvendo as duas equações resultantes em ordem a  $\beta_e$  e  $w_e^2$ , resulta que

$$\beta_e = \frac{E[q^2]E[\dot{q}g(\dot{q}, q)] - E[q\dot{q}]E[qg(\dot{q}, q)]}{E[q^2]E[\dot{q}^2] - E[q\dot{q}]^2} \quad (2.79)$$

$$w_e^2 = \frac{E[\dot{q}^2]E[qg(\dot{q}, q)] - E[q\dot{q}]E[\dot{q}g(\dot{q}, q)]}{E[q^2]E[\dot{q}^2] - E[q\dot{q}]^2} \quad (2.80)$$

expressões que se podem simplificar, tendo em conta que, sendo o processo de resposta estacionário e de valor médio nulo

$$E[q^2] = \sigma_q^2 \quad E[\dot{q}^2] = \sigma_{\dot{q}}^2 \quad E[q\dot{q}] = 0 \quad (2.81)$$

pelo que

$$\beta_e = \frac{E[\dot{q}g(\dot{q}, q)]}{\sigma_{\dot{q}}^2} \quad w_e^2 = \frac{E[qg(\dot{q}, q)]}{\sigma_q^2} \quad (2.82)$$

Deste modo, os parâmetros definidores do sistema linear equivalente,  $\beta_e$  e  $w_e^2$ , surgem expressos em função da própria estatística da resposta, o que tende a dificultar a sua determinação. No entanto, o problema pode ser ultrapassado se se seguir uma via iterativa, começando por arbitrar valores iniciais para  $\beta_e$  e  $w_e^2$ , e calculando os valores correspondentes de  $\sigma_q^2$  e  $\sigma_{\dot{q}}^2$ . Supondo-se a excitação actuante de natureza gaussiana, a resposta do sistema linear equivalente será do mesmo tipo, pelo que as variáveis ( $q, \dot{q}$ ) obedecem a uma distribuição de Gauss bidimensional, condicionada exclusivamente pelos valores das variâncias  $\sigma_q^2$  e  $\sigma_{\dot{q}}^2$ . Por conseguinte, torna-se viável o cálculo dos valores médios  $E[\dot{q}g(\dot{q}, q)]$  e  $E[qg(\dot{q}, q)]$ , tomando como base essa distribuição de probabilidade conjunta, podendo posteriormente calcular-se os valores corrigidos de  $\beta_e$  e  $w_e^2$  a utilizar na iteração seguinte, e assim sucessivamente até que se atinja a desejada convergência.

### 2.5.2 - Formulação do método para sistemas de N-GL com não-linearidades simétricas sujeitos a excitações estacionárias de média nula

Embora o método de linearização estocástica equivalente tenha começado por se referir a sistemas não-lineares de 1-GL sujeitos a excitações aleatórias [40], foi posteriormente objecto de diversas contribuições (Foster [70], Yang [167], Iwan [81], Atalik [11], Spanos [146], Mason [106]) no sentido de o tornar aplicável, de uma forma simples e eficiente, a sistemas de N-GL sujeitos a excitações estacionárias e mesmo não-estacionárias.

Considere-se então um sistema não-linear de N-GL sujeito a uma excitação aleatória gaussiana, que vamos começar por supor caracterizada através de um processo vectorial estacionário de valor médio nulo  $\underline{p}^q(t)$ , sendo o equilíbrio dinâmico respectivo traduzido na sua forma mais geral pela equação

$$\underline{g}(\underline{\ddot{q}}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}, t) = \underline{p}^q(t) \quad (2.83)$$

o que corresponde a admitir também a possibilidade de ocorrência de termos não-lineares função do vector de acelerações  $\underline{\ddot{q}}(t)$ , embora tal não se verifique

normalmente nos problemas de Dinâmica Estrutural, onde as não-linearidades incidem geralmente sobre as matrizes de amortecimento ou de rigidez, ou seja apenas sobre os termos função dos vectores de velocidades  $\dot{\underline{q}}(t)$  e de deslocamentos  $\underline{q}(t)$ .

Suponha-se também que o vector  $\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}, t)$  é ímpar em  $\ddot{\underline{q}}$ ,  $\dot{\underline{q}}$  e  $\underline{q}$ , situação em que se verifica a igualdade

$$\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) = -\underline{g}(-\ddot{\underline{q}}, -\dot{\underline{q}}, -\underline{q}, t) \quad (2.84)$$

designando-se as não-linearidades por simétricas [148], e assumindo então a média da resposta  $E[\underline{q}(t)]$  valor nulo por razões de simetria.

O objectivo do método de linearização estocástica equivalente consiste neste caso em aproximar a solução do sistema de equações diferenciais não-lineares (2.83) através da solução do seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\underline{M}_e \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}_e \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}_e \underline{q}(t) = \underline{p}^q(t) \quad (2.85)$$

tradutor do equilíbrio dinâmico de um sistema linear equivalente, caracterizado pelas matrizes de massa  $\underline{M}_e$ , de amortecimento  $\underline{C}_e$  e de rigidez  $\underline{K}_e$ , quando sujeito à mesma excitação actuante.

A definição daquelas matrizes é naturalmente função da grandeza vectorial  $\underline{\epsilon}(t)$  correspondente à diferença entre os primeiros membros dos sistemas de equações (2.83) e (2.85), ou seja

$$\underline{\epsilon}(t) = \underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) - \underline{M}_e \ddot{\underline{q}}(t) - \underline{C}_e \dot{\underline{q}}(t) - \underline{K}_e \underline{q}(t) \quad (2.86)$$

tornando-se necessário, para este efeito, minimizar alguma grandeza com ela relacionada. Embora não exista um critério único de minimização para fixação dos parâmetros do sistema linear equivalente (Patula e Iwan [120]), o procedimento geralmente considerado como mais adequado, no caso de excitações de carácter aleatório, consiste em procurar minimizar o valor médio expectável do quadrado da norma euclidiana do vector  $\underline{\epsilon}(t)$ , ou seja

$$\text{minimizar } E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}] \quad (2.87)$$

Em virtude das propriedades do operador  $E[\ ]$  esta condição de minimização pode também expressar-se sob a forma

$$\text{minimizar } \sum_{i=1}^N E[\epsilon_i^2] \quad (2.88)$$

representando  $\epsilon_i$  a componente de ordem  $i$  do vector  $\underline{\epsilon}$  definida por (v. eq. 2.86)

$$\epsilon_i(t) = g_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}, t) - \sum_{j=1}^N m_{ij}^e \ddot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^N c_{ij}^e \dot{q}_j(t) - \sum_{j=1}^N k_{ij}^e q_j(t) \quad (2.89)$$

em que  $g_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}, t)$  representa a  $i$ -ésima componente do vector  $\underline{g}$ , e  $m_{ij}^e$ ,  $c_{ij}^e$  e  $k_{ij}^e$ , constituem os elementos da linha  $i$ e da coluna  $j$  das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  respectivamente.

Como a condição (2.88) exprime a procura de minimização de um somatório de  $N$  parcelas não-negativas, o critério usado equivale também à minimização de cada uma das parcelas, ou seja corresponde a

$$\text{minimizar } E[\epsilon_i^2] \quad (2.90)$$

o que exige a satisfação das seguintes condições necessárias

$$\frac{\partial}{\partial m_{ij}^e} E[\epsilon_i^2] = 2E\left[\epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial m_{ij}^e}\right] = 0 \quad (2.91)$$

$$\frac{\partial}{\partial c_{ij}^e} E[\epsilon_i^2] = 2E\left[\epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial c_{ij}^e}\right] = 0 \quad (2.92)$$

$$\frac{\partial}{\partial k_{ij}^e} E[\epsilon_i^2] = 2E\left[\epsilon_i \frac{\partial \epsilon_i}{\partial k_{ij}^e}\right] = 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots, N) \quad (2.93)$$

Substituindo nestas equações a expressão de  $\epsilon_i$  dada por (2.89), resulta que

$$\sum_{l=1}^N m_{il}^e E[\ddot{q}_l \ddot{q}_j] + \sum_{l=1}^N c_{il}^e E[\dot{q}_l \dot{q}_j] + \sum_{l=1}^N k_{il}^e E[q_l q_j] = E[\ddot{q}_j g_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q})] \quad (2.94)$$

$$\sum_{l=1}^N m_{il}^e E[\ddot{q}_l \dot{q}_j] + \sum_{l=1}^N c_{il}^e E[\dot{q}_l \dot{q}_j] + \sum_{l=1}^N k_{il}^e E[q_l \dot{q}_j] = E[\dot{q}_j g_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q})] \quad (2.95)$$

$$\sum_{l=1}^N m_{il}^e E[\ddot{q}_l q_j] + \sum_{l=1}^N c_{il}^e E[\dot{q}_l q_j] + \sum_{l=1}^N k_{il}^e E[q_l q_j] = E[q_j g_i(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q})] \quad (2.96)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N)$$

o que equivale às seguintes relações matriciais

$$\underline{M}_e E[\underline{\ddot{q}} \underline{\ddot{q}}^T] + \underline{C}_e E[\underline{\dot{q}} \underline{\dot{q}}^T] + \underline{K}_e E[\underline{q} \underline{q}^T] = E[\underline{g}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}) \underline{\ddot{q}}^T] \quad (2.97)$$

$$\underline{M}_e E[\underline{\ddot{q}} \underline{\dot{q}}^T] + \underline{C}_e E[\underline{\dot{q}} \underline{\dot{q}}^T] + \underline{K}_e E[\underline{q} \underline{\dot{q}}^T] = E[\underline{g}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}) \underline{\dot{q}}^T] \quad (2.98)$$

$$\underline{M}_e E[\underline{\ddot{q}} \underline{q}^T] + \underline{C}_e E[\underline{\dot{q}} \underline{q}^T] + \underline{K}_e E[\underline{q} \underline{q}^T] = E[\underline{g}(\underline{q}, \underline{\dot{q}}, \underline{q}) \underline{q}^T] \quad (2.99)$$

Estas 3N equações, que traduzem as condições necessárias para a satisfação da condição de minimização (2.87), podem ainda expressar-se de forma mais condensada se se introduzir o vector  $\underline{z}$  tal que

$$\underline{z}^T = [\underline{q}^T, \underline{\dot{q}}^T, \underline{\ddot{q}}^T] \quad (2.100)$$

dando então lugar à relação matricial

$$E[\underline{z}\underline{z}^T] \begin{pmatrix} \underline{K}_e^T \\ \underline{C}_e^T \\ \underline{M}_e^T \end{pmatrix} = E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})] \quad (2.101)$$

No entanto, a satisfação destas equações por parte das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  não garante necessariamente a minimização de  $E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}]$  ou, o que é equivalente, de  $E[\epsilon_i^2]$ , porquanto as condições (2.91) a (2.93), que lhes deram origem, constituem condições necessárias mas não suficientes para a ocorrência de um mínimo.

Importa por isso comparar o valor de  $E[\epsilon_i^2]$  relativo a  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  com o valor correspondente  $E[\epsilon_{i^*}^2]$  associado a um outro qualquer terno de matrizes  $\underline{M}_e^*$ ,  $\underline{C}_e^*$  e  $\underline{K}_e^*$ , verificando-se as relações

$$\begin{aligned} m_{ij}^{e*} &= m_{ij}^e + \Delta m_{ij}^e \\ c_{ij}^{e*} &= c_{ij}^e + \Delta c_{ij}^e \\ k_{ij}^{e*} &= k_{ij}^e + \Delta k_{ij}^e \end{aligned} \quad (2.102)$$

Utilizando, para esse efeito, um desenvolvimento em série de Taylor de  $E[\epsilon_{i^*}^2]$  em torno de  $m_{ij}^e$ ,  $c_{ij}^e$  e  $k_{ij}^e$ , e tendo em consideração que, sendo  $E[\epsilon_i^2]$  uma função polinomial quadrática daqueles parâmetros (v. eq. 2.89), são nulas todas as derivadas parciais de  $E[\epsilon_i^2]$  de ordem superior à segunda,  $E[\epsilon_{i^*}^2]$  pode exprimir-se através da equação

$$\begin{aligned} E[\epsilon_{i^*}^2] &= E[\epsilon_i^2] + \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{\partial E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ij}^e} \Delta m_{ij}^e + \frac{\partial E[\epsilon_i^2]}{\partial c_{ij}^e} \Delta c_{ij}^e + \frac{\partial E[\epsilon_i^2]}{\partial k_{ij}^e} \Delta k_{ij}^e \right\} + \\ &+ \frac{1}{2!} \sum_{k, l=1}^N \left\{ \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ik}^e \partial m_{il}^e} \Delta m_{ik}^e \Delta m_{il}^e + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial c_{ik}^e \partial c_{il}^e} \Delta c_{ik}^e \Delta c_{il}^e + \right. \\ &+ \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial k_{ik}^e \partial k_{il}^e} \Delta k_{ik}^e \Delta k_{il}^e + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ik}^e \partial c_{il}^e} \Delta m_{ik}^e \Delta c_{il}^e + \\ &\left. + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial m_{ik}^e \partial k_{il}^e} \Delta m_{ik}^e \Delta k_{il}^e + \frac{\partial^2 E[\epsilon_i^2]}{\partial c_{ik}^e \partial k_{il}^e} \Delta c_{ik}^e \Delta k_{il}^e \right\} \end{aligned} \quad (2.103)$$

Esta equação pode ser substancialmente simplificada se, por um lado, se tiverem presentes as condições (2.91) a (2.93), que obrigam ao anulamento das parcelas relativas ao somatório em  $j$ , e se, por outro, se proceder ao cálculo das derivadas parciais de segunda ordem cruzadas intervenientes nesta equação, tendo por base a equação (2.89), resultando [134]

$$E[\epsilon_{i^*}^2] = E[\epsilon_i^2] + \frac{1}{2} E \left\{ \left[ \sum_{j=1}^N (\ddot{q}_j \Delta m_{ij}^e + \dot{q}_j \Delta c_{ij}^e + q_j \Delta k_{ij}^e) \right]^2 \right\} \quad (2.104)$$

Desta forma, chega-se à importante conclusão de que

$$E[\epsilon_{i^*}^2] \geq E[\epsilon_i^2] \quad (2.105)$$

o que significa que, se existir um sistema linear caracterizado por matrizes de massa  $\underline{M}_e$ , de amortecimento  $\underline{C}_e$  e de rigidez  $\underline{K}_e$ , satisfazendo a equação (2.101), o valor correspondente de  $E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}]$  nunca é maior que o relativo a qualquer outro terno de matrizes  $\underline{M}_e^*$ ,  $\underline{C}_e^*$  e  $\underline{K}_e^*$ . Por outro lado, como a igualdade em (2.105) exige o anulamento do somatório em  $j$  representado na equação (2.104), ou seja que

$$\sum_{j=1}^N (\ddot{q}_j \Delta m_{ij}^e + \dot{q}_j \Delta c_{ij}^e + q_j \Delta k_{ij}^e) = 0 \quad (2.106)$$

o que equivale a dizer que as componentes do vector  $\underline{z}^T = [\underline{q}^T, \underline{\dot{q}}^T, \underline{\ddot{q}}^T]$  são linearmente dependentes em qualquer instante do tempo  $t$ , conclui-se também que, se essas componentes forem linearmente independentes, o valor de  $E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}]$  correspondente às matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  constitui efectivamente um mínimo absoluto.

A independência linear entre as diversas componentes do vector  $\underline{z}^T = [\underline{q}^T, \underline{\dot{q}}^T, \underline{\ddot{q}}^T]$  é aliás também essencial para garantir a existência e unicidade do sistema linear equivalente. Com efeito, para que a equação (2.101) possa ser resolvida em ordem a  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , obtendo-se garantidamente uma solução única, é necessário que a matriz das funções de inter-correlação instantânea da resposta  $E[\underline{z} \underline{z}^T]$  seja invertível, e portanto não singular. Ora de acordo com a Teoria das Probabilidades [106], a matriz  $E[\underline{z} \underline{z}^T]$  é singular se e só se a probabilidade de pelo menos uma das componentes de  $\underline{z}$  se poder exprimir como uma combinação linear determinística das restantes for igual a um. Essa singularidade significaria aliás, em termos físicos, que o verdadeiro número de graus de liberdade do sistema seria inferior a  $N$ , sendo pois sempre possível eliminar todas as equações de equilíbrio redundantes, por forma a garantir a não singularidade da matriz  $E[\underline{z} \underline{z}^T]$  e a correspondente existência e unicidade do sistema linear equivalente.



Desta forma, a equação (2.101) possibilita sempre a determinação das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  caracterizadoras do sistema linear equivalente, verificando-se apenas uma dificuldade adicional decorrente de aquelas matrizes surgirem definidas em função da própria estatística da resposta desse sistema.

No entanto, o problema pode ser ultrapassado mediante o recurso a um procedimento iterativo, em que as matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  começam por ser arbitradas, caracterizando-se posteriormente a estrutura probabilística da resposta do sistema linear correspondente, a partir da qual podem ser conhecidos os valores médios  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$  e  $E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})]$  constantes da equação (2.101). Resolvendo esta equação em ordem a  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , obtêm-se as versões corrigidas daquelas matrizes a utilizar numa nova iteração, prosseguindo-se este procedimento até se atingir a desejada convergência.

### 2.5.3 - A hipótese da natureza gaussiana da resposta e as condições de Atalik-Utku

O cálculo dos valores médios  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$  e  $E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})]$  intervenientes na equação (2.101), deveria em princípio efectuar-se tomando por base a verdadeira distribuição de probabilidade da resposta do sistema não-linear, a qual pode assumir um carácter não-gaussiano, mesmo que a excitação actuante obedeça a uma distribuição normal.

Não sendo obviamente possível obter essa distribuição, o método de linearização estocástica equivalente introduz uma aproximação que consiste em passar a admitir que ela coincide com a distribuição de probabilidade correspondente à resposta do sistema linear equivalente.

Desta forma, e uma vez que a resposta de um sistema linear a uma excitação gaussiana é igualmente caracterizada por uma distribuição normal, este método pressupõe também a natureza gaussiana do processo de resposta, hipótese que, podendo não corresponder à verdade, constitui o principal aspecto restritivo desta abordagem aproximada, não possibilitando, em especial, avaliar as repercussões das não-linearidades sobre as caudas da distribuição de probabilidade correspondente à resposta do sistema não-linear, e impedindo, por este facto, uma caracterização inteiramente correcta da probabilidade de sobrevivência ou de não-excedência de barreiras pré-definidas.

Tomando, porém, como boa tal aproximação, que é aliás essencial ao desenvolvimento do método de linearização estocástica equivalente, torna-se possível transformar a equação (2.101), obtendo uma forma mais simples e eficiente de caracterização dos elementos das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ .

Com efeito, pode demonstrar-se [11] que, sendo  $g(\underline{x})$  uma função real do processo estocástico vectorial gaussiano  $\underline{x}(t)$ , dispondo de derivadas parciais em ordem a cada coordenada  $x_i(t)$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ), e tal que se verifique a relação

$$|g(\underline{x})| < \beta \exp\left\{\sum_{i=1}^N x_i^\alpha\right\} \quad (2.107)$$

com  $\alpha < 2$ , para algum valor de  $\beta$  e  $\underline{x}$  qualquer, então

$$E[\underline{x}g(\underline{x})] = E[\underline{x}\underline{x}^T] E[\underline{\nabla}g(\underline{x})] \quad (2.108)$$

em que  $\underline{\nabla}$  é o operador

$$\underline{\nabla} = \left[ \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_N} \right]^T \quad (2.109)$$

Assim, lançando mão desta propriedade dos processos estocásticos gaussianos vectoriais e pressupondo que as funções  $g_i(\underline{z})$ , tradutoras das não-linearidades do sistema em análise, respeitam as condições de aplicabilidade dessa propriedade antes enunciadas, o que genericamente sucede, pode escrever-se que

$$E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})] = E[\underline{z}\underline{z}^T] E\{J_z^T[g(\underline{z})]\} \quad (2.110)$$

em que  $J_z[g(\underline{z})]$  é a matriz Jacobiana de  $\underline{g}(\underline{z})$ , pelo que, substituindo (2.110) em (2.101), se obtém

$$E[\underline{z}\underline{z}^T] \begin{Bmatrix} \underline{K}_e^T \\ \underline{C}_e^T \\ \underline{M}_e^T \end{Bmatrix} = E[\underline{z}\underline{z}^T] E\{J_z^T[g(\underline{z})]\} \quad (2.111)$$

Admitindo-se que a matriz  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$  é não singular, por razões já antes apontadas, esta equação apresenta pois a seguinte solução única

$$\begin{Bmatrix} \underline{K}_e^T \\ \underline{C}_e^T \\ \underline{M}_e^T \end{Bmatrix} = E\{J_z^T[g(\underline{z})]\} \quad (2.112)$$

Referindo-nos directamente às componentes  $\underline{\ddot{q}}$ ,  $\underline{\dot{q}}$  e  $\underline{q}$  do vector  $\underline{z}$  esta equação pode escrever-se também sob a forma

$$\begin{pmatrix} \underline{M}_e \\ \underline{C}_e \\ \underline{K}_e \end{pmatrix} = E \begin{pmatrix} J_{\ddot{q}}[g(\ddot{q}, \dot{q}, q)] \\ J_{\dot{q}}[g(\ddot{q}, \dot{q}, q)] \\ J_q[g(\ddot{q}, \dot{q}, q)] \end{pmatrix} \quad (2.113)$$

extraindo-se dela a conclusão de que os elementos das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  obedecem às seguintes condições

$$m_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial g_i(\ddot{q}, \dot{q}, q)}{\partial \ddot{q}_j} \right] \quad (2.114)$$

$$c_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial g_i(\ddot{q}, \dot{q}, q)}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad (2.115)$$

$$k_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial g_i(\ddot{q}, \dot{q}, q)}{\partial q_j} \right] \quad (2.116)$$

Estas equações, devidas a Atalik e Utku [11], substituem pois com vantagem a equação (2.101), desde que satisfeitas as condições consideradas na sua dedução, definindo de forma explícita os coeficientes das matrizes do sistema linear equivalente, o que possibilita mesmo, em muitos casos de menor complexidade, uma solução analítica directa do problema sem recurso a técnicas iterativas.

Estas equações permitem ainda constatar que as matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  são simétricas nos casos em que as não-linearidades estiverem associadas a potenciais  $W(\ddot{q})$ ,  $V(\dot{q})$  e  $U(q)$ , de tal forma que as equações de equilíbrio se possam exprimir sob a forma

$$g_i(\ddot{q}, \dot{q}, q) = \frac{\partial W(\ddot{q})}{\partial \ddot{q}_i} + \frac{\partial V(\dot{q})}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial U(q)}{\partial q_i} \quad (2.117)$$

#### 2.5.4 - Alguns aspectos práticos sobre a utilização do método de linearização equivalente

A formulação do método de linearização estocástica equivalente, tal como foi descrita nas duas secções anteriores, possibilita o fácil desenvolvimento de rotinas de cálculo simples e eficientes, destinadas à caracterização estatística aproximada da resposta de um sistema não-linear de múltiplos graus de liberdade, com não-linearidades simétricas, a uma excitação aleatória traduzida por um processo estocástico vectorial gaussiano estacionário de valor médio expectável nulo.

Com efeito, quer a equação (2.101), quer as condições de Atalik-Utku, expressas pelas equações (2.114) a (2.116), permitem definir os elementos das matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema linear equivalente em função das respectivas características estatísticas da resposta, abrindo duas vias possíveis para a resolução prática do problema.

A via mais geral, que possibilita o fácil desenvolvimento de uma rotina de cálculo, mesmo no caso de sistemas de maior complexidade, consiste no recurso a uma técnica iterativa, em que se começam por arbitrar os valores iniciais dos elementos das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , determinando em seguida a matriz de covariância da resposta do sistema linear equivalente  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ . Uma vez conhecida esta matriz, podem calcular-se os valores corrigidos de  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  a utilizar na iteração seguinte, quer recorrendo à equação (2.101), o que envolve o cálculo do valor médio  $E[\underline{z}\underline{g}^T(\underline{z})]$  e a inversão da matriz  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ , quer, o que é substancialmente mais simples, utilizando as condições de Atalik-Utku, (2.114) a (2.116), que fornecem directamente os elementos  $m_{ij}^e$ ,  $c_{ij}^e$  e  $k_{ij}^e$ , a partir do cálculo dos valores médios expectáveis das derivadas parciais de  $g_i(\underline{\ddot{q}}, \underline{\dot{q}}, \underline{q})$  em ordem a  $\underline{\ddot{q}}$ ,  $\underline{\dot{q}}$  e  $\underline{q}$ , respectivamente. Estes valores médios podem ser facilmente quantificados com base nas propriedades dos processos gaussianos, devendo este procedimento ser repetido sucessivamente até que seja alcançada a necessária convergência.

Em certos casos de menor complexidade, pode no entanto seguir-se uma outra via que, tomando por base as condições de Atalik-Utku, possibilita mesmo uma resolução analítica directa sem recurso a quaisquer técnicas iterativas. Com efeito, sendo cada  $g_i$  função não-linear de  $\underline{\ddot{q}}$ ,  $\underline{\dot{q}}$  e  $\underline{q}$ , os valores médios das derivadas parciais indicados nas equações (2.114) a (2.116) constituem momentos estatísticos conjuntos de ordem normalmente superior à segunda, envolvendo as diversas componentes do vector  $\underline{z}^T = [\underline{q}^T, \underline{\dot{q}}^T, \underline{\ddot{q}}^T]$

Todavia, todos os momentos de ordem superior podem ser expressos em função dos momentos de segunda ordem, através da aplicação repetida da propriedade a que se refere a equação (2.108).

Por conseguinte, encontrando-se todos os parâmetros caracterizadores do sistema linear equivalente expressos em função da matriz de covariância da resposta respectiva, a resolução deste sistema linear, através de um dos métodos conhecidos para o efeito, conduz directamente ao conhecimento da matriz  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$ .

Ressalta pois claro, da descrição sumária destas duas vias possíveis de resolução do problema, que a forma utilizada por Atalik e Utku para traduzir as condições necessárias para a minimização do valor médio  $E[\underline{\epsilon}^T \underline{\epsilon}]$  veio introduzir no método de

linearização estocástica equivalente uma considerável simplicidade em termos de utilização corrente, aumentando significativamente a eficiência das rotinas de cálculo em relação a versões anteriores do método apresentadas por Caughey [40], Foster [70] e Yang [167].

Independentemente da opção tomada quanto à utilização de uma técnica iterativa ou de resolução directa, o método de linearização equivalente envolve sempre a resolução de um sistema linear, o que pode naturalmente fazer-se recorrendo a qualquer dos métodos referidos em [59].

Apesar disso porém, há sempre vantagem em atender a alguns aspectos particulares, no sentido de escolher a formulação mais adequada à resolução do sistema linear, em especial quando se recorre a técnicas iterativas que envolvem a repetição sucessiva de cálculos daquele tipo.

De uma forma geral, pode dizer-se que a escolha do método depende em larga medida das características da excitação actuante. Assim, sendo a excitação idealizável através de um ruído branco, a utilização de uma formulação de estado, envolvendo uma abordagem no domínio do tempo, revela-se frequentemente vantajosa para estruturas de dimensão média, podendo no entanto deixar de o ser no caso de excitações coloridas, particularmente aquelas que envolvem a introdução de pré-filtros de ordem relativamente elevada, já que estes levam a um aumento significativo da dimensão do problema, tornando-se então preferível seguir uma formulação baseada nas relações estocásticas excitação-resposta no domínio da frequência.

### 2.5.5 - Consideração de não-linearidades não-simétricas ou de excitações estacionárias de média não-nula

O método de linearização estocástica equivalente, tal como foi exposto até aqui, pressupõe que as não-linearidades do sistema, traduzidas pelo vector  $\underline{g}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$ , são simétricas, facto que leva a que o valor médio expectável da resposta  $E[\underline{q}(t)]$  seja nulo.

Embora se constate que essa hipótese corresponde efectivamente à maior parte das não-linearidades de interesse prático, há no entanto todo o interesse em identificar as modificações a ter em conta nos casos em que a função  $\underline{g}(\ddot{q}, \dot{q}, q)$  não é ímpar em  $\ddot{q}$ ,  $\dot{q}$  e  $q$ .

Nessa situação, o valor médio da resposta  $E[\underline{q}(t)]$  deixa de ser nulo, mesmo que o processo de excitação tenha média nula, o que aliás sucede também, quando o valor

médio da excitação  $E[\underline{p}^q(t)]$  toma valor diferente de zero, qualquer que seja o tipo de não-linearidade.

Por conseguinte, os processos vectoriais estacionários de excitação e de resposta podem considerar-se de uma forma geral expressos pelas relações

$$\underline{p}^q(t) = \underline{p}_o^q(t) + \underline{m}_{p^q} \quad (2.118)$$

$$\underline{q}(t) = \underline{q}_o(t) + \underline{m}_q \quad (2.119)$$

em que  $\underline{p}_o^q(t)$  e  $\underline{q}_o(t)$  são os correspondentes processos de média nula, e  $\underline{m}_{p^q}$  e  $\underline{m}_q$  são os respectivos vectores de valores médios.

Substituindo estas duas relações na equação de equilíbrio dinâmico do sistema não-linear

$$\underline{g}(\ddot{\underline{q}}, \dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) = \underline{p}^q(t) \quad (2.120)$$

e aplicando o operador  $E[\ ]$  a ambos os membros, resulta que

$$E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o + \underline{m}_q)] = \underline{m}_{p^q} \quad (2.121)$$

Subtraindo membro a membro estas equações, obtém-se por seu lado

$$\underline{h}(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, \underline{m}_q, t) = \underline{p}_o^q(t) \quad (2.122)$$

em que

$$\underline{h}(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, \underline{m}_q, t) = \underline{g}(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o + \underline{m}_q, t) - E[\underline{g}(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o + \underline{m}_q)] \quad (2.123)$$

Desta forma, pode continuar a utilizar-se o método de linearização estocástica equivalente, aproximando a equação (2.122) pela equação

$$\underline{M}_e \ddot{\underline{q}}_o(t) + \underline{C}_e \dot{\underline{q}}_o(t) + \underline{K}_e \underline{q}_o(t) = \underline{p}_o^q(t) \quad (2.124)$$

correspondente ao equilíbrio dinâmico de um sistema linear equivalente sujeito a uma excitação traduzida pelo processo de média nula  $\underline{p}_o^q(t)$ , desde que simultaneamente se tenha em consideração a equação (2.121).

O estabelecimento de uma rotina de cálculo iterativa pode assim continuar a ter lugar, começando por arbitrar os valores iniciais, não só das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , mas também do vector  $\underline{m}_q$ . Dessa forma, resolvendo o problema linear a que se refere a equação (2.124), pode chegar-se ao conhecimento da matriz de covariância da resposta expressa em termos do processo vectorial  $\underline{z}_o^T = [\underline{q}_o^T, \dot{\underline{q}}_o^T, \ddot{\underline{q}}_o^T]$ , naturalmente coincidente

com a matriz de covariância relativa a  $\underline{z}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, \ddot{\underline{q}}^T]$  o que possibilita não só calcular os valores corrigidos dos elementos das matrizes  $\underline{M}_e$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  do sistema linear equivalente a partir das condições de Atalik-Utku, ou seja

$$m_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial h(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, \underline{m}_q)}{\partial \ddot{q}_{ij}^o} \right] \quad (2.125)$$

$$c_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial h(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, \underline{m}_q)}{\partial \dot{q}_{ij}^o} \right] \quad (2.126)$$

$$k_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial h(\ddot{\underline{q}}_o, \dot{\underline{q}}_o, \underline{q}_o, \underline{m}_q)}{\partial q_{ij}^o} \right] \quad (2.127)$$

mas também estabelecer N equações algébricas com base na equação (2.121), que possibilitam quantificar os valores corrigidos dos elementos de  $\underline{m}_q$  a utilizar numa iteração seguinte.

### 2.5.6 - Extensão do método à análise da resposta a excitações não-estacionárias moduláveis

O método de linearização estocástica equivalente, para além de se revelar uma formulação simples e eficiente, utilizável para a análise da resposta estacionária de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade, apresenta ainda a grande vantagem de ser facilmente extensível ao tratamento de excitações não-estacionárias.

A extensão do método à análise da resposta a excitações deste tipo é relativamente recente, tendo sido objecto de diversas contribuições por parte de vários investigadores [2, 106, 136].

A principal dificuldade nessa generalização advém do facto de as características do sistema linear equivalente serem, como se sabe, função da distribuição probabilística da resposta, o que leva a que, tendo esta carácter não-estacionário, as matrizes de massa, de amortecimento e de rigidez do sistema linear equivalente deixem de ser constantes no tempo.

Considere-se então um sistema não-linear de N-GL, sujeito a uma excitação aleatória idealizada através do processo estocástico vectorial não-estacionário  $\underline{p}_*^q(t)$ . Supondo que as não-linearidades se verificam exclusivamente nos termos que são função de velocidades ou de deslocamentos e não de acelerações, como aliás costuma suceder nos problemas de Dinâmica Estrutural e de Engenharia Sísmica, a equação de equilíbrio dinâmico correspondente toma a forma

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) = \underline{p}_*^q(t) \quad (2.128)$$

ou, em termos de variáveis de estado, com  $\underline{y}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T]$

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{a}(\underline{y}, t) + \underline{x}(t) \quad (2.129)$$

com

$$\underline{a}(\underline{y}, t) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\underline{q}}(t) \\ -\underline{M}^{-1}\underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) \end{array} \right\} \quad \underline{x}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{p}_*^q(t) \end{array} \right\} \quad (2.130)$$

Começando por supor também, por simplicidade, que as não-linearidades têm natureza simétrica e que a excitação tem valor médio nulo, a solução daquele sistema de equações diferenciais não-lineares pode ser aproximada através da solução do seguinte sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}_e(t)\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}_e(t)\underline{q}(t) = \underline{p}_*^q(t) \quad (2.131)$$

tradutor do equilíbrio dinâmico de um sistema linear equivalente, cujas matrizes de amortecimento e de rigidez são função do tempo.

Introduzindo o vector de estado  $\underline{y}(t)$ , este sistema pode também ser transformado num outro de  $2N$  equações diferenciais de primeira ordem, obedecendo à relação matricial

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e(t)\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (2.132)$$

em que

$$\underline{A}_e(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K}_e(t) & -\underline{M}^{-1}\underline{C}_e(t) \end{bmatrix} \quad (2.133)$$

À semelhança do sucedido na análise da resposta estacionária, a definição das matrizes  $\underline{C}_e(t)$  e  $\underline{K}_e(t)$  decorre da minimização de alguma grandeza relacionada com a norma euclidiana do vector  $\underline{\epsilon}(t)$  correspondente à diferença dos primeiros membros das equações (2.131) e (2.128), ou seja

$$\underline{\epsilon}(t) = \underline{g}(\dot{\underline{q}}, \underline{q}, t) - \underline{C}_e(t)\dot{\underline{q}}(t) - \underline{K}_e(t)\underline{q}(t) \quad (2.134)$$

Utilizando como critério para a determinação dos valores instantâneos dos elementos das matrizes de amortecimento e de rigidez, a minimização do valor médio expectável do quadrado da norma euclidiana do vector  $\underline{\epsilon}(t)$ , ou seja

$$\text{minimizar } E[\underline{\epsilon}(t)^T \underline{\epsilon}(t)] \quad (2.135)$$



pode facilmente concluir-se, seguindo um raciocínio semelhante ao utilizado em 2.5.2, que as condições necessárias para a satisfação da condição de mínimo podem ser expressas pela relação matricial

$$E[\underline{y}(t)\underline{y}(t)^T] \begin{Bmatrix} \underline{K}_e(t)^T \\ \underline{C}_e(t)^T \end{Bmatrix} = E[\underline{y}(t)\underline{g}(y,t)^T] \quad (2.136)$$

Por outro lado, admitindo novamente o carácter gaussiano da resposta, as condições de Atalik-Utku podem ser facilmente generalizadas ao caso da resposta não-estacionária, obtendo-se que

$$c_{ij}^e(t) = E \left[ \frac{\partial g_i(\underline{q}, \underline{q}, t)}{\partial \dot{q}_j} \right] \quad k_{ij}^e(t) = E \left[ \frac{\partial g_i(\underline{q}, \underline{q}, t)}{\partial q_j} \right] \quad (2.137, 138)$$

ou, o que é equivalente

$$\alpha_{ij}^e(t) = E \left[ \frac{\partial a_i(\underline{y}, t)}{\partial y_j} \right] \quad (2.139)$$

sendo  $\alpha_{ij}^e(t)$  o elemento da linha  $i$  e da coluna  $j$  da matriz  $\underline{A}_e(t)$ , e  $a_i(\underline{y}, t)$  a  $i$ -ésima componente do vector  $\underline{a}(\underline{y}, t)$

Por conseguinte, a análise estocástica da resposta não-estacionária do sistema não-linear pode continuar a realizar-se de forma aproximada através do método de linearização equivalente, utilizando ao longo de sucessivos instantes de tempo uma técnica iterativa semelhante à já anteriormente descrita para a análise da resposta estacionária.

A única diferença reside no facto de as matrizes de amortecimento e de rigidez do sistema linear equivalente não serem invariantes no tempo, facto que aliás exige a introdução de algumas modificações em relação à formulação de estado aplicada ao tratamento de sistemas lineares [59].

Com efeito, sendo a matriz  $\underline{A}_e$  função do tempo, a solução de um sistema de equações diferenciais determinísticas com a forma da equação (2.132), passa a ser [5]

$$\underline{y}(t) = \underline{Y}(t)\underline{y}(0) + \underline{Y}(t) \int_0^t \underline{Y}^{-1}(\tau) \underline{x}(\tau) d\tau \quad (2.140)$$

em que a matriz  $\underline{Y}(t)$  é a solução da equação homogénea

$$\dot{\underline{Y}} = \underline{A}_e(t)\underline{Y} \quad (2.141)$$

com a condição inicial

$$\underline{Y}(0) = \underline{I} \quad (2.142)$$

sendo

$$\underline{Y}(t) = \exp \left\{ \int_0^t \underline{A}_e(u) du \right\} \quad (2.143)$$

Por outro lado, a evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta é definida, de acordo com [59], pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + E[\underline{x}(t)\underline{y}(t)^T] + E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] \quad (2.144)$$

podendo, então, as terceira e quarta parcelas do segundo membro exprimir-se exclusivamente em função das características da excitação actuante e do sistema linear com base na equação (2.140).

Assim, multiplicando ambos os membros desta equação por  $\underline{x}(t)^T$  e aplicando o operador  $E[ \ ]$  obtém-se que

$$E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] = \underline{Y}(t)E[\underline{y}(0)\underline{x}(t)^T] + \underline{Y}(t) \int_0^t \underline{Y}^{-1}(\tau)E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T]d\tau \quad (2.145)$$

concluindo-se pois que, se as condições iniciais não estiverem correlacionadas com a excitação actuante

$$E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] = \underline{Y}(t) \int_0^t \underline{Y}^{-1}(\tau)E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T]d\tau \quad (2.146)$$

sendo

$$E[\underline{x}(t)\underline{y}(t)^T] = \{E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T]\}^T \quad (2.147)$$

Um caso particular de especial interesse é aquele em que a excitação é tal que

$$\underline{p}^q(t) = \underline{\theta}(t)\underline{p}^q(t) \quad (2.148)$$

sendo  $\underline{\theta}(t)$  uma matriz de funções de modulação determinísticas e  $\underline{p}^q(t)$  um processo estocástico vectorial estacionário, verificando-se então, tendo em conta (2.130), que

$$E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T] = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(\tau)\underline{R}_{p^q}(t-\tau)\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1T} \end{bmatrix} \quad (2.149)$$

sendo  $\underline{R}_{p^q}(t-\tau) = E[\underline{p}^q(t)\underline{p}^q(\tau)^T]$ .

Se, para além disso, o processo  $\underline{p}^q(t)$  for do tipo ruído branco, caracterizado por uma matriz de densidades espectrais constantes  $\underline{S}_o^{p^q}$ , tal que

$$\underline{R}_{p^q}(t-\tau) = 2\pi \underline{S}_o^{p^q} \delta(t-\tau) \quad (2.150)$$

a equação (2.149) dá lugar a

$$E[\underline{x}(\tau)\underline{x}(t)^T] = 2\pi\delta(t-\tau) \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(\tau)\underline{S}_o^{p^q}\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1T} \end{bmatrix} \quad (2.151)$$

Assim, substituindo (2.151) em (2.146), e atendendo às propriedades da função impulso, obtém-se que

$$E[\underline{y}(t)\underline{x}(t)^T] = \pi \underline{S}_o(t) \quad (2.152)$$

sendo

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1}\underline{\theta}(t)\underline{S}_o^{p^q}\underline{\theta}(t)^T\underline{M}^{-1T} \end{bmatrix} \quad (2.153)$$

o que permite concluir que a evolução temporal da matriz de covariância instantânea  $\underline{\mu}_y(t)$  é regulada pela equação (v. eq. 2.144)

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi \underline{S}_o(t) \quad (2.154)$$

Nestas condições, a análise da resposta não-estacionária de um sistema não-linear a uma excitação de tipo ruído branco modulado pode continuar a fazer-se desenvolvendo uma rotina de cálculo iterativa, cujas diferenças essenciais em relação ao procedimento utilizado no caso de excitações estacionárias consistem, por um lado, em os parâmetros do sistema linear terem de ser recalculados ao longo de sucessivos instantes, e, por outro, a determinação da matriz de covariância instantânea da resposta do sistema linear resultar da resolução do sistema de equações diferenciais de primeira ordem a que se refere a equação (2.154) e não da resolução de uma equação algébrica de Liapunov.

Esta técnica pode inclusivamente ser estendida ao caso de excitações coloridas moduladas mediante o recurso a filtros, à semelhança do que foi já anteriormente referido para os sistemas lineares. O único inconveniente desta via pode consistir num grande aumento da dimensão do vector de estado  $\underline{y}(t)$ , em resultado da consideração das equações de equilíbrio do conjunto sistema-filtro. Uma técnica alternativa introduzida por Sakata e Kimura [136] consiste em calcular as terceira e quarta parcelas do segundo membro da equação (2.144) através de um algoritmo recursivo.

É de realçar ainda que, embora a formulação desenvolvida neste ponto tenha pressuposto a existência de uma excitação de média nula e de não-linearidades simétricas, ela é muito facilmente generalizável aos casos de excitações de média não-nula e/ou de não-linearidades não-simétricas, havendo apenas que proceder então à introdução de modificações em tudo semelhantes às referidas em 2.5.5. Um outro procedimento pode, no entanto, também ser seguido. Com efeito, podendo o processo de resposta decompor-se em cada instante em duas componentes, de acordo com a relação

$$\underline{y}(t) = \underline{m}_y(t) + \underline{y}_o(t) \quad (2.155)$$

sendo  $\underline{m}_y(t)$  o valor médio expectável do processo de resposta e  $\underline{y}_o(t)$  um processo vectorial de valor médio nulo, a equação (2.132) pode passar a escrever-se sob a forma

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{a}_o(t) + \underline{A}_o(t)\underline{y}_o(t) + \underline{x}(t) \quad (2.156)$$

em que

$$\underline{a}_o(t) = \underline{A}_o(t)\underline{m}_y(t) \quad (2.157)$$

Considerando o vector  $\underline{\epsilon}(t)$  definido pela diferença dos segundos membros das equações (2.129) e (2.156), ou seja

$$\underline{\epsilon}(t) = \underline{a}(\underline{y}, t) - \underline{a}_o(t) - \underline{A}_o(t)\underline{y}_o(t) \quad (2.158)$$

e impondo, como é habitual no método de linearização estocástica equivalente, a minimização do valor médio do quadrado da respectiva norma euclidiana, pode concluir-se, tendo em conta as seguintes condições necessárias à satisfação daquela condição de mínimo

$$\frac{\partial E[\epsilon_i(t)^2]}{\partial \alpha_i^e} = 0 \quad \frac{\partial E[\epsilon_i(t)^2]}{\partial \alpha_{ij}^e} = 0 \quad (2.159)$$

que o vector  $\underline{a}_o(t)$  e a matriz  $\underline{A}_o(t)$  devem verificar as seguintes relações

$$\underline{a}_o(t) = E[\underline{a}(\underline{y}, t)] \quad (2.160)$$

$$\underline{A}_o(t)E[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T] = E[\underline{a}(\underline{y}, t)\underline{y}_o(t)^T] \quad (2.161)$$

Desta forma, uma resolução iterativa do problema torna-se também possível com base nestas duas equações. Assim, uma vez arbitrados os valores iniciais de  $\underline{a}_o(t)$  e  $\underline{A}_o(t)$ , pode determinar-se a matriz de covariância instantânea da resposta do sistema linear através da resolução do sistema de equações diferenciais

$$\underline{\mu}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \quad (2.162)$$

Uma vez conhecida a matriz de covariância  $\underline{\mu}_y(t)$ , bem como o vector de valores médios  $\underline{m}_y(t)$  através da equação (2.157), torna-se viável calcular os valores médios constantes do segundo membro das equações (2.160) e (2.161), e a partir daí recalculer os valores de  $\underline{a}_e(t)$  e  $\underline{A}_e(t)$  a utilizar numa iteração seguinte, para o que se torna necessário proceder à inversão da matriz  $\underline{\mu}_y(t) = E[\underline{y}_o(t)\underline{y}_o(t)^T]$

### 2.5.7 - Precisão dos resultados obtidos

A precisão do método de linearização estocástica equivalente pode ser analisada, quer confrontando os resultados obtidos através dele com soluções exactas alcançadas com base na equação de Fokker-Planck-Kolmogorov, quer recorrendo à comparação com os valores conseguidos mediante simulações numéricas.

O recurso à primeira via fica no entanto limitada aos casos em que a resposta é markoviana e estacionária, e em que, por outro lado, a correspondente equação de FPK apresenta uma solução exacta conhecida. Apesar destas fortes restrições, esta via foi utilizada por diversos autores, designadamente por Iwan e Yang [86], Yang [169], Atalik [12], Roberts e Spanos [134].

A utilização de técnicas de simulação digital assume assim a maior importância no caso de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade e de excitações de natureza quer estacionária, quer não-estacionária, tendo esta via sido seguida também com idêntico objectivo por vários investigadores, como é o caso de Spanos [148], Iwan e Mason [83] e Sakata e Kimura [136].

Desses estudos, bem como dos exemplos de aplicação apresentados no final dos capítulos 2 e 3 da presente monografia, tratados com base em programas de cálculo propositadamente elaborados, pode retirar-se a conclusão essencial de que o método de linearização estocástica equivalente conduz a excelentes aproximações dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da resposta, verificando-se que os erros relativos encontrados (na gama dos 0 a 20%) são relativamente reduzidos, mesmo em muitos casos de não-linearidades acentuadas, sendo perfeitamente toleráveis no domínio das aplicações práticas em engenharia de estruturas.

Apenas no que respeita à caracterização das caudas da distribuição probabilística da resposta, é que o método de linearização equivalente não é geralmente considerado tão fiável, já que, baseando-se na hipótese de natureza gaussiana da resposta, não torna possível avaliar os efeitos das não-linearidades sobre a resposta não-gaussiana do

sistema, podendo introduzir erros um pouco mais significativos na estimativa da probabilidade de não-excedência de uma dada barreira ou do valor médio dos picos da resposta.

Apesar de tudo, convirá realçar que, mesmo deste ponto de vista, os erros cometidos são em muitos casos pouco relevantes, em particular no domínio da engenharia sísmica, em virtude do elevado grau de incerteza associado à caracterização da excitação actuante.

## 2.6 - O MÉTODO DE NÃO-LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE

A descrição anteriormente efectuada do método de linearização estocástica equivalente, embora tenha contribuído para salientar as suas notáveis potencialidades como forma de abordagem aproximada da resposta aleatória estacionária ou não-estacionária de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade, permitiu também identificar o seu principal ponto fraco, que consiste na impossibilidade de prever em que medida as não-linearidades do sistema podem originar afastamentos significativos da verdadeira distribuição não-gaussiana da resposta em relação à distribuição normal obtida, facto que, em diversos casos, inviabiliza um rigoroso tratamento dos problemas de primeira passagem.

Sendo esse aspecto uma consequência da substituição do sistema não-linear por um sistema linear equivalente, o que leva a que, sendo a excitação gaussiana a resposta também o seja, pode pensar-se em ultrapassar aquela dificuldade tomando antes como sistema equivalente um outro sistema não-linear, mas cuja solução exacta seja conhecida.

Esta abordagem alternativa, conhecida por não-linearização estocástica equivalente, foi introduzida recentemente por Caughey [43], sofrendo no entanto das fortes limitações já conhecidas relativas à razoabilidade da aproximação markoviana da resposta e ao conhecimento de soluções exactas da correspondente equação de FPK.

No caso de sistemas não-lineares sujeitos a excitações aleatórias estacionárias, esta via torna porém possível conseguir, em diversos casos, aproximações bastante precisas da distribuição de probabilidade não-gaussiana da resposta, e consequentemente estimativas rigorosas da fiabilidade do sistema.

A título de exemplo, considere-se um sistema não-linear de 1-GL sujeito a uma excitação gaussiana estacionária  $\omega(t)$  idealizada através de um ruído branco de média nula e densidade espectral  $S_\omega$ , sendo a respectiva equação de equilíbrio dinâmico

$$\ddot{q}(t) + g_1(\dot{q}, q, t) + g_2(q, t) = \omega(t) \quad (2.163)$$

em que as funções  $g_1$  e  $g_2$  traduzem as não-linearidades existentes.

Embora a resposta do sistema possa ser traduzida por um processo de Markov, a correspondente equação de FPK não tem solução exacta conhecida. O mesmo não sucede porém com o sistema não-linear a que se refere a equação de equilíbrio

$$\ddot{q}(t) + h(V)\dot{q}(t) + g_2(q, t) = \omega(t) \quad (2.164)$$

sendo  $h(V)$  uma função da energia total

$$V = \frac{\dot{q}^2}{2} + U(q) \quad (2.165)$$

com

$$U(q) = \int_0^q g_2(q) dq \quad (2.166)$$

ao qual se encontra associada uma equação de FPK cuja solução exacta é (v. eq. 2.26 e 2.29)

$$p(q, \dot{q}) = C \exp \left[ -\frac{1}{\pi S_0} \int_0^V h(u) du \right] \quad (2.167)$$

Por conseguinte, a resposta do sistema não-linear a que se refere a equação (2.163) pode ser aproximada pela resposta deste outro sistema não-linear, desde que a função  $h(V)$  seja escolhida por forma a minimizar o valor quadrático médio da diferença entre os primeiros membros das equações (2.163) e (2.164), ou seja

$$\text{minimizar } E[\epsilon^2] \quad (2.168)$$

em que

$$\epsilon(t) = g_1(\dot{q}, q, t) - h(V)\dot{q}(t) \quad (2.169)$$

A definição de  $h(V)$  pode ser realizada através do produto

$$h(V) = c_e h_0(V) \quad (2.170)$$

em que  $h_0(V)$  é uma função arbitrada em função das características de  $g_1(\dot{q}, q, t)$ , e  $c_e$  é uma constante escolhida por forma a verificar-se a seguinte condição necessária para a minimização de  $E[\epsilon^2]$

$$\frac{dE[\epsilon^2]}{dc_e} = 0 \quad (2.171)$$

Impondo a satisfação desta condição, e atendendo à equação (2.169), pode obter-se que

$$c_e = \frac{E[\dot{q}h_o(V)g_1(\dot{q}, q)]}{E[\dot{q}^2h_o(V)]} \quad (2.172)$$

Nestas condições, o valor da constante  $c_e$ , caracterizadora do sistema não-linear equivalente, pode ser quantificado, calculando-se os valores médios indicados nesta equação com base na função densidade de probabilidade conjunta  $p(q, \dot{q})$  expressa pela equação (2.167), a qual é também função de  $c_e$ .

Uma vez determinado o valor dessa constante, a distribuição de probabilidade da resposta do sistema em análise é definida pela função  $p(q, \dot{q})$  a que se refere a equação (2.167) com  $h(V) = c_e h_o(V)$ .

Como é evidente, a precisão dos resultados encontrados depende da função  $h_o(V)$  arbitrada, aumentando naturalmente à medida que a função  $c_e h_o(V) \dot{q}$  tenda a melhor ajustar-se à função  $g_1(\dot{q}, q)$ .

## 2.7 - OS MÉTODOS DE TRUNCATURA GAUSSIANA E NÃO-GAUSSIANA

A completa caracterização da estrutura probabilística instantânea da resposta do sistema não-linear a que se refere a equação de equilíbrio dinâmico (v. eq. 2.2)

$$\underline{\dot{y}}(t) = \underline{\alpha}(\underline{y}, t) + \underline{x}(t) \quad (2.173)$$

pode ser efectuada não só através do conhecimento da hierarquia de funções densidade de probabilidade multidimensionais  $p_n(\underline{Y})$ , como também através das hierarquias de funções características  $C_n(\underline{\theta})$ , de momentos estatísticos  $m_r(Y_i, Y_j, \dots, Y_l)$  ou de cumulantes  $k_r(Y_i, Y_j, \dots, Y_l)$  sendo  $Y_i = y_i(t)$  e  $n = 2N$ .

Por outro lado, a família de funções densidade de probabilidade  $p_n(\underline{Y})$  do processo não-gaussiano de resposta é susceptível de um desenvolvimento em série em termos das funções homólogas  $p_n^g(\underline{Y})$ , correspondentes ao processo vectorial gaussiano de iguais cumulantes de primeira e segunda ordem, e dos quasi-momentos  $b_r(Y_i, Y_j, \dots, Y_l)$  de acordo com a seguinte expressão (v. eq. A.34)

$$p_n(\underline{Y}) = \left\{ 1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,l=1}^n b_r(Y_i, Y_j, \dots, Y_l) \cdot \left( \frac{\partial}{\partial Y_i} \right) \left( \frac{\partial}{\partial Y_j} \right) \dots \left( \frac{\partial}{\partial Y_l} \right) \right\} p_n^g(\underline{Y}) \quad (2.174)$$



Podendo os quasi-momentos relacionar-se com os cumulantes (v. eq. A.31) e estes com os momentos estatísticos (v. eq. A.13 a A.16), as funções densidade de probabilidade multidimensionais não-gaussianas  $p_n(\underline{Y})$  podem ser definidas de forma aproximada a partir do conhecimento dos momentos estatísticos da resposta até uma dada ordem, efectuando uma truncatura do desenvolvimento em série expresso pela equação (2.174), de forma a ter apenas em consideração o contributo de um certo número de termos desse desenvolvimento.

É nessa ideia aliás que se baseiam os chamados métodos de truncatura, que apoiados na Teoria dos Processos de Markov e nas regras matemáticas do Cálculo Estocástico, procuram gerar equações de momentos estatísticos da resposta de ordem sucessivamente crescente, por forma a possibilitar a sua determinação.

Por essa razão, a aplicabilidade de tais técnicas de geração das equações de momentos exige que a excitação actuante seja idealizável através de um ruído branco (estacionário ou não-estacionário), ou que, caso tal não se verifique, possa ser interpretada como a resposta de um filtro a uma excitação desse tipo, traduzindo já a equação (2.173) o equilíbrio dinâmico do conjunto sistema-filtro. Por outro lado também, as não-linearidades traduzidas (v. eq. 2.1) através das funções  $g_i(\underline{q}, \underline{q}, t)$  devem poder ser expressas, pelo menos de forma aproximada, através de uma soma algébrica de produtos de potências inteiras das componentes de  $\underline{q}$  e  $\underline{q}$ .

A truncatura da hierarquia das equações de momentos levanta porém um problema fundamental, que consiste na impossibilidade aparente de fechar o sistema de equações resultante, devido ao aparecimento de momentos de ordem superior ao nível de truncatura utilizado, por efeito dos termos não-lineares, o que leva à existência de um número de incógnitas superior ao número de equações.

Esse problema não é no entanto insolúvel, podendo ser ultrapassado truncando o desenvolvimento em série de  $p_n(\underline{Y})$  após um número adequado de termos, e exprimindo os momentos de ordem superior em função dos de ordem inferior, à custa das relações já conhecidas entre momentos e cumulantes ou momentos e quasi-momentos.

O nível mais baixo de truncatura corresponde naturalmente a tomar em consideração exclusivamente o primeiro termo do desenvolvimento em série (2.174), ou seja, a assumir que a resposta é caracterizada por uma distribuição normal, a qual é, como se sabe, unicamente função dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem.

Por conseguinte, a determinação desses momentos, que constituem o vector dos valores médios  $\underline{m}_y(t)$  e a matriz de covariância  $\underline{\mu}_y(t)$ , exige a escrita das duas equações que regulam a respectiva evolução temporal.

A primeira dessas equações pode obter-se aplicando o operador  $E[\ ]$  à equação (2.173), donde resulta que

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = E[\underline{a}(\underline{y}, t)] + \underline{m}_x(t) \quad (2.175)$$

Uma segunda equação, regulando a evolução temporal da matriz de covariância  $\underline{\mu}_y(t)$ , pode obter-se directamente da Teoria Matemática das Equações Diferenciais Estocásticas [135] sendo

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = E[\underline{a}(\underline{y}, t)\underline{y}_o(t)^T] + E[\underline{y}_o(t)\underline{a}(\underline{y}, t)^T] + 2\pi\underline{S}_o(t) \quad (2.176)$$

em que

$$\underline{y}_o(t) = \underline{y}(t) - \underline{m}_y(t) \quad (2.177)$$

e  $\underline{S}_o(t)$  representa a matriz das densidades espectrais conjuntas relativas ao processo vectorial de excitação do tipo ruído branco gaussiano evolutivo de valor médio nulo  $\underline{x}_o(t) = \underline{x}(t) - \underline{m}_x(t)$ .

A título exemplificativo, e no sentido de facilitar a compreensão da forma de aplicação prática do método de truncatura gaussiana, considere-se o seguinte sistema não-linear de 1-GL com uma não-linearidade cúbica em termos de rigidez, cujo equilíbrio dinâmico é traduzido pela equação diferencial de segunda ordem

$$\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + \epsilon q(t)^3 = \omega(t) \quad (2.178)$$

ou, o que é equivalente, pelas duas equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{a}(\underline{y}, t) + \underline{x}(t) \quad (2.179)$$

com

$$\underline{y}(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \end{Bmatrix} \quad \underline{a}(\underline{y}, t) = \begin{Bmatrix} \dot{q}(t) \\ -c\dot{q}(t) - \epsilon q(t)^3 \end{Bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{Bmatrix} \quad (2.180)$$

sendo  $\omega(t)$  um ruído branco gaussiano de valor médio nulo e densidade espectral  $S_o(t)$ .

Da aplicação das equações (2.175) e (2.176) a este caso concreto, resulta então que

$$\frac{d}{dt} \begin{Bmatrix} E[y_1] \\ E[y_2] \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E[y_2] \\ -cE[y_2] - \epsilon E[y_1^3] \end{Bmatrix} \quad (2.181)$$

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} E[y_1 y_1] & E[y_1 y_2] \\ E[y_2 y_1] & E[y_2 y_2] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2E[y_1 y_2] & E[y_2^2] - cE[y_1 y_2] - \epsilon E[y_1^4] \\ E[y_2^2] - cE[y_1 y_2] - \epsilon E[y_1^4] & -2cE[y_2^2] - 2\epsilon E[y_1^3 y_2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2\pi S_o(t) \end{bmatrix} \quad (2.182)$$

Estas relações matriciais representam pois um conjunto de equações diferenciais de primeira ordem, que regulam a evolução temporal dos elementos do vector dos valores médios e da matriz de covariância da resposta, as quais degeneram num simples sistema de equações algébricas no caso de a excitação apresentar natureza estacionária, em virtude do anulamento dos primeiros membros.

Supondo, por uma questão de simplicidade, que a excitação actuante é estacionária ( $S_o(t) = S_o$ ), e tendo em consideração que, sendo o seu valor médio nulo e as não-linearidades de natureza simétrica,  $E[y_1] = 0$ , todos os momentos estatísticos da resposta de ordem superior à segunda, intervenientes nas equações (2.181) e (2.182), nomeadamente

$$m_{30} = E[y_1^3] \quad m_{40} = E[y_1^4] \quad m_{31} = E[y_1^3 y_2] \quad (2.183)$$

podem ser facilmente expressos em função dos momentos de primeira e segunda ordem, tendo em conta as relações momentos-cumulantes traduzidas pelas equações (A.17) a (A.22), bem como o facto de todos os cumulantes de ordem superior à segunda, relativos a uma distribuição de Gauss, serem nulos, obtendo-se desse modo que

$$E[y_1^3] = 0 \quad E[y_1^4] = 3(E[y_1^2])^2 \quad E[y_1^3 y_2] = 3E[y_1^2]E[y_1 y_2] \quad (2.184)$$

Desta forma, as equações indicadas por (2.181) são automaticamente satisfeitas com  $E[y_1] = E[y_2] = 0$ , ao passo que (2.182) dá origem a um sistema de três equações a três incógnitas,  $E[y_1^2]$ ,  $E[y_2^2]$  e  $E[y_1 y_2]$ , que uma vez resolvido permite saber que

$$E[y_1^2] = E[q^2] = \sqrt{\frac{\pi S_o}{3\epsilon c}} \quad (2.185)$$

$$E[y_2^2] = E[\dot{q}^2] = \frac{\pi S_o}{c} \quad (2.186)$$

$$E[y_1 y_2] = E[q\dot{q}] = 0 \quad (2.187)$$

ficando assim completamente caracterizada a distribuição de probabilidade gaussiana que aproxima a distribuição de probabilidade da resposta do sistema não-linear.

Baseando-se quer o método de truncatura gaussiana, quer o método de linearização estocástica equivalente, na hipótese de que a distribuição probabilística da resposta segue a lei normal, torna-se interessante comparar os resultados acabados de obter com os correspondentes à resposta do sistema linear equivalente, cujo equilíbrio dinâmico é traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t) + c_e \dot{q}(t) + k_e q(t) = \omega(t) \quad (2.188)$$

ou, em termos de variáveis de estado

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (2.189)$$

com

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_e & -c_e \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \omega(t) \end{Bmatrix} \quad (2.190)$$

Com efeito, sendo as condições de Atalik-Utku expressas, em termos de uma formulação de estado, pela relação

$$\alpha_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial \alpha_i}{\partial y_j} \right] \quad (2.191)$$

a matriz  $\underline{A}_e$  caracterizadora do sistema linear equivalente, pode expressar-se em função das características da resposta através da equação

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\epsilon E[y_1^2] & -c \end{bmatrix} \quad (2.192)$$

podendo pois chegar-se directamente ao conhecimento da matriz de covariância instantânea da resposta através da resolução da equação de Liapunov

$$\underline{A}_e \underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \quad (2.193)$$

ou seja

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3\epsilon E[y_1^2] & -c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E[y_1^2] & E[y_1 y_2] \\ E[y_1 y_2] & E[y_2^2] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} E[y_1^2] & E[y_1 y_2] \\ E[y_1 y_2] & E[y_2^2] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -3\epsilon E[y_1^2] \\ 1 & -c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -2\pi S_o \end{bmatrix} \quad (2.194)$$

Resolvendo esta equação em ordem a  $E[y_1^2]$ ,  $E[y_2^2]$  e  $E[y_1 y_2]$ , conclui-se que a matriz de covariância instantânea da resposta alcançada pelo método de linearização estocástica equivalente apresenta exactamente a mesma constituição que a obtida através do método de truncatura gaussiana (v. eq. 2.185 a 2.187), sendo por outro lado o erro relativo cometido em termos da variância  $\mu_q = E[y_1^2]$ , em relação à solução teórica exacta

$$\mu_q = E[y_1^2] = 0,6760 \sqrt{\frac{\pi S_o}{c\epsilon}} \quad (2.195)$$

obtida com base na equação de FPK [132], de 14,6%, ou seja 7,6% em termos de desvio padrão  $\sigma_q$ , sendo de realçar que esse erro é independente do parâmetro  $\epsilon$ , de cuja grandeza depende a importância das não-linearidades do sistema.

A coincidência dos resultados encontrados com base nestas duas diferentes formulações não é todavia accidental.

De facto, a questão da comparação das técnicas de truncatura gaussiana e de linearização equivalente foi objecto de grande atenção e de alguma polémica por parte de diversos investigadores, designadamente por Dashevskii [61-63], Crandall [53], Wen [172], Iyengar e Dash [80], tendo todas as dúvidas sido esclarecidas num artigo recente de Wen-Fang Wu [180], que veio comprovar que ambas as abordagens conduzem efectivamente aos mesmos resultados.

Com efeito, é fácil verificar que assim é, se nos referirmos ao caso mais geral em que o equilíbrio dinâmico do sistema linear equivalente, correspondente à equação (2.173), é traduzido por

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e(t)\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (2.196)$$

ou, se se preferir, pela equação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{\alpha}_e(t) + \underline{A}_e(t)\underline{y}_o(t) + \underline{x}(t) \quad (2.197)$$

devendo o vector  $\underline{\alpha}_e(t)$  e a matriz  $\underline{A}_e(t)$  satisfazer as equações (v. eq. 2.160 e 2.161)

$$\underline{\alpha}_e(t) = E[\underline{\alpha}(\underline{y}, t)] \quad (2.198)$$

$$\underline{A}_e(t) = E[\underline{\alpha}(\underline{y}, t)\underline{y}_o(t)^T] \underline{\mu}_y(t)^{-1} \quad (2.199)$$

De facto, a evolução temporal do valor médio da resposta do sistema linear é obtida aplicando o operador  $E[\ ]$  à equação (2.197), resultando que

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = \underline{\alpha}_e(t) + \underline{m}_x(t) \quad (2.200)$$

ao passo que a correspondente matriz de covariância evolutiva obedece à equação (v. eq. 2.154)

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi \underline{S}_o(t) \quad (2.201)$$

pelo que, atendendo às equações (2.198) e (2.199), se pode escrever que

$$\dot{\underline{m}}_y(t) = E[\underline{\alpha}(\underline{y}, t)] + \underline{m}_x(t) \quad (2.202)$$

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = E[\underline{\alpha}(\underline{y}, t)\underline{y}_o(t)^T] + E[\underline{y}_o(t)\underline{\alpha}(\underline{y}, t)^T] + 2\pi \underline{S}_o(t) \quad (2.203)$$

Por conseguinte, pode constatar-se que estas equações, nas quais se baseia o método de linearização estocástica equivalente, são inteiramente coincidentes com as equações (2.175) e (2.176), em que se apoia o método de truncatura gaussiana anteriormente exposto, pelo que, sendo os valores médios indicados em todas essas equações calculados admitindo que a distribuição de probabilidade da resposta obedece à lei normal, os resultados obtidos por ambos os métodos são naturalmente coincidentes.

A aproximação da verdadeira resposta não-gaussiana do sistema não-linear pode, no entanto, ser melhorada introduzindo um nível mais elevado de truncatura do desenvolvimento em série da função densidade de probabilidade pluridimensional  $p_n(\underline{Y})$ , expresso pela equação (2.174), sendo o rigor daquela aproximação tanto maior, quanto maior for o número de termos considerados.

Deste modo, a utilização de um método de truncatura não-gaussiana leva a que a caracterização da densidade de probabilidade  $p_n(\underline{Y})$  passe a ser não só dependente do conhecimento dos momentos estatísticos da resposta de primeira e segunda ordem, mas também de momentos de ordem superior. Por esta razão, as equações (2.202) e (2.203) são manifestamente insuficientes para a determinação de todos os momentos estatísticos envolvidos, tornando-se indispensável dispor de equações de momentos de ordem mais elevada.

A obtenção dessas equações de momentos pode ser conseguida com recurso à Teoria dos Processos de Markov e às regras do Cálculo Estocástico, podendo ser utilizadas para o efeito duas vias distintas. A primeira dessas abordagens, introduzida por Caughey e Dienes [44], consiste em obter aquelas equações através da relação

$$\dot{m}_{r_1, \dots, r_n} = \frac{d}{dt} E[\Phi(\underline{Y})] = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\underline{Y}) \frac{\partial p_c(\underline{Y} | \underline{Y}_0)}{\partial t} dY_1 dY_2 \dots dY_n \quad (2.204)$$

em que

$$\Phi(\underline{Y}) = Y_1^{r_1} Y_2^{r_2} \dots Y_n^{r_n} \quad (2.205)$$

sendo a derivada parcial  $\partial p_c(\underline{Y} | \underline{Y}_0) / \partial t$  definida pela equação de FPK, e procedendo-se a uma integração por partes no domínio  $-\infty < \underline{Y} < +\infty$  [77].

Uma outra via alternativa, utilizada por Cumming [57, 58], apoia-se na regra diferencial de Itô do Cálculo Estocástico [76], a partir da qual se pode concluir que

$$\frac{d}{dt} E[\Phi(\underline{Y})] = E[\underline{\nabla} \Phi^T \underline{\alpha}(\underline{Y})] + \pi \text{tr} E[\underline{S}_0(t) \underline{J}] \quad (2.206)$$

sendo

$$\underline{\nabla} \Phi^T = \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial Y_1}, \frac{\partial \Phi}{\partial Y_2}, \dots, \frac{\partial \Phi}{\partial Y_n} \right] \quad (2.207)$$

$$\underline{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y_1 \partial Y_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y_1 \partial Y_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y_n \partial Y_1} & \dots & \frac{\partial^2 \Phi}{\partial Y_n \partial Y_n} \end{bmatrix} \quad (2.208)$$

e indicando  $tr$  o traço de uma matriz. Substituindo (2.205) em (2.206), pode obter-se [134] uma expressão geral das equações dos momentos estatísticos da resposta de ordem  $r = r_1 + \dots + r_n$

Desta forma, todas as equações de momentos correspondentes ao nível de truncatura pretendido podem ser escritas, surgindo apenas o problema de fecho dessas equações, em virtude do facto de as não-linearidades levarem ao aparecimento de momentos de ordem superior ao desejado.

À semelhança do sucedido no método de truncatura gaussiana, interessa pois exprimir esses momentos em função dos de ordem inferior, por forma que o número de equações iguale o número de incógnitas, e o problema se torne resolúvel.

Para isso, basta ter em consideração que desprezar os termos do desenvolvimento em série (2.174) de ordem superior a  $r$ , equivale a impor o anulamento dos quasi-momentos correspondentes, facto que permite, conjuntamente com as relações momentos-cumulantes (v. eq. A.13 a A.22) e quasi-momentos-cumulantes (eq. A.31) exprimir todos os momentos de ordem superior a  $r$  em função dos de ordem inferior. Esta técnica é, aliás, em muitos casos equivalente ao anulamento dos correspondentes cumulantes, dada a igualdade verificada entre cumulantes e quasi-momentos até à 5ª ordem, ou mesmo até à 7ª ordem, caso o valor médio da resposta seja nulo.

O método de truncatura não-gaussiana, cuja formulação foi desenvolvida e consolidada por diversos investigadores, designadamente Dashevskii [61-63], Assaf e Zirkle [10], Crandall [54, 55], Bover [29] e Wu e Lin [179], apresenta pois a grande virtude de possibilitar a caracterização do efeito das não-linearidades sobre a resposta não-gaussiana do sistema, facto que, como foi já referido, se reveste da maior importância do ponto de vista do tratamento dos problemas de primeira passagem.

Infelizmente porém, a aplicação prática do método reveste-se de uma complexidade que aumenta de forma drástica com o nível de truncatura, o que leva a que a sua aplicabilidade, à semelhança do sucedido com o método de não-linearização estocástica equivalente, se restrinja praticamente aos sistemas de um grau de liberdade.

## 2.8 - TÉCNICAS DE SIMULAÇÃO ANALÓGICA OU DIGITAL

As técnicas de simulação consistem em interpretar o sistema de equações diferenciais estocásticas não-lineares, tradutor do equilíbrio dinâmico do sistema não-linear sujeito a uma excitação aleatória actuante, como um conjunto infinito de sistemas de equações diferenciais não-lineares determinísticos. Desse modo, gerando artificialmente um número teoricamente infinito de histórias temporais da excitação, compatíveis com uma determinada estrutura probabilística pré-definida, e determinando as correspondentes respostas do sistema não-linear com recurso a métodos de integração no tempo, pode obter-se um conjunto de realizações do processo de resposta, que, uma vez tratadas estatisticamente, possibilitam a sua caracterização probabilística.

Embora inicialmente as técnicas de simulação se baseassem na utilização de geradores de sinais aleatórios para simulação da excitação, e de computadores analógicos para determinação dos sinais de resposta [169], o aparecimento dos computadores digitais levou ao rápido desenvolvimento de técnicas de simulação numérica, também conhecidas por simulações de Monte-Carlo, baseadas em algoritmos de geração de números pseudo-aleatórios com uma distribuição de probabilidade pré-definida.

O principal inconveniente dos métodos de simulação reside no enorme esforço computacional exigido para que possa reduzir-se a níveis aceitáveis a incerteza estatística dos resultados obtidos, a qual segundo Crandall e Zhu [56] diminui apenas na razão inversa da raiz quadrada do número de realizações.

Este facto leva aliás a que, em geral, as características estatísticas da resposta tenham de ser estimadas com base em valores médios expectáveis tendo em conta várias dezenas ou mesmo centenas de realizações. Apenas no caso de processos de resposta estacionários e ergódicos, a necessidade de geração de um tão largo número de histórias temporais deixa de ter lugar, podendo a estatística da resposta passar a ser integralmente caracterizada a partir da estatística temporal de uma única realização de duração adequada.

Uma forma de gerar realizações de um processo estocástico consiste em recorrer a somatórios de funções sinusoidais, podendo ser seguidas várias vias possíveis para o efeito.

Uma dessas vias consiste em expressar as diversas realizações de um processo estocástico estacionário  $x(t)$  através de um somatório do tipo



$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n A_i \cos(\omega_i t - \theta_i) \quad (2.209)$$

em que os ângulos de fase  $\theta_i$  constituem variáveis aleatórias independentes, distribuídas uniformemente ao longo do intervalo  $[0, 2\pi]$ , isto é

$$p(\theta_i) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} & , \quad 0 \leq \theta_i \leq 2\pi \\ 0 & , \quad \theta_i < 0 \vee \theta_i > 2\pi \end{cases} \quad (2.210)$$

podendo verificar-se que o processo  $x(t)$  assim definido satisfaz as condições necessárias de estacionaridade e ergodicidade [166], sendo

$$E[x(t)] = \langle x_j(t) \rangle = 0 \quad (2.211)$$

$$E[x(t)^2] = \langle x_j(t)^2 \rangle = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} A_i^2 \quad (2.212)$$

O processo estocástico  $x(t)$  apresenta pois valor médio nulo, sendo a contribuição da frequência  $\omega_i$  para a respectiva variância igual a  $A_i^2/2$ .

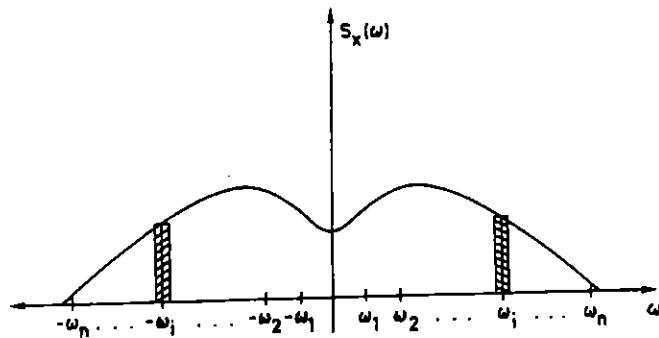


Fig. 2.1 - Função densidade espectral de potência do processo  $x(t)$ .

Por conseguinte, para que as realizações geradas a partir da equação (2.209) sejam representativas de um processo estocástico caracterizado por uma função densidade espectral de potência contínua  $S_x(\omega)$ , dever-se á impor a condição

$$\frac{1}{2} A_i^2 = 2 S_x(\omega_i) \Delta \omega \quad (2.213)$$

em que  $\Delta \omega$  representa o intervalo entre duas frequências consecutivas, supostas igualmente espaçadas. Deste modo, as amplitudes dos diversos harmônicos devem assumir o valor

$$A_i = 2\sqrt{S_x(w_i)\Delta w} \quad (2.214)$$

podendo assim as diversas realizações do processo ser obtidas através do somatório

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n 2\sqrt{S_x(w_i)\Delta w} \cos(w_i t - \theta_i) \quad (2.215)$$

ou, o que é equivalente, recorrendo à função densidade espectral de potência  $G_x(f)$ , definida em Hz e apenas no intervalo  $[0, +\infty[$ , através da relação

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n \sqrt{2G_x(f_i)\Delta f} \cos(2\pi f_i t - \theta_i) \quad (2.216)$$

Existem ainda outras vias de obter realizações de um processo estocástico estacionário, designadamente utilizando a forma de representação utilizada por Rice [129]

$$x_j(t) = \sum_{i=1}^n (\alpha_i \cos w_i t + b_i \text{sen } w_i t) \quad (2.217)$$

em que os coeficientes  $\alpha_i$  e  $b_i$  são variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas em torno de zero com um desvio padrão igual a  $\sqrt{S_x(w_i)\Delta w}$ , bem como uma outra utilizada por Shinozuka [139]

$$x_j(t) = \sigma_x \left(\frac{2}{n}\right)^{1/2} \sum_{i=1}^n \cos(w_i t + \theta_i) \quad (2.218)$$

em que  $\sigma_x$  é uma constante igual ao desvio padrão do processo  $x(t)$ , e os  $w_i$  constituem variáveis aleatórias independentes, distribuídas de acordo com a função densidade de probabilidade

$$p(w) = \frac{S_x(w)}{\sigma_x^2} \quad (2.219)$$

Este tipo de representações pode ainda ser generalizado à simulação de campos estocásticos multidimensionais e pluvariados [138], podendo inclusivamente recorrer-se, para o efeito, a algoritmos baseados no uso de transformadas rápidas de Fourier (FFT) que possibilitam o desenvolvimento de rotinas de cálculo de grande eficiência [165].

## 2.9 - RESUMO E CONCLUSÕES

Os pontos anteriores do presente capítulo tiveram como objectivo efectuar uma descrição das principais abordagens de análise da resposta de sistemas não-lineares a excitações aleatórias, dando o devido realce às suas principais virtualidades e limitações, por forma a poderem retirar-se algumas conclusões de interesse em termos das suas condições de aplicabilidade, de eficiência e precisão, julgando-se importante, desse ponto de vista, sublinhar os seguintes aspectos fundamentais:

- a) A única abordagem conducente a soluções exactas do ponto de vista matemático é a que se baseia numa aproximação markoviana da resposta, sendo a correspondente função densidade de probabilidade de transição regulada por uma equação de FPK;
- b) Infelizmente, porém, essa via de análise, para além de apenas ser válida caso a excitação seja idealizável através de um ruído branco gaussiano, só permite a resolução do problema num número muito limitado de situações, particularmente no caso de sistemas de múltiplos graus de liberdade e de excitações não-estacionárias, exigindo que quer as não-linearidades, quer as matrizes das funções de inter-correlação da excitação actuante, obedeçam a relações geralmente não verificadas na prática, para que a equação de FPK tenha uma solução exacta conhecida;
- c) Os diversos métodos aproximados que se apoiam directamente na equação de FPK, designadamente as técnicas iterativas, as técnicas baseadas em desenvolvimentos em série, as técnicas de caminhos aleatórios, as técnicas de média estocástica, ou mesmo as técnicas de truncatura, continuam a ter um interesse prático muito limitado por se referirem em geral a sistemas não-lineares de um único grau de liberdade;
- d) As técnicas de perturbação, embora permitindo analisar sistemas de múltiplos graus de liberdade, enfermam ainda de graves restrições, não só por conduzirem a boas aproximações da resposta unicamente no caso de não-linearidades pouco acentuadas, mas também porque a consideração de termos do desenvolvimento em série em que se apoiam, correspondentes a potências de  $\epsilon$  superiores à primeira, leva a cálculos muito pesados e trabalhosos, não existindo também garantia de convergência da série;
- e) O método de linearização estocástica equivalente constitui, sem sombra de dúvida, a formulação aproximada mais potente e versátil, que possibilita obter estimativas dos momentos estatísticos de primeira e segunda ordem da resposta de sistemas não-lineares de N-GL, sujeitos a excitações quer

estacionárias, quer não-estacionárias, sendo os erros verificados em relação aos valores exactos, ou aos encontrados por técnicas de simulação, em geral perfeitamente toleráveis do ponto de vista da engenharia de estruturas, mesmo em muitos casos de não-linearidades relativamente acentuadas;

- f) A maior limitação do método de linearização equivalente advém da hipótese da natureza gaussiana do processo de resposta, inevitável dado o suposto carácter gaussiano da excitação actuante e o comportamento linear do sistema equivalente, facto que leva a que o método nem sempre se revele capaz de caracterizar com rigor as caudas da distribuição de probabilidade da resposta, originando dessa forma erros por vezes algo significativos na avaliação de probabilidades de não-excedência de uma dada barreira, ou de valores médios de picos de resposta;
- g) Embora uma boa aproximação da distribuição não-gaussiana do processo de resposta possa teoricamente ser conseguida, quer utilizando um sistema equivalente não-linear, quer recorrendo a técnicas de truncatura não-gaussiana, essas formulações não são susceptíveis de serem utilizadas com vista ao desenvolvimento de rotinas de cálculo gerais e eficientes, dado que no primeiro caso são raras as situações em que é possível dispor de um sistema não-linear equivalente cuja equação de FPK tenha uma solução exacta conhecida, ao passo que no segundo a complexidade do método aumenta drasticamente com o nível de truncatura, podendo considerar-se impraticável a sua aplicação a sistemas não-lineares de N-GL;
- h) O recurso a técnicas de simulação digital, embora se revista da vantagem de possibilitar uma correcta caracterização da distribuição não-gaussiana da resposta, é, no entanto, altamente consumidora de tempo de cálculo, em virtude de a redução das incertezas estatísticas dos resultados a níveis aceitáveis exigir a geração e análise de um número bastante elevado de realizações do processo de resposta.

O balanço acabado de efectuar serve pois para realçar o enorme interesse e importância do método de linearização estocástica equivalente como método aproximado que encerra diversas virtualidades apreciáveis, designadamente em termos de simplicidade, eficiência, economia de tempo de cálculo e razoável rigor.

Apesar das suas limitações, a utilização do método é francamente vantajosa, pelo menos numa primeira fase do dimensionamento de sistemas não-lineares, na qual se procede normalmente à análise comparativa de diversas soluções tecnicamente

possíveis, reservando-se o emprego de técnicas de simulação digital para uma fase final de dimensionamento, em que o tratamento mais rigoroso dos problemas de primeira passagem pode assumir maior importância.

Cumprido realçar, no entanto, que os erros cometidos pela aplicação do método de linearização estocástica equivalente à análise e dimensionamento de estruturas correntes no âmbito da Engenharia Sísmica acabam por assumir normalmente uma importância bastante reduzida face ao elevado grau de incerteza associado à própria forma de caracterização da acção actuante, pelo que a sua utilização se revela neste contexto da maior utilidade.

## **2.10 - DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" NO DOMÍNIO DA ENGENHARIA SÍSMICA**

Dado o manifesto interesse do método de linearização estocástica equivalente como metodologia de análise e dimensionamento de estruturas em regime não-linear sujeitas a excitações aleatórias, e no sentido de tornar mais clara a sua forma de utilização corrente, particulariza-se nesta secção a aplicação da formulação geral anteriormente descrita ao caso de estruturas planas de tipo "shear-building" (pórticos com vigas de rigidez infinita) submetidas a acções sísmicas idealizadas através de modelos estacionários.

Para o efeito, considera-se também que o comportamento não-linear dos diversos troços de pilar entre andares assume natureza simétrica, sendo o contributo de cada troço para cada força de restituição de piso regido por um diagrama bilinear elástico.

### **2.10.1 - Aplicação da linearização estocástica equivalente à análise da resposta sísmica estacionária de um "shear-building" com comportamento bilinear elástico**

Considere-se então uma estrutura plana de tipo "shear-building", como aquela a que se refere a figura 2.2, sujeita a uma aceleração de base horizontal idealizada através de um processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio nulo  $\ddot{u}_g(t)$ , caracterizado por uma função densidade espectral de potência  $S_{\ddot{u}_g}(\omega)$ .

Considerando que os  $N$  graus de liberdade do sistema se encontram associados aos  $N$  deslocamentos  $q_i (i = 1, \dots, N)$  de cada piso em relação à fundação, e que o amortecimento estrutural é muito baixo, podendo supor-se constante, independente-

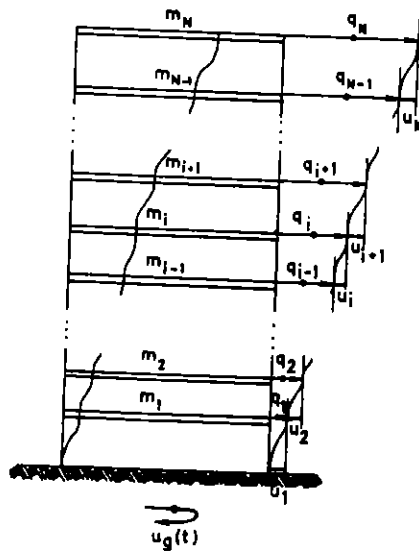


Fig. 2.2 - "Shear-building".

mente do nível da excitação actuante, o equilíbrio da estrutura pode ser traduzido pela equação

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\underline{q}, t) = -\underline{M}\underline{\alpha}\ddot{u}_g(t) \quad (2.220)$$

em que  $\underline{g}(\underline{q}, t)$  representa o processo estocástico vectorial tradutor das forças de restituição relativas a cada andar, função dos deslocamentos  $q_i$  em relação ao movimento da base.

Nesta equação, a matriz de massa  $\underline{M}$  pode supor-se diagonal e constituída pelas N massas  $m_i$  correspondentes aos diversos pisos, podendo por seu lado a matriz de amortecimento  $\underline{C}$  ser assumida como uma combinação linear do tipo

$$\underline{C} = \alpha_c \underline{M} + \beta_c \underline{K}_L \quad (2.221)$$

sendo os coeficientes  $\alpha_c$  e  $\beta_c$  judiciosamente escolhidos por forma que os coeficientes de amortecimento modal correspondentes aos dois primeiros modos de vibração, calculados com base na matriz de rigidez linear inicial  $\underline{K}_L$  assumam um dado valor.

Nestas condições, o comportamento do sistema não-linear pode ser aproximado através da equação

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}_e \underline{q}(t) = -\underline{M}\underline{\alpha}\ddot{u}_g(t) \quad (2.222)$$

em que  $\underline{K}_e$  representa a matriz de rigidez de um sistema linear equivalente, cujos elementos, de acordo com a condição de Atalik-Utku (v. eq. 2.116) devem satisfazer a igualdade

$$k_{ij}^e = E \left[ \frac{\partial g_i(\underline{q})}{\partial q_j} \right] \quad (2.223)$$

ou, de outra forma

$$k_{ij}^e = \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(\underline{q})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \dots dq_N \quad (2.224)$$

em que  $p_N(\underline{q})$  representa a função densidade de probabilidade de Gauss de dimensão  $N$  associada às variáveis aleatórias  $q_i(t)$  ( $i = 1, \dots, N$ ).

Sendo a relação existente entre os deslocamentos  $q_i$  e os deslocamentos relativos  $u_i$ , entre pisos consecutivos, traduzida pelas equações

$$u_i = q_i - q_{i-1} \quad q_i = \sum_{j=1}^i u_j \quad (2.225)$$

e tendo presente a relação verificada entre as funções densidade de probabilidade multidimensionais  $p_N(\underline{q})$  e  $p_N(\underline{u})$

$$p_N(\underline{u}) = |J| p_N(\underline{q}) = \begin{vmatrix} \frac{\partial q_1}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_i}{\partial u_1} & \dots & \frac{\partial q_N}{\partial u_1} \\ \frac{\partial q_1}{\partial u_i} & \dots & \frac{\partial q_i}{\partial u_i} & \dots & \frac{\partial q_N}{\partial u_i} \\ \frac{\partial q_1}{\partial u_N} & \dots & \frac{\partial q_i}{\partial u_N} & \dots & \frac{\partial q_N}{\partial u_N} \end{vmatrix} p_N(\underline{q}) \quad (2.226)$$

de imediato se conclui que

$$p_N(\underline{u}) = p_N(\underline{q}) \quad (2.227)$$

porquanto  $|J| = 1$ .

Por outro lado, sendo a rigidez das vigas teoricamente infinita, a força de restituição elástica correspondente ao piso de ordem  $i$  é exclusivamente função dos três deslocamentos  $q_{i-1}$ ,  $q_i$  e  $q_{i+1}$  ou, o que é equivalente, dos dois deslocamentos relativos  $u_i$  e  $u_{i+1}$ , podendo escrever-se que

$$g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1}) = r_i(u_i) - r_{i+1}(u_{i+1}) \quad (2.228)$$

constituindo  $r_i(u_i)$  e  $-r_{i+1}(u_{i+1})$  as contribuições dos troços de pilar de ordem  $i$  e  $i+1$ , respectivamente, para aquela força de restituição.

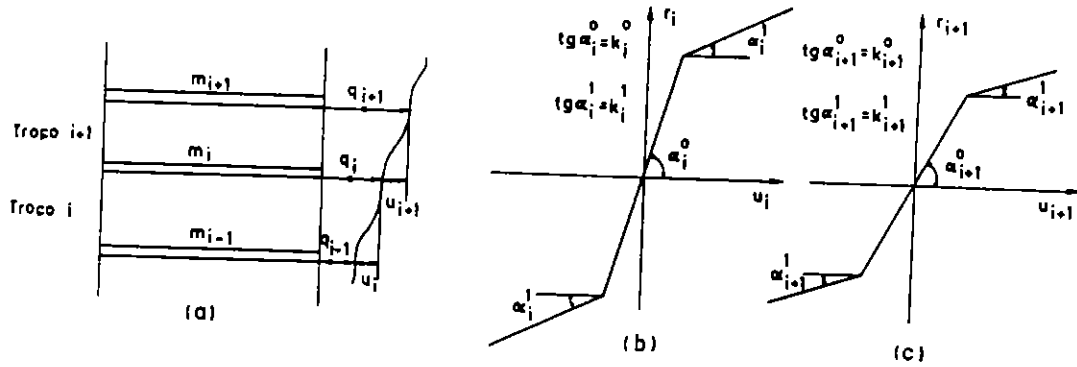


Fig. 2.3 - Contributo dos troços  $i$  e  $i+1$  para a força de restituição elástica  $g_i(q)$

Nestas condições, as derivadas parciais  $\partial g_i(q) / \partial q_j$ , podem exprimir-se através da equação

$$\frac{\partial g_i(q)}{\partial q_j} = \frac{\partial r_i(u_i)}{\partial q_j} - \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial q_j} = \frac{\partial r_i(u_i)}{\partial u_i} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} - \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial u_{i+1}} \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} \quad (2.229)$$

tornando-se também evidente, através de (2.225), que estas derivadas parciais são nulas sempre que  $|i-j| \geq 2$ , podendo verificar-se nas restantes situações os seguintes três casos

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = -1 & \quad \wedge \quad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} = 0 & , \quad j = i-1 \\ \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = 1 & \quad \wedge \quad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} = -1 & , \quad j = i \\ \frac{\partial u_i}{\partial q_j} = 0 & \quad \wedge \quad \frac{\partial u_{i+1}}{\partial q_j} = 1 & , \quad j = i+1 \end{aligned} \quad (2.230)$$

Por conseguinte, conjugando (2.230), (2.229), (2.224) e (2.227), pode concluir-se que os elementos não nulos da matriz de rigidez do sistema linear equivalente são dados por



$$\begin{aligned}
 j=i-1 \rightarrow k_{ij}^e &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \dots dq_N \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial r_i(u_i)}{\partial u_i} p_N(\underline{u}) du_1 \dots du_N \\
 &= -E \left[ \frac{\partial r_i}{\partial u_i} \right] \tag{2.231}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j=i \rightarrow k_{ij}^e &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \dots dq_N \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \left[ \frac{\partial r_i(u_i)}{\partial u_i} + \frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial u_{i+1}} \right] p_N(\underline{u}) du_1 \dots du_N \\
 &= E \left[ \frac{\partial r_i}{\partial u_i} \right] + E \left[ \frac{\partial r_{i+1}}{\partial u_{i+1}} \right] \tag{2.232}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 j=i+1 \rightarrow k_{ij}^e &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial g_i(q_{i-1}, q_i, q_{i+1})}{\partial q_j} p_N(\underline{q}) dq_1 \dots dq_N \\
 &= \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{\partial r_{i+1}(u_{i+1})}{\partial u_{i+1}} p_N(\underline{u}) du_1 \dots du_N \\
 &= -E \left[ \frac{\partial r_{i+1}}{\partial u_{i+1}} \right] \tag{2.233}
 \end{aligned}$$

Desta forma, a matriz de rigidez do sistema linear equivalente é uma matriz simétrica com semi-banda de largura 2, apresentando esquematicamente a seguinte composição

$$\underline{K}_e = \begin{bmatrix} k_1^e + k_2^e & -k_2^e & & & & \\ & -k_2^e & & & & \\ & & k_i^e + k_{i+1}^e & -k_{i+1}^e & & \\ & & & -k_{i+1}^e & & \\ & & & & k_{N-1}^e + k_N^e & -k_N^e \\ & & & & & -k_N^e & k_N^e \end{bmatrix} \tag{2.234}$$

em que

$$k_i^e = E \left[ \frac{\partial r_i}{\partial u_i} \right] \tag{2.235}$$

Cada coeficiente  $k_i^e$  traduz pois a intervenção que o troço de pilares de ordem  $i$  tem na formação da matriz de rigidez equivalente  $\underline{K}_e$ , podendo a sua obtenção ter lugar desde que seja conhecida a função densidade de probabilidade da resposta em termos do deslocamento relativo  $u_i$ , ou, mais simplesmente, desde que seja conhecida a correspondente variância  $\sigma_{u_i}^2$ , dado ter-se admitido que o processo de excitação  $\ddot{u}_g(t)$  é gaussiano e tem valor médio nulo.

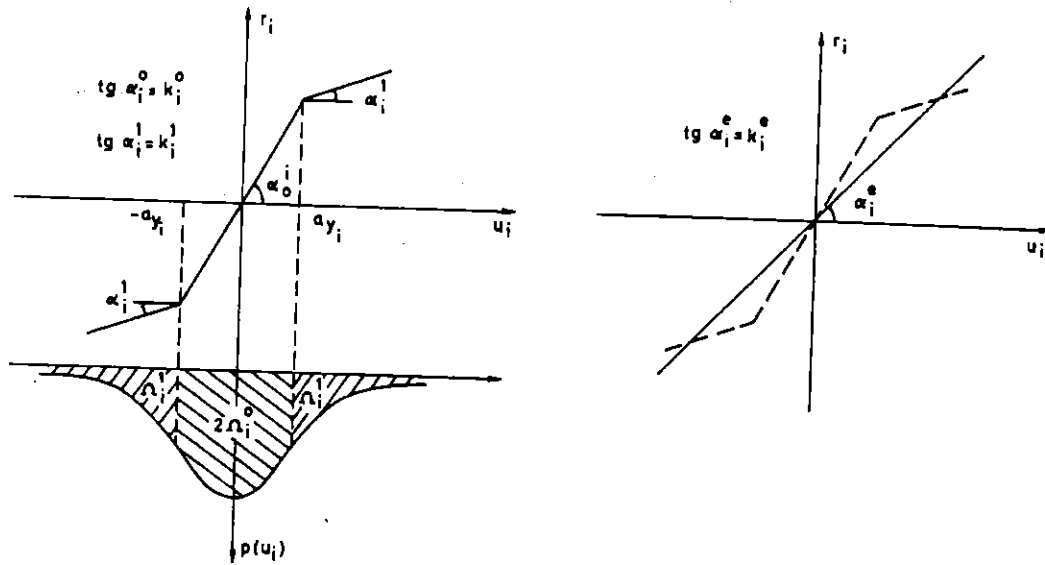


Fig. 2.4 - Cálculo dos coeficientes  $k_i^e$  para a formação da matriz  $\underline{K}_e$ .

Sendo  $p(u_i)$  a função densidade de probabilidade de Gauss associada ao deslocamento relativo  $u_i$ , cada  $k_i^e$  pode pois ser quantificado através da relação

$$\begin{aligned}
 k_i^e &= E \left[ \frac{\partial r_i}{\partial u_i} \right] = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial r_i}{\partial u_i} p(u_i) du_i \\
 &= 2 \int_0^{a_{y_i}} k_i^0 p(u_i) du_i + 2 \int_{a_{y_i}}^{\infty} k_i^1 p(u_i) du_i \quad (2.236)
 \end{aligned}$$

em que  $a_{y_i}$  representa o deslocamento de cedência correspondente ao troço em causa. Designando por  $\Omega_i^0$  e  $\Omega_i^1$  as áreas subentendidas pela função  $p(u_i)$  ao longo dos intervalos  $[0, a_{y_i}]$  e  $[a_{y_i}, +\infty[$ , como se indica na figura 2.4, cada  $k_i^e$  pode exprimir-se de forma mais condensada através da equação

$$k_i^e = 2\Omega_i^0 k_i^0 + 2\Omega_i^1 k_i^1 \quad (2.237)$$

em que

$$\Omega_i^0 = \int_0^{\alpha_{y_i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_i}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\sigma_{u_i}}\right)^2\right] du_i = \int_0^{\alpha_{y_i}/\sigma_{u_i}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) dx \quad (2.238)$$

$$\Omega_i^1 = \int_{\alpha_{y_i}}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{u_i}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{u_i}{\sigma_{u_i}}\right)^2\right] du_i = \frac{1}{2} - \Omega_i^0 \quad (2.239)$$

Nestas circunstâncias, a análise estocástica da resposta sísmica da estrutura pode processar-se através do método de linearização equivalente, seguindo o procedimento iterativo habitual, começando por arbitrar valores iniciais para os elementos da matriz  $\underline{K}_e$ . Uma forma de iniciar esse processo consiste em assimilar  $\underline{K}_e$  à matriz de rigidez linear inicial do sistema, tornando-se possível de seguida, utilizando uma das formulações já referidas para análise de sistemas lineares, quantificar todas as variâncias  $\sigma_{u_i}^2$  caracterizadoras da distribuição de probabilidade gaussiana da resposta. A partir do seu conhecimento, pode imediatamente compor-se a matriz de rigidez equivalente  $\underline{K}_e$  a utilizar na iteração seguinte, tendo por base as equações (2.234) e (2.237) a (2.239), prosseguindo o ciclo iterativo até que seja alcançada a necessária convergência.

### 2.10.2 - Descrição do programa de cálculo automático STBIL

Tendo por base a formulação teórica descrita no ponto anterior, foi elaborado o programa de cálculo STBIL (referido em [59] como PROG7), que possibilita efectuar a análise da resposta estacionária de estruturas planas de tipo "shear-building" a acções sísmicas horizontais caracterizadas por espectros de potência do tipo Kanai-Tajimi ou poli-lineares, como é o caso dos espectros indicados pela Regulamentação Portuguesa.

Em relação à arquitectura desse programa, esquematicamente traduzida pelo fluxograma simplificado indicado na figura 2.5, há pois a destacar os seguintes passos:

- a) Leitura de dados gerais envolvendo
  - caracterização topológica da estrutura;
  - definição das características geométricas e mecânicas de todos os troços de pilar entre pisos, designadamente dos respectivos deslocamentos de cedência  $\alpha_{y_i}$ , e das rigidezes iniciais  $k_i^0$  e pós-cedência  $k_i^1$ ;
  - leitura do valor das massas associadas a cada andar e dos coeficientes de amortecimento correspondentes aos dois primeiros modos de vibração em regime linear;

- caracterização da excitação actuante, podendo recorrer-se, em alternativa, à definição dos parâmetros  $S_o$ ,  $w_f$  e  $\xi_f$  de um espectro de Kanai-Tajimi, ou aos espectros de potência definidos pelo RSA;
- b) Formação da matriz de massa diagonal  $\underline{M}$  e da matriz de rigidez linear inicial  $\underline{K}_l$ ;
- c) Determinação das frequências naturais  $w_i$  e dos modos de vibração  $\underline{\phi}_i$  associados ao funcionamento linear inicial do sistema e, a partir deles e dos coeficientes de amortecimento pré-definidos, dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\beta_c$  a que se refere a equação (2.221), chegando dessa maneira ao conhecimento da matriz de amortecimento  $\underline{C}$ , suposta invariante ao longo da análise da resposta;
- d) Caracterização da resposta sísmica estacionária do sistema linear equivalente, começando por supor  $\underline{K}_e = \underline{K}_l$ ; para o efeito, é utilizada uma formulação modal, a qual possibilita a obtenção da matriz de covariância  $\underline{\mu}_q$ , e posteriormente da matriz de covariância  $\underline{\mu}_u$  associada aos deslocamentos relativos entre pisos já que

$$\underline{\mu}_u = \underline{T} \underline{\mu}_q \underline{T}^T \quad (2.240)$$

sendo  $\underline{T}$  a matriz que estabelece a relação matricial  $\underline{u} = \underline{T} \underline{q}$ ,

- e) Quantificação da matriz de rigidez corrigida do sistema linear equivalente,  $\underline{K}_e$ , a partir do conhecimento das variâncias  $\sigma_{u_i}^2$  decorrentes da iteração anterior, e tendo por base as equações (2.234) e (2.237) a (2.239);
- f) Determinação das novas matrizes de covariância da resposta  $\underline{\mu}_q$  e  $\underline{\mu}_u$  resultantes da alteração da matriz de rigidez equivalente  $\underline{K}_e$ , tomando novamente por base a formulação modal referida;
- g) Análise da convergência da resposta, mediante a comparação dos desvios padrões  $\sigma_{u_i}$ , obtidos em cada iteração, com os calculados na iteração imediatamente anterior; para o efeito, e designando por  $r$  e  $r - 1$  os números de ordem de duas iterações consecutivas, o erro relativo definido por

$$\epsilon = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left| \frac{\sigma_{u_i}^{(r)} - \sigma_{u_i}^{(r-1)}}{\sigma_{u_i}^{(r)}} \right| \quad (2.241)$$

é comparado com uma tolerância pré-definida  $\epsilon_{\max}$ ;

- h) Repetição dos passos descritos nas alíneas e) f) e g) caso não tenha sido atingida a desejada convergência, situação em que  $\epsilon > \epsilon_{\max}$ ;

- i) Determinação dos momentos espectrais da resposta de ordem 0, 1, e 2 em termos de todas as variáveis de controlo analisadas (deslocamentos  $q_i$  e  $u$ , esforços transversos e momentos flectores nas extremidades dos pilares) e estimativa dos correspondentes valores médios dos picos de resposta.

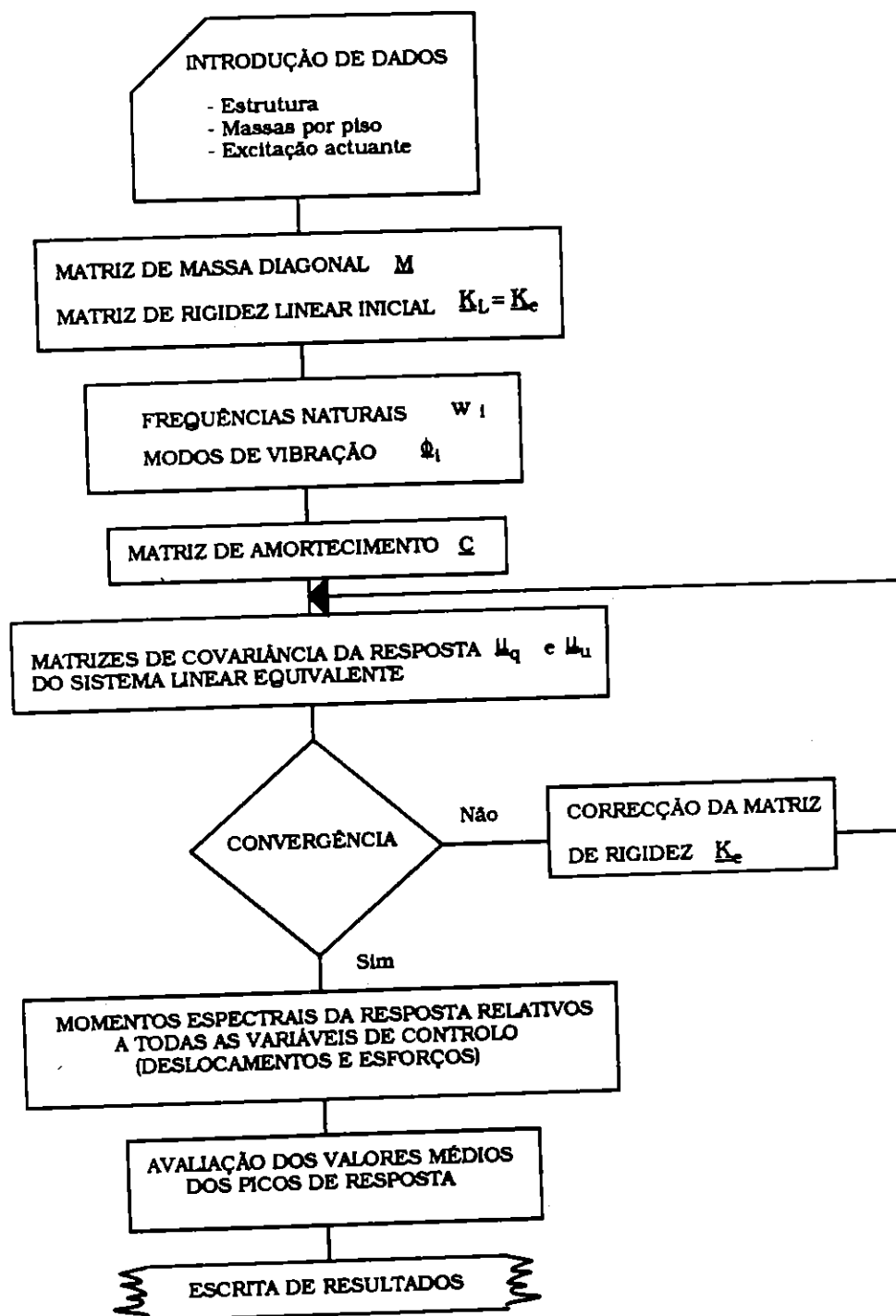


Fig. 2.5 - Fluxograma simplificado do programa STBIL.

### 2.10.3 - Exemplos de aplicação

No sentido de ilustrar a aplicação do programa de cálculo STBIL à análise estocástica da resposta sísmica de estruturas do tipo "shear-building", apresentam-se seguidamente dois exemplos julgados bastante sugestivos, e que possibilitam, em particular, constatar o apreciável rigor dos resultados obtidos com base no método de linearização equivalente.

O primeiro exemplo diz respeito a uma estrutura de um único piso, com pilares dotados de comportamento bilinear elástico, apresentando as seguintes características:

- Rigidez inicial dos pilares ( $k^0$ ) ..... 40000 KN/m
- Deslocamento de cedência ( $\alpha_y$ ) ..... 0,00375 m
- Massa do piso (m) ..... 200 t
- Coeficiente de amortecimento ( $\xi$ ) ..... 0,05

tendo-se suposto que a relação  $\alpha$  entre a rigidez pós-cedência  $k^1$  e a rigidez inicial  $k^0$  poderia assumir diversos valores entre 1 (regime elástico linear) e 0 (regime elasto-plástico).

A aceleração sísmica horizontal foi idealizada através de um modelo estacionário correspondente à definição da acção sísmica tipo 1, indicada pelo Regulamento Português de Segurança e Acções em Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA), tendo-se considerado a estrutura fundada em terreno tipo II e localizada na zona A do território nacional.

A análise da resposta sísmica estacionária foi realizada quer através da utilização do programa STBIL, quer mediante o recurso a técnicas de simulação numérica, por forma a ser possível avaliar a ordem de grandeza dos erros cometidos em resultado da aplicação do método de linearização equivalente.

Para este efeito, foi gerado, com base na equação (2.216), um acelerograma artificial, correspondente a uma amostra de duração apreciável ( $T = 81,92s$ ) de um processo estocástico estacionário de valor médio nulo, caracterizado pelo espectro de potência  $G_{\ddot{u}_v}(f)$  indicado pelo RSA para o tipo de acção sísmica mencionado. A análise da evolução temporal da resposta foi efectuada com recurso a um programa de integração no tempo baseado no método de Newmark [31] e tomando um passo de integração de 0,01 s, tendo-se posteriormente realizado um tratamento estatístico dos resultados obtidos, para o que se admitiu o carácter estacionário e ergódico do processo

de resposta, por forma a ser possível obter estimativas dos principais parâmetros estatísticos relativos a diversas variáveis de controlo, tendo apenas em consideração uma amostra de grande extensão de uma única realização da resposta.

Nestas circunstâncias, foi possível obter, por estas duas vias alternativas, estimativas das seguintes grandezas:

- desvio padrão do deslocamento do piso relativamente à base;
- desvios padrões das correspondentes velocidades e acelerações;
- desvio padrão da força de restituição não-linear;
- valor médio dos picos de resposta num intervalo de tempo com 10 s de duração;

encontrando-se os valores obtidos representados graficamente nas figuras 2.6 a 2.8 (a).

Complementarmente apresentam-se ainda sob forma gráfica os seguintes elementos (Fig. 2.8 (b) a 2.13):

- valores da rigidez equivalente correspondentes aos diversos valores considerados da relação  $\alpha$  entre a rigidez pós-cedência e a rigidez inicial;
- caracterização do acelerograma artificial considerado nas simulações numéricas;
- evolução temporal do deslocamento de piso obtida por integração no tempo, considerando quatro valores distintos de  $\alpha$ .

De realçar que, no tratamento estatístico dos resultados obtidos através das simulações numéricas realizadas, houve o cuidado de eliminar um troço inicial de características transitórias, tendo-se, por uma questão de prudência, procedido ao cálculo dos desvios padrões das diversas variáveis de controlo tomando como referência o intervalo de tempo 15 - 80 s, ao passo que o valor médio dos picos de resposta foi estimado eliminando a informação relativa aos primeiros 20 s e calculando a média dos valores máximos encontrados ao longo dos 6 intervalos de 10 s posteriores.

Da observação dos gráficos apresentados, e em particular das figuras 2.6 a 2.8, pode pois constatar-se uma excelente compatibilidade global dos resultados obtidos, quer em termos de desvios padrões, quer dos valores máximos médios, mesmo para não-linearidades muito acentuadas, sendo a diferença máxima encontrada da ordem dos 10%.

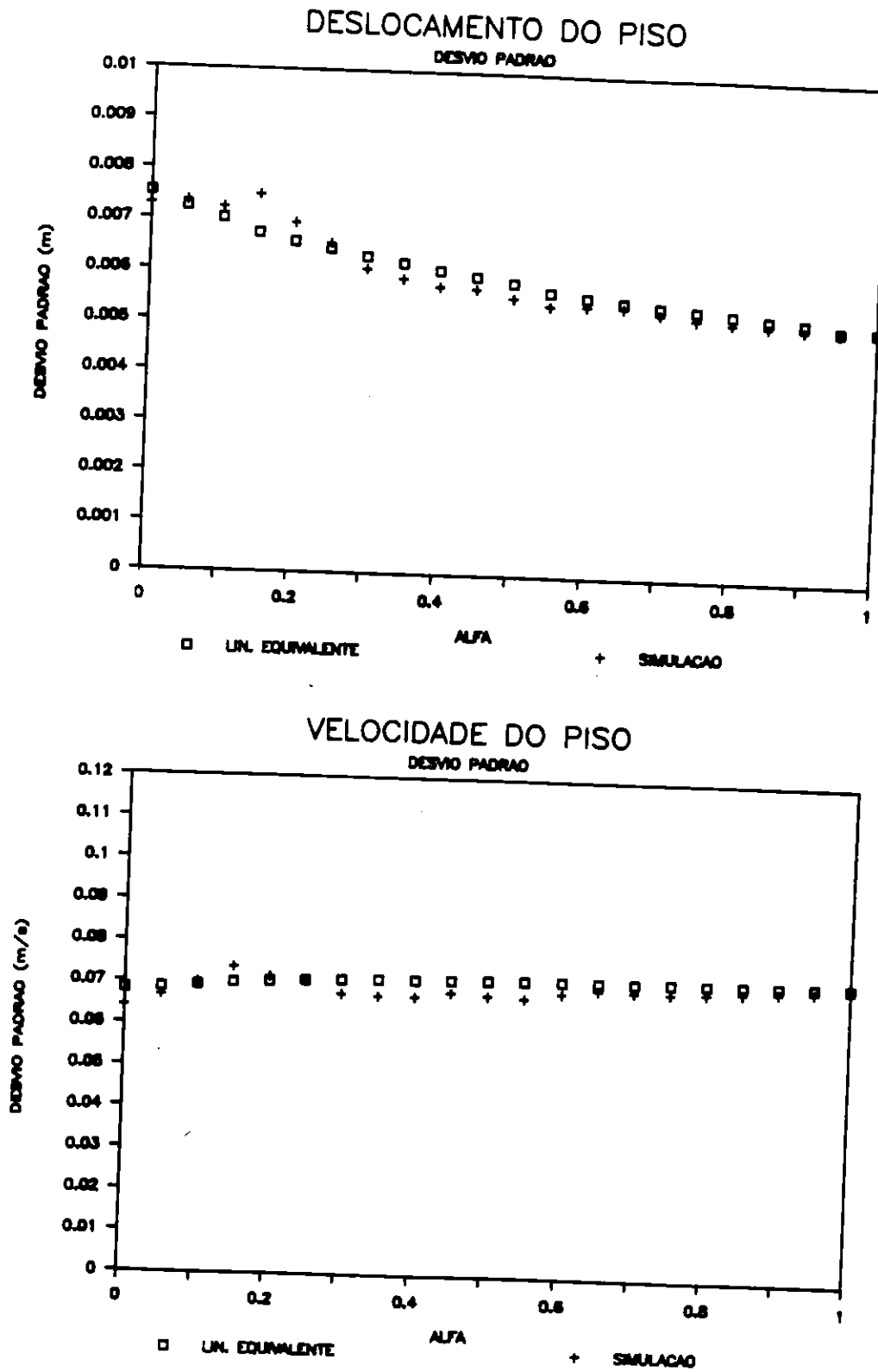


Fig. 2.6 - Variação do desvio padrão do deslocamento e da velocidade do piso com  $\alpha$ .



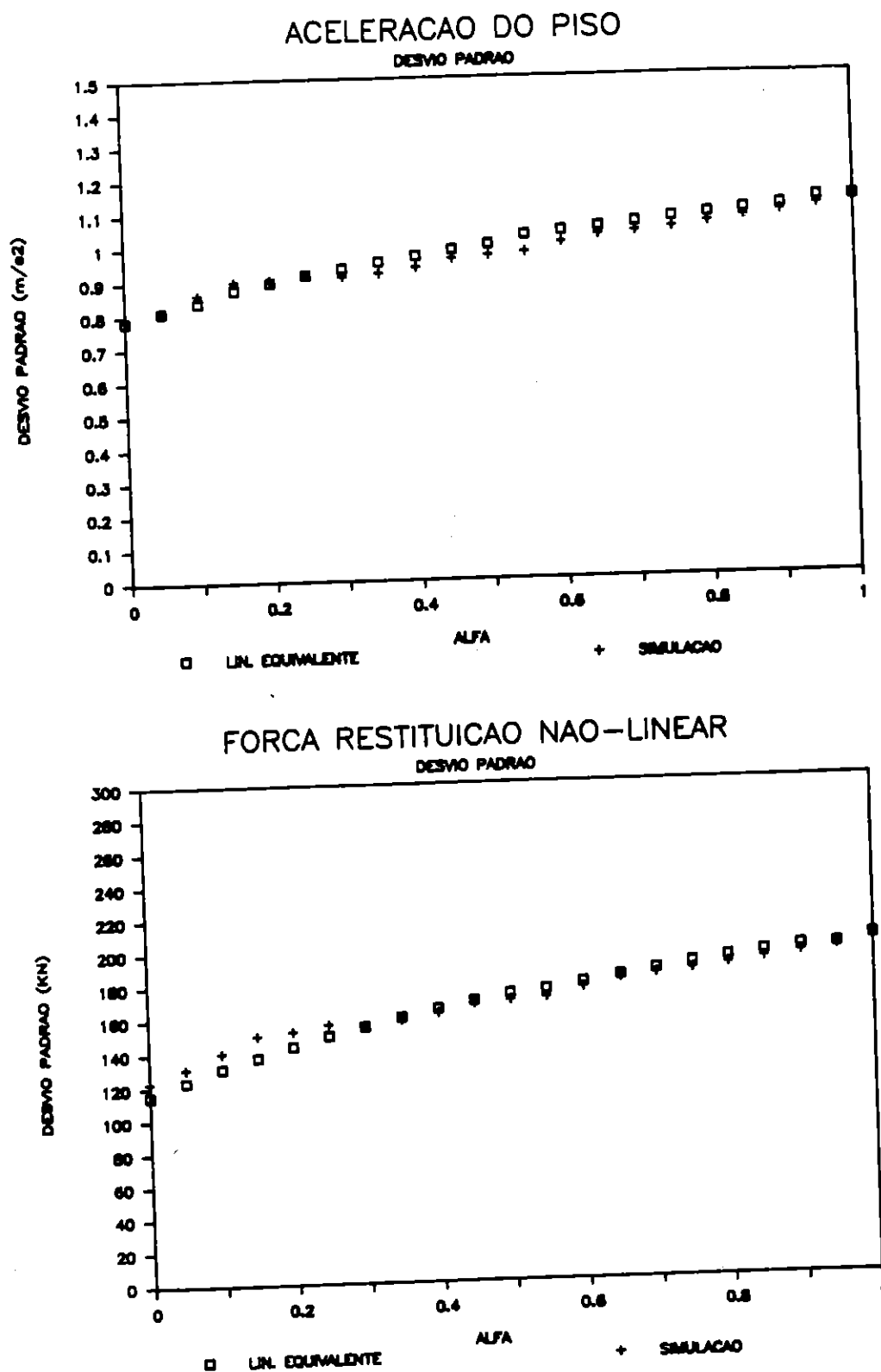


Fig. 2.7 - Variação do desvio padrão da aceleração do piso e da força de restituição não-linear com  $\alpha$

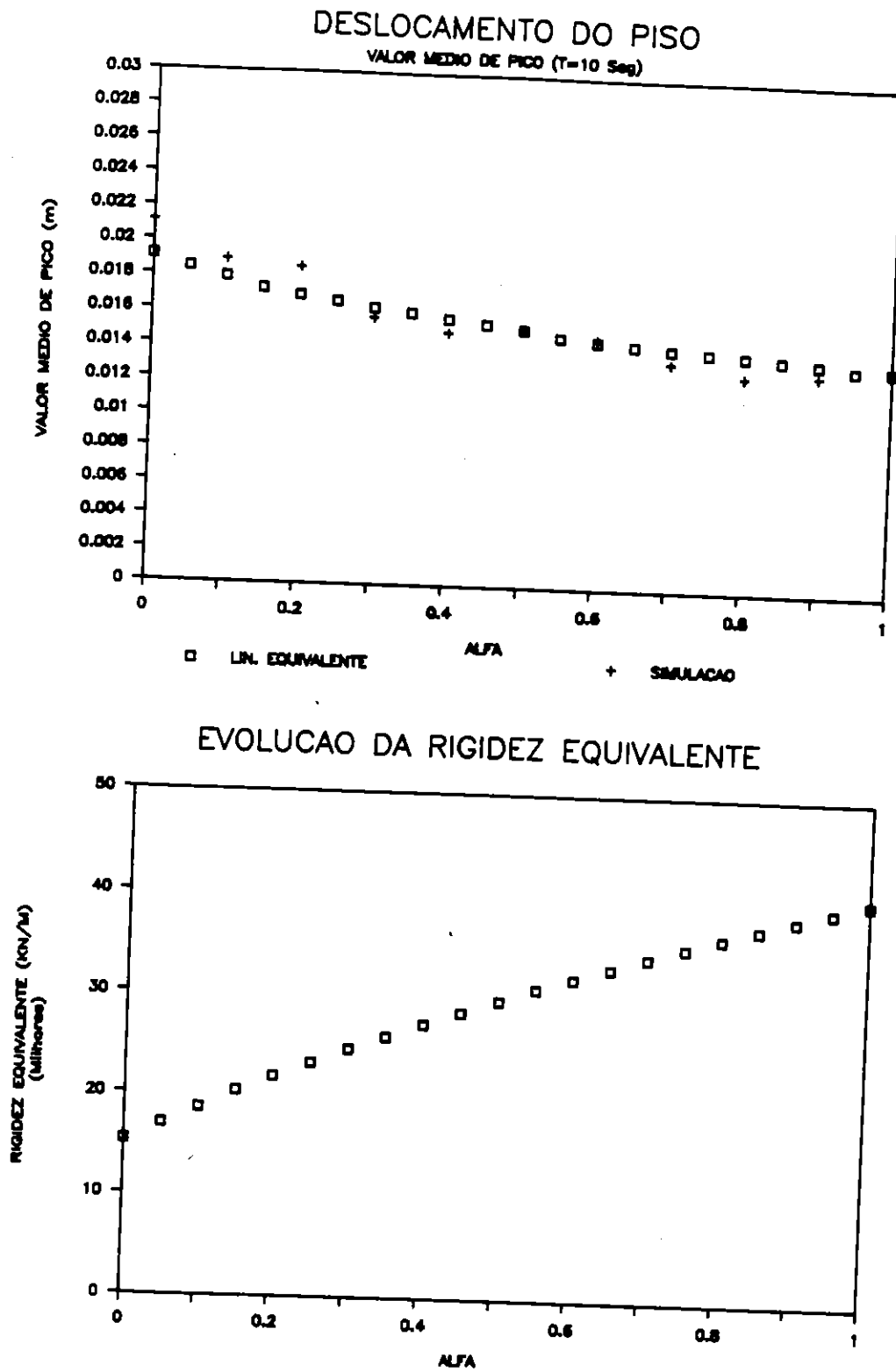


Fig. 2.8 - Variação do valor máximo médio do deslocamento do piso ( $\alpha$ ) e da rigidez equivalente com  $\alpha$  ( $b$ ).

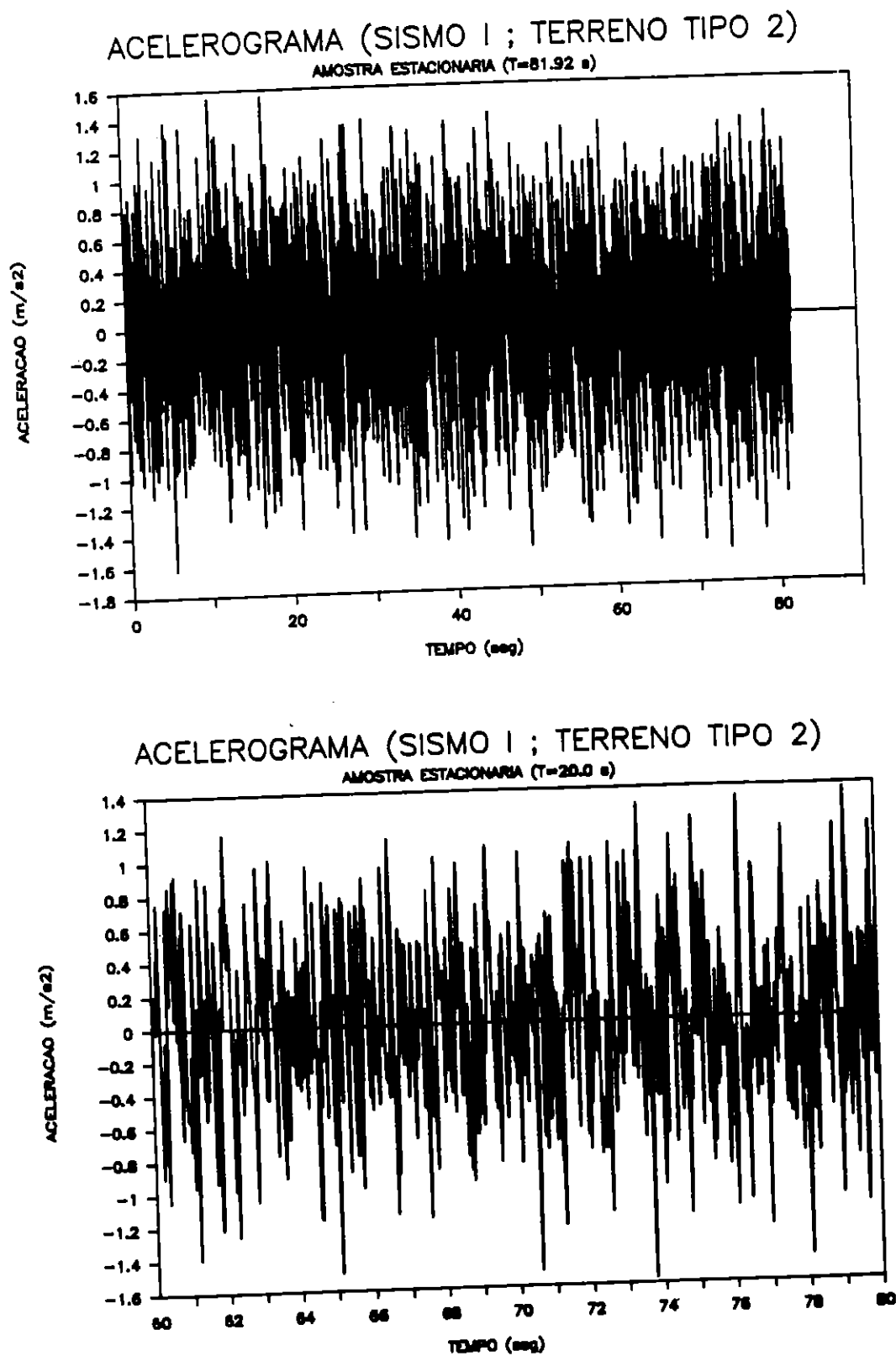


Fig. 2.9 - Acelerograma artificial utilizado na simulação.

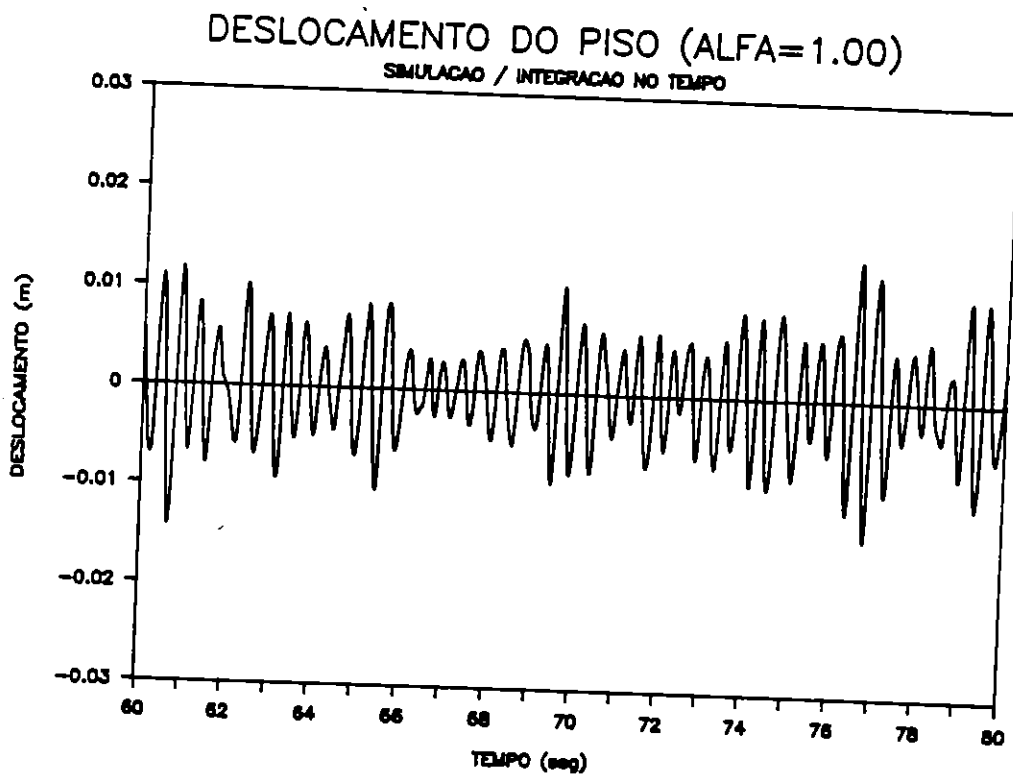
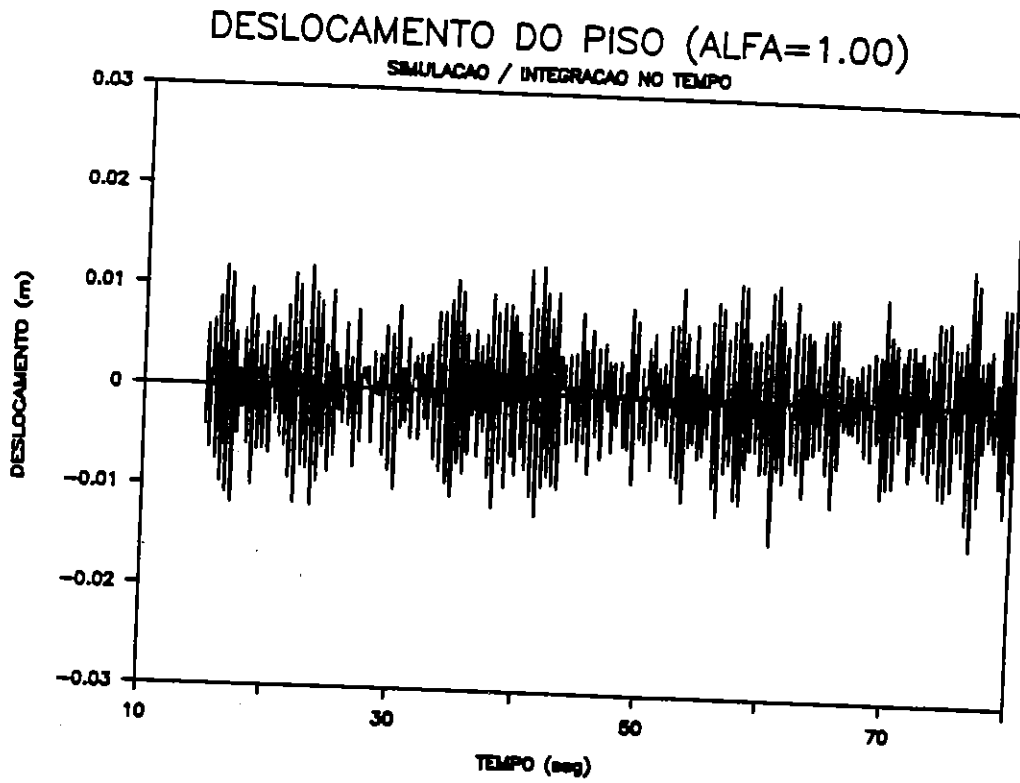


Fig. 2.10 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com  $\alpha = 1,00$ .

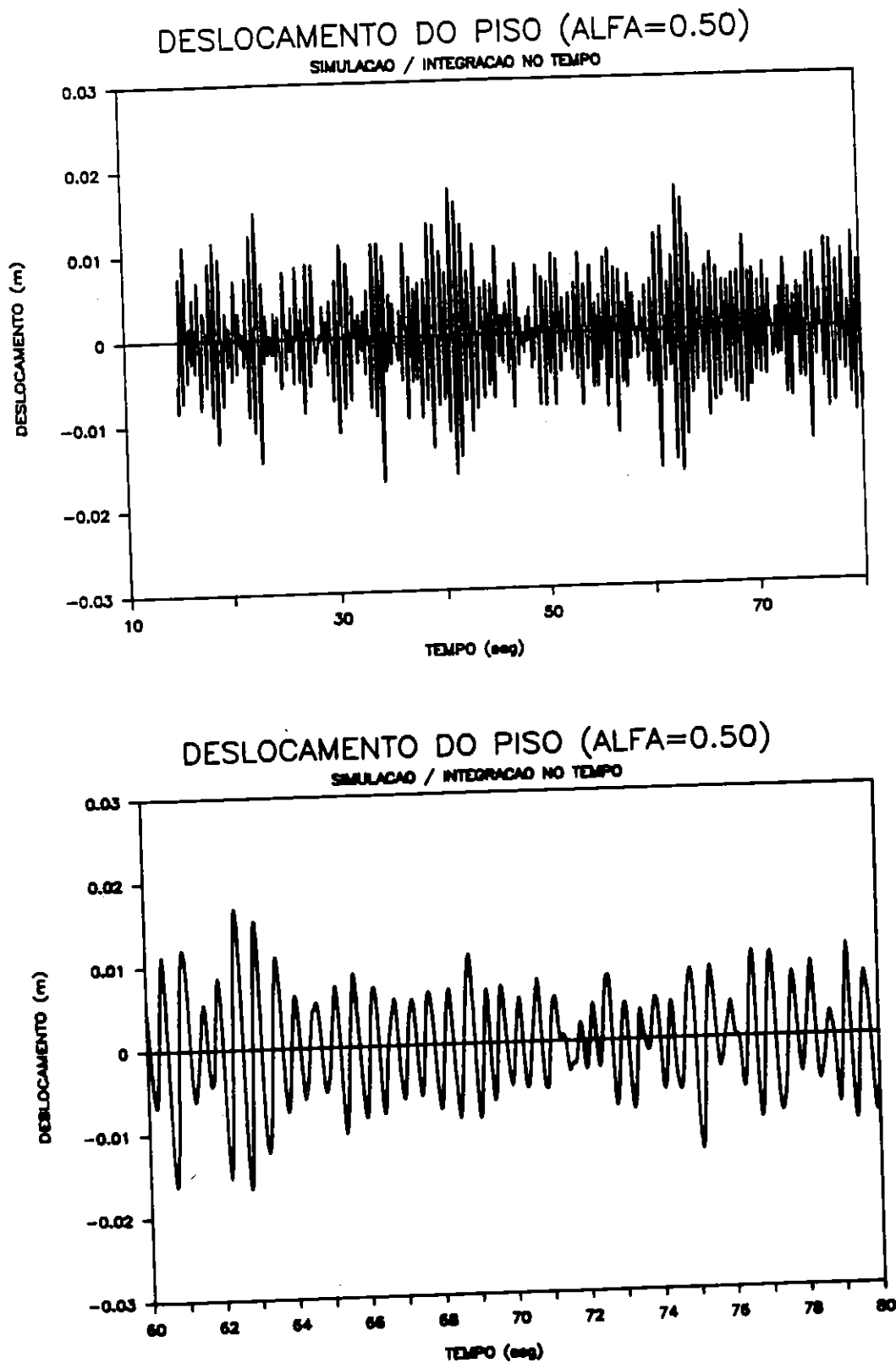


Fig. 2.11 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com  $\alpha = 0,50$ .

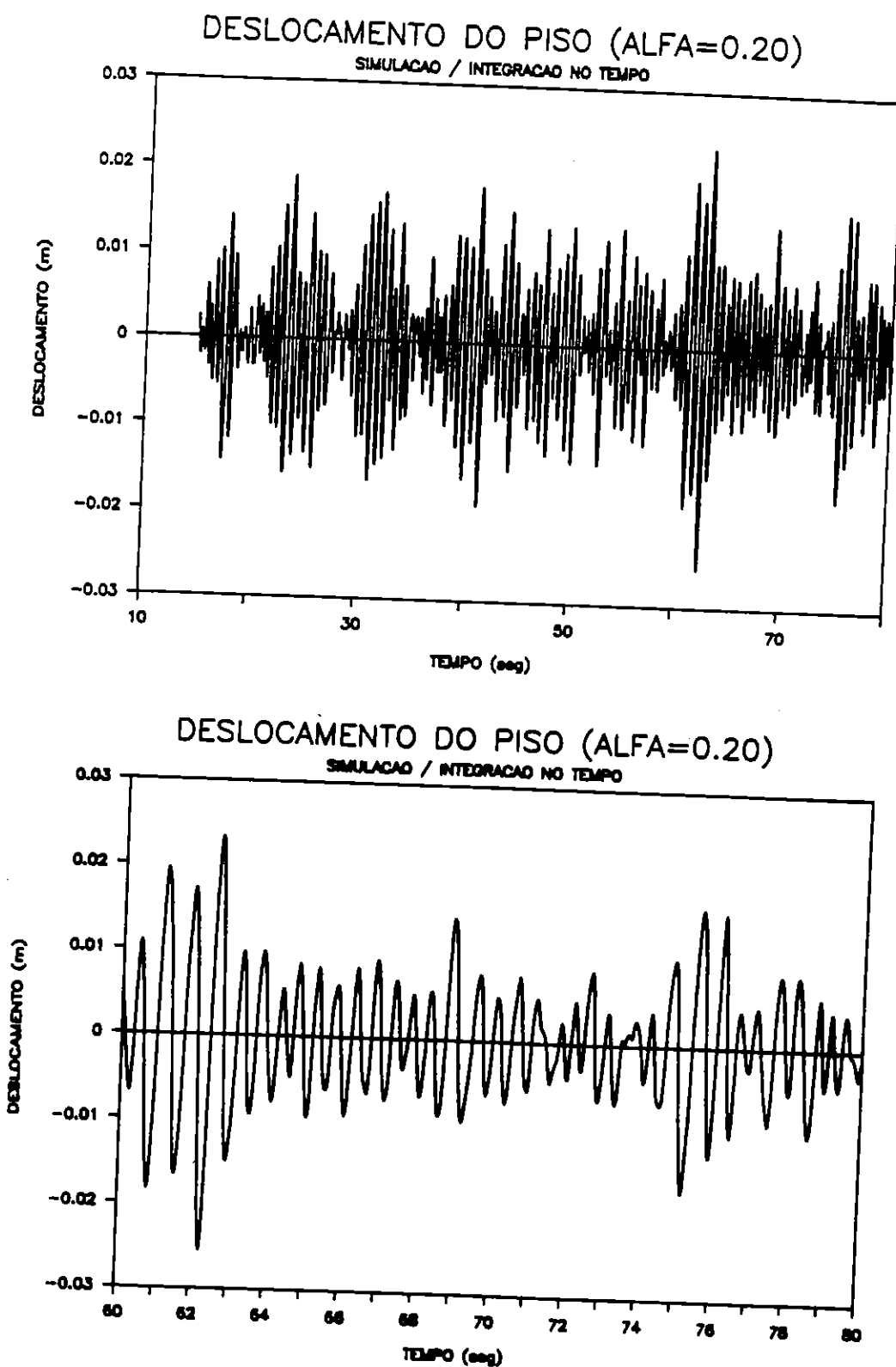


Fig. 2.12 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com  $\alpha = 0,20$ .

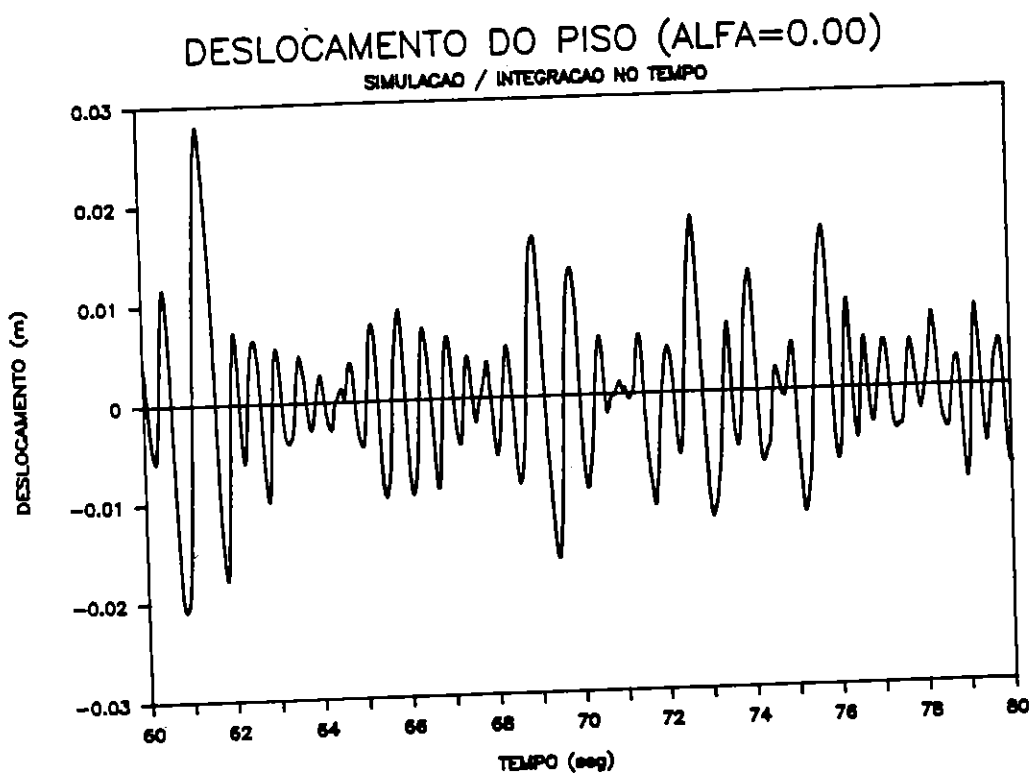
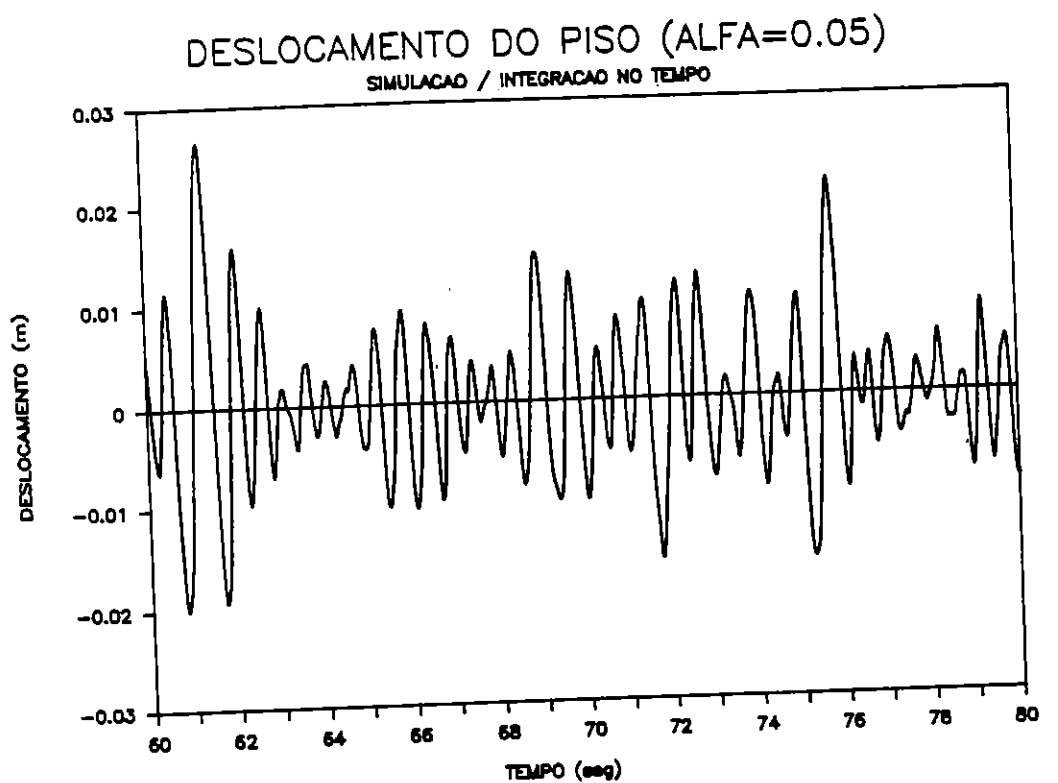


Fig. 2.13 - Evolução temporal do deslocamento de piso obtida por simulação numérica com  $\alpha = 0,05$  e  $\alpha = 0,00$ .

Um segundo exemplo tratado refere-se a uma estrutura de tipo "shear-building" com 5 pisos, com pilares igualmente dotados de comportamento bilinear elástico, apresentando as seguintes características

- Rigidez inicial dos pilares ( $k_i^o, i = 1, \dots, 5$ ) ..... 40000 KN/m
- Deslocamento de cedência ( $\alpha_{y_i}, i = 1, \dots, 5$ ) ..... 0,005 m
- Factor de endurecimento ( $\alpha_i = k_i^1 / k_i^o, i = 1, \dots, 5$ ) ..... 0,10
- Massa por piso ( $m_i, i = 1, \dots, 5$ ) ..... 200 t
- Coeficiente de amortecimento ( $\xi$ ) ..... 0,05

A análise da resposta sísmica estacionária foi igualmente realizada através das duas vias anteriormente referidas, e seguindo um procedimento inteiramente semelhante, tendo-se suposto a actuação da mesma acção sísmica regulamentar.

Os principais resultados obtidos através das simulações numéricas realizadas, designadamente os desvios padrões dos deslocamentos relativos entre pisos consecutivos  $\sigma_{u_i}$ , das velocidades e acelerações de cada piso em relação à base,  $\sigma_{\dot{q}_i}$  e  $\sigma_{\ddot{q}_i}$ , das forças de restituição não-linear relativas a cada troço de pilares  $\sigma_{r_p}$ , e dos valores médios dos picos de resposta em termos de deslocamentos relativos entre andares  $E \left[ \max_T |u_i| \right]$  para  $T = 10s$ , encontram-se condensados no quadro 2.1. Simultaneamente, apresentam-se no quadro 2.2 as diferenças relativas alcançadas mediante a aplicação do método de linearização equivalente (programa STBIL), sendo a forma de convergência do processo iterativo correspondente caracterizada pela figura 2.14 (a) e pelo quadro 2.3, no qual se encontram indicados os valores assumidos pelas seguintes grandezas em cada iteração:

- F0A - frequência média de passagens ascendentes por zero  $f_{\dot{\sigma}_{u_i}}$ ;
- DPDEL - desvio padrão do deslocamento relativo,  $\sigma_{u_i}$ ;
- DELMAX - estimativa do valor médio do máximo deslocamento relativo entre pisos consecutivos com base na expressão de Vanmarke;
- DPVEL - desvio padrão  $\sigma_{\dot{u}_i}$ ;
- DPACEL - desvio padrão  $\sigma_{\ddot{u}_i}$ ;



- AY - deslocamento de cedência  $\alpha_{y_i}$ ;
- AREA1 - área  $\Omega_i^1$ ;
- AREA2 - área  $2\Omega_i^0$ ;
- K0 - rigidez inicial  $k_i^0$ ;
- K1 - rigidez pós-cedência  $k_i^1$ ;
- KEQ - rigidez equivalente  $k_i^e$ ;
- DPF - desvio padrão da força de restituição não-linear,  $\sigma_{r_i}$ .

A título complementar, apresenta-se ainda ao longo das figuras 2.14 a 2.19 informação adicional relativa às simulações numéricas realizadas, possibilitando em particular avaliar o grau de incursão de cada troço de pilares no regime não-linear.

Da observação dos quadros 2.1 e 2.2 pode novamente constatar-se que, apesar de se haver considerado uma forma de comportamento acentuadamente não-linear, se regista uma satisfatória compatibilidade global de resultados, em particular no que respeita às forças de restituição não-linear, verificando-se inclusivamente que as maiores diferenças relativas dizem respeito ao troço de pilares cujas incursões em regime não-linear são menos significativas (troço 5).

TROÇO	$\sigma_{u_i}$ (m)	$\sigma_{\dot{q}_i}$ (m/s)	$\sigma_{\ddot{q}_i}$ (m/s <sup>2</sup> )	$\sigma_{r_i}$ (kN)	$E[\max_{\tau}  u_i ]$ (m)
1	0,01437	0,04952	0,5947	209,1	0,03652
2	0,01088	0,07433	0,6030	188,2	0,02758
3	0,00611	0,08830	0,5965	158,1	0,01658
4	0,00335	0,09644	0,6040	121,7	0,00852
5	0,00184	0,10183	0,6165	73,2	0,00529

Quadro 2.1 - Resultados obtidos por simulação numérica.

TROÇO	$\sigma_{u_i}$	$\sigma_{\dot{q}_i}$	$\sigma_{\ddot{q}_i}$	$\sigma_{r_i}$	$E\left[\max_T  u_i \right]$
1	+ 13,7	+ 6,5	- 6,2	- 1,1	+ 4,0
2	+ 5,2	+ 8,0	- 4,8	- 1,8	- 8,0
3	+ 2,7	- 2,4	- 5,8	- 2,0	- 9,8
4	- 5,5	+ 6,4	- 5,6	- 6,6	- 6,3
5	- 17,2	+ 5,0	- 4,6	- 16,8	- 25,0

Quadro 2.2 - Diferenças relativas encontradas por aplicação do método de linearização equivalente (em %).

Resposta Aleatória de Sistemas Não-Lineares

ITERACAO N. 1

PISO	FMA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.01	0.00869	0.02243	0.04542	0.63442	0.00500	0.28697	0.42606	40000.	4000.	19338.	171.97
2	0.75	0.00805	0.01970	0.03781	0.40287	0.00500	0.24721	0.46858	40000.	4000.	20761.	167.08
3	0.02	0.00682	0.01712	0.03508	0.38653	0.00500	0.23181	0.53639	40000.	4000.	23310.	159.02
4	1.01	0.00526	0.01374	0.03347	0.37717	0.00500	0.17083	0.65834	40000.	4000.	27700.	145.65
5	1.46	0.00313	0.00867	0.02850	0.42901	0.00500	0.05514	0.88972	40000.	4000.	36030.	112.81

ITERACAO N. 2

PISO	FMA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.68	0.00991	0.02465	0.04214	0.57214	0.00500	0.30699	0.38603	40000.	4000.	17897.	177.40
2	0.59	0.00831	0.01974	0.03066	0.25504	0.00500	0.27373	0.45254	40000.	4000.	20291.	168.65
3	0.68	0.00638	0.01564	0.02726	0.21738	0.00500	0.21672	0.56655	40000.	4000.	24396.	155.72
4	0.91	0.00425	0.01097	0.02439	0.22139	0.00500	0.11961	0.76077	40000.	4000.	31388.	133.35
5	1.14	0.00187	0.00498	0.01331	0.14597	0.00500	0.00369	0.99262	40000.	4000.	39734.	74.15

ITERACAO N. 3

PISO	FMA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.65	0.01069	0.02636	0.04356	0.57073	0.00500	0.32005	0.35991	40000.	4000.	16957.	181.33
2	0.57	0.00847	0.01992	0.03026	0.24056	0.00500	0.27740	0.44519	40000.	4000.	20027.	169.56
3	0.68	0.00605	0.01485	0.02597	0.20377	0.00500	0.20416	0.59168	40000.	4000.	25301.	152.99
4	0.92	0.00366	0.00949	0.02121	0.19745	0.00500	0.08611	0.82777	40000.	4000.	33800.	123.80
5	1.13	0.00163	0.00435	0.01157	0.12759	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	65.23

ITERACAO N. 7

PISO	FOA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.57	0.01311	0.03142	0.04729	0.56358	0.00500	0.35144	0.29712	40000.	4000.	14696.	192.64
2	0.52	0.00926	0.02126	0.02053	0.21413	0.00500	0.29457	0.41086	40000.	4000.	18791.	173.96
3	0.65	0.00565	0.01378	0.02304	0.17361	0.00500	0.18809	0.62381	40000.	4000.	26457.	149.49
4	0.86	0.00315	0.00812	0.01710	0.15734	0.00500	0.05632	0.88736	40000.	4000.	35945.	113.29
5	1.06	0.00157	0.00417	0.01045	0.11328	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	62.81

ITERACAO N. 8

PISO	FOA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.56	0.01395	0.03315	0.04870	0.56239	0.00500	0.36000	0.27999	40000.	4000.	14080.	196.40
2	0.51	0.00974	0.02217	0.03132	0.21082	0.00500	0.30378	0.39244	40000.	4000.	18128.	176.49
3	0.63	0.00579	0.01404	0.02293	0.16869	0.00500	0.19395	0.61211	40000.	4000.	26036.	150.77
4	0.83	0.00319	0.00818	0.01673	0.15194	0.00500	0.05851	0.88297	40000.	4000.	35787.	114.16
5	1.02	0.00158	0.00418	0.01014	0.10841	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.13

ITERACAO N. 9

PISO	FOA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.54	0.01509	0.03546	0.05073	0.56132	0.00500	0.37020	0.25959	40000.	4000.	13345.	201.40
2	0.50	0.01046	0.02354	0.03266	0.20785	0.00500	0.31635	0.36729	40000.	4000.	17223.	180.18
3	0.61	0.00606	0.01458	0.02310	0.16415	0.00500	0.20483	0.59034	40000.	4000.	25252.	153.14
4	0.80	0.00327	0.00834	0.01637	0.14559	0.00500	0.06309	0.87383	40000.	4000.	35458.	115.92
5	0.97	0.00160	0.00420	0.00974	0.10207	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.83

ITERACAO N.10

PISO	FOA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.52	0.01623	0.03774	0.05279	0.56002	0.00500	0.37899	0.24202	40000.	4000.	12713.	206.29
2	0.48	0.01124	0.02500	0.03415	0.20463	0.00500	0.32827	0.34346	40000.	4000.	16364.	184.00
3	0.59	0.00636	0.01516	0.02309	0.15979	0.00500	0.21588	0.56823	40000.	4000.	24456.	155.54
4	0.76	0.00333	0.00841	0.01591	0.13794	0.00500	0.06650	0.88700	40000.	4000.	35212.	117.19
5	0.92	0.00160	0.00417	0.00923	0.09411	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.82

ITERACAO N.11

PISO	FOA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.51	0.01639	0.03807	0.05287	0.55810	0.00500	0.38015	0.23970	40000.	4000.	12629.	206.98
2	0.48	0.01142	0.02531	0.03433	0.20076	0.00500	0.33072	0.33856	40000.	4000.	16188.	184.83
3	0.58	0.00634	0.01511	0.02318	0.15614	0.00500	0.21533	0.56934	40000.	4000.	24496.	155.42
4	0.75	0.00323	0.00815	0.01529	0.13081	0.00500	0.06102	0.87796	40000.	4000.	35607.	115.14
5	0.90	0.00154	0.00400	0.00872	0.08719	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	61.41

ITERACAO N.12

PISO	FOA	DPOEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.51	0.01624	0.03797	0.05274	0.55797	0.00500	0.37980	0.24040	40000.	4000.	12654.	206.77
2	0.48	0.01144	0.02536	0.03437	0.20046	0.00500	0.33099	0.33802	40000.	4000.	16169.	184.92
3	0.58	0.00628	0.01496	0.02300	0.15537	0.00500	0.21289	0.57421	40000.	4000.	24672.	154.89
4	0.75	0.00317	0.00799	0.01501	0.12860	0.00500	0.05727	0.88546	40000.	4000.	35876.	113.67
5	0.90	0.00152	0.00397	0.00865	0.08654	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	60.87

Quadro 2.3 - Evolução do processo iterativo.

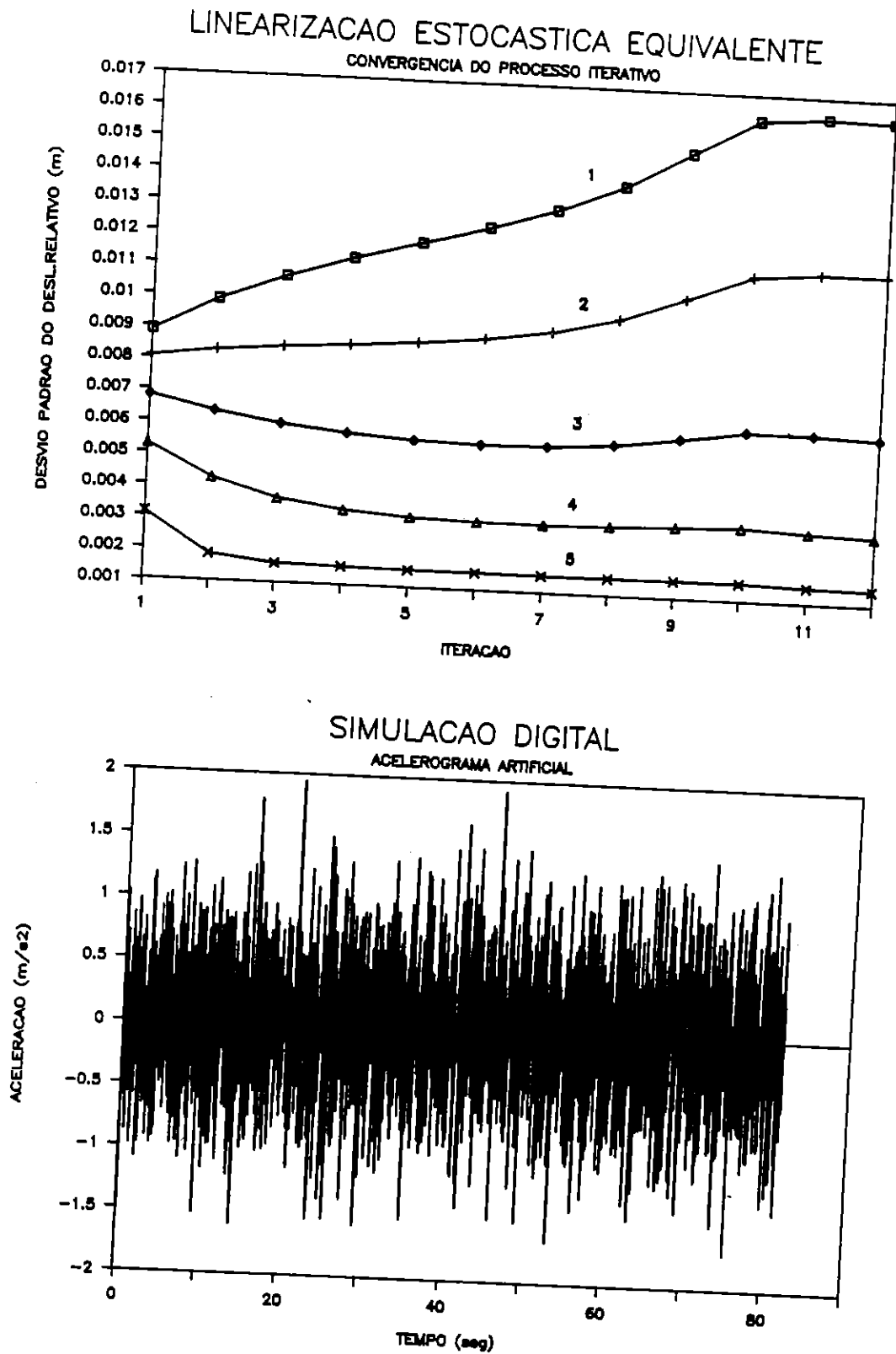


Fig. 2.14 - (a) Convergência do processo iterativo  
 (b) Acelerograma utilizado na simulação.

Resposta Aleatória de Sistemas Não-Lineares

ITERACAO N. 1

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.83	0.00869	0.02243	0.04542	0.63442	0.00500	0.28697	0.42606	40000.	4000.	19338.	171.97
2	0.73	0.00805	0.01970	0.03781	0.40287	0.00500	0.26721	0.44558	40000.	4000.	20761.	167.08
3	0.82	0.00682	0.01712	0.03508	0.38653	0.00500	0.23181	0.53639	40000.	4000.	23310.	159.02
4	1.01	0.00526	0.01374	0.03347	0.37717	0.00500	0.17083	0.65834	40000.	4000.	27700.	145.65
5	1.46	0.00313	0.00867	0.02850	0.42901	0.00500	0.05514	0.88972	40000.	4000.	36030.	112.81

ITERACAO N. 2

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.68	0.00991	0.02465	0.04214	0.57214	0.00500	0.30699	0.38603	40000.	4000.	17837.	177.40
2	0.59	0.00831	0.01974	0.03066	0.25504	0.00500	0.27373	0.45254	40000.	4000.	20291.	168.65
3	0.68	0.00638	0.01564	0.02726	0.21738	0.00500	0.21672	0.56655	40000.	4000.	24396.	155.72
4	0.91	0.00425	0.01097	0.02439	0.22139	0.00500	0.11961	0.76077	40000.	4000.	31388.	133.35
5	1.14	0.00187	0.00498	0.01331	0.14597	0.00500	0.00369	0.99262	40000.	4000.	39734.	74.15

ITERACAO N. 3

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.65	0.01069	0.02636	0.04356	0.57073	0.00500	0.32005	0.35991	40000.	4000.	16957.	181.33
2	0.57	0.00847	0.01992	0.03026	0.24056	0.00500	0.27740	0.44519	40000.	4000.	20027.	169.56
3	0.68	0.00605	0.01485	0.02597	0.20377	0.00500	0.20416	0.59188	40000.	4000.	25301.	152.99
4	0.92	0.00366	0.00949	0.02121	0.19745	0.00500	0.08611	0.82777	40000.	4000.	33800.	123.80
5	1.13	0.00163	0.00435	0.01157	0.12759	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	65.23

ITERACAO N. 7

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.57	0.01311	0.03142	0.04729	0.56358	0.00500	0.35144	0.29712	40000.	4000.	14696.	192.64
2	0.52	0.00926	0.02126	0.03053	0.21413	0.00500	0.29457	0.41086	40000.	4000.	18791.	173.96
3	0.65	0.00565	0.01378	0.02304	0.17351	0.00500	0.18809	0.62381	40000.	4000.	26457.	149.49
4	0.86	0.00315	0.00812	0.01710	0.15734	0.00500	0.05632	0.88736	40000.	4000.	35945.	113.29
5	1.06	0.00157	0.00417	0.01045	0.11328	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	62.81

ITERACAO N. 8

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.56	0.01395	0.03315	0.04870	0.56239	0.00500	0.36000	0.27999	40000.	4000.	14080.	196.40
2	0.51	0.00974	0.02217	0.03132	0.21082	0.00500	0.30378	0.39244	40000.	4000.	18128.	176.49
3	0.63	0.00579	0.01404	0.02293	0.16869	0.00500	0.19395	0.61211	40000.	4000.	26036.	150.77
4	0.83	0.00319	0.00818	0.01673	0.15194	0.00500	0.05851	0.88297	40000.	4000.	35787.	114.16
5	1.02	0.00158	0.00418	0.01014	0.10841	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.13

ITERACAO N. 9

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.54	0.01509	0.03546	0.05073	0.56132	0.00500	0.37020	0.25959	40000.	4000.	13345.	201.40
2	0.50	0.01046	0.02354	0.03266	0.20785	0.00500	0.31635	0.36729	40000.	4000.	17223.	180.18
3	0.61	0.00606	0.01458	0.02310	0.16415	0.00500	0.20483	0.59034	40000.	4000.	25252.	153.14
4	0.80	0.00327	0.00834	0.01637	0.14559	0.00500	0.06309	0.87383	40000.	4000.	35458.	115.92
5	0.97	0.00160	0.00420	0.00974	0.10207	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.83

ITERACAO N.10

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.52	0.01623	0.03774	0.05279	0.56002	0.00500	0.37899	0.24202	40000.	4000.	12713.	206.29
2	0.48	0.01124	0.02500	0.03415	0.20463	0.00500	0.32827	0.34346	40000.	4000.	16364.	184.00
3	0.59	0.00636	0.01516	0.02339	0.15979	0.00500	0.21588	0.56823	40000.	4000.	24456.	155.54
4	0.76	0.00333	0.00841	0.01591	0.13794	0.00500	0.06650	0.86700	40000.	4000.	35212.	117.19
5	0.92	0.00160	0.00417	0.00923	0.09411	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	63.82

ITERACAO N.11

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.51	0.01639	0.03807	0.05287	0.55810	0.00500	0.38015	0.23970	40000.	4000.	12629.	206.98
2	0.48	0.01142	0.02531	0.03433	0.20076	0.00500	0.33072	0.33856	40000.	4000.	16188.	184.83
3	0.58	0.00634	0.01511	0.02318	0.15614	0.00500	0.21533	0.56934	40000.	4000.	24496.	155.42
4	0.75	0.00323	0.00815	0.01529	0.13081	0.00500	0.06102	0.87796	40000.	4000.	35607.	115.14
5	0.90	0.00154	0.00400	0.00872	0.08719	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	61.41

ITERACAO N.12

\*\*\*\*\*

PISO	F0A	DPDEL	DELMAX	DPVEL	DPACEL	AY	AREA1	AREA2	K0	K1	KEQ	DPF
1	0.51	0.01634	0.03797	0.05274	0.55797	0.00500	0.37980	0.24040	40000.	4000.	12654.	206.77
2	0.48	0.01144	0.02536	0.03437	0.20046	0.00500	0.33099	0.33802	40000.	4000.	16169.	184.92
3	0.58	0.00638	0.01496	0.02300	0.15533	0.00500	0.21289	0.57421	40000.	4000.	24672.	154.89
4	0.75	0.00317	0.00799	0.01501	0.12860	0.00500	0.05727	0.88546	40000.	4000.	35876.	113.67
5	0.90	0.00152	0.00397	0.00865	0.08654	0.00500	0.00000	1.00000	40000.	4000.	40000.	60.87

Quadro 2.3 - Evolução do processo iterativo.

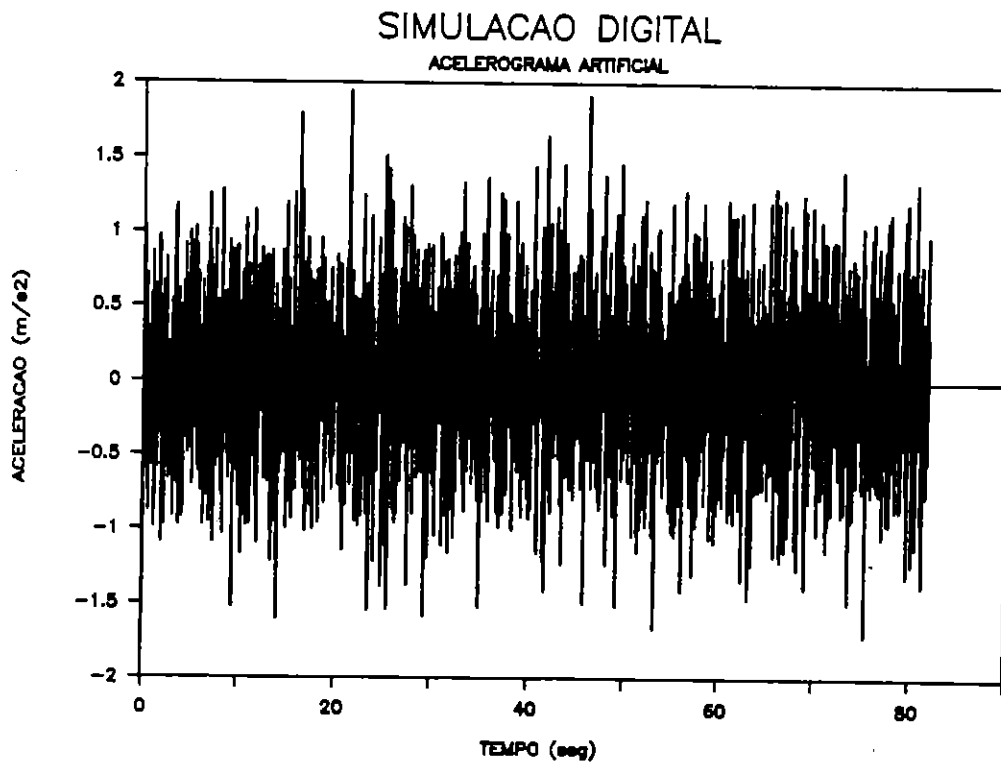
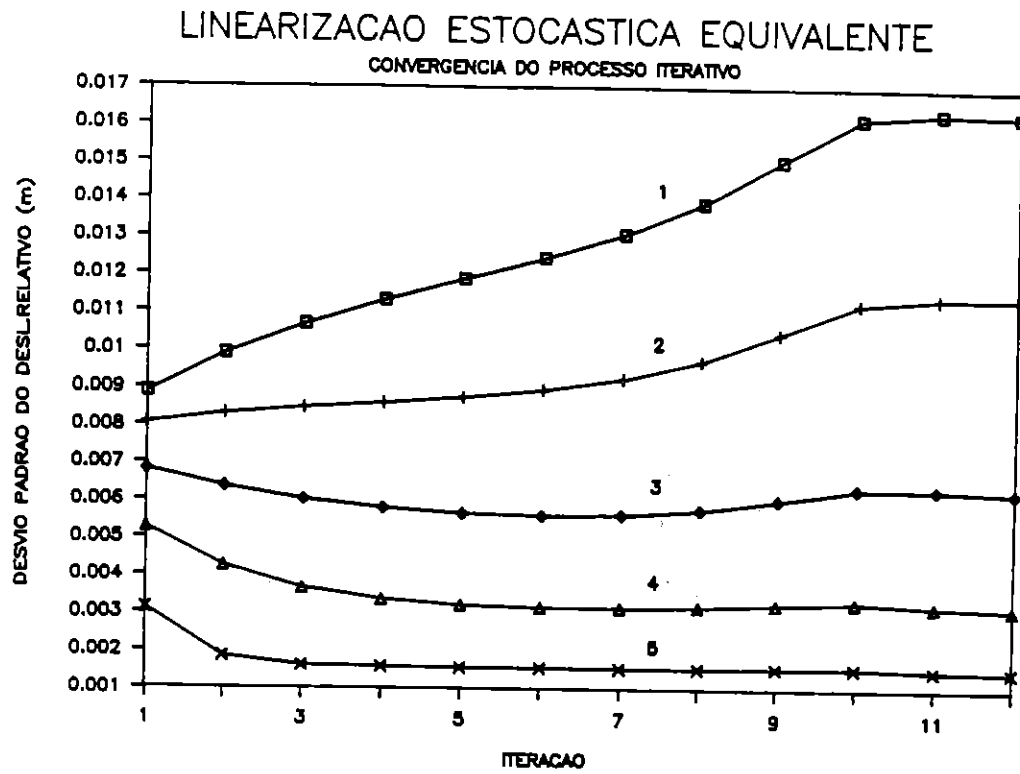


Fig. 2.14 - (a) Convergência do processo iterativo  
 (b) Acelerograma utilizado na simulação.

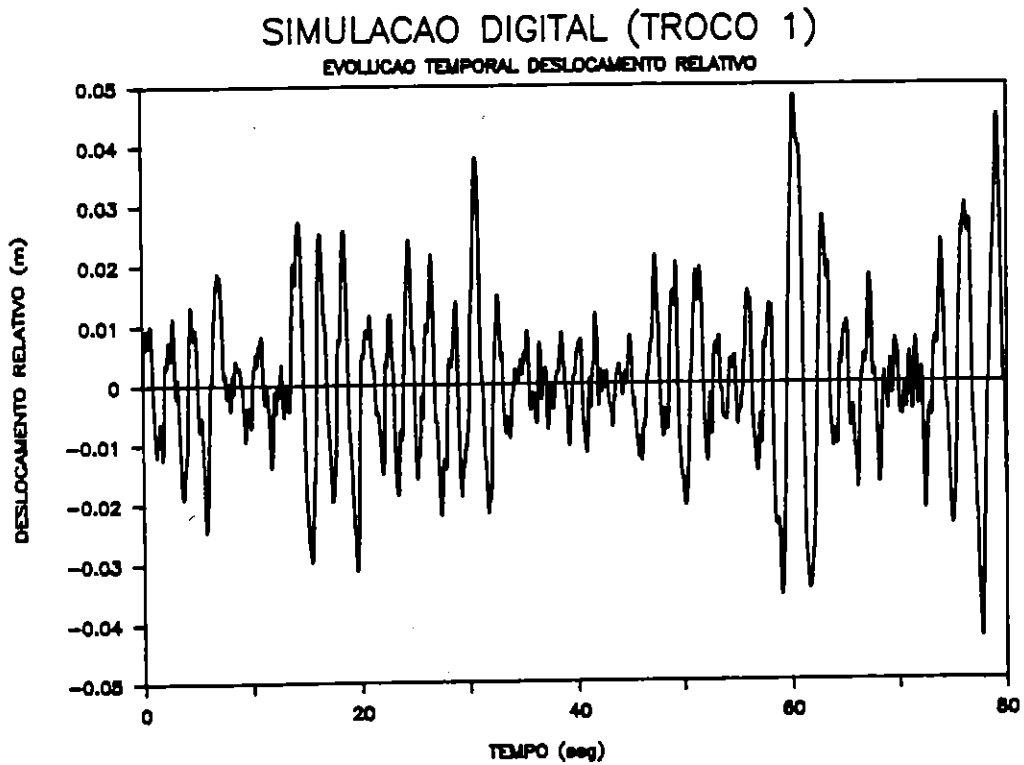
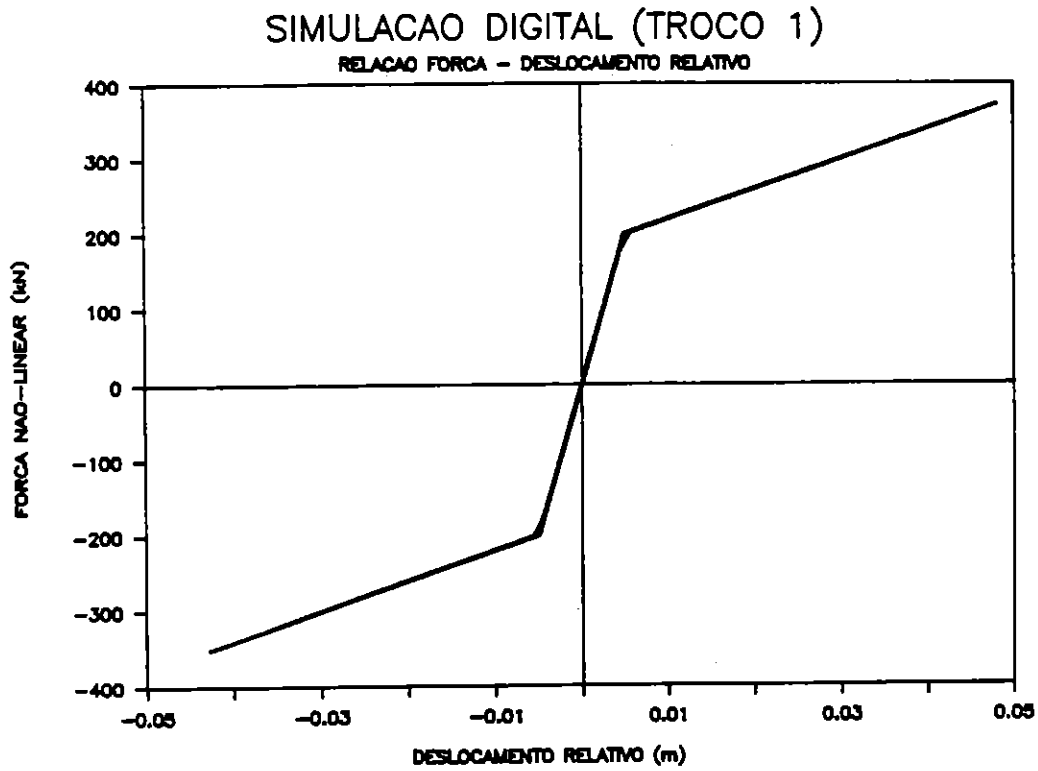


Fig. 2.15 - Simulação digital (troço 1).

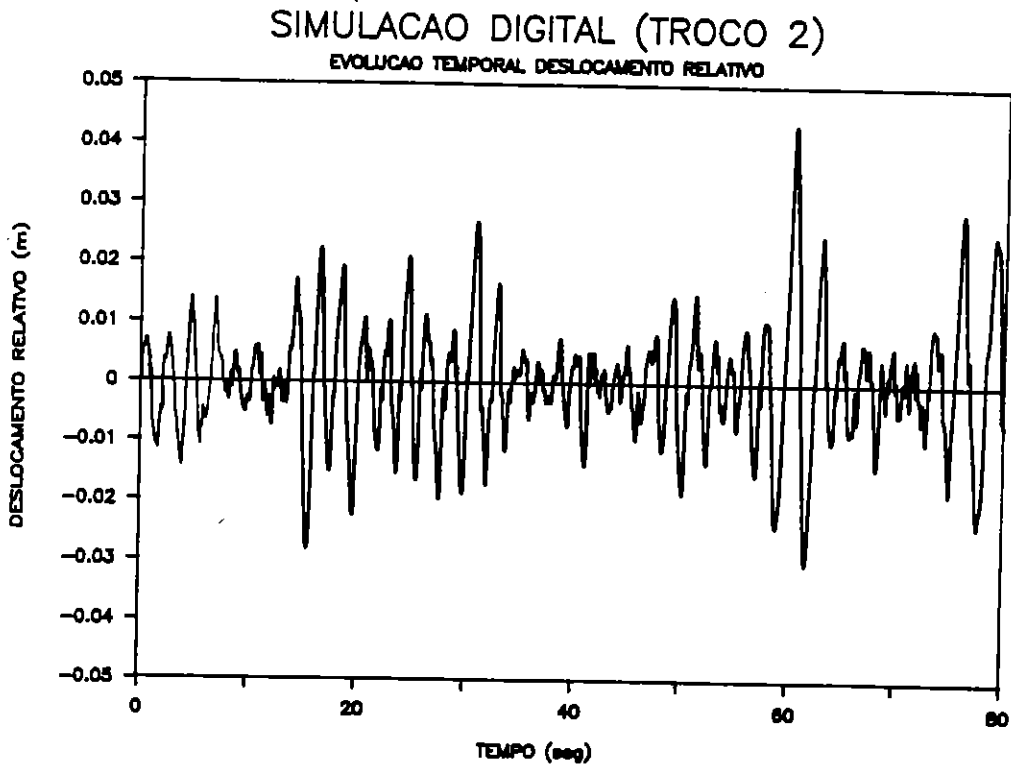
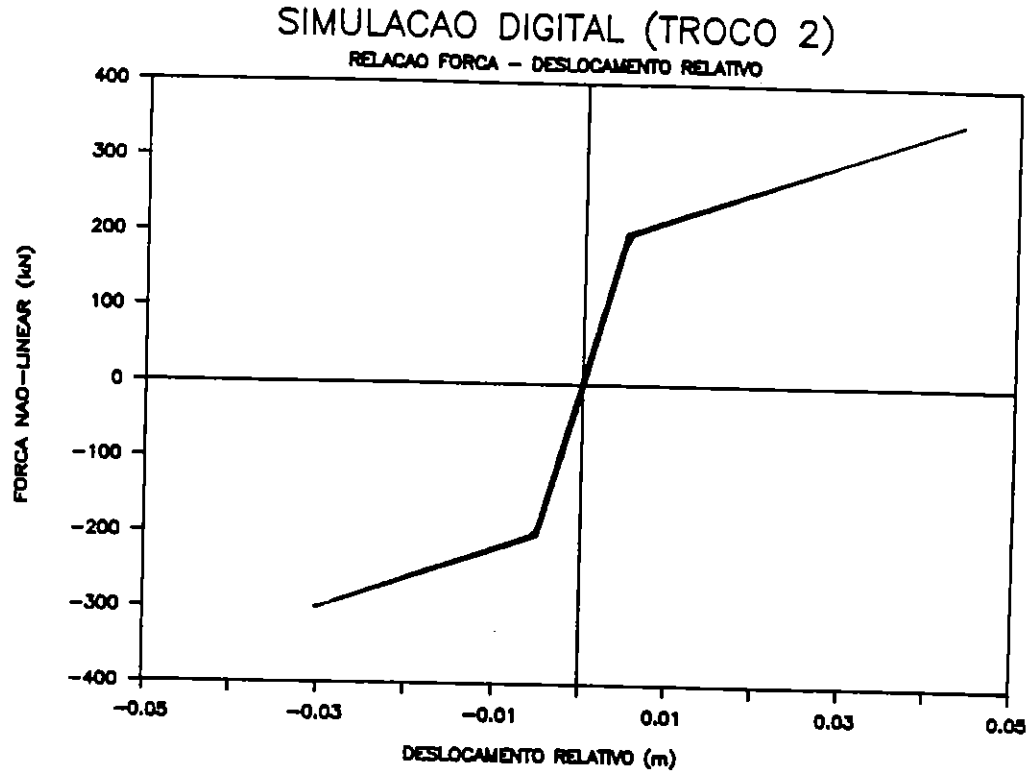


Fig. 2.16 - Simulação digital (troço 2).



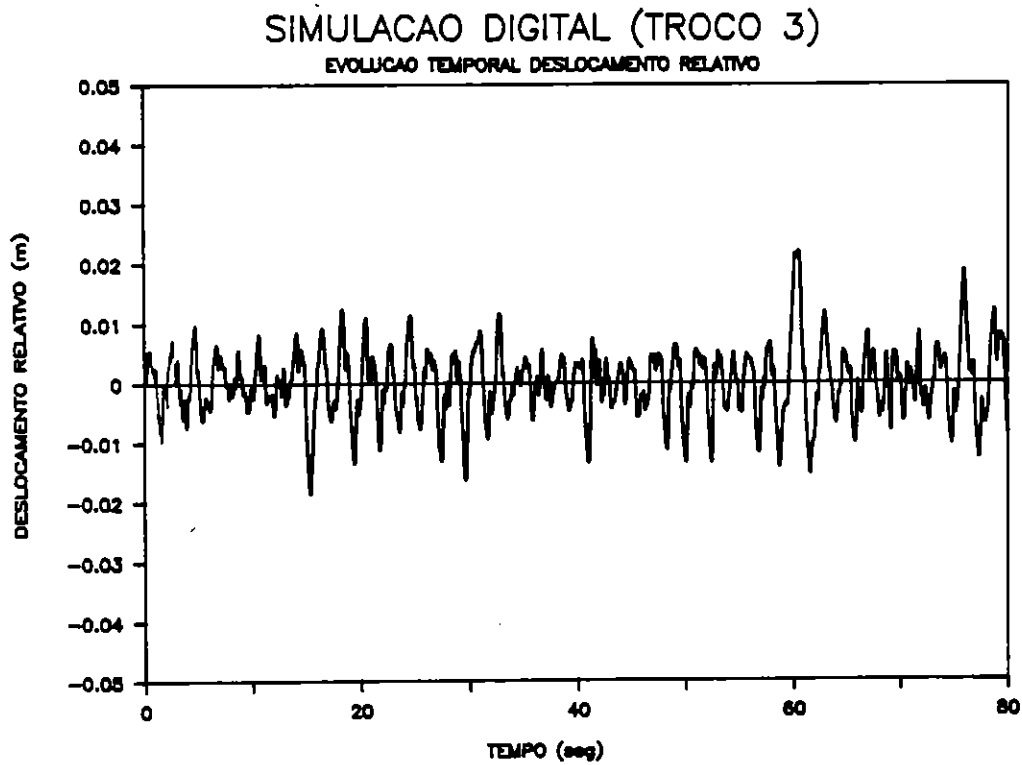
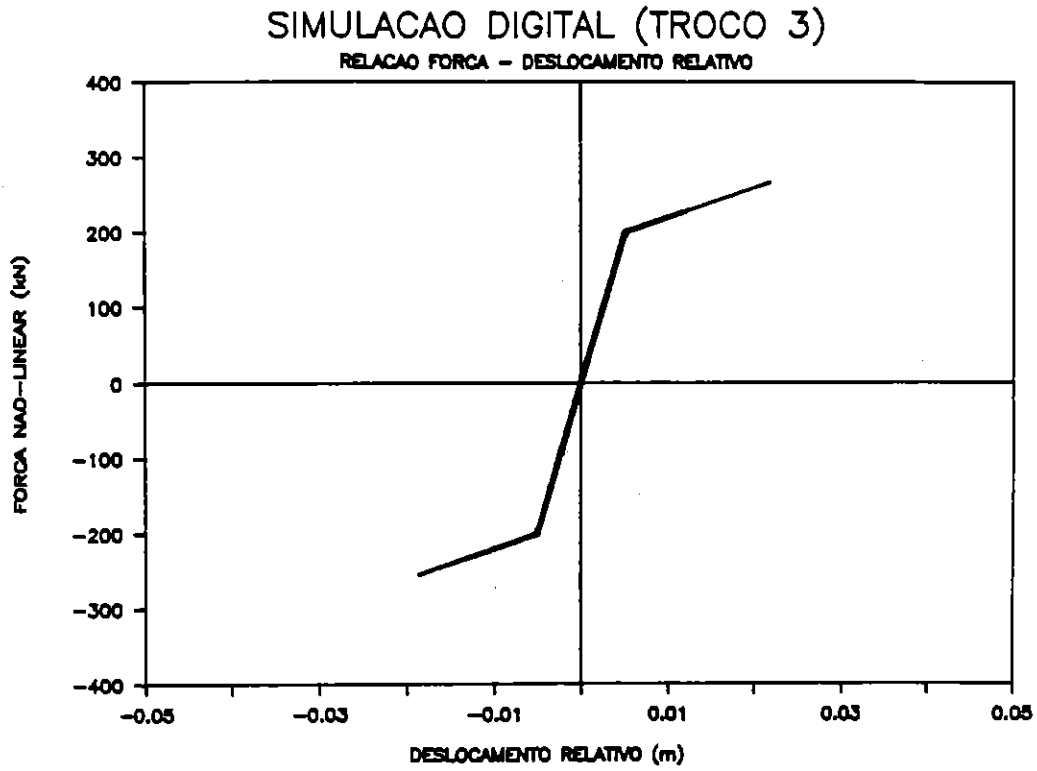


Fig. 2.17 - Simulação digital (troço 3).

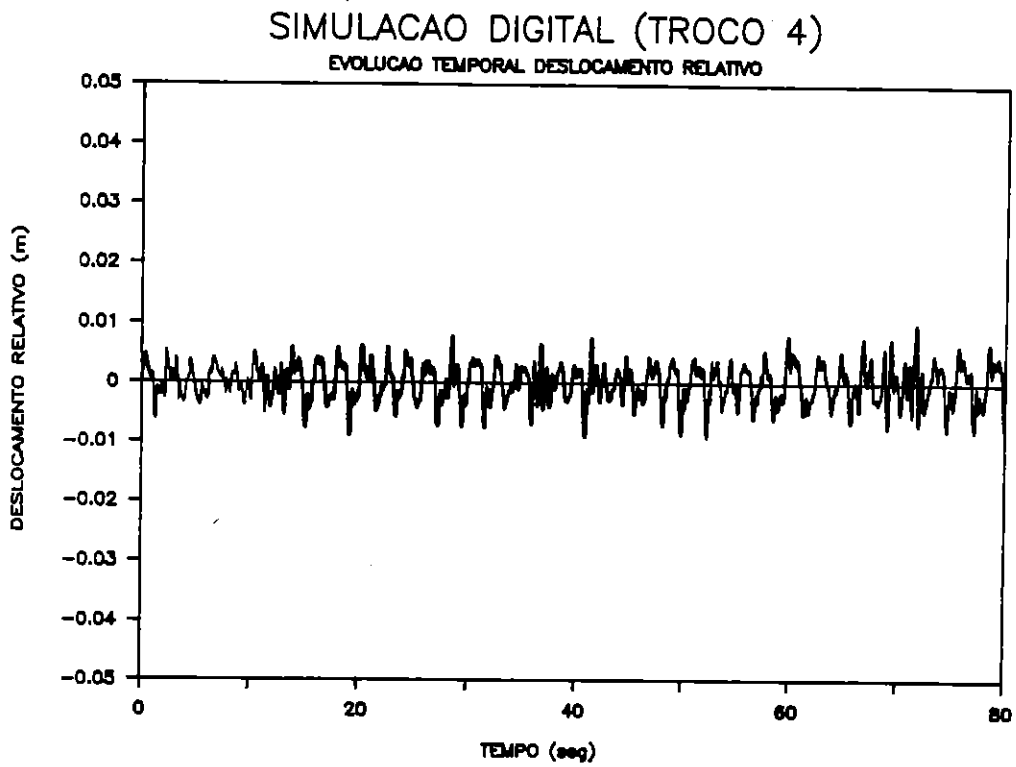
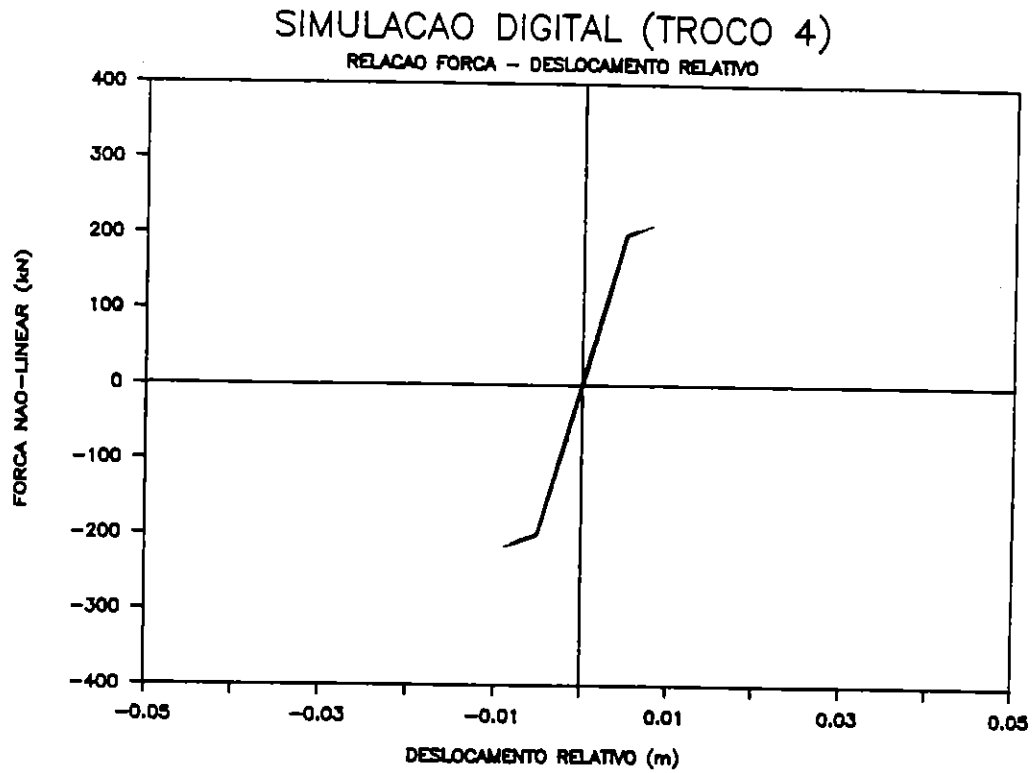


Fig. 2.18 - Simulação digital (troço 4).

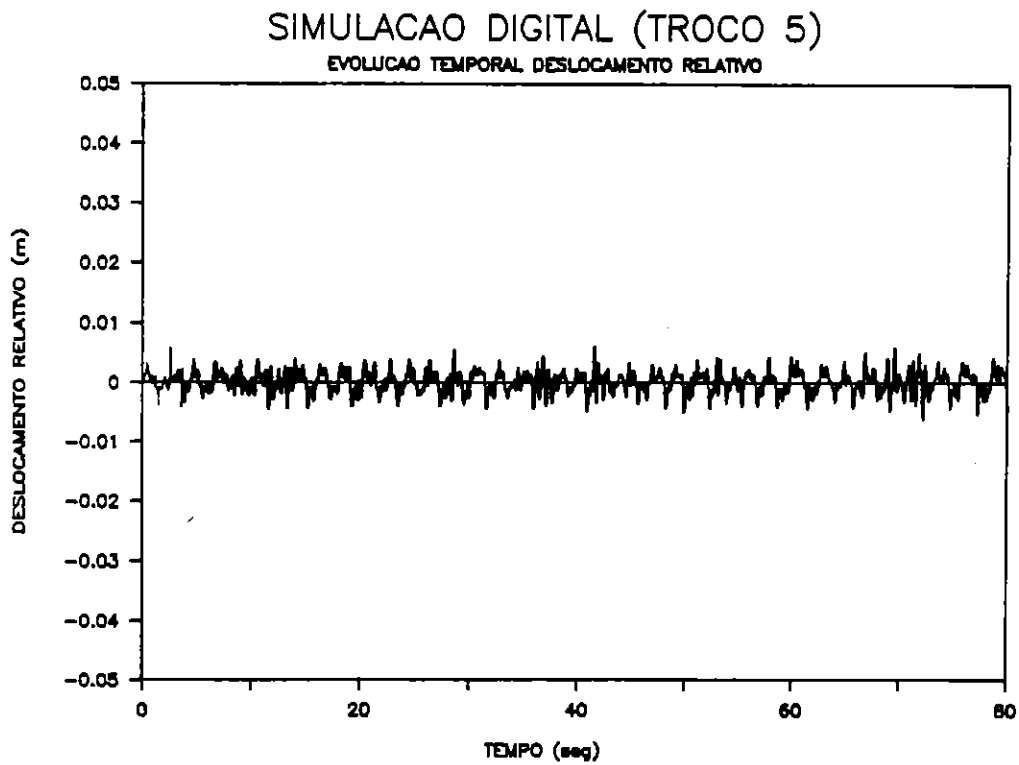
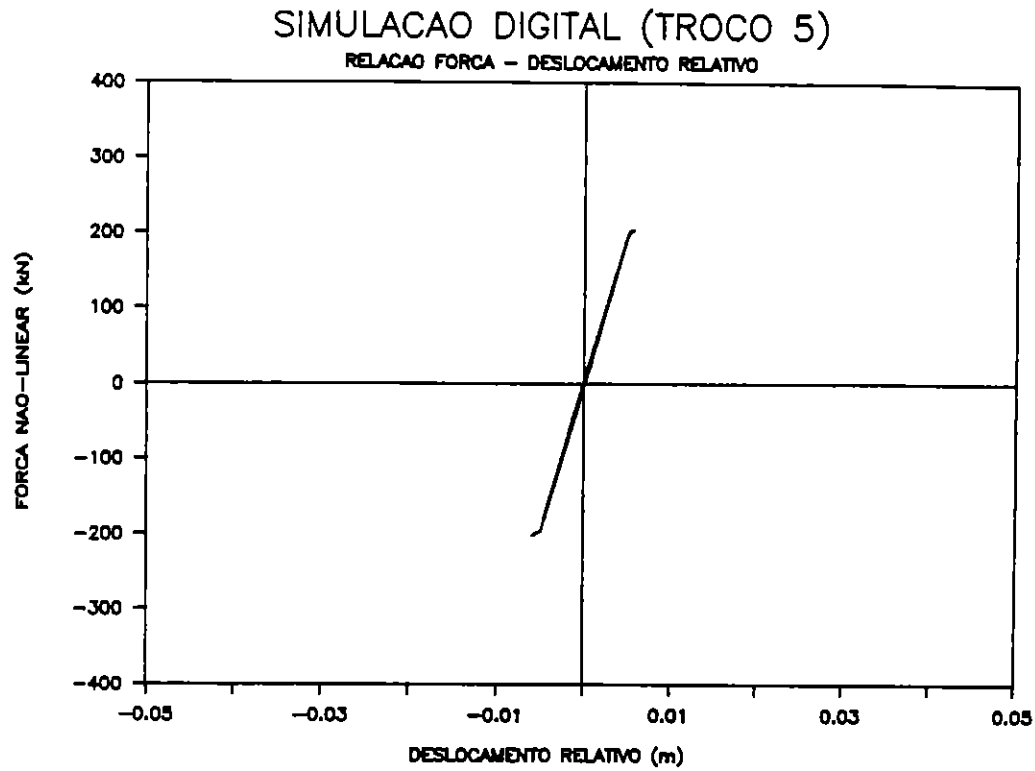
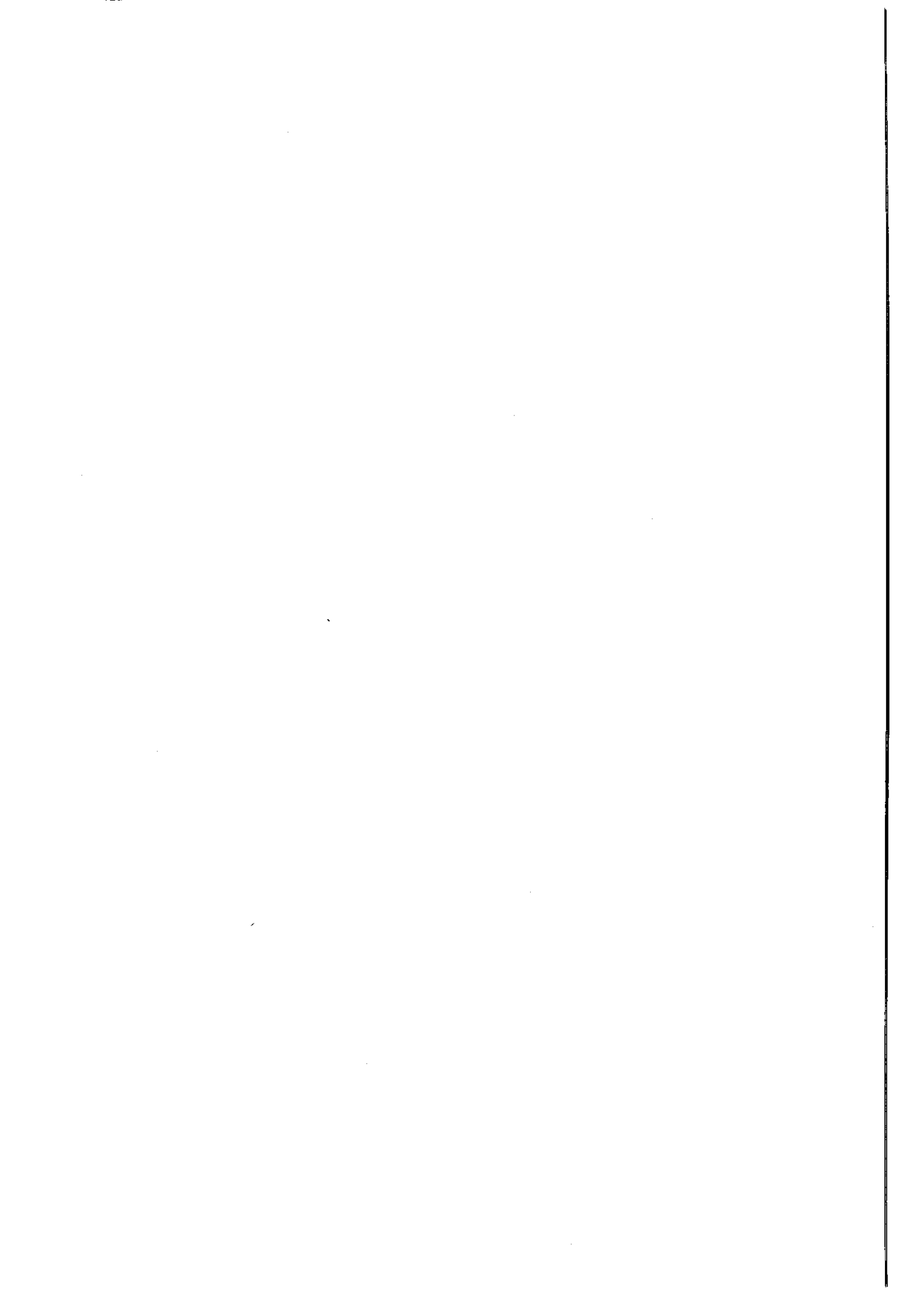


Fig. 2.19 - Simulação digital (troço 5).



# Capítulo 3

## ANÁLISE DA RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS HISTERÉTICOS PELO MÉTODO DE LINEARIZAÇÃO ESTOCÁSTICA EQUIVALENTE

### 3.1 - INTRODUÇÃO

As apreciáveis vantagens reveladas pelo método de linearização estocástica equivalente, no que respeita à análise da resposta aleatória estacionária ou não-estacionária de sistemas não-lineares de múltiplos graus de liberdade, justificam naturalmente que se procure explorar todas as suas potencialidades no sentido de conseguir, em particular, o desenvolvimento de rotinas simples e eficientes viradas para o tratamento específico do tipo de não-linearidades de maior interesse no âmbito da engenharia sísmica, e que são as chamadas não-linearidades de natureza histerética.

Este tipo de não-linearidades é caracterizado pelo facto de as forças generalizadas de restituição dos sistemas em cada instante não serem unicamente função do valor correspondente da resposta, mas também de toda a história anterior do carregamento, como sucede por exemplo com as estruturas de betão armado.

A análise da resposta de sistemas não-lineares histeréticos exige que sejam previamente definidos modelos analíticos que caracterizem devidamente o funcionamento estrutural.

Nesse sentido, vários têm sido os modelos de comportamento histerético considerados por diversos investigadores [82, 49], desde os mais simples, como o modelo bilinear ou o de Ramberg-Osgood, até outros de maior versatilidade, como os modelos de Clough, de Takeda ou o trilinear, tornando-se possível a consideração de diversas particularidades do funcionamento estrutural, nomeadamente, a degradação de rigidez com a deformação e com a inversão do carregamento, a degradação de resistência, a influência do esforço transversal ("pinching") e da deterioração da aderência das armaduras ("slipping").

Todos estes modelos têm em comum o facto de assentarem na definição de um certo número de regras de origem empírica, que procuram descrever o comportamento material ao longo de sucessivas cargas e descargas, sendo especialmente adequados para análises determinísticas da resposta por integração numérica no domínio do tempo. No entanto, e porque tais formas de idealização, para além de conterem o máximo de informação sobre o comportamento físico do sistema, devem ser matematicamente tratáveis, outros modelos de natureza diferencial, como os referidos por Suzuki e Minai [156], ou o introduzido por Bouc e Wen [171], foram também desenvolvidos no sentido de melhor se adaptarem à análise estocástica da resposta aleatória de sistemas não-lineares histeréticos.

O presente capítulo tem assim como objectivo mostrar como a linearização estocástica equivalente pode ser aplicada com sucesso à análise da resposta aleatória de sistemas histeréticos de múltiplos graus de liberdade, tomando por base modelos caracterizadores das não-linearidades estruturais adequados.

Assim, começa por fazer-se referência ao método inicialmente utilizado por Caughey [39, 40] no tratamento de sistemas histeréticos de 1-GL, e à correspondente variante de Goto e Iemura [73], sublinhando a limitação de que enferma esta abordagem, pelo facto de se admitir a resposta do sistema caracterizada por um processo de banda estreita. Seguidamente, é justificada a vantagem da utilização de modelos histeréticos diferenciais como forma de ultrapassar esta hipótese restritiva, conhecida por aproximação de Krylov-Bogoliubov [96], procedendo-se à apresentação dos modelos diferenciais de Suzuki e Minai e de Bouc-Wen, e realçando sobretudo a enorme versatilidade permitida por este último, em particular, tendo em consideração os aperfeiçoamentos ulteriormente introduzidos por Noori e Baber [111], Park, Wen e Ang [119], Mochio, Samaras e Shinozuka [108].

Posteriormente, são apresentadas formulações que, tendo por base o modelo histerético de Bouc-Wen, permitem uma análise eficiente da resposta de sistemas estruturais de N-GL, sujeitos a excitações quer estacionárias, quer não-estacionárias, em particular de natureza sísmica. Por último, é efectuada uma descrição dos modelos computacionais desenvolvidos para análise da resposta sísmica de sistemas histeréticos de N-GL com base em formulações apresentadas, podendo observar-se simultaneamente alguns resultados julgados elucidativos.

### 3.2 - OS MÉTODOS DE CAUGHEY E DE GOTO E IEMURA PARA ANÁLISE DA RESPOSTA ESTACIONÁRIA DE SISTEMAS DE 1-GL

Considere-se um sistema histerético de 1-GL sujeito a uma excitação aleatória estacionária de valor médio nulo, sendo o correspondente equilíbrio dinâmico traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t) + g(\dot{q}, q, t) = p(t)/m \quad (3.1)$$

em que  $g(\dot{q}, q, t)$  é uma função caracterizadora das não-linearidades de natureza histerética do sistema, suposta ímpar nos seus argumentos, como vulgarmente sucede na prática, por forma a que o valor médio da resposta possa também considerar-se nulo.

Sendo, por sua vez, o equilíbrio dinâmico do sistema linear equivalente traduzido pela equação

$$\ddot{q}(t) + \beta_e \dot{q}(t) + w_e^2 q(t) = p(t)/m \quad (3.2)$$

os coeficientes  $\beta_e$  e  $w_e^2$  podem obter-se minimizando o valor quadrático médio da diferença

$$\epsilon(t) = g(\dot{q}, q, t) - \beta_e \dot{q}(t) - w_e^2 q(t) \quad (3.3)$$

entre os primeiros membros das equações (3.1) e (3.2).

Seguindo, para o efeito, o caminho já descrito em 2.5.1, conclui-se que

$$\beta_e = \frac{E[\dot{q}g(\dot{q}, q)]}{\sigma_{\dot{q}}^2} \quad w_e^2 = \frac{E[qg(\dot{q}, q)]}{\sigma_q^2} \quad (3.4)$$

equações aliás coincidentes com as referidas em (2.82).

No caso particular de não-linearidades de natureza histerética, a principal dificuldade reside porém no cálculo dos valores médios intervenientes nestas equações.

Este problema foi, no entanto, contornado por Caughey [39] que se serviu de uma aproximação anteriormente utilizada por Krylov e Bogoliubov [96], válida nos casos em que o processo de resposta é de banda estreita, o que sucede quando o amortecimento equivalente, medido pelo coeficiente  $\beta_e$  é baixo e o processo de excitação é de banda larga.

Nessas condições, o movimento de resposta tem um andamento sensivelmente sinusoidal, traduzido pelas equações

$$q(t) = R(t) \cos[\omega_e t + \phi(t)] \quad (3.5)$$

$$\dot{q}(t) = -R(t)\omega_e \sin[\omega_e t + \phi(t)] \quad (3.6)$$

em que o processo envolvente  $R(t)$  e a correspondente fase  $\phi(t)$  assumem variações muito lentas ao longo de cada ciclo da resposta de duração igual a  $2\pi/\omega_e$ .

Por conseguinte, é razoável supor nesta hipótese que  $R(t)$  e  $\phi(t)$  assumem valores constantes,  $R$  e  $\phi$ , ao longo de cada ciclo, calculando os valores médios expectáveis  $E[\dot{q}g(\dot{q}, q)]$  e  $E[qg(\dot{q}, q)]$  intervinientes nas equações (3.4), tomando uma média temporal de  $\dot{q}g(\dot{q}, q)$  e  $qg(\dot{q}, q)$  ao longo daqueles ciclos.

Desse modo, as equações (3.4) podem escrever-se sob a forma

$$\beta_e = \frac{E \left[ \frac{1}{2\pi/\omega_e} \int_0^{2\pi/\omega_e} -R\omega_e \sin(\omega_e t + \phi) g(R, t) dt \right]}{E \left[ \frac{1}{2\pi/\omega_e} \int_0^{2\pi/\omega_e} R^2 \omega_e^2 \sin^2(\omega_e t + \phi) dt \right]} \quad (3.7)$$

$$\omega_e^2 = \frac{E \left[ \frac{1}{2\pi/\omega_e} \int_0^{2\pi/\omega_e} R \cos(\omega_e t + \phi) g(R, t) dt \right]}{E \left[ \frac{1}{2\pi/\omega_e} \int_0^{2\pi/\omega_e} R^2 \cos^2(\omega_e t + \phi) dt \right]} \quad (3.8)$$

em que  $g(R, t)$  representa a variação sofrida pela função  $g(\dot{q}, q, t)$  ao longo de uma oscilação sinusoidal de  $q(t)$  de amplitude  $R$ .

Procedendo ao cálculo dos integrais indicados nos denominadores dos segundos membros destas equações, e introduzindo as funções

$$C(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(R, \psi) \cos \psi d\psi \quad (3.9)$$

$$S(R) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} g(R, \psi) \sin \psi d\psi \quad (3.10)$$

com

$$\psi = \omega_e t + \phi \quad (3.11)$$

os coeficientes do sistema linear equivalente podem ser expressos pelas seguintes equações

$$\beta_e = \frac{2E[RS(R)]}{\omega_e E[R^2]} \quad \omega_e^2 = \frac{2E[RC(R)]}{E[R^2]} \quad (3.12)$$



Desta forma, sendo a distribuição de probabilidade da envolvente de um processo de banda estreita uma distribuição de Rayleigh, cuja função densidade de probabilidade é [48]

$$p_e(R) = \frac{R}{\sigma_q^2} \exp\left(-\frac{R}{2\sigma_q^2}\right) \quad (3.13)$$

os valores médios  $E[RS(R)]$  e  $E[RC(R)]$  podem ser expressos através das relações

$$E[RS(R)] = \int_0^{\infty} RS(R)p_e(R)dR \quad (3.14)$$

$$E[RC(R)] = \int_0^{\infty} RC(R)p_e(R)dR \quad (3.15)$$

podendo pois exprimir-se os coeficientes  $\beta_e$  e  $w_e^2$  directamente em função da variância  $\sigma_q^2$ , o que possibilita a resolução do problema à custa de um procedimento iterativo idêntico ao referido em 2.5.1.

Uma abordagem ligeiramente diferente da introduzida por Caughey foi utilizada por Goto e Iemura [73], que procuraram determinar os coeficientes  $\beta_e$  e  $w_e^2$  do sistema linear equivalente, não através da minimização do valor quadrático médio  $E[\epsilon^2]$ , mas antes procurando minimizar o valor médio temporal de  $\epsilon^2(t)$  ao longo de um ciclo de duração  $2\pi/w_e$

$$\langle \epsilon^2(t) \rangle = \frac{1}{2\pi/w_e} \int_0^{2\pi/w_e} \epsilon^2(t) dt \quad (3.16)$$

aplicando posteriormente o operador  $E[\ ]$  às expressões encontradas de  $\beta_e$  e  $w_e^2$ .

Desta forma, podem obter-se as seguintes expressões para  $\beta_e$  e  $w_e^2$ , distintas das alcançadas por Caughey

$$\beta_e = E\left[\frac{2S(R)}{Rw_e}\right] \quad w_e^2 = E\left[\frac{2C(R)}{R}\right] \quad (3.17)$$

calculando-se os valores médios indicados também com base na função densidade de probabilidade  $p_e(R)$  definida pela equação (3.13).

### 3.3 - APLICAÇÃO DO MÉTODO DE CAUGHEY À ANÁLISE DA RESPOSTA ESTACIONÁRIA DE SISTEMAS COM COMPORTAMENTO BILINEAR HISTERÉTICO

A primeira aplicação do método de linearização estocástica equivalente à análise da resposta aleatória de sistemas histeréticos foi realizada por Caughey [39], mediante o recurso à formulação anteriormente descrita, e tendo por base o modelo histerético bilinear.

Para melhor se entender como a aplicação do método pode nesse caso ter lugar, considere-se um oscilador bilinear histerético sujeito a uma excitação aleatória  $p(t)$ , sendo o respectivo equilíbrio dinâmico traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + g(q, t) = p(t) \quad (3.18)$$

em que  $g(q, t)$  representa uma força de natureza histerética com as características descritas na figura 3.1(a), para uma oscilação sinusoidal de amplitude  $q_R = R$ , e que é susceptível de ser decomposta em duas componentes, uma de natureza elástica e linear (Fig. 3.1b) e outra de tipo elasto-plástico-histerético (Fig. 3.1c), através da relação

$$g = \alpha k q + (1 - \alpha) k z \quad (3.19)$$

em que  $k$  representa a rigidez inicial e  $\alpha$  o quociente entre a rigidez pós-cedência e a rigidez inicial, funcionando também como uma medida da contribuição relativa da componente histerética.

Substituindo (3.19) em (3.18), dividindo ambos os membros por  $k$ , e introduzindo a mudança de variáveis

$$\tau = \omega_o t \quad (3.20)$$

com  $\omega_o = \sqrt{k/m}$ , o equilíbrio dinâmico do sistema pode passar a ser traduzido pela equação

$$\ddot{q}(\tau) + \beta \dot{q}(\tau) + g'(q, \tau) = p'(\tau) \quad (3.21)$$

em que

$$\beta = c/m\omega_o$$

$$g'(q, \tau) = \alpha q(\tau) + (1 - \alpha) z(q, \tau) \quad (3.22)$$

$$p'(\tau) = p(\tau)/k$$

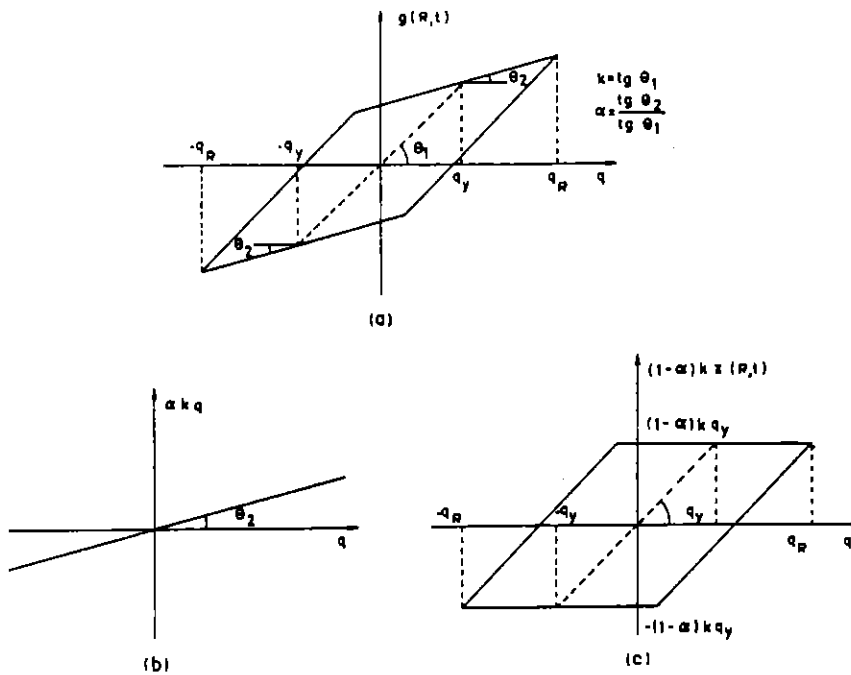


Fig. 3.1 - Decomposição de  $g$  numa componente elástica e linear e noutra elasto-plástica histerética.

Nestas condições, os coeficientes  $\beta_e$  e  $w_e^2$  da equação linear equivalente (3.2) podem ser determinados começando por calcular os valores de  $C(R)$  e  $S(R)$  definidos pelas equações (3.9) e (3.10).

Assim, e tendo presente as equações (3.5) e (3.6), pode escrever-se que

$$C(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\beta R w_e \sin \psi \cos \psi + \alpha R \cos^2 \psi + (1 - \alpha) z(R, \psi) \cos \psi] d\psi \quad (3.23)$$

$$S(R) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} [-\beta R w_e \sin^2 \psi + \alpha R \cos \psi \sin \psi + (1 - \alpha) z(R, \psi) \sin \psi] d\psi \quad (3.24)$$

Atendendo também a que

$$\int_0^{2\pi} \sin \psi \cos \psi d\psi = 0 \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 \psi d\psi = \int_0^{2\pi} \cos^2 \psi d\psi = \pi \quad (3.25)$$

as equações (3.23) e (3.24) podem simplificar-se, obtendo-se

$$C(R) = \frac{\alpha R}{2} + (1 - \alpha) C_z(R) \quad (3.26)$$

$$S(R) = \frac{\beta R w_0}{2} + (1 - \alpha) S_z(R) \quad (3.27)$$

em que  $C_z(R)$  e  $S_z(R)$  são dados por

$$C_z(R) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(R, \psi) \cos \psi d\psi \quad (3.28)$$

$$S_z(R) = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} z(R, \psi) \sin \psi d\psi \quad (3.29)$$

Estes integrais, por seu lado, podem ser facilmente calculados decompondo o intervalo de integração  $[0, 2\pi]$  correspondente à variação de  $\psi$  ao longo de um ciclo elasto-plástico histerético  $z(R, \psi)$  de amplitude  $q_R = R$ , em quatro sub-intervalos correspondentes a cada um dos lados desse ciclo (AB, BC, CD e DA), consoante se indica na figura 3.2.

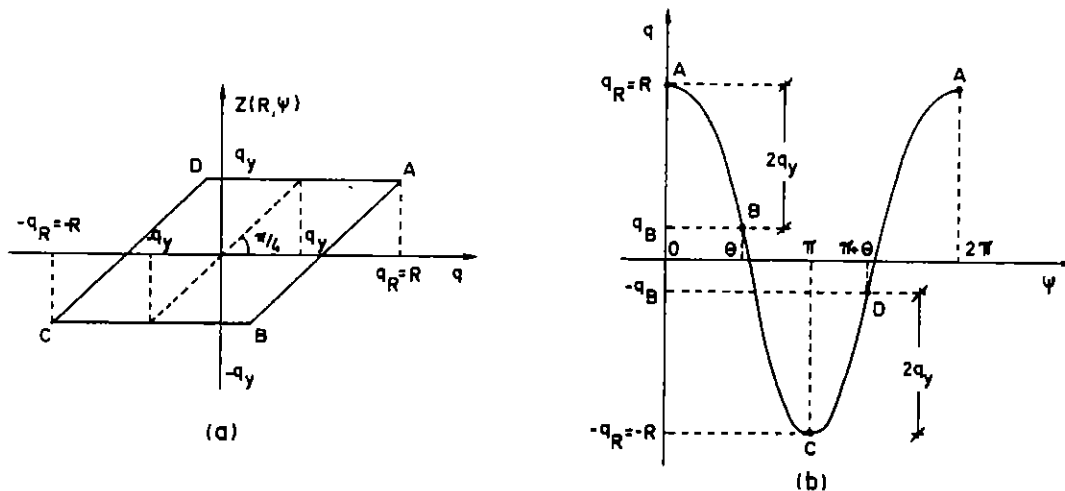


Fig. 3.2 - Fases do ciclo elasto-plástico histerético  $z(R, \psi)$ .

Dessa forma, supondo que o ciclo se inicia no ponto A, a que corresponde o valor de  $\psi = 0$ , e designando por  $\theta$  o valor de  $\psi$  relativo à passagem pelo ponto B, os integrais  $C_z(R)$  e  $S_z(R)$  podem calcular-se através da seguinte decomposição

$$C_z(R) = \frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\theta z_{AB}(R, \psi) \cos \psi d\psi + \int_\theta^\pi z_{BC}(R, \psi) \cos \psi d\psi + \int_\pi^{\pi+\theta} z_{CD}(R, \psi) \cos \psi d\psi + \int_{\pi+\theta}^{2\pi} z_{DA}(R, \psi) \cos \psi d\psi \right\} \quad (3.30)$$

$$S_z(R) = -\frac{1}{2\pi} \left\{ \int_0^\theta z_{AB}(R, \psi) \sin \psi d\psi + \int_\theta^\pi z_{BC}(R, \psi) \sin \psi d\psi + \int_\pi^{\pi+\theta} z_{CD}(R, \psi) \sin \psi d\psi + \int_{\pi+\theta}^{2\pi} z_{DA}(R, \psi) \sin \psi d\psi \right\} \quad (3.31)$$

Tendo em conta que, atendendo a relações geométricas simples e à equação (3.5), as equações de  $z(R, \psi)$  relativas a cada um daqueles sub-intervalos são dadas por

$$z_{AB}(R, \psi) = R \cos \psi + q_y - R \quad (3.32)$$

$$z_{BC}(R, \psi) = -q_y \quad (3.33)$$

$$z_{CD}(R, \psi) = R \cos \psi - q_y + R \quad (3.34)$$

$$z_{DA}(R, \psi) = q_y \quad (3.35)$$

as equações (3.30) e (3.31) dão lugar, mediante o recurso a elementares regras de integração, às seguintes expressões para  $C_z(R)$  e  $S_z(R)$

$$C_z(R) = \frac{R}{\pi} \left( \frac{\theta}{2} - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) \quad (3.36)$$

$$S_z(R) = \frac{R}{2\pi} \sin^2 \theta \quad (3.37)$$

válidas para  $R > q_y$ . Caso  $R \leq q_y$ , não ocorrerá qualquer comportamento histerético, podendo verificar-se, de forma análoga, que então

$$C_z(R) = R/2 \quad (3.38)$$

$$S_z(R) = 0 \quad (3.39)$$

Por conseguinte, o problema da análise da resposta do sistema histerético bilinear a que se refere a equação (3.18) pode ser resolúvel, determinando-se de forma iterativa os coeficientes  $\beta_e$  e  $w_e^2$  do sistema linear equivalente definidos pelas equações (3.12), tendo simultaneamente em consideração que os coeficientes  $C(R)$  e  $S(R)$  intervenientes nessas equações obedecem às relações (3.26), (3.27) e (3.36) a (3.39).

### 3.4 - A HIPÓTESE RESTRITIVA DE KRYLOV-BOGOLIUBOV E A UTILIDADE DOS MODELOS HISTERÉTICOS DIFERENCIAIS

O método de Caughey, que começou por ser aplicado à análise estocástica da resposta de osciladores não-lineares de 1-GL com comportamento bilinear histerético, de acordo com a formulação anteriormente descrita, foi posteriormente utilizado também com algum sucesso por Lutes e Takemiya [102, 103, 157] que, mediante a

introdução de várias modificações, tornaram possível o tratamento de outras formas de comportamento histerético, designadamente as caracterizadas pelos modelos trilinear e de Ramberg-Osgood.

Por outro lado, Kobori, Minai e Suzuki [92] apresentaram uma generalização do método de Caughey, que procurou ter em consideração a flutuação aleatória sofrida pelos centros dos sucessivos ciclos histeréticos, vulgarmente conhecida por "drift", e que, para além de ser marcada por uma frequência muito baixa, é tanto mais sensível quanto maior for a largura de banda do processo de resposta.

Sucedem porém que, quer o método de Caughey, quer todas as formulações dele decorrentes, têm como subjacente a hipótese de Krylov e Bogoliubov, segundo a qual o processo estocástico de resposta é um processo de banda estreita, o que leva a supor como praticamente constante o valor da amplitude e da fase ao longo de cada ciclo de oscilação.

Simplesmente, tal pressuposto só é efectivamente verificado quando os níveis de excitação são bastante baixos, originando respostas maioritariamente no domínio elástico, ou em certos casos de excitações muito elevadas gerando respostas maioritariamente em domínio plástico, como sucede no caso do modelo bilinear. Nesta situação, por exemplo, pode verificar-se através de estudos de simulação que, para valores da rigidez pós-cedência relativamente baixos e para níveis de excitação intermédios, o processo de resposta deixa de poder considerar-se de banda estreita [130].

Por conseguinte, a consideração da hipótese de Krylov-Bogoliubov constitui um aspecto fortemente limitativo do método de Caughey, o qual pode porém ser ultrapassado à custa da consideração de modelos histeréticos diferenciais. Deste modo, traduzindo a evolução dos ciclos histeréticos através de uma equação diferencial não-linear adequada, e adicionando essa equação à equação diferencial que rege o equilíbrio dinâmico do sistema, torna-se viável, utilizando técnicas anteriormente descritas, linearizar as equações obtidas, conseguindo por essa via assegurar a resolução do problema de forma analítica.

Assim, considere-se por exemplo um oscilador histerético de 1-GL cujo movimento é traduzido pela equação

$$m\ddot{q}(t) + c\dot{q}(t) + g(q, t) = p(t) \quad (3.40)$$

Suponha-se também que a força de restituição não-linear  $g(q, t)$  é decomposta em duas parcelas, uma elástica e linear, e outra de natureza histerética, de acordo com uma equação do tipo (v. eq. 3.19)

$$g = \alpha kq + (1 - \alpha)kz \quad (3.41)$$

sendo  $z$  um parâmetro auxiliar, que se admite respeitar uma equação diferencial não-linear traduzida pela relação

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) \quad (3.42)$$

Seguindo a técnica de linearização introduzida por Atalik e Utku, o que pressupõe o carácter gaussiano da distribuição conjunta das variáveis  $\dot{q}$  e  $z$ , esta equação pode ser aproximada pela equação linear equivalente

$$\dot{z}(t) = c_e \dot{q}(t) + k_e z(t) \quad (3.43)$$

em que

$$c_e = E \left[ \frac{\partial \Phi(\dot{q}, z)}{\partial \dot{q}} \right] \quad k_e = E \left[ \frac{\partial \Phi(\dot{q}, z)}{\partial z} \right] \quad (3.44)$$

sendo os coeficientes  $c_e$  e  $k_e$  dependentes do tempo no caso da resposta não-estacionária.

A análise estocástica da resposta aleatória estacionária do sistema em questão pode então processar-se através da conjugação das equações (3.40), (3.41) e (3.43), o que pode fazer-se por exemplo introduzindo o vector  $\underline{u} = [q, z]^T$ , concluindo-se então que

$$\underline{M} \ddot{\underline{u}}(t) + \underline{C}_e \dot{\underline{u}}(t) + \underline{K}_e \underline{u}(t) = \underline{p}(t) \quad (3.45)$$

com

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{C}_e = \begin{bmatrix} c & 0 \\ -c_e & 1 \end{bmatrix} \quad \underline{K}_e = \begin{bmatrix} \alpha k & (1-\alpha)k \\ 0 & -k_e \end{bmatrix} \quad \underline{p}(t) = \begin{Bmatrix} p(t) \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.46)$$

ou, em alternativa, fazendo intervir o vector  $\underline{y} = [q, \dot{q}, z]^T$ , o que dá origem à relação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.47)$$

em que

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)k}{m} \\ 0 & c_e & k_e \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ \frac{p(t)}{m} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.48)$$

O primeiro modelo histerético diferencial do tipo  $\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z)$  foi introduzido por Bouc [28], sendo posteriormente generalizado por Wen [171], Noori e Baber [111], Park, Wen e Ang [119], Mochio, Samaras e Shinozuka [108], revestindo-se, por um lado, de uma enorme versatilidade no que respeita à modelação de variadas formas de

comportamento histerético, e possibilitando, por outro lado, um eficiente tratamento matemático do problema da análise estocástica da resposta estacionária ou não-estacionária de sistemas não-lineares histeréticos de múltiplos graus de liberdade, em particular no que respeita à linearização do conjunto das equações diferenciais obtidas.

Por estes motivos, será efectuada nos pontos seguintes uma descrição detalhada das características deste modelo, realçando-se em especial as suas grandes potencialidades, o significado dos parâmetros nele intervenientes, e a forma de os quantificar a partir dos resultados de ensaios experimentais.

Complementarmente, serão também referidos outros modelos de natureza diferencial entretanto desenvolvidos, designadamente os modelos bilinear e multilinear, utilizados muito recentemente por Suzuki e Minai [156].

### 3.5 - DESCRIÇÃO E UTILIZAÇÃO DE MODELOS HISTERÉTICOS DIFERENCIAIS

#### 3.5.1 - O modelo de Bouc-Wen. Sua versatilidade e significado dos parâmetros intervenientes

De acordo com este modelo, a força de restituição não-linear  $g(q, t)$ , a que se refere a equação (3.40), é decomposta numa componente elástica e linear e noutra de natureza histerética através da relação

$$g = \alpha k q + (1 - \alpha) k z \quad (3.49)$$

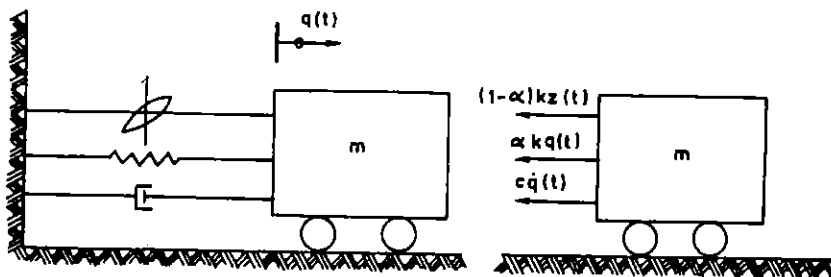


Fig. 3.3 - Representação esquemática de um sistema de 1-GL (Modelo de Bouc-Wen).



sendo  $z$  um parâmetro endócrino que obedece a uma equação diferencial do tipo

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) = A\dot{q} - \beta |\dot{q}| |z|^{n-1} z - \gamma \dot{q} |z|^n \quad (3.50)$$

em que  $A, \beta, \gamma$  e  $n$  são parâmetros que regulam a configuração do ciclo histerético.

Dividindo ambos os membros de (3.50) por  $\dot{q}$  obtém-se

$$\frac{dz}{dq} = A - \beta \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} |z|^{n-1} z - \gamma |z|^n \quad (3.51)$$

ou, o que é equivalente, suprimindo os módulos, e tendo em conta as diferentes combinações de sinais possíveis de  $\dot{q}$  e  $z$

$$\frac{dz}{dq} = \begin{cases} A - (\beta + \gamma) z^n & , \quad \dot{q} \geq 0 \wedge z \geq 0 & (3.52) \\ A + (\beta - \gamma) z^n & , \quad \dot{q} < 0 \wedge z \geq 0 & (3.53) \\ A + (-1)^{n-1} (\beta + \gamma) z^n & , \quad \dot{q} < 0 \wedge z < 0 & (3.54) \\ A - (-1)^{n-1} (\beta - \gamma) z^n & , \quad \dot{q} \geq 0 \wedge z < 0 & (3.55) \end{cases}$$

A enorme versatilidade deste modelo pode ser facilmente constatada observando as diferentes configurações possíveis dos ciclos histeréticos traduzidos pela representação gráfica da função  $z = z(q)$ , correspondente a diversos valores dos parâmetros de controlo  $A, \beta, \gamma$  e  $n$ , quando se impõe ao sistema uma oscilação sinusoidal de certa amplitude.

Supondo, por exemplo, que  $A = n = 1$ , a equação (3.51) pode escrever-se sob a forma

$$\frac{dz}{dq} = 1 + z[-\beta \operatorname{sgn}(\dot{q}) - \gamma \operatorname{sgn}(z)] \quad (3.56)$$

resultando da sua integração a seguinte expressão para  $z$

$$z = \frac{1}{-\beta \operatorname{sgn}(\dot{q}) - \gamma \operatorname{sgn}(z)} \{C \exp\{q[-\beta \operatorname{sgn}(\dot{q}) - \gamma \operatorname{sgn}(z)]\} - 1\} \quad (3.57)$$

ou, o que é equivalente

$$z = \begin{cases} \{C \exp[q(-\beta - \gamma)] - 1\} / (-\beta - \gamma) & , \quad \dot{q} \geq 0 \wedge z \geq 0 & (3.58) \\ \{C \exp[q(\beta - \gamma)] - 1\} / (\beta - \gamma) & , \quad \dot{q} < 0 \wedge z \geq 0 & (3.59) \\ \{C \exp[q(\beta + \gamma)] - 1\} / (\beta + \gamma) & , \quad \dot{q} < 0 \wedge z < 0 & (3.60) \\ \{C \exp[q(-\beta + \gamma)] - 1\} / (-\beta + \gamma) & , \quad \dot{q} \geq 0 \wedge z < 0 & (3.61) \end{cases}$$

em que a constante de integração  $C$  pode ser determinada em função de condições iniciais traduzidas por um par de valores  $(q_o, z_o)$ , obtendo-se que

$$C = \frac{z_o(\pm\beta \pm \gamma) + 1}{\exp[q_o(\pm\beta \pm \gamma)]} \quad (3.62)$$

Caso os valores de  $\beta$  e  $\gamma$  levem ao anulamento de algum dos denominadores das equações (3.58) a (3.61), então decorre da equação (3.56) que  $dz = dq$ , pelo que a evolução de  $z$  será linear, sendo traduzida pela equação

$$z = q + C \quad (3.63)$$

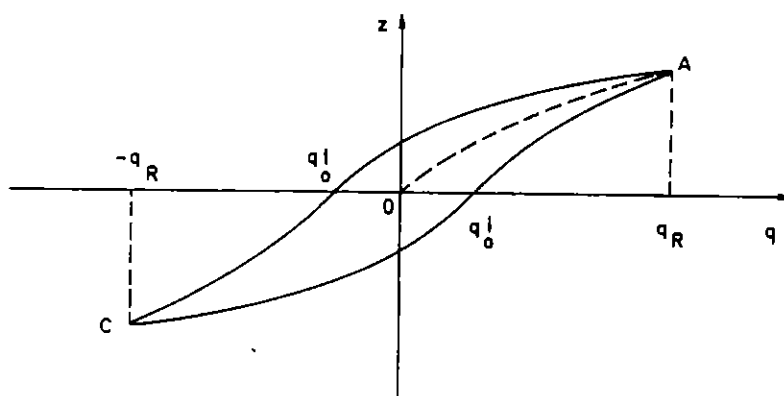


Fig. 3.4 - Evolução de  $z$  relativa a uma oscilação sinusoidal de amplitude  $q_R$  (curva esquelito OA).

Por outro lado, os valores de  $q$  correspondentes a  $z = 0$ , associados quer à fase ascendente do ciclo histerético,  $q_o^{\uparrow}$ , quer à fase descendente,  $q_o^{\downarrow}$ , podem ser facilmente determinados a partir das equações (3.61) e (3.59), obtendo-se que

$$q_o^{\uparrow} = \frac{\ln(1/C)}{-\beta + \gamma} \quad q_o^{\downarrow} = \frac{\ln(1/C)}{\beta - \gamma} \quad (3.64)$$

ou, no caso particular dos denominadores destas equações apresentarem valor nulo, através da equação (3.63).

Desta forma, recorrendo às equações (3.58) a (3.64), torna-se possível representar graficamente a evolução sofrida pelo parâmetro endócrino  $z$  ao longo de uma oscilação sinusoidal de certa amplitude, para diferentes valores de  $\beta$  e  $\gamma$ .

Na figura 3.5 apresentam-se vários gráficos desse tipo assim obtidos, que permitem compreender a apreciável versatilidade do modelo, no sentido de idealizar as mais diversas formas de comportamento histerético.

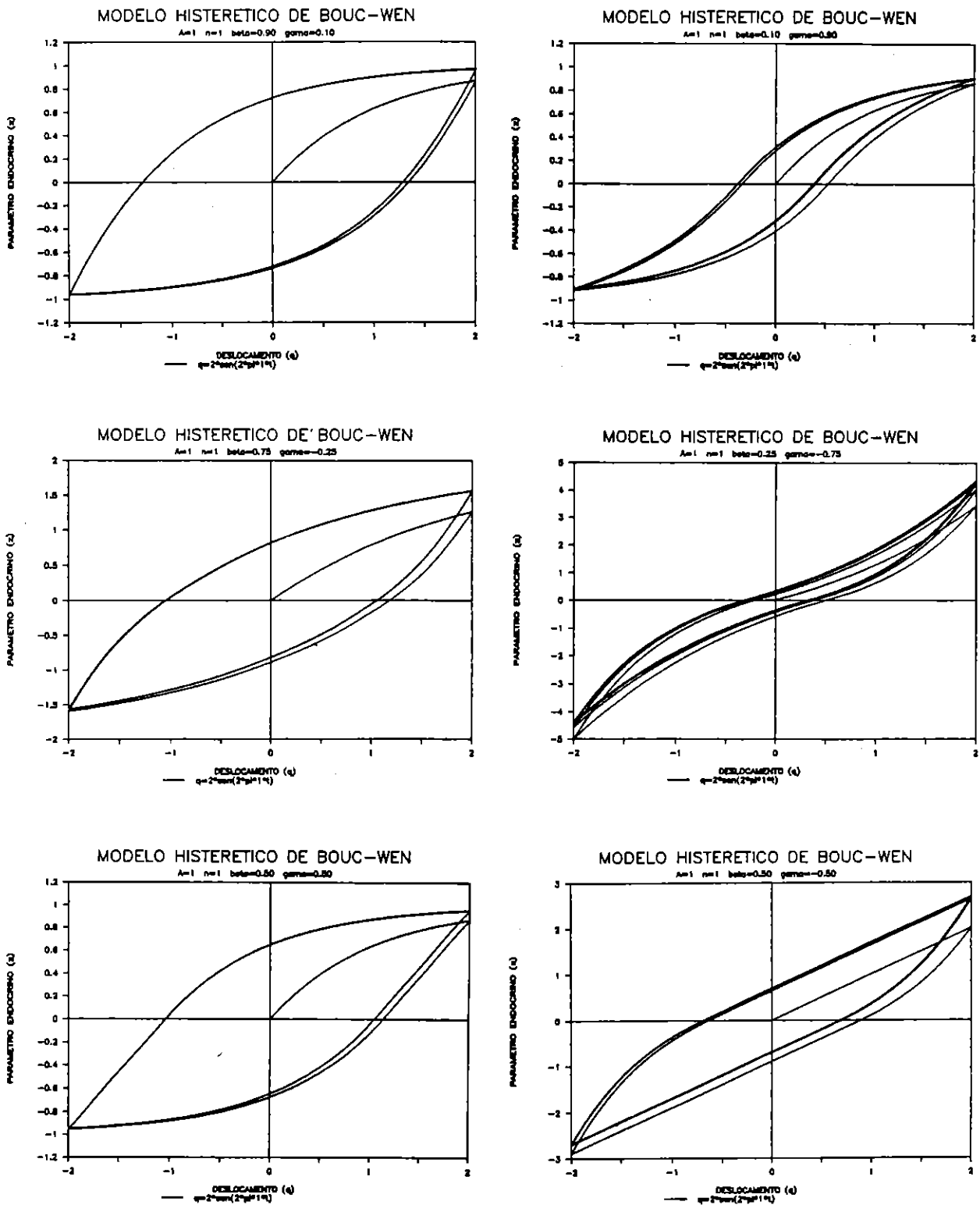


Fig. 3.5 - Evolução de  $z$  relativa a uma oscilação sinusoidal de amplitude  $q_R = 2$  ( $A = n = 1$ ).

Estes gráficos servem também para melhor ilustrar as seguintes observações quanto ao efeito das variações dos parâmetros de controlo  $\beta$  e  $\gamma$ , válidas para quaisquer valores de  $A$  e  $n$ .

O parâmetro  $\beta$  traduz o nível de dissipação de energia por ciclo, sendo nulo no caso de comportamento não-histerético, e assumindo um valor maior que zero caso se registre uma energia dissipada positiva. Do parâmetro  $\gamma$  depende, por seu lado, a idealização de uma forma de comportamento sem endurecimento ou com endurecimento, podendo verificar-se que a ocorrência da primeira situação tem lugar sempre que  $\gamma > 0$ , ou quando  $|\gamma| < |\beta|$  e  $\gamma < 0$ .

Neste caso também, o crescimento do parâmetro  $n$  traduz-se numa tendência para o modelo histerético bilinear elastoplástico, como resulta aliás evidente da observação das figuras 3.6 apresentadas por Baber e Wen [19]. Nelas se encontra representada, para  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\bar{S} = A = 1$  ou  $2$  e  $n$  crescente, a curva média correspondente aos ramos ascendente e descendente do ciclo  $z = z(q)$  para  $z \geq 0$ , vulgarmente designada por curva esqueleto (v. Fig. 3.4), e cuja equação é dada por (v. eq. 3.52 e 3.53)

$$S(z) = \frac{1}{2} \left\{ \int_0^z \frac{du}{A - (\beta + \gamma)u^n} + \int_0^z \frac{du}{A + (\beta - \gamma)u^n} \right\} \quad (3.65)$$

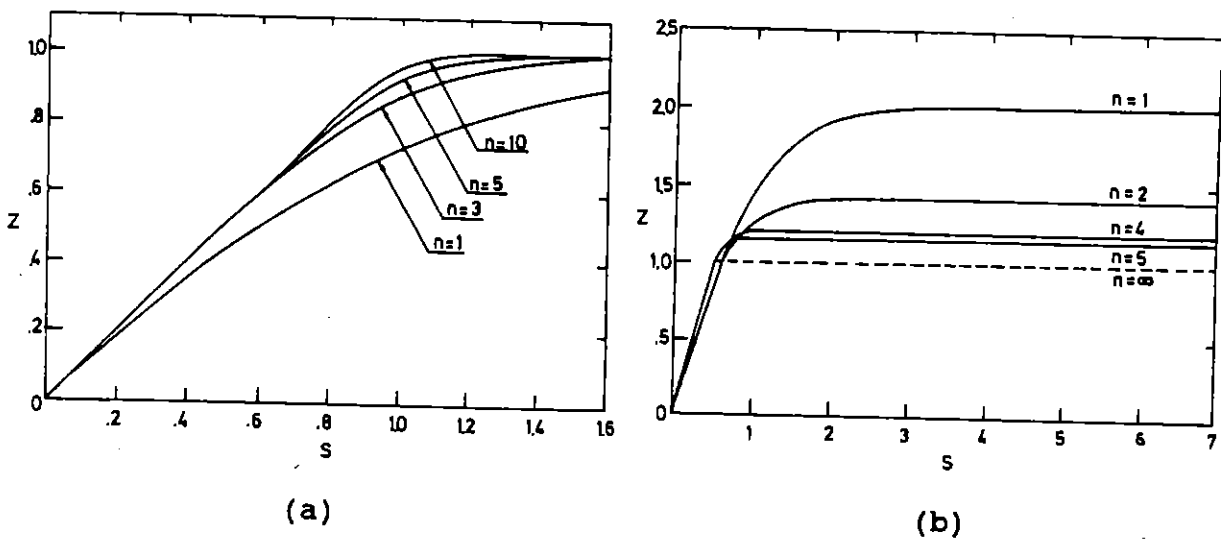


Fig. 3.6 - Evolução da curva esqueleto para valores crescentes de  $n$

(a)  $\beta = \gamma = 0.5$  e  $A = 1$  (b)  $\beta = \gamma = 0.5$  e  $A = 2$ .

Ainda no caso de sistemas sem endurecimento ("soft systems"), constata-se facilmente, através da equação (3.51), que o valor máximo que o parâmetro  $z$  pode assumir, e que leva ao anulamento de  $dz/dq$ , é dado por

$$z_{\max} = \left( \frac{A}{\beta + \gamma} \right)^{1/n} \quad (3.66)$$

podendo verificar-se que, quando se impõe uma oscilação sinusoidal ao sistema, o valor máximo de  $z$  em cada ciclo tende assintoticamente para  $z_{\max}$ , à medida que a amplitude da oscilação tende para infinito (Fig. 3.7).

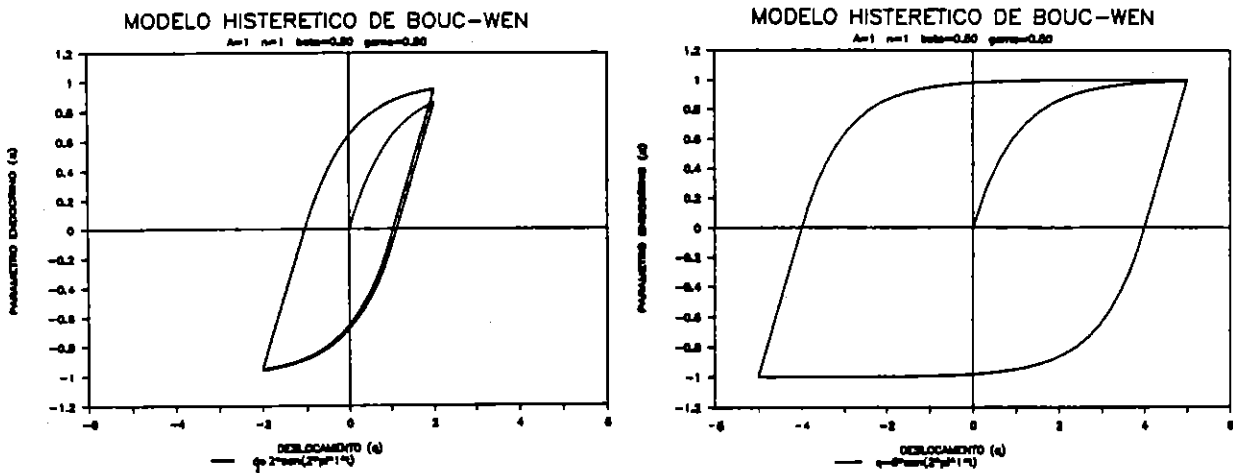


Fig. 3.7 - Representação de  $z = z(q)$  relativa a oscilações sinusoidais de diferente amplitude ( $A = n = 1$  e  $\beta = \gamma = 0,5$ ).

Por outro lado, atendendo às equações (3.49) e (3.51), torna-se também evidente que a rigidez inicial do sistema é expressa por

$$k_i = \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_0 = \alpha k + (1 - \alpha) k \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right)_0 \quad (3.67)$$

ou seja

$$k_i = \alpha k + (1 - \alpha) k A \quad (3.68)$$

ao passo que a rigidez final ou pós-cedência é dada por

$$k_f = \left( \frac{\partial g}{\partial q} \right)_{z_{\max}} = \alpha k + (1 - \alpha) k \left( \frac{\partial z}{\partial q} \right)_{z_{\max}} \quad (3.69)$$

pelo que

$$k_f = \alpha k \quad (3.70)$$

Por conseguinte, das equações (3.68) e (3.70) pode ainda concluir-se não só que o parâmetro  $A$  contribui para a fixação da rigidez inicial do sistema, mas também que  $\alpha$  traduz a relação entre a rigidez pós-cedência e a rigidez inicial, caso  $A = 1$ .

### 3.5.2 - Consideração da degradação de rigidez e de resistência através do modelo de Baber-Wen

Baber e Wen [19] introduziram um aperfeiçoamento em relação ao modelo anteriormente descrito, no sentido de possibilitar ter ainda em consideração os fenómenos de degradação de rigidez e de resistência, particularmente importantes no domínio das estruturas de betão armado.

Como é compreensível, tais formas de deterioração estrutural são função da energia dissipada por histerese  $W_d$ , definida por

$$dW_d = (1 - \alpha)kz dq = (1 - \alpha)kz \dot{q} dt \quad (3.71)$$

ou, se se preferir, por

$$\dot{W}_d = (1 - \alpha)kz \dot{q} \quad (3.72)$$

Por conseguinte, e atendendo ao significado dos parâmetros  $A$  e  $z_{max}$ , a idealização da degradação de rigidez sem degradação de resistência poderia efectuar-se expressando  $A$  através de uma função decrescente da energia dissipada  $W_d$ , mantendo-se  $z_{max}$  constante, ao passo que a degradação de resistência poderia ser modelada exprimindo também  $z_{max}$  através de uma função daquele tipo, mas deixando invariante o valor de  $A$ .

A via utilizada por Baber e Wen para traduzir estas duas formas de deterioração estrutural consistiu na introdução de dois parâmetros adicionais  $\nu$  e  $\eta$ , transformando a equação (3.50) em

$$\dot{z} = [A\dot{q} - \nu(\beta|\dot{q}| |z|^{n-1}z + \gamma\dot{q}|z|^n)]/\eta \quad (3.73)$$

Definindo os parâmetros  $A$ ,  $\nu$  e  $\eta$  como funções monótonas da energia dissipada através das relações

$$\begin{aligned} A(W_d) &= A_0 - \delta_A W_d \\ \nu(W_d) &= 1 + \delta_\nu W_d \\ \eta(W_d) &= 1 + \delta_\eta W_d \end{aligned} \quad (3.74)$$

em que  $A_0$  é um valor inicial e  $\delta_A$ ,  $\delta_\nu$  e  $\delta_\eta$  são constantes a fixar de forma adequada, torna-se efectivamente possível simular aqueles dois tipos de degradação, já que incrementar o valor de  $\nu$  equivale a aumentar  $\beta$  e  $\gamma$  sem afectar  $A$ , o que por (3.66)

conduz a uma redução de  $z_{máx}$  ao passo que aumentar  $\eta$  equivale a reduzir  $A$ ,  $\beta$  e  $\gamma$  em proporção, o que leva naturalmente a uma redução de rigidez (v. eq. 3.68) sem alteração da resistência (v. eq. 3.66).

No sentido de possibilitar uma fácil visualização do efeito de  $\delta_A$ ,  $\delta_v$  e  $\delta_\eta$  sobre a deterioração do comportamento estrutural, apresentam-se na figura 3.8 três gráficos correspondentes a um sistema caracterizado por  $A_o = n = 1$  e  $\beta = \gamma = 0$ , podendo analisar-se separadamente o efeito de cada um daqueles parâmetros.

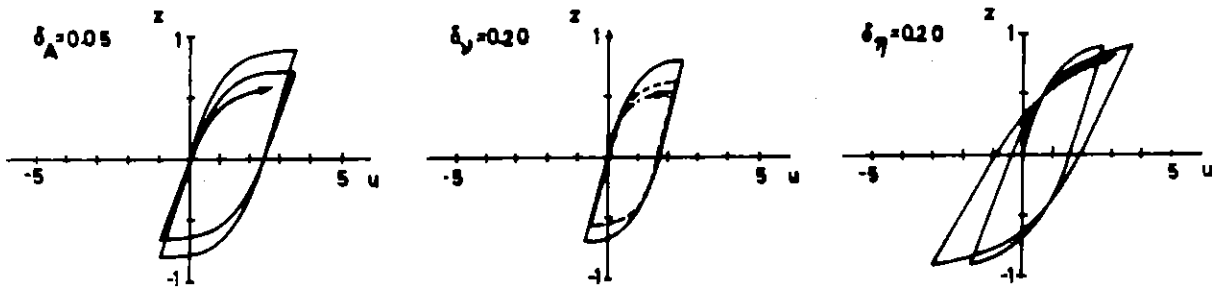


Fig. 3.8 - Efeito dos parâmetros  $\delta_A$ ,  $\delta_v$  e  $\delta_\eta$  [19].

Destes gráficos, resulta pois evidente o contributo de  $\delta_v$  para a degradação de resistência, de  $\delta_\eta$  para a degradação de rigidez e de  $\delta_A$  para a deterioração conjunta de rigidez e resistência do sistema.

### 3.5.3 - Identificação dos parâmetros do modelo de Baber-Wen e sua validação experimental

Um aspecto da maior importância, no que respeita à utilização dos modelos diferenciais anteriormente descritos para simulação de situações reais, consiste na possibilidade de definição adequada dos seus parâmetros caracterizadores, por forma a haver garantia de uma boa aproximação entre o comportamento do modelo e o comportamento do sistema real idealizado.

Nesse sentido, pode recorrer-se a uma técnica de identificação de sistemas histeréticos utilizada por Sues [153], e que se baseia na obtenção experimental de uma sequência de pares de valores  $(q_i, z_i)$ .

Com efeito, começando por supôr a inexistência de degradação estrutural, e integrando a equação (3.51), obtém-se que

$$z(q_i) = z_o + A I_{1i} - \beta I_{2i} - \gamma I_{3i} \quad (3.75)$$

sendo

$$\begin{aligned}
 I_{1i} &= \int_{q_0}^{q_i} dq \\
 I_{2i} &= \int_{q_0}^{q_i} \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} |z|^{n-1} z dq \\
 I_{3i} &= \int_{q_0}^{q_i} |z|^n dq
 \end{aligned} \tag{3.76}$$

Por conseguinte, uma vez conhecida por via experimental uma sequência de pares de valores  $(q_i, z_i)$ , e arbitrando um valor apropriado para  $n$ , torna-se não só possível quantificar numericamente os integrais  $I_{1i}$ ,  $I_{2i}$  e  $I_{3i}$ , como também expressar o erro quadrático total entre os valores teóricos  $z(q_i)$  e os valores medidos  $z_i$ , através da relação

$$\epsilon = \sum_i (z_o + A I_{1i} - \beta I_{2i} - \gamma I_{3i} - z_i)^2 \tag{3.77}$$

Aplicando então o método dos mínimos quadrados, que impõe como condições necessárias para a minimização desse erro que

$$\frac{\partial \epsilon}{\partial A} = 0 \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial \beta} = 0 \quad \frac{\partial \epsilon}{\partial \gamma} = 0 \tag{3.78}$$

obtém-se o seguinte sistema de três equações, que possibilita a determinação dos valores dos parâmetros  $A, \beta$  e  $\gamma$

$$\begin{bmatrix} \sum_i I_{1i}^2 & -\sum_i I_{1i} I_{2i} & -\sum_i I_{1i} I_{3i} \\ -\sum_i I_{2i} I_{1i} & \sum_i I_{2i}^2 & \sum_i I_{2i} I_{3i} \\ -\sum_i I_{3i} I_{1i} & \sum_i I_{3i} I_{2i} & \sum_i I_{3i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A \\ \beta \\ \gamma \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i I_{1i} (z_i - z_o) \\ -\sum_i I_{2i} (z_i - z_o) \\ -\sum_i I_{3i} (z_i - z_o) \end{Bmatrix} \tag{3.79}$$

No caso de haver degradação de rigidez, traduzida pelas equações (3.73) e (3.74), a equação (3.51) dá lugar a

$$\frac{dz}{dq} = \left[ A_o - \delta_A W_d - (1 + \delta_v W_d) \left( \beta \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} |z|^{n-1} z + \gamma |z|^n \right) \right] / (1 + \delta_n W_d) \tag{3.80}$$

tornando-se o problema de identificação dos parâmetros bastante mais difícil.

No entanto, a questão pode ser substancialmente simplificada, caso se suponham já conhecidos os valores de  $\beta$  e  $\gamma$  através da formulação anteriormente descrita, e os valores de  $n$  e  $\delta_n$  sejam arbitrados de forma apropriada.



Nestas condições, integrando a equação (3.80), e aplicando de forma idêntica o método dos mínimos quadrados, pode obter-se o seguinte sistema de 3 equações, cuja solução conduz ao conhecimento dos parâmetros  $A_o$ ,  $\delta_A$  e  $\delta_v$

$$\begin{bmatrix} \sum_i I_{5i}^2 & -\sum_i I_{5i}I_{6i} & -\sum_i I_{5i}S_{1i} \\ -\sum_i I_{5i}I_{6i} & \sum_i I_{6i}^2 & \sum_i I_{6i}S_{1i} \\ -\sum_i I_{5i}S_{1i} & \sum_i I_{6i}S_{1i} & \sum_i S_{1i}^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} A_o \\ \delta_A \\ \delta_v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sum_i I_{5i}S_{2i} \\ -\sum_i I_{6i}S_{2i} \\ -\sum_i S_{1i}S_{2i} \end{Bmatrix} \quad (3.81)$$

em que

$$\begin{aligned} S_{1i} &= \beta I_{7i} + \gamma I_{8i} \\ S_{2i} &= z_i - z_o + \beta I_{9i} + \gamma I_{10i} \end{aligned} \quad (3.82)$$

e

$$\begin{aligned} I_{5i} &= \int_{q_o}^{q_i} \frac{dq}{1 + \delta_\eta W_d} \\ I_{6i} &= \int_{q_o}^{q_i} \frac{W_d}{1 + \delta_\eta W_d} dq \\ I_{7i} &= \int_{q_o}^{q_i} W_d \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} \frac{|z|^{n-1}}{1 + \delta_\eta W_d} dq \\ I_{8i} &= \int_{q_o}^{q_i} W_d \frac{|z|^n}{1 + \delta_\eta W_d} dq \\ I_{9i} &= \int_{q_o}^{q_i} \frac{|\dot{q}|}{\dot{q}} \frac{|z|^{n-1} z}{1 + \delta_\eta W_d} dq \\ I_{10i} &= \int_{q_o}^{q_i} \frac{|z|^n}{1 + \delta_\eta W_d} dq \end{aligned} \quad (3.83)$$

A confirmação da correcção e utilidade desta técnica de identificação dos parâmetros caracterizadores do modelo foi realizada por Sues [155], que para o efeito considerou diversos registos temporais de excitações, quer de carácter sinusoidal, quer de natureza sísmica. Determinando as correspondentes histórias temporais da resposta de um sistema de 1-GL idealizado através dos modelos de Bouc-Wen ou de Baber-Wen, com parâmetros pré-definidos, e aplicando posteriormente a técnica de identificação descrita, foi possível na maioria dos casos obter valores dos parâmetros muito próximos dos inicialmente arbitrados, validando deste modo o método proposto.

Um outro aspecto da maior importância consiste naturalmente na própria validação do modelo diferencial utilizado, ou seja em saber se a sua aplicação aproxima de forma suficientemente satisfatória a realidade.

No sentido de realçar a boa aproximação conseguida, confrontam-se na figura 3.9 as relações força-deslocamento relativas a um pórtico de betão armado, decorrentes quer de uma análise experimental realizada por Gulkan e Sozen [74], quer da modelação realizada por Sues [155] com base no modelo de Baber-Wen, sendo notória a boa concordância conseguida.

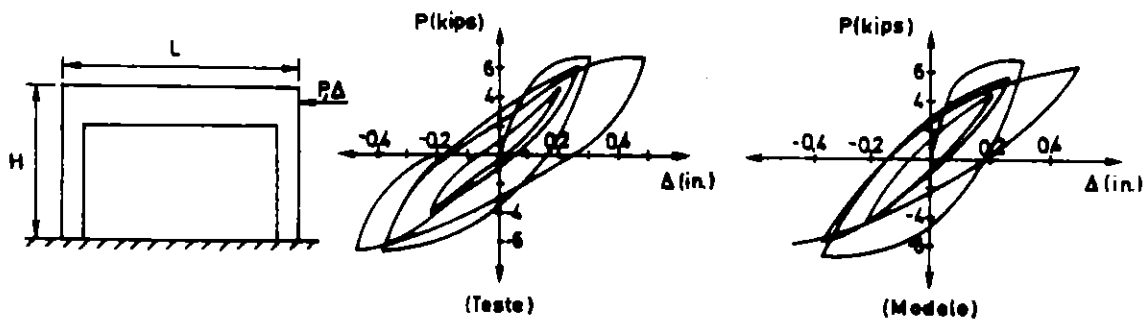


Fig. 3.9 - Validação experimental do modelo de Baber-Wen [155].

Tendo também por base diversos ensaios experimentais, que possibilitaram a identificação dos valores dos parâmetros de controlo do modelo de Baber-Wen mais ajustados à tradução de diversas situações reais, Sues concluiu ainda ser recomendável a adopção dos valores  $A = 1$ ,  $n = 1$ ,  $\alpha = 0,04$  e  $\beta = \gamma$  para estruturas de aço, e  $A = 1$ ,  $n = 2$ ,  $\alpha = 0,02$  e  $\beta = -3\gamma$  ( $\gamma < 0$ ) para estruturas de betão armado.

### 3.5.4 - Linearização do modelo diferencial de Baber-Wen

Os modelos diferenciais de Bouc-Wen e de Baber-Wen baseiam-se na introdução de um parâmetro auxiliar  $z$ , que se admite respeitar uma equação diferencial não-linear do tipo

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) \tag{3.84}$$

havendo interesse, do ponto de vista da análise do comportamento dinâmico de sistemas histeréticos através do método de linearização estocástica equivalente, em proceder à sua linearização através da relação

$$\dot{z}(t) = c_e(t)\dot{q}(t) + k_e(t)z(t) \tag{3.85}$$

como aliás foi já referido na secção 3.4.

No caso do modelo de Baber-Wen, os coeficientes da equação linear,  $c_e$  e  $k_e$ , podem ser obtidos mediante a aplicação das condições (3.44) à equação (3.73), podendo pois escrever-se que

$$c_e = E \left\{ \left[ \frac{\partial A}{\partial \dot{q}} \dot{q} + A - \frac{\partial v}{\partial \dot{q}} (\beta |\dot{q}| |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} |z|^n) - \right. \right. \\ \left. \left. - v \left( \beta \frac{\partial |\dot{q}|}{\partial \dot{q}} |z|^{n-1} z + \gamma |z|^n \right) \right] / \eta - \right. \\ \left. - [A \dot{q} - v(\beta |\dot{q}| |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} |z|^n)] \frac{\partial \eta}{\partial \dot{q}} / \eta^2 \right\} \quad (3.86)$$

$$k_e = E \left\{ \left[ \frac{\partial A}{\partial z} \dot{q} - \frac{\partial v}{\partial z} (\beta |\dot{q}| |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} |z|^n) - \right. \right. \\ \left. \left. - v \left( \beta |\dot{q}| \frac{\partial}{\partial z} |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} \frac{\partial}{\partial z} |z|^n \right) \right] / \eta - \right. \\ \left. - [A \dot{q} - v(\beta |\dot{q}| |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} |z|^n)] \frac{\partial \eta}{\partial z} / \eta^2 \right\} \quad (3.87)$$

em que os parâmetros  $A$ ,  $v$  e  $\eta$  são função da energia dissipada do sistema (v. eq. 3.74), a qual respeita a equação diferencial (3.72).

O cálculo dos valores médios a que se referem as equações (3.86) e (3.87), que não é nada simples, mesmo supondo que as variáveis  $\dot{q}$  e  $z$  têm uma distribuição normal, pode no entanto ser substancialmente simplificado, caso se admita que os parâmetros  $A$ ,  $v$  e  $\eta$  têm uma lenta evolução monótona, associada a valores relativamente baixos dos coeficientes  $\delta_A$ ,  $\delta_v$  e  $\delta_\eta$ , hipótese que é perfeitamente aceitável desde que a degradação estrutural não se processe muito rapidamente. Nesse caso,  $A$ ,  $v$  e  $\eta$  podem ser substituídos pelos respectivos valores médios  $m_A$ ,  $m_v$  e  $m_\eta$ , tornando-se também desprezáveis todas as derivadas parciais daqueles parâmetros em ordem a  $\dot{q}$  e  $z$ , pelo que as equações (3.86) e (3.87) dão lugar às seguintes equações aproximadas

$$c_e \cong E \left\{ \left[ m_A - m_v \left( \beta \frac{\partial |\dot{q}|}{\partial \dot{q}} |z|^{n-1} z + \gamma |z|^n \right) \right] / m_\eta \right\} \quad (3.88)$$

$$k_e \cong E \left\{ \left[ -m_v \left( \beta |\dot{q}| \frac{\partial}{\partial z} |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q} \frac{\partial}{\partial z} |z|^n \right) \right] / m_\eta \right\} \quad (3.89)$$

Os valores médios  $m_A$ ,  $m_v$  e  $m_\eta$  obtêm-se aplicando o operador valor médio a ambos os membros das equações (3.74), resultando que

$$m_A = A_o - \delta_A m_{W_d} \quad m_v = 1 + \delta_v m_{W_d} \quad m_\eta = 1 + \delta_\eta m_{W_d} \quad (3.90)$$

sendo, por outro lado, o valor médio da energia dissipada regulado pela equação (v. eq. 3.72)

$$\dot{m}_{w_d} = (1 - \alpha)kE[z\dot{q}] \quad (3.91)$$

Deste modo, tendo em consideração o suposto carácter gaussiano das variáveis  $\dot{q}$  e  $z$ , e admitindo que o processo de resposta tem valor médio nulo, os valores médios indicados nas equações (3.88) e (3.89) podem ser calculados, obtendo-se para  $c_e$  e  $k_e$  as seguintes expressões [19]

$$c_e = [m_A - m_v(\beta F_1 + \gamma F_2)]/m_n \quad (3.92)$$

$$k_e = -m_v(\beta F_3 + \gamma F_4)/m_n \quad (3.93)$$

em que os coeficientes  $F_1, F_2, F_3$  e  $F_4$  podem ser expressos em função das características estatísticas da resposta através das seguintes relações

$$\begin{aligned} F_1 &= E\left[\frac{\partial |\dot{q}|}{\partial \dot{q}} |z|^{n-1} z\right] = \frac{\sigma_z^n}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{n/2} I_s \\ F_2 &= E[|z|^n] = \frac{\sigma_z^n}{\sqrt{\pi}} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{n/2} \\ F_3 &= E\left[|\dot{q}| \frac{\partial}{\partial z} |z|^{n-1} z\right] \\ &= \frac{n\sigma_{\dot{q}}\sigma_z^{n-1}}{\pi} \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right) 2^{n/2} \left\{ \frac{2(1-\rho_{\dot{q}z}^2)^{\frac{n-1}{2}}}{n} + \rho_{\dot{q}z} I_s \right\} \\ F_4 &= E\left[\dot{q} \frac{\partial}{\partial z} |z|^n\right] \\ &= \frac{n}{\sqrt{\pi}} \rho_{\dot{q}z} \sigma_{\dot{q}} \sigma_z^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) 2^{n/2} \end{aligned} \quad (3.94)$$

em que

$$\Gamma(n) = \int_0^\infty x^{n-1} e^{-x} dx \quad , \quad n > 0 \quad (3.95)$$

é a conhecida função gama, e

$$I_s = 2 \int_1^{n/2} \text{sen}^n \theta d\theta \quad (3.96)$$

com

$$l = \arctg \left( \frac{\sqrt{1 - \rho_{\dot{q}z}^2}}{\rho_{qz}} \right) \quad (3.97)$$

### 3.5.5 - Resposta de sistemas de 1-GL caracterizados pelo modelo de Baber-Wen a excitações aleatórias de média nula

A linearização do modelo histerético de Baber-Wen, traduzida pela substituição da equação diferencial não-linear (3.73) pela equação linear (3.85), cujos coeficientes  $c_e$  e  $k_e$  podem ser conhecidos através das equações (3.92) a (3.97), torna viável uma abordagem simples e eficiente da análise da resposta aleatória de um sistema histerético de 1-GL idealizado através deste modelo, utilizando para o efeito a técnica iterativa característica do método de linearização estocástica equivalente, já anteriormente descrita.

Com efeito, recorrendo à equação (3.47), que condensa as equações (3.40), (3.41) e (3.43), ou seja

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.98)$$

com

$$\underline{y}(t) = \begin{Bmatrix} q(t) \\ \dot{q}(t) \\ z(t) \end{Bmatrix} \quad \underline{A}_e = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)k}{m} \\ 0 & c_e & k_e \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ p(t)/m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.99)$$

e começando por supor que a excitação actuante tem carácter estacionário e valor médio nulo, e que a degradação estrutural é desprezável, o problema pode ser facilmente resolúvel, começando por arbitrar valores iniciais para  $c_e$  e  $k_e$ .

Dessa forma, a matriz  $\underline{A}_e$  fica perfeitamente determinada, tornando-se possível a quantificação da matriz de covariância instantânea da resposta  $\underline{\mu}_y$ , seguindo uma formulação própria de sistemas lineares, podendo posteriormente, a partir dos seus elementos, calcular-se os valores corrigidos de  $c_e$  e  $k_e$  a considerar na iteração seguinte com base nas equações (3.92) a (3.97), e assim sucessivamente até que se atinja a desejada convergência.

Porém, no caso de excitações não-estacionárias de média nula, ou mesmo no caso de excitações estacionárias, mas em que a degradação estrutural não seja desprezável, o problema torna-se mais complicado, já que nessas circunstâncias a resposta do sistema é sempre não-estacionária, levando a que os coeficientes de linearização  $c_e$  e  $k_e$ , bem como a matriz  $\underline{A}_e$  sofram uma variação ao longo do tempo.

Nessa situação, as características probabilísticas da resposta têm de ser avaliadas ao longo de sucessivos instantes de tempo, verificando-se que, no caso de uma excitação idealizada através de um ruído branco evolutivo, caracterizado pelo produto de uma função de modulação determinística  $\theta(t)$  por um processo estocástico estacionário de valor médio nulo e densidade espectral de potência constante  $S_o$ , a matriz de covariância instantânea da resposta obedece à equação (v. eq. 2.154)

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \quad (3.100)$$

em que

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \theta(t)^2 S_o / m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.101)$$

Desse modo, o sistema de equações diferenciais (3.100) deve ser integrado numericamente, actualizando em cada instante de forma iterativa a matriz  $\underline{A}_e(t)$ , cujos coeficientes  $c_e(t)$  e  $k_e(t)$  dependem das características estatísticas da resposta, de acordo com as equações (3.92) a (3.97).

A forma mais simples de incluir também o efeito da degradação de rigidez e de resistência, traduzida pela consideração de parâmetros  $A$ ,  $\nu$  e  $\eta$  dependentes da energia dissipada  $W_d$  (v. eq. 3.74), consiste em adicionar à equação (3.100) a equação (3.91)

$$\dot{m}_{W_d} = (1 - \alpha)kE[z\dot{q}] \quad (3.102)$$

O problema pode então ser resolvido integrando numericamente o sistema de equações diferenciais de primeira ordem definido pelas equações (3.100) e (3.102), actualizando em cada instante de forma iterativa os valores médios dos parâmetros  $A$ ,  $\nu$  e  $\eta$  através das equações (3.90), e seguidamente os valores dos coeficientes de linearização  $c_e(t)$  e  $k_e(t)$  com base nas equações (3.92) a (3.97).

Não sendo a excitação actuante do tipo ruído branco, esta pode ser interpretada como a resposta de um filtro a uma excitação daquele tipo, havendo então simplesmente que proceder à ampliação do sistema de equações diferenciais (3.98), por forma a traduzir o equilíbrio dinâmico do conjunto sistema-filtro, como aliás foi já anteriormente referido em casos análogos.

### 3.5.6 - Consideração de excitações de valor médio não-nulo

Na dedução das equações (3.92) a (3.97), que fornecem os valores dos coeficientes  $c_o$  e  $k_o$  relativos à linearização do modelo de Baber-Wen, foi suposta a hipótese de que as variáveis  $\dot{q}$  e  $z$  obedecem a uma distribuição bidimensional de Gauss com valores médios nulos, tendo os valores médios indicados nas equações (3.88) e (3.89) sido calculados com base na função densidade de probabilidade conjunta correspondente.

Tal sucede, evidentemente, desde que o processo de excitação apresente também valor médio nulo, dada a natureza simétrica do tipo de não-linearidade traduzida pelo modelo diferencial em questão. Simplesmente, casos há em que esse valor médio é não-nulo, acarretando a necessidade de introdução de algumas modificações, à semelhança do que foi já anteriormente referido em 2.5.5, para que possam continuar a ser utilizadas as equações (3.92) a (3.97) na linearização do modelo.

Assim, decompondo quer o processo de excitação, quer o de resposta através das relações

$$p(t) = p_o(t) + m_p(t) \quad (3.103)$$

$$q(t) = q_o(t) + m_q(t) \quad (3.104)$$

$$z(t) = z_o(t) + m_z(t) \quad (3.105)$$

substituindo (3.104) em (3.40), e aplicando o operador  $E[\ ]$  a ambos os membros resulta que

$$E[g(q_o + m_q, t)] = m_p(t) \quad (3.106)$$

Subtraindo membro a membro as equações (3.40) e (3.106), obtém-se pois que

$$m\ddot{q}_o(t) + c\dot{q}_o(t) + h(q_o, m_q, t) = p_o(t) \quad (3.107)$$

sendo a função não-linear  $h(q_o, m_q, t)$  definida por

$$h(q_o, m_q, t) = g(q_o + m_q, t) - E[g(q_o + m_q, t)] \quad (3.108)$$

verificando-se pois que

$$E[h(q_o, m_q, t)] = 0 \quad (3.109)$$

Sendo também a função  $g$  decomponível através da equação (3.41), a equação (3.106) permite ainda concluir que

$$\alpha k m_q(t) + (1 - \alpha) k m_z(t) = m_p(t) \quad (3.110)$$

Por outro lado, podendo também a função  $h$  ser decomposta através da relação

$$h = \alpha k q_o + (1 - \alpha) k z_o \quad (3.111)$$

a equação (3.107) pode escrever-se

$$m\ddot{q}_o(t) + c\dot{q}_o(t) + \alpha k q_o(t) + (1 - \alpha) k z_o(t) = p_o(t) \quad (3.112)$$

Por conseguinte, a linearização do modelo pode ser conseguida recorrendo à equação

$$\dot{z}_o(t) = c_e(t)\dot{q}_o(t) + k_e(t)z_o(t) \quad (3.113)$$

sendo o valor dos coeficientes  $c_e(t)$  e  $k_e(t)$  encontrado mediante o recurso às equações (3.92) a (3.97), referentes a processos de resposta de valor médio nulo. Para tal, no entanto, deve seguir-se uma técnica iterativa, começando por arbitrar valores iniciais para  $c_e(t)$ ,  $k_e(t)$ ,  $m_q(t)$  e  $m_z(t)$ . Uma vez conhecidos esses valores, e podendo as equações (3.112) e (3.113) expressar-se sob a forma (v. eq. 3.47)

$$\dot{\underline{y}}_o(t) = \underline{A}_o(t)\underline{y}_o(t) + \underline{x}_o(t) \quad (3.114)$$

em que

$$\underline{y}_o(t) = \begin{Bmatrix} q_o(t) \\ \dot{q}_o(t) \\ z_o(t) \end{Bmatrix} \quad \underline{A}_o(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)k}{m} \\ 0 & c_e(t) & k_e(t) \end{bmatrix} \quad \underline{x}_o(t) = \begin{Bmatrix} 0 \\ p_o(t)/m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3.115)$$

pode determinar-se a composição da matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_y(t)$ , utilizando técnicas de análise de sistemas lineares.

Dessa forma, fica inteiramente caracterizada a distribuição de probabilidade de Gauss relativa às variáveis  $(q_o, \dot{q}_o, z_o)$ , podendo não só calcular-se valores corrigidos de  $c_e(t)$  e  $k_e(t)$  a utilizar na iteração seguinte através das equações (3.92) a (3.97), como também quantificar novos valores de  $m_q(t)$  e de  $m_z(t)$  com base nas equações (3.109) e (3.110), fazendo prosseguir este processo até que esteja assegurada a indispensável convergência.



### 3.5.7 - Idealização do efeito de "pinching" através do modelo de Noori-Baber-Wen

Embora os fenômenos de "pinching" possam ser observados em vários materiais e em diversas situações (combinações de esforços), eles são muito evidentes em elementos de betão armado sujeitos a elevados esforços transversos (Fig. 3.10).

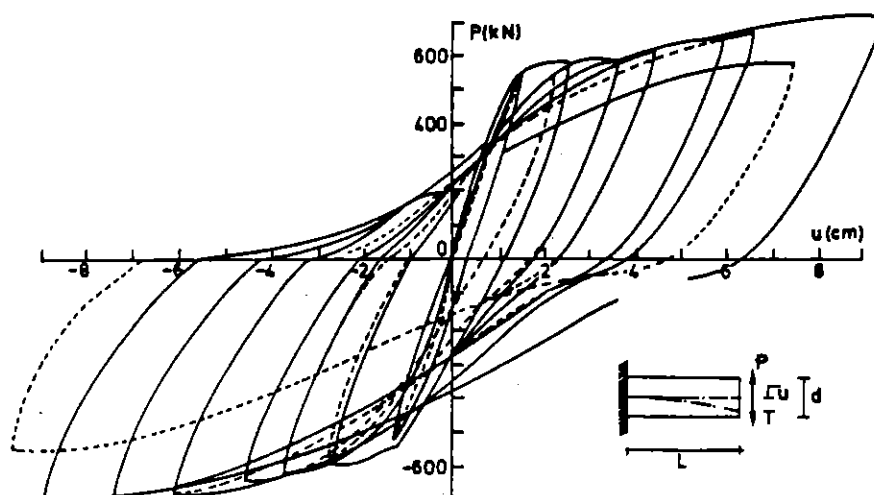


Fig. 3.10 - Observação experimental do efeito de "pinching".

Uma outra virtualidade do modelo diferencial de Baber-Wen consiste na possibilidade da sua modificação no sentido de contemplar também este efeito, responsável aliás por uma redução da capacidade de dissipação de energia dos elementos estruturais.

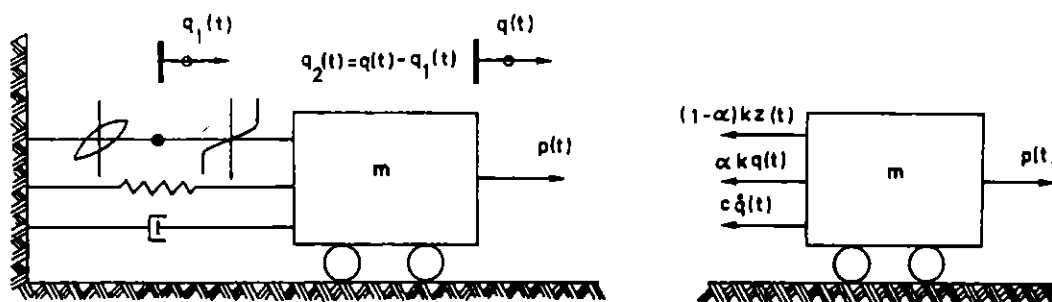


Fig. 3.11 - Sistema histerético de 1-GL com efeito de "pinching" (modelo de Noori-Baber-Wen).

Um modo de idealizar tal forma de comportamento histerético consiste em recorrer ao modelo de Noori-Baber-Wen [111], traduzido esquematicamente pela figura 3.11, o qual resulta da introdução de um novo elemento de ligação ao exterior, para além dos três já considerados no modelo de Baber-Wen.

Esse novo elemento, que apresenta características de endurecimento, e se encontra ligado em série ao elemento histerético de Baber-Wen, condiciona a resposta  $q(t)$  do sistema à excitação actuante, sendo a sua contribuição traduzida por

$$q_2 = \lambda \arctg(z/\xi) \quad (3.116)$$

ao passo que a força de restituição não-linear  $g(q, t)$  se supõe caracterizada pela equação

$$g = \alpha k q + (1 - \alpha) k z \quad (3.117)$$

obedecendo, neste caso, o parâmetro auxiliar  $z$  à equação diferencial não-linear

$$\dot{z} = [A\dot{q}_1 - \nu(\beta |\dot{q}_1| |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q}_1 |z|^n)]/\eta \quad (3.118)$$

em que

$$q_1(t) = q(t) - q_2(t) \quad (3.119)$$

Os parâmetros  $\lambda$  e  $\xi$  intervenientes na equação (3.116), caracterizam o efeito de "pinching" idealizado, sendo este sentido para valores de  $q_2$  tanto mais elevados, quanto maior é o valor de  $\lambda$ , e levando a uma configuração tanto mais aguçada do ciclo histerético, quanto menor é o valor de  $\xi$ .

Estes dois parâmetros são também definidos como funções crescentes da energia dissipada através das relações

$$\begin{aligned} \lambda &= \lambda_o + \delta_\lambda W_d \\ \xi &= \xi_o + \delta_\xi W_d \end{aligned} \quad (3.120)$$

por forma a melhor traduzir a deterioração estrutural.

Uma forma de confirmar que o modelo de Noori-Baber-Wen traduz de forma adequada a inclusão do efeito de "pinching" consiste em procurar representar graficamente a evolução sofrida pelo parâmetro  $z$  ao longo de variações cíclicas da resposta.

Para tal, pode admitir-se, por exemplo, uma variação sinusoidal para  $q_1$ , tornando-se então possível obter a correspondente evolução dos valores de  $z$ , mediante

integração da equação (3.118), tal como foi referido em 3.5.1, e posteriormente a determinação dos respectivos valores de  $q_2$  e  $q$  através das equações (3.116) e (3.119). Os parâmetros  $\lambda$  e  $\xi$  caracterizadores do efeito de "pinching", podem ser ciclicamente actualizados através das equações (3.120) e (3.71), por forma a ter em consideração a deterioração estrutural.

Deste modo, Noori [111] pôde obter as representações gráficas traduzidas pela figura 3.12, obtidas numa situação em que foi desprezado o efeito da degradação de rigidez e de resistência, sendo os seguintes os valores dos principais parâmetros do modelo:  $A = 1, \beta = \gamma = 0, \zeta, \lambda_o = 0, \delta_\lambda = 0, \zeta, \xi_o = 0, 125$  e  $\delta_\xi = 0$ .

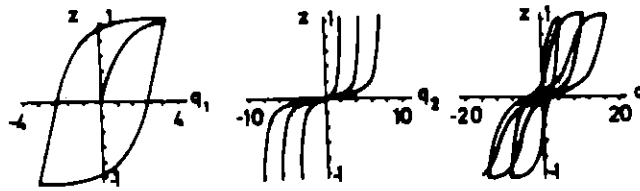


Fig. 3.12 - Representação gráfica das relações  $(z, q_1), (z, q_2)$  e  $(z, q)$  para uma variação sinusoidal de  $q_1$ .

Introduzindo também a degradação de rigidez e de resistência através dos parâmetros  $\delta_A = \delta_v = \delta_\eta = 0, 01$ , e supondo  $\lambda_o = 0, \delta_\lambda = 0, 2, \xi_o = 0, 05$  e  $\delta_\xi = 0$ , pode por sua vez obter-se a representação gráfica da relação  $(z, q)$  correspondente a uma variação sinusoidal de  $q_1$ , expressa pela figura 3.13 [112].

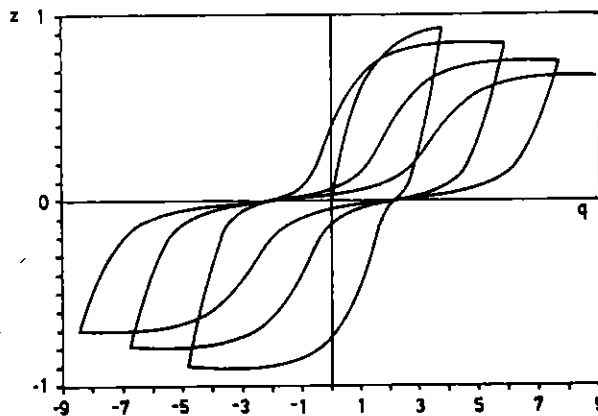


Fig. 3.13 - Efeito da deterioração estrutural em termos de rigidez, resistência e de efeito de "pinching".

Da observação desta figura, e da sua comparação qualitativa com a figura 3.10, pode pois constatar-se a justeza do modelo de Noori-Baber-Wen como forma de idealização do comportamento hysterético de elementos estruturais em que o efeito de "pinching" seja significativo.

Este modelo apresenta igualmente a assinalável virtude de ser matematicamente tratável, tornando-se viável a sua linearização e a análise estocástica da resposta a excitações aleatórias estacionárias ou não-estacionárias.

Antes de proceder à sua linearização, convém, no entanto, introduzir uma modificação em relação às expressões anteriormente apresentadas, que consiste em tomar derivadas em ordem ao tempo da equação (3.116), conjugando a expressão resultante com a equação (3.118), obtendo-se assim que

$$\dot{q}_2 = \left( \frac{\lambda \xi}{\xi^2 + z^2} \right) \cdot [A\dot{q}_1 - v(\beta |\dot{q}_1| |z|^{n-1} z + \gamma \dot{q}_1 |z|^n)] / \eta \quad (3.121)$$

Deste modo, introduzindo o vector

$$\underline{y} = [q, \dot{q}, z, q_1, q_2]^T \quad (3.122)$$

as equações (3.40), (3.41), (3.118), (3.119) e (3.121), que traduzem o movimento do sistema de 1-GL e a natureza do seu comportamento hysterético, podem escrever-se sob a forma

$$\dot{y}_1 = y_2 \quad (3.123)$$

$$\dot{y}_2 = -\frac{c}{m} y_2 - \frac{\alpha k}{m} y_1 - \frac{(1-\alpha)k}{m} y_3 + \frac{p(t)}{m} \quad (3.124)$$

$$\dot{y}_3 = [A\dot{y}_4 - v(\beta |\dot{y}_4| |y_3|^{n-1} y_3 + \gamma |y_3|^n \dot{y}_4)] / \eta \quad (3.125)$$

$$\dot{y}_4 = y_2 - \dot{y}_5 \quad (3.126)$$

$$\dot{y}_5 = \left( \frac{\lambda \xi}{\xi^2 + y_3^2} \right) \cdot [A\dot{y}_4 - (\beta |\dot{y}_4| |y_3|^{n-1} y_3 + \gamma \dot{y}_4 |y_3|^n)] / \eta \quad (3.127)$$

Sendo as equações (3.125) e (3.127) manifestamente não-lineares, elas podem ser aproximadas por equações lineares do tipo

$$\dot{y}_3 = c_{e_3} \dot{y}_4 + k_{e_3} y_3 \quad (3.128)$$

$$\dot{y}_5 = c_{e_5} \dot{y}_4 + k_{e_5} y_3 \quad (3.129)$$

utilizando a técnica de linearização estocástica equivalente, e determinando os coeficientes  $c_{e_3}$ ,  $k_{e_3}$ ,  $c_{e_5}$  e  $k_{e_5}$  através das condições de Atalik e Utku. No que respeita a  $c_{e_3}$  e  $k_{e_3}$ , podem obter-se directamente expressões analíticas destes coeficientes, supondo nulo o valor médio do processo de resposta, tal como foi descrito em 3.5.4. Já em relação a  $c_{e_5}$  e  $k_{e_5}$ , seguindo procedimento semelhante, apenas é possível obter expressões que permitem a sua quantificação em função de  $\sigma_{y_3}$ ,  $\sigma_{y_4}$  e  $\rho_{y_3y_4}$  com recurso a métodos numéricos, e que por serem relativamente longas se apresentam no Apêndice B.

Deste modo, conjugando por um lado as equações (3.128), (3.129) e (3.126), e tendo por outro lado em conta as equações (3.123) e (3.124), pode obter-se que

$$\underline{y}(t) = \underline{A}_e(t)\underline{y}(t) + \underline{x}(t) \tag{3.130}$$

sendo

$$\underline{A}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\alpha k}{m} & -\frac{c}{m}y_2 & -\frac{(1-\alpha)k}{m} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{e_3}}{1+c_{e_5}} & k_{e_3} - \frac{c_{e_3}k_{e_5}}{1+c_{e_5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{1+c_{e_5}} & -\frac{k_{e_5}}{1+c_{e_5}} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{c_{e_5}}{1+c_{e_5}} & \frac{k_{e_5}}{1+c_{e_5}} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p(t)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \tag{3.131}$$

Por conseguinte, sendo a excitação idealizada através de um ruído branco ou ruído branco evolutivo, a evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta  $\underline{\mu}_y$  é regida pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t)\underline{A}_e(t)^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \tag{3.132}$$

em que a matriz  $\underline{S}_o(t)$  depende das densidades espectrais de potência do processo de excitação  $p(t)$ .

Nestas condições, a análise da resposta do sistema pode ser efectuada ao longo de sucessivos instantes de tempo, caso a resposta seja não-estacionária, integrando numericamente o sistema de equações diferenciais (3.132), simultaneamente com a equação (v. eq. 3.102)

$$\dot{m}_{w_d} = (1-\alpha)k\mu_{y_2y_3} \tag{3.133}$$

se se tiver em consideração a degradação estrutural, actualizando-se em cada instante de forma iterativa quer os valores dos coeficientes de linearização  $c_{e_3}$ ,  $k_{e_3}$ ,  $c_{e_5}$  e  $k_{e_5}$ , quer os valores médios dos parâmetros  $A$ ,  $\nu$ ,  $\eta$ ,  $\lambda$  e  $\xi$  susceptíveis de traduzirem a degradação do sistema ao longo do tempo.

A única dificuldade que aparentemente se levanta resulta do facto de o cálculo dos valores corrigidos dos coeficientes de linearização envolver o conhecimento prévio de  $\sigma_{y_3}$ ,  $\sigma_{y_4}$  e  $\rho_{y_3y_4}$  pois que se, da resolução das equações (3.132) e (3.133), se obtém, em cada iteração, directamente o valor de  $\sigma_{y_3}$ , já o mesmo não sucede com  $\sigma_{y_4}$  e  $\rho_{y_3y_4}$ .

Esse problema pode, no entanto, ser rapidamente ultrapassado, tendo em conta que, da quarta equação traduzida pelo sistema (3.130), se pode facilmente concluir que

$$\sigma_{y_4}^2 = (\sigma_{y_2}^2 - 2k_{e_5}\rho_{y_2y_3}\sigma_{y_2}\sigma_{y_3} + k_{e_5}^2\sigma_{y_3}^2) / (1 + c_{e_5})^2 \quad (3.134)$$

$$\rho_{y_3y_4} = (\rho_{y_2y_3}\sigma_{y_2}/\sigma_{y_4} - k_{e_5}\sigma_{y_3}/\sigma_{y_4}) / (1 + c_{e_5}) \quad (3.135)$$

No sentido de colocar em evidência a boa aproximação conseguida pela aplicação do método de linearização estocástica equivalente na análise da resposta de um sistema de 1-GL, cujo comportamento hysterético seja idealizado através do modelo de Noori-Baber-Wen, apresentam-se na figura 3.14 gráficos [112] representativos da evolução temporal dos valores de  $\sigma_q$  e  $\sigma_{\dot{q}}$  obtidos por esta via, e através de técnicas de simulação digital com base em 250 realizações distintas, para um caso em que  $A = 1$ ,  $\beta = \gamma = 0,5$ ,  $\lambda_o = 0$ ,  $\delta_\lambda = 0,5$ ,  $\xi_o = 0,125$  e  $\delta_\xi = 0$ , sendo o coeficiente de amortecimento igual a 0,02 e a excitação pseudo-não-estacionária, caracterizada por uma densidade espectral constante  $S_o$ . Da sua observação, pode pois constatar-se, para além de uma satisfatória compatibilidade global de resultados, que é mesmo nas

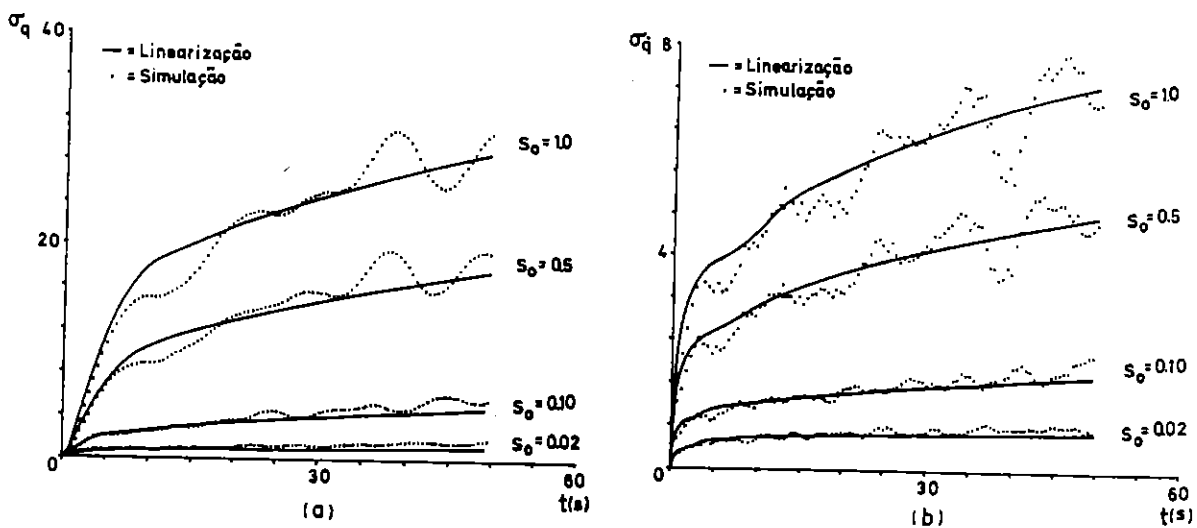


Fig. 3.14 - Evolução temporal de  $\sigma_q$  e de  $\sigma_{\dot{q}}$ .

situações em que a excitação actuante assume maior intensidade que as diferenças relativas encontradas são menos significativas, verificando-se, em contrapartida, que, para baixos níveis de excitação, a linearização equivalente tende a conduzir a estimativas por defeito de  $\sigma_q$  e  $\sigma_{\dot{q}}$ .

### 3.5.8 - O modelo bi-axial de Park-Wen

Estudos analíticos e experimentais realizados [119] com base em colunas de aço e de betão armado sujeitas a carregamentos cíclicos em duas direcções ortogonais mostraram existir uma significativa interacção entre as forças de restituição bi-axial em regime não-linear.

Sendo a excitação sísmica caracterizada, em particular, por duas componentes horizontais do movimento de base, tendentes a induzir o funcionamento bi-axial de muitas das peças lineares constituintes das estruturas dos edifícios, há naturalmente toda a conveniência em dispor de modelos histeréticos que idealizem suficientemente bem esta forma de comportamento, e que sejam ao mesmo tempo matematicamente tratáveis do ponto de vista da análise estocástica do comportamento dinâmico das estruturas.

Ora sucede que o modelo de Bouc-Wen, para além dos aspectos positivos já anteriormente mencionados, revela ainda a vantagem adicional de se adaptar à caracterização do comportamento histerético bi-axial, mediante a introdução de determinadas modificações introduzidas por Park [119].

Considere-se então um sistema histerético de 2-GL sujeito a uma excitação bi-direccional, podendo o respectivo equilíbrio dinâmico ser traduzido pela equação

$$m\ddot{\underline{q}}(t) + c\dot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{p}(t) \quad (3.136)$$

em que

$$\underline{q}^T = [q_x, q_y] \quad \underline{g}^T = [g_x, g_y] \quad \underline{p}^T = [p_x, p_y] \quad (3.137)$$

As forças de restituição podem neste caso ser objecto da seguinte decomposição

$$\underline{g} = \alpha \underline{k} \underline{q} + (1 - \alpha) \underline{k} \underline{z} \quad (3.138)$$

em que  $\underline{k}$  é uma matriz associada à definição da rigidez inicial e  $\underline{z} = [z_x, z_y]^T$  é um vector constituído por dois parâmetros que, segundo Park, devem satisfazer as seguintes equações diferenciais, no caso de forças histeréticas de restituição isotrópicas

$$\dot{z}_x = A\dot{q}_x - \beta |\dot{q}_x z_x| z_x - \gamma \dot{q}_x z_x^2 - \beta |\dot{q}_y z_y| z_x - \gamma \dot{q}_y z_x z_y \quad (3.139)$$

$$\dot{z}_y = A\dot{q}_y - \beta |\dot{q}_y z_y| z_y - \gamma \dot{q}_y z_y^2 - \beta |\dot{q}_x z_x| z_y - \gamma \dot{q}_x z_x z_y \quad (3.140)$$

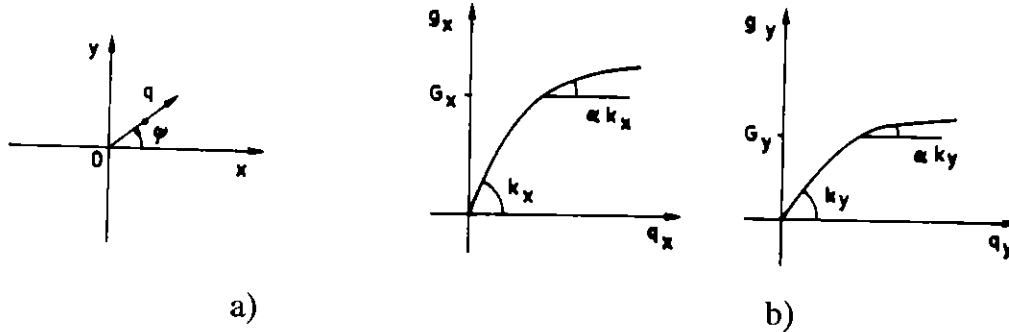


Fig. 3.15 - (a) Deslocamento uniaxial  $q$ ; (b) Sistema não-isotrópico.

Introduzindo uma conversão para coordenadas polares através das relações

$$q_x = q \cos \psi \quad q_y = q \sin \psi \quad z_x = z \cos \psi \quad z_y = z \sin \psi \quad (3.141)$$

em que  $q$  e  $z$  representam o deslocamento uniaxial e o parâmetro endócrino do modelo correspondente a uma direcção caracterizada pelo ângulo  $\psi$  em relação ao eixo  $ox$ ; as equações (3.139) e (3.140) reduzem-se à forma característica do modelo uniaxial de Bouc-Wen com  $n = 2$ ; isto é

$$\dot{z} = A\dot{q} - \beta |\dot{q} z| z - \gamma \dot{q} z^2 \quad (3.142)$$

independentemente do valor de  $\psi$ , o que significa que essas expressões representam efectivamente um modelo histerético bi-direccional isotrópico.

No caso de as formas de comportamento histerético serem diferentes segundo duas direcções ortogonais  $ox$  e  $oy$ , pode utilizar-se a seguinte transformação no sentido de procurar reduzir o sistema a um sistema equivalente isotrópico

$$g'_y = \frac{G_x}{G_y} g_y \quad q'_y = \frac{k_y G_x}{k_x G_y} q_y \quad (3.143)$$

representando  $k_x$  e  $k_y$  os valores das rigidezes iniciais, e  $G_x$  e  $G_y$  as resistências de cedência consideradas (Fig. 3.15b).

Segundo Park [119], substituindo  $g_y$  por  $g'_y$  e  $q_y$  por  $q'_y$ , as equações (3.136), (3.138), (3.139) e (3.140) continuam a poder ser utilizadas para descrever o comportamento dinâmico do sistema não-isotrópico.



Esta forma de idealização do comportamento histerético bi-axial foi também comparada com resultados colhidos experimentalmente [118], podendo visualizar-se através da figura 3.16 a boa aproximação conseguida.

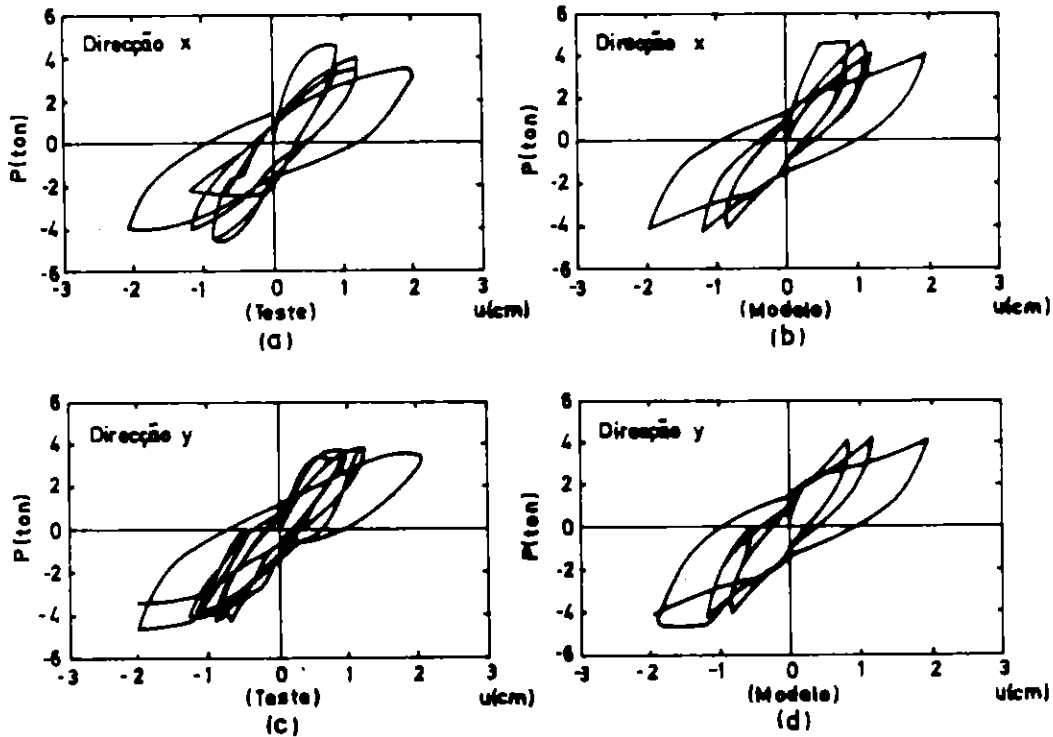


Fig. 3.16 - Validação experimental do modelo de Park-Wen.

À semelhança dos modelos diferenciais anteriormente descritos, o modelo de Park-Wen é também matematicamente tratável, podendo proceder-se à linearização das equações (3.139) e (3.140) sob a forma

$$\dot{z}_x = C_{x1}\dot{q}_x + C_{x2}z_x + C_{x3}\dot{q}_y + C_{x4}z_y \quad (3.144)$$

$$\dot{z}_y = C_{y1}\dot{q}_y + C_{y2}z_y + C_{y3}\dot{q}_x + C_{y4}z_x \quad (3.145)$$

em que os coeficientes  $C_{x1}$ ,  $C_{x2}$ ,  $C_{x3}$  e  $C_{x4}$  são dados pelas relações seguintes [119], no caso de o processo de resposta ter valor médio nulo

$$C_{x1} = A - \sigma_{z_x}^2 \left( \frac{2\gamma}{\pi} \phi_x - \frac{\gamma}{\pi} \sin 2\phi_x \right) \quad (3.146)$$

$$C_{x2} = -\sigma_{\dot{q}_x} \sigma_{z_x} \left[ \frac{4\gamma}{\pi} (1 - \rho_{\dot{q}_x z_x}^2)^{3/2} + \rho_{\dot{q}_x z_x} \left( \frac{4\gamma}{\pi} \phi_x - \frac{2\gamma}{\pi} \sin 2\phi_x \right) + \frac{2\gamma}{\pi} (\cos \psi_x + \psi_x \rho_{\dot{q}_x z_x}) \right] \quad (3.147)$$

$$C_{x3} = -\sigma_{z_x} \sigma_{z_y} \rho_{z_x z_y} \gamma \quad C_{x4} = -\sigma_{\dot{q}_y} \sigma_{z_y} \rho_{\dot{q}_y z_x} \gamma \quad (3.148)$$

com

$$\phi_x = \arctg \left[ -\left(1 - \rho_{\dot{q}_x z_x}^2\right)^{1/2} / \rho_{\dot{q}_x z_x} \right] \quad \psi_x = \arcsen(\rho_{\dot{q}_x z_x}) \quad (3.149)$$

ao passo que os coeficientes  $C_{y1}, C_{y2}, C_{y3}$  e  $C_{y4}$  se obtêm trocando os índices  $x$  por  $y$ .

Deste modo, supondo as matrizes  $\underline{m}, \underline{c}$  e  $\underline{k}$  diagonais com  $m_{11} = m_{22} = m, c_{11} = c_{22} = c, k_{11} = k_x$  e  $k_{22} = k_y$ , e introduzindo o vector

$$\underline{y}^T = [q_x, \dot{q}_x, z_x, q_y, \dot{q}_y, z_y] \quad (3.150)$$

as equações (3.136), (3.138), (3.144) e (3.145) podem escrever-se sob a forma

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e(t) \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.151)$$

com

$$\underline{A}_e(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\alpha \frac{k_x}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)}{m} k_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{x1} & C_{x2} & 0 & C_{x3} & C_{x4} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha k_y}{m} & -\frac{c}{m} & -\frac{(1-\alpha)}{m} k_y \\ 0 & C_{y3} & C_{y4} & 0 & C_{y1} & C_{y2} \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{p_x(t)}{m} \\ 0 \\ 0 \\ \frac{p_y(t)}{m} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.152)$$

podendo, pois, a análise da resposta processar-se utilizando a técnica iterativa característica da aplicação prática do método de linearização estocástica equivalente, tal como foi já anteriormente referido em 3.5.5, 3.5.6 e 3.5.7.

É ainda de assinalar que a técnica de identificação de sistemas, descrita em 3.5.3 com vista à determinação dos parâmetros do modelo hysterético de Baber-Wen, pode ser facilmente generalizada por forma a possibilitar também a quantificação dos parâmetros de controlo do modelo bi-axial de Park-Wen, de acordo aliás com a formulação recentemente desenvolvida por Ang e Wen [176].

### 3.5.9 - O modelo de Mochio-Samaras-Wen para problemas planos de tensão ou de deformação

Uma outra extensão recente do modelo diferencial de Baber-Wen consiste na tentativa de abordagem de problemas de estado de tensão ou de deformação planos. Essa generalização foi ensaiada por Mochio, Samaras e Shinozuka [108] que referindo-se a um problema de estado de tensão plano, consideraram as relações tensões-extensões expressas através das equações

$$\begin{aligned}(1 - \nu^2)\tau_x &= E[\alpha_x \epsilon_x + (1 - \alpha_x)z_x] + E\nu\epsilon_y \\(1 - \nu^2)\tau_y &= E[\alpha_y \epsilon_y + (1 - \alpha_y)z_y] + E\nu\epsilon_x \\ \tau_{xy} &= G[\alpha_{xy}\epsilon_{xy} + (1 - \alpha_{xy})z_{xy}]\end{aligned}\quad (3.153)$$

em que  $E$  e  $G$  representam os módulos de elasticidade longitudinal e transversal,  $\nu$  o coeficiente de Poisson,  $\underline{\tau} = [\tau_x, \tau_y, \tau_{xy}]^T$  o vector das componentes de tensão, e  $\underline{\epsilon} = [\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_{xy}]^T$  o vector das componentes de deformação, sendo  $z_x$ ,  $z_y$  e  $z_{xy}$  parâmetros auxiliares que obedecem genericamente a equações diferenciais do tipo

$$\dot{z}_* = A_* \dot{\epsilon}_* - \beta_* |\dot{\epsilon}_*| |z_*|^{n_*-1} z_* - \gamma_* \dot{\epsilon}_* |z_*|^{n_*} \quad (3.154)$$

(\* = x, y, xy)

Estas equações diferenciais não-lineares podem ser linearizadas sob a forma

$$\dot{z}_* = c_{e*} \dot{\epsilon}_* + k_{e*} z_* \quad (3.155)$$

com recurso às condições de Atalik-Utku, obtendo-se desse modo expressões já conhecidas para  $c_{e*}$  e  $k_{e*}$  em função das características estatísticas da resposta.

Este procedimento que, conjugado com uma formulação de elementos finitos, permite analisar a resposta aleatória de sistemas contínuos [108], parece no entanto enfermar de uma deficiência decorrente da não consideração de qualquer forma de interacção entre os três parâmetros auxiliares  $z_x$ ,  $z_y$  e  $z_{xy}$ , aspecto que aliás não foi descurado por Park no caso do modelo bi-axial e cuja importância foi comprovada por Takizawa e Aoyama [159].

### 3.5.10 - Os modelos diferenciais multilineares de Suzuki e Minai

Como se viu anteriormente, o modelo diferencial de Bouc-Wen, bem como os modelos modificados subsequentes devidos a Baber, Noori e Park, constituem excelentes formas de idealização do comportamento histerético, dotadas de uma grande

versatilidade e susceptíveis de reproduzir com boa aproximação o comportamento de sistemas histeréticos analisados experimentalmente, apresentando também a assinalável vantagem de possibilitarem a aplicação do método de linearização estocástica equivalente à análise da resposta de sistemas não-lineares histeréticos sem recurso à aproximação de Krylov e Bogoliubov, podendo obter-se directamente expressões analíticas dos coeficientes de linearização em função das características estatísticas da resposta.

No entanto, Suzuki e Minai [156] introduziram recentemente outras formas de caracterização diferencial de diversos modelos histeréticos constituídos por troços lineares, entre os quais se inclui o modelo bilinear já referido em 3.3.

Neste caso, por exemplo, o parâmetro auxiliar  $z$ , a que se refere a equação (3.41), deve respeitar a seguinte equação diferencial

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) = \dot{q}[1 - U(\dot{q})U(z - q_y) - U(-\dot{q})U(-z - q_y)] \quad (3.156)$$

em que  $U(\ )$  é a função de Heaviside, e  $q_y$  representa o valor de  $q$  correspondente ao início de cedência, sendo fácil verificar que ela traduz correctamente o ciclo histerético elasto-plástico a que se refere a figura 3.2(a).

De forma análoga, também os modelos multilineares são susceptíveis de uma caracterização diferencial através das relações

$$z = \sum_{i=1}^n (r_i - r_{i+1}) z_i \quad (3.157)$$

$$\dot{z}_i = \Phi(\dot{q}, z_i) = \dot{q}[1 - U(\dot{q})U(z_i - q_{y_i}) - U(-\dot{q})U(z_i - q_{y_i})] \quad (3.158)$$

em que  $r_i$  representa a rigidez do troço de ordem  $i$  ( $i = 1, \dots, n + 1$ ), e  $z_i$  é o parâmetro auxiliar associado a cada um dos  $n$  ciclos histeréticos elasto-plástico perfeitos, que por sobreposição geram o comportamento multilinear, e aos quais correspondem deslocamentos de início de cedência designados por  $q_{y_i}$ .

O modelo bilinear diferencial traduzido pela equação (3.156) é também matematicamente tratável do ponto de vista da aplicação do método de linearização estocástica equivalente. Com efeito, e referindo-nos, para exemplificação, à componente histerética elasto-plástica perfeita normalizada indicada na figura 3.17, a que corresponde a equação

$$\dot{z} = \dot{q}[1 - U(\dot{q})U(z - 1) - U(-\dot{q})U(-z - 1)] \quad (3.159)$$

esta pode ser aproximada pela equação linear

$$\dot{z} = c_e \dot{q} + k_e z \quad (3.160)$$

em que os coeficientes de linearização obedecem às seguintes relações, de acordo com as condições de Atalik-Utku

$$c_e = E \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}} \right] = E \{ [1 - U(\dot{q})U(z-1) - U(-\dot{q})U(-z-1)] + \dot{q}[1 - \delta(\dot{q})U(z-1) + \delta(\dot{q})U(-z-1)] \} \quad (3.161)$$

$$k_e = E \left[ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] = E \{ \dot{q}[1 - U(\dot{q})\delta(z-1) + U(-\dot{q})\delta(-z-1)] \} \quad (3.162)$$

sendo  $\delta(\cdot)$  a função impulso.

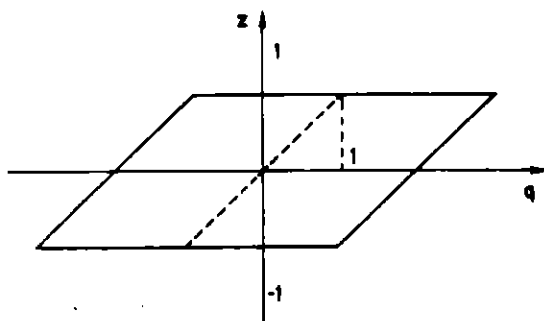


Fig. 3.17 - Componente histerética elasto-plástica perfeita normalizada.

Por conseguinte, sendo  $p(\dot{q}, z)$  a função densidade de probabilidade conjunta relativa às variáveis  $\dot{q}$  e  $z$ , supostas gaussianas de valor médio nulo

$$c_e = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} [1 - U(\dot{q})U(z-1) - U(-\dot{q})U(-z-1)] p(\dot{q}, z) d\dot{q} dz + \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dot{q}[1 - \delta(\dot{q})U(z-1) + \delta(\dot{q})U(-z-1)] p(\dot{q}, z) d\dot{q} dz \quad (3.163)$$

Tendo em conta que pelas propriedades da função impulso

$$\int_{-\infty}^{\infty} x \delta(x) dx = 0 \quad (3.164)$$

e que  $E[\dot{q}] = 0$ , conclui-se pois que o segundo integral duplo indicado na equação (3.163) assume valor nulo, pelo que, atendendo também à definição da função de Heaviside, se pode escrever que

$$c_e = 1 - \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} p(\dot{q}, z) d\dot{q} dz - \int_{-\infty}^{-1} \int_{-\infty}^0 p(\dot{q}, z) d\dot{q} dz \quad (3.165)$$

ou

$$c_e = 1 - 2 \int_1^{\infty} \int_0^{\infty} p(\dot{q}, z) d\dot{q} dz \quad (3.166)$$

Por outro lado, no que respeita a  $k_e$ , tendo novamente em conta que o valor médio  $E[\dot{q}]$  é nulo, bem como as propriedades da função  $U(\cdot)$ , facilmente se conclui que

$$k_e = - \int_0^{\infty} \dot{q} p(\dot{q}, 1) d\dot{q} + \int_{-\infty}^0 \dot{q} p(\dot{q}, -1) d\dot{q} \quad (3.167)$$

ou seja

$$k_e = -2 \int_0^{\infty} \dot{q} p(\dot{q}, 1) d\dot{q} \quad (3.168)$$

Deste modo, as equações (3.166) e (3.168) possibilitam a determinação dos coeficientes de linearização, uma vez conhecida a distribuição probabilística da resposta através da função densidade de probabilidade de Gauss  $p(\dot{q}, z)$ , o que naturalmente viabiliza a análise da resposta do sistema mediante o recurso a uma técnica iterativa.

O cálculo de  $c_e$  e  $k_e$  é facilitado tendo em conta que [134]

$$\int_1^{\infty} \int_0^{\infty} p(\dot{q}, z) d\dot{q} dz = a \sqrt{\frac{\pi}{2bc}} \int_{\sqrt{c}}^{\infty} \exp[-(1 - \rho_{\dot{q}z})x^2] [1 + \operatorname{erf}(\rho_{\dot{q}z}x)] dx \quad (3.169)$$

$$\int_0^{\infty} \dot{q} p(\dot{q}, 1) d\dot{q} = \frac{\alpha}{b} \exp(e^2 - c) \left[ \frac{1}{2} \exp(-e^2) + \rho_{\dot{q}z} \sqrt{\frac{\pi}{2}} (1 + \exp e) \right] \quad (3.170)$$

em que

$$\alpha = \frac{1}{2\pi\sqrt{f}} \quad b = \frac{\sigma_z^2}{2f} \quad c = \frac{\sigma_{\dot{q}}^2}{2f} \quad (3.171)$$

$$\hat{d} = \frac{\rho_{\dot{q}z} \sigma_{\dot{q}} \sigma_z}{2f} \quad e = \frac{d}{\sqrt{b}} \quad f = \sigma_{\dot{q}}^2 \sigma_z^2 (1 - \rho_{\dot{q}z}^2) \quad (3.172)$$

constatando-se, pois, que o cálculo de  $k_e$  pode efectuar-se directamente com base na solução analítica fornecida pela equação (3.170), ao passo que a determinação de  $c_e$  obriga a uma integração numérica com base na equação (3.169).

O arranque do processo iterativo pode processar-se supondo inicialmente nulos os valores de  $\sigma_{\dot{q}}$  e  $\sigma_z$ , o que equivale a tomar para valores iniciais dos coeficientes de linearização  $c_e = 1$  e  $k_e = 0$ , tendo em conta as equações (3.166) e (3.168).

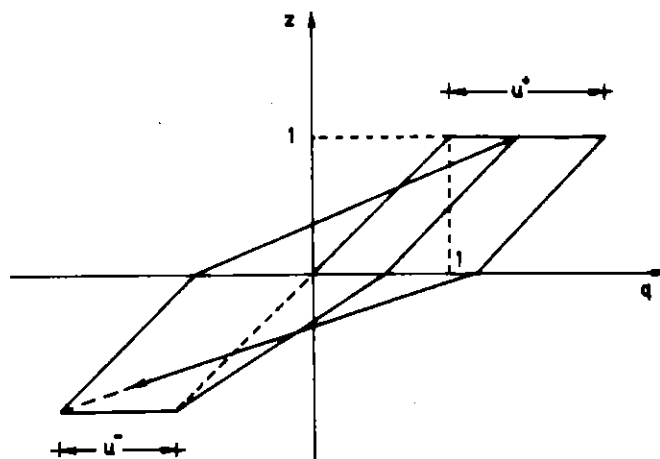


Fig. 3.18 - Componente histerética de Clough normalizada.

É ainda interessante realçar que, muito recentemente, Suzuki e Minai introduziram também formas de caracterização diferencial de variados modelos histeréticos, entre os quais se destaca, pelo seu maior interesse no domínio das estruturas de betão armado, o modelo bilinear com degradação de Clough e Johnston.

No caso particular do modelo de Clough, por exemplo, a componente histerética normalizada é traduzida pela equação diferencial

$$\dot{z} = \Phi(\dot{q}, z) = \dot{q}U(z)\{A^+U(q)[1 - U(z - 1)] + U(-q)\} + \dot{q}U(-z)\{A^-U(-q)[1 - U(-z - 1)] + U(q)\} \quad (3.173)$$

em que

$$A^+ = \frac{1 - z}{1 + u^+ - q} \quad A^- = \frac{1 - z}{1 + u^- + q} \quad (3.174)$$

e as variáveis adicionais  $u^+$  e  $u^-$ , que representam a resposta máxima positiva e negativa (v. Fig. 3.18), satisfazem por sua vez as equações diferenciais

$$\begin{aligned} \dot{u}^+ &= \dot{q}U(q)U(z - 1) \\ \dot{u}^- &= -\dot{q}U(-q)U(-z - 1) \end{aligned} \quad (3.175)$$

### 3.6 - RESPOSTA ALEATÓRIA DE SISTEMAS HISTERÉTICOS DE N-GL CARACTERIZADOS POR MODELOS DIFERENCIAIS SIMÉTRICOS

#### 3.6.1 - Análise da resposta estacionária

Considere-se um sistema não-linear de N-GL, cujo equilíbrio dinâmico é traduzido pela equação

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{g}(\underline{q}, t) = \underline{p}^q(t) \quad (3.176)$$

e cujo comportamento histerético é descrito por um modelo diferencial, de tal forma que cada componente do vector  $\underline{g}$  possa ser decomposta através da equação

$$g_i = \alpha_i k_i q_i + (1 - \alpha_i) k_i z_i \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.177)$$

em que os parâmetros auxiliares  $z_i$  obedecem a equações diferenciais do tipo

$$\dot{z}_i = \Phi(\dot{q}_i, z_i) \quad (i = 1, \dots, N) \quad (3.178)$$

Nessas condições, as equações (3.177) podem escrever-se sob a seguinte forma matricial

$$\underline{g} = \underline{K}\underline{q} + \underline{G}\underline{z} \quad (3.179)$$

em que  $\underline{K}$  e  $\underline{G}$  são matrizes diagonais com a seguinte constituição

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & \alpha_i k_i & \\ & & & \dots \\ & & & & \alpha_N k_N \end{bmatrix} \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} (1 - \alpha_1) k_1 & & & \\ & \dots & & \\ & & (1 - \alpha_i) k_i & \\ & & & \dots \\ & & & & (1 - \alpha_N) k_N \end{bmatrix} \quad (3.180)$$

ao passo que as equações diferenciais (3.178), uma vez linearizadas, dão lugar à relação matricial

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C}_e \dot{\underline{q}} + \underline{K}_e \underline{z} \quad (3.181)$$

em que  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  são igualmente matrizes diagonais constituídas pelos coeficientes de linearização correspondentes a cada uma das equações (3.178), ou seja

$$\underline{C}_e = \begin{bmatrix} c_{e1} & & & \\ & \dots & & \\ & & c_{ei} & \\ & & & \dots \\ & & & & c_{eN} \end{bmatrix} \quad \underline{K}_e = \begin{bmatrix} k_{e1} & & & \\ & \dots & & \\ & & k_{ei} & \\ & & & \dots \\ & & & & k_{eN} \end{bmatrix} \quad (3.182)$$



Por conseguinte, da conjugação das equações (3.176) e (3.179) resulta que

$$\underline{M}\ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C}\dot{\underline{q}}(t) + \underline{K}\underline{q}(t) + \underline{G}\underline{z}(t) = \underline{p}^q(t) \quad (3.183)$$

podendo a análise da resposta aleatória do sistema não-linear em questão processar-se com base nesta equação e na equação (3.181).

Assim, introduzindo o vector

$$\underline{y} = \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \\ \underline{z} \end{Bmatrix} \quad (3.184)$$

estas duas equações podem exprimir-se de forma condensada através da relação

$$\underline{D}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{E}\underline{y}(t) = \underline{f}(t) \quad (3.185)$$

em que

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} \\ \underline{K} & \underline{C} & \underline{G} \\ \underline{0} & -\underline{C}_e & -\underline{K}_e \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{p}^q(t) \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.186)$$

Em alternativa, as 3N equações diferenciais de primeira ordem traduzidas pela equação (3.185) podem ser expressas através da relação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.187)$$

sendo

$$\underline{A}_e = -\underline{D}^{-1}\underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K} & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & -\underline{M}^{-1}\underline{G} \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{K}_e \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \underline{D}^{-1}\underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{M}^{-1}\underline{p}^q(t) \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \quad (3.188)$$

Deste modo, sendo a excitação estacionária gaussiana de valor médio nulo, o mesmo sucede com a resposta, dada a suposta natureza simétrica das não-linearidades envolvidas e as características lineares da equação (3.187), sendo por isso a sua distribuição de probabilidade inteiramente caracterizada a partir do conhecimento da matriz de covariância instantânea da resposta  $\underline{\mu}_y$ , a qual, no caso de uma excitação idealizada através de um ruído branco, obedece à equação

$$\underline{A}_e \underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \quad (3.189)$$

com

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1} \underline{S}_o^{p^q} \underline{M}^{-1T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \quad (3.190)$$

sendo  $\underline{S}_o^{p^q}$  a matriz das densidades espectrais conjuntas relativas ao ruído branco vectorial  $\underline{p}^q(t)$

Por conseguinte, a análise da resposta estacionária pode nesse caso ser facilmente efectuada, começando por arbitrar valores iniciais das matrizes  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , e resolvendo em seguida a equação de Liapunov (3.189). O conhecimento das características estatísticas da resposta associadas a essa primeira iteração permite calcular de imediato os valores corrigidos de  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  a utilizar na iteração seguinte, prosseguindo este processo iterativo sucessivamente até que se atinja a necessária convergência, o que aliás exige normalmente um número relativamente reduzido de iterações.

De realçar apenas que, no caso de excitações idealizadas através de processos coloridos, haverá que aumentar a dimensão do sistema de equações diferenciais de primeira ordem (3.187), por forma a contemplar a introdução de um filtro que permita supor a excitação actuante efectivamente do tipo ruído branco, ao passo que no caso de excitações de média não-nula haverá que proceder à introdução de algumas modificações, em tudo semelhantes às indicadas em 3.5.6 para sistemas de 1-GL.

### 3.6.2 - Análise da resposta não-estacionária

A não-estacionaridade da resposta pode dever-se quer à não-estacionaridade da excitação actuante, quer à própria degradação do sistema estrutural, traduzida pela variação de determinados parâmetros caracterizadores do modelo hysterético diferencial, função da energia dissipada.

Tomando como referência o modelo de Baber-Wen, em que o valor médio dos parâmetros  $A_i$ ,  $\nu_i$  e  $\eta_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) se relaciona com o valor médio da energia dissipada  $W_{d_i}$  através das equações

$$\begin{aligned} m_{A_i}(t) &= A_{oi} + \delta_{A_i} m_{W_{d_i}}(t) \\ m_{\nu_i}(t) &= 1 - \delta_{\nu_i} m_{W_{d_i}}(t) \\ m_{\eta_i}(t) &= 1 - \delta_{\eta_i} m_{W_{d_i}}(t) \end{aligned} \quad (3.191)$$

verificando-se que

$$\dot{m}_{w_{a_i}} = (1 - \alpha_i) k_i E[z_i \dot{q}_i] \quad (3.192)$$

a análise da resposta não-estacionária pode processar-se integrando numericamente o sistema de equações diferenciais de primeira ordem

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t) \underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y(t) \underline{A}_e^T(t) + 2\underline{\pi} \underline{S}_o(t) \quad (3.193)$$

que regula a evolução temporal da matriz de covariância instantânea  $\underline{\mu}_y(t)$ , conjuntamente com as N equações (3.192), actualizando em cada instante de forma iterativa os valores médios dos parâmetros  $A_i$ ,  $v_i$  e  $\eta_i$  através das equações (3.191) e seguidamente os valores dos coeficientes de linearização  $c_{e_i}(t)$  e  $k_{e_i}(t)$ , que intervêm na formação da matriz  $\underline{A}_e(t)$ , tendo em conta as equações (3.92) a (3.97).

### 3.7 - APLICAÇÃO DOS MODELOS DE WEN À ANÁLISE ESTOCÁSTICA DA RESPOSTA SÍSMICA DE ESTRUTURAS PORTICADAS PLANAS. DESENVOLVIMENTO DE "SOFTWARE" DE APLICAÇÃO

#### 3.7.1 - Modelos estruturais utilizáveis

A análise estocástica da resposta sísmica de estruturas com comportamento histerético exige a consideração de modelos estruturais adequados, podendo para o efeito utilizar-se diversos modelos de complexidade variável.

No caso particular das estruturas reticuladas planas, um primeiro modelo bastante rudimentar, e apenas teoricamente susceptível de aplicação em situações de pilares muito rígidos e vigas bastante flexíveis, consiste em supor os pilares infinitamente rígidos e resistentes, concentrando-se as não-linearidades nas extremidades das vigas, como indica a figura 3.19, passando dessa forma a estrutura a ser modelada por um sistema de 1-GL caracterizado pela rotação  $\psi_b$ .

Em oposição a este esquema, pode utilizar-se o extremamente vulgarizado modelo "shear-building", constituído por vigas de rigidez e resistência infinita e por pilares de comportamento não-linear, especialmente adequado à idealização de pórticos planos cujas vigas apresentem uma rigidez bastante elevada face à dos pilares que os constituem, situação em que geralmente os comportamentos inelásticos se restringem aos pilares.

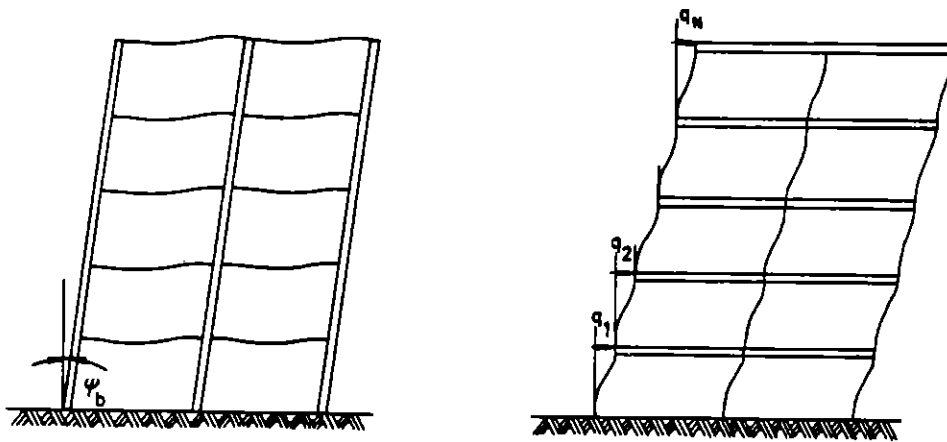


Fig. 3.19 - Modelos estruturais com pilares ou vigas de rigidez infinita.

No entanto, torna-se conveniente neste caso definir para cada trecho de pilares uma rigidez inicial e uma resistência equivalentes, de modo que o modelo traduza de forma satisfatória o comportamento real da estrutura.

Segundo Anagnostopoulos [154], a resistência equivalente correspondente ao conjunto de trechos de pilares imediatamente abaixo de um dado piso pode considerar-se igual a

$$f_{y\max} = \min \left\{ \frac{2 \sum M_y^v}{h}, \frac{2 \sum M_y^p}{h} \right\} \quad (3.194)$$

em que  $\sum M_y^v$  representa a soma dos momentos correspondentes às capacidades plásticas de todas as vigas desse andar,  $\sum M_y^p$  traduz a soma de todos os momentos correspondentes às capacidades plásticas dos trechos de pilares envolvidos, e  $h$  indica o comprimento destes.

Por outro lado, pode também definir-se uma matriz de rigidez inicial do modelo "shear-building" equivalente com a seguinte composição

$$\underline{K}_L = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & & & & \\ -k_2 & k_2 + k_3 & & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & k_{N-1} + k_N & -k_N & \\ & & & -k_N & k_N & \end{bmatrix} \quad (3.195)$$

sendo os  $N$  elementos  $k_j$  ( $j = 1, \dots, N$ ) determinados por forma que haja coincidência entre os valores da primeira frequência natural, e do modo de vibração associado, relativos ao pórtico plano em análise e ao "shear-building" equivalente [154]. Deste modo, tendo em conta a relação

$$\left( \underline{K}_L - \omega_1^2 \underline{M} \right) \underline{\phi}_1 = \underline{0} \quad (3.196)$$

e uma vez conhecidos os valores da frequência fundamental e do primeiro modo associados às características iniciais de rigidez do pórtico plano não-linear,  $\omega_1$  e  $\underline{\phi}_1$ , torna-se possível a determinação da matriz de rigidez inicial do "shear-building" equivalente, à qual correspondem, por sua vez, frequências naturais e modos de vibração de ordem superior algo diferentes dos valores relativos ao pórtico plano, embora as diferenças encontradas não sejam, em muitos casos, muito significativas.

Nestas circunstâncias, a fixação dos parâmetros do modelo diferencial de Bouc-Wen, cuja utilização pode servir para idealizar o comportamento histerético do conjunto de troços de pilares imediatamente abaixo do piso de ordem  $j$ , pode efectuar-se começando por fixar os valores de  $A_j$ ,  $\alpha_j$ ,  $k_j$  e  $n_j$ , bem como a relação  $\beta_j / \gamma_j$ , tendo em consideração as recomendações para esse efeito expressas em 3.5.3. Assim, igualando o valor da resistência equivalente dada pela equação (3.194) ao valor máximo da componente histerética

$$f_{y_{máx}} = (1 - \alpha_j) k_j z_{j_{máx}} = (1 - \alpha_j) k_j \left( \frac{A_j}{\beta_j + \gamma_j} \right)^{1/n_j} \quad (3.197)$$

podem também obter-se os valores de  $\beta_j$  e  $\gamma_j$ .

O modelo "shear-building", cuja maior virtude reside na sua grande simplicidade, nem sempre permite todavia uma representação satisfatória do sistema estrutural em análise quando sujeito a uma excitação sísmica, facto que foi evidenciado por Takizawa [158], e que levou ao desenvolvimento de modelos estruturais de maior complexidade.

Um desses modelos, utilizado por Park, Ang e Wen [117], e que constitui uma extensão do modelo "shear-building" convencional, consiste na introdução adicional de colunas elásticas flectidas entre os pisos infinitamente rígidos, e ligadas a estes através de molas de rotação inelásticas (Fig. 3.20).

Um outro modelo susceptível de permitir uma mais correcta análise da resposta sísmica de pórticos planos, recentemente utilizada por Baber e Wen [19] e por Casciati e Faravelli [32], consiste em supor a estrutura discretizada num conjunto de elementos elásticos interligados por rótulas de funcionamento não-linear histerético.

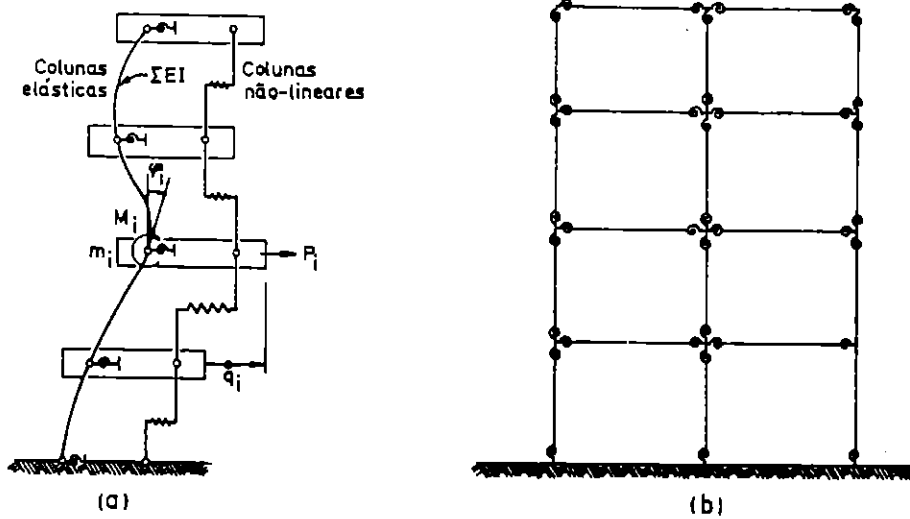


Fig. 3.20 - (a) Extensão do modelo "shear-building"; (b) Modelo de rótulas plásticas.

Deste modo, serão descritas nos pontos seguintes formulações que permitem efectuar, com base no método de linearização estocástica equivalente, a análise da resposta sísmica estacionária e não-estacionária de pórticos planos, idealizados quer através do vulgarizado modelo "shear-building", quer do modelo de rótulas plásticas, supondo que as não-linearidades de natureza histerética são caracterizadas através do modelo diferencial de Bouc-Wen.

### 3.7.2 - Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de estruturas tipo "shear-building"

Considere-se um pórtico plano de  $N$  pisos, idealizado através de um modelo "shear-building" sujeito a uma acção sísmica horizontal, caracterizada por uma aceleração de base traduzida por um processo estocástico estacionário gaussiano de valor médio nulo  $\ddot{u}_g(t)$  (Fig. 3.21).

Nesse caso, os  $N$  graus de liberdade do sistema encontram-se associados às  $N$  translações de andar, pelo que, designando por  $u_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) os deslocamentos horizontais de cada piso em relação à fundação, e por  $q_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) as translações relativas entre pisos, é a seguinte a equação de equilíbrio dinâmico do andar de ordem  $i$ , tendo em consideração a totalidade das forças actuantes a esse nível, indicadas aliás na figura 3.21(b)

$$m_i \left[ \sum_{j=1}^i \ddot{q}_j(t) + \ddot{u}_g(t) \right] + c_i \dot{q}_i(t) - c_{i+1} \dot{q}_{i+1}(t) + g_i - g_{i+1} = 0 \quad (3.198)$$

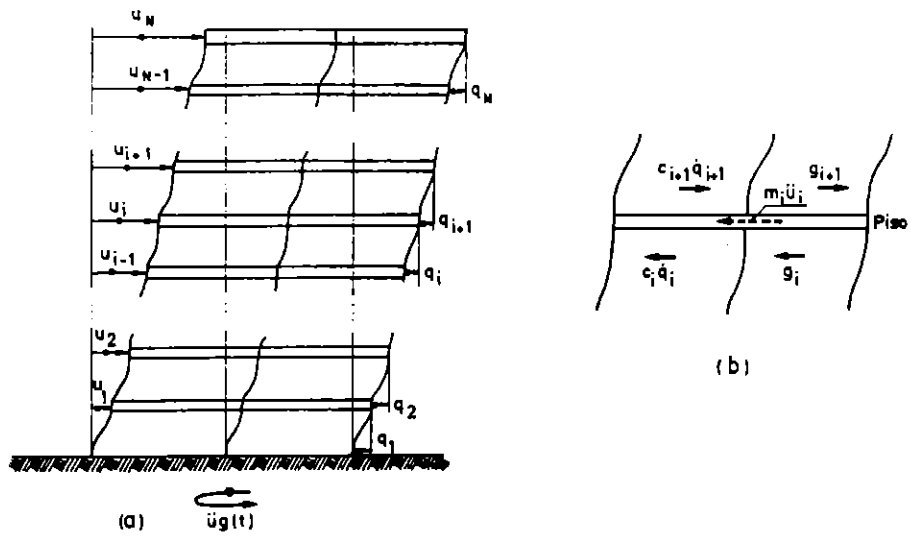


Fig. 3.21 - "Shear-building" sujeito à aceleração de base  $\ddot{u}_g(t)$ .

As forças  $g_i$  ( $i = 1, \dots, N$ ) intervenientes nestas equações de equilíbrio correspondem ao somatório dos esforços transversos nas extremidades superiores dos troços dos pilares entre os pisos  $i$  e  $i - 1$ , cujo comportamento se admite não-linear histerético, caracterizado pelo modelo de Bouc-Wen, podendo cada força  $g_i$  decompor-se através da relação

$$g_i = \alpha_i k_i q_i + (1 - \alpha_i) k_i z_i \quad (3.199)$$

em que o parâmetro auxiliar  $z_i$  obedece à equação diferencial não-linear

$$\dot{z}_i = A_i \dot{q}_i - \beta_i |\dot{q}_i| |z_i|^{n_i-1} z_i - \gamma_i \dot{q}_i |z_i|^{r_i} \quad (3.200)$$

Conjugando as equações (3.198) e (3.199), obtém-se a seguinte relação matricial

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) + \underline{G} \underline{Z}(t) = -\underline{M}_d \underline{\alpha} \ddot{u}_g(t) \quad (3.201)$$

em que

$$\underline{M} = \begin{bmatrix} m_1 & & & & 0 \\ m_2 & m_2 & & & \\ m_3 & m_3 & m_3 & & \\ & & & \ddots & \\ m_N & m_N & m_N & \dots & m_N \end{bmatrix} \quad \underline{M}_d = \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & m_N \end{bmatrix} \quad \underline{\alpha} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (3.202)$$

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \alpha_1 k_1 & -\alpha_2 k_2 & & & & \\ & \alpha_2 k_2 & -\alpha_3 k_3 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & \alpha_{N-1} k_{N-1} & -\alpha_N k_N & \\ & & & & \alpha_N k_N & \end{bmatrix} \quad \underline{G} = \begin{bmatrix} (1-\alpha_1)k_1 & -(1-\alpha_2)k_2 & & & & \\ & (1-\alpha_2)k_2 & -(1-\alpha_3)k_3 & & & \\ & & \dots & & & \\ & & & (1-\alpha_{N-1})k_{N-1} & -(1-\alpha_N)k_N & \\ & & & & (1-\alpha_N)k_N & \end{bmatrix} \quad (3.203)$$

Por outro lado, a linearização das equações diferenciais não-lineares (3.200) conduz à relação matricial

$$\dot{\underline{z}} = \underline{C}_e \dot{\underline{q}} + \underline{K}_e \underline{z} \quad (3.204)$$

em que  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  são matrizes diagonais constituídas pelos coeficientes de linearização  $c_{e_i}$  e  $k_{e_i}$  correspondentes a cada uma das  $N$  equações (3.200), com  $i = 1, \dots, N$ .

Assim, introduzindo o vector ampliado

$$\underline{y}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, \underline{z}^T] \quad (3.205)$$

as equações (3.201) e (3.204) podem exprimir-se simplesmente através da relação matricial

$$\underline{D}\dot{\underline{y}} + \underline{E}\underline{y}(t) = \underline{f}(t) \quad (3.206)$$

em que

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{G} \\ \underline{0} & -\underline{C}_e & -\underline{K}_e \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ -\underline{M}_d \underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (3.207)$$

Alternativamente, a equação (3.206) pode escrever-se também sob a forma

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.208)$$

em que

$$\underline{A}_e = -\underline{D}^{-1} \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{C}_e & -\underline{M}^{-1} \underline{G} \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{K}_e \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \underline{D}^{-1} \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{M}_d \underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{pmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (3.209)$$

A natureza linear do sistema de equações diferenciais de primeira ordem (3.208) leva a que o processo de resposta seja igualmente gaussiano e de valor médio nulo, sendo por isso a sua estrutura probabilística integralmente caracterizada com base no



conhecimento da matriz de covariância instantânea  $\underline{\mu}_y$ , que, no caso de a excitação  $\ddot{u}_g(t)$  ser idealizada através de um ruído branco de densidade espectral constante  $S_o$ , obedece à equação de Liapunov

$$\underline{A}_e \underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \quad (3.210)$$

com

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1} \underline{M}_d \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T \underline{M}_d \underline{M}^{-1T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} S_o \quad (3.211)$$

No caso de a aceleração de base  $\ddot{u}_g(t)$  ser traduzida por um processo colorido caracterizado por um espectro do tipo Kanai-Tajimi, há interesse em supor tal espectro como o correspondente ao processo de resposta em termos de acelerações absolutas  $\ddot{u}_f^l(t)$  de um filtro de 1-GL de massa unitária, com uma frequência natural  $w_f$  e um coeficiente de amortecimento  $\xi_f$ , quando a sua base é sujeita a uma aceleração aleatória estacionária de média nula idealizada através de um ruído branco  $\ddot{u}_g^o(t)$  com uma densidade espectral de potência  $S_o$ .

Desse modo, designando por  $u_f$  o deslocamento do filtro relativamente à base

$$\ddot{u}_f^l(t) = \ddot{u}_f(t) + \ddot{u}_g^o(t) \quad (3.212)$$

pelo que, sendo a equação de equilíbrio dinâmico do filtro

$$\ddot{u}_f(t) + 2\xi_f w_f \dot{u}_f(t) + w_f^2 u_f(t) = -\ddot{u}_g^o(t) \quad (3.213)$$

se conclui que

$$\ddot{u}_f^l(t) = -2\xi_f w_f \dot{u}_f(t) - w_f^2 u_f(t) \quad (3.214)$$

Identificando  $\ddot{u}_f^l(t)$  com  $\ddot{u}_g(t)$ , a equação (3.201) dá então origem a

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}}(t) + \underline{C} \dot{\underline{q}}(t) + \underline{K} \underline{q}(t) + \underline{G} \underline{z}(t) - \alpha_1 \underline{M}_d \underline{\alpha} u_f(t) - \alpha_o \underline{M}_d \underline{\alpha} \dot{u}_f(t) = \underline{0} \quad (3.215)$$

com

$$\alpha_o = 2\xi_f w_f \quad \alpha_1 = w_f^2 \quad (3.216)$$

Por conseguinte, introduzindo desta feita o vector ampliado

$$\underline{y}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, \underline{z}^T, u_f, \dot{u}_f] \quad (3.217)$$

as equações (3.215) e (3.204), conjuntamente com a equação do movimento do filtro (3.213), podem também dar lugar a uma relação matricial do tipo

$$\underline{D}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{E}\underline{y}(t) = \underline{f}(t) \quad (3.218)$$

em que agora

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{K} & \underline{C} & \underline{G} & -\underline{M}_d \underline{\alpha} \alpha_1 & -\underline{M}_d \underline{\alpha} \alpha_0 \\ \underline{0} & -\underline{C}_e & -\underline{K}_e & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \alpha_1 & \alpha_0 \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ -1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g^o(t) \quad (3.219)$$

ou, em alternativa, à relação

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.220)$$

sendo

$$\underline{A}_e = -\underline{D}^{-1} \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K} & -\underline{M}^{-1} \underline{C} & -\underline{M}^{-1} \underline{G} & \underline{M}^{-1} \underline{M}_d \underline{\alpha} \alpha_1 & \underline{M}^{-1} \underline{M}_d \underline{\alpha} \alpha_0 \\ \underline{0} & \underline{C}_e & \underline{K}_e & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\alpha_1 & -\alpha_0 \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \underline{D}^{-1} \underline{f}(t) = \begin{pmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ -1 \end{pmatrix} \ddot{u}_g^o(t) \quad (3.221)$$

A determinação da matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_y$  pode pois efectuar-se, tal como no caso de uma excitação idealizada por um ruído branco, mediante a resolução da equação de Liapunov

$$\underline{A}_e \underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \quad (3.222)$$

em que agora a matriz  $\underline{S}_o$  apresenta a seguinte composição

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{bmatrix} S_o \quad (3.223)$$

A resolução desta equação, com vista à caracterização da distribuição de probabilidade da resposta sísmica estacionária do "shear-building" em análise, exige naturalmente o conhecimento prévio das matrizes  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , para o que se torna mais uma vez conveniente a utilização da técnica iterativa já anteriormente descrita em 3.6.1.

Uma vez quantificada a matriz de covariância  $\underline{\mu}_y$  caracterizadora da distribuição probabilística do processo estocástico vectorial estacionário  $\underline{y}(t)$ , suposto gaussiano, fácil se torna também determinar a matriz de covariância relativa a quaisquer outras variáveis de controlo da resposta do sistema. Assim, por exemplo, no caso das forças de restituição inelásticas dadas por (v. eq. 3.199 e 3.201)

$$\underline{g} = \underline{K}\underline{q} + \underline{G}\underline{z} \quad (3.224)$$

a correspondente matriz de covariância pode ser obtida multiplicando ambos os membros de (3.224) pela respectiva transposta e aplicando o operador  $E[\ ]$  resultando que

$$\underline{\mu}_g = \underline{K}E[\underline{q}\underline{q}^T]\underline{K}^T + \underline{K}E[\underline{q}\underline{z}^T]\underline{G}^T + \underline{G}E[\underline{z}\underline{q}^T]\underline{K}^T + \underline{G}E[\underline{z}\underline{z}^T]\underline{G}^T \quad (3.225)$$

em que  $E[\underline{q}\underline{q}^T]$ ,  $E[\underline{q}\underline{z}^T]$ ,  $E[\underline{z}\underline{q}^T]$  e  $E[\underline{z}\underline{z}^T]$  constituem sub-matrizes de  $\underline{\mu}_y$ .

Caso a excitação actuante assuma um carácter não-estacionário, torna-se necessário no entanto introduzir algumas modificações. Assim, se a aceleração de base for idealizada através de um processo estocástico não-estacionário modulável  $\ddot{u}_{g^*}(t)$ , susceptível de ser expresso através do produto

$$\ddot{u}_{g^*}(t) = \theta(t)\ddot{u}_g(t) \quad (3.226)$$

em que  $\theta(t)$  é uma função de modulação determinística e  $\ddot{u}_g(t)$  um ruído branco gaussiano de média nula e de densidade espectral de potência  $S_o$ , não só as matrizes de linearização  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  se tornam dependentes do tempo, como também se torna necessário substituir  $\ddot{u}_g(t)$  por  $\theta(t)\ddot{u}_g(t)$  nas equações (3.198), (3.201), (3.207) e (3.209).

Deste modo, e atendendo ao referido em 2.5.6, fácil é concluir que a evolução temporal da matriz de covariância da resposta é regulada pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y\underline{A}_e^T + 2\pi\underline{S}_o(t) \quad (3.227)$$

em que agora a matriz  $\underline{S}_o(t)$  é dada por

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M}^{-1} \underline{M}_d \underline{\alpha} \underline{\alpha}^T \underline{M}_d \underline{M}^{-1^T} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \theta(t)^2 S_o \quad (3.228)$$

sendo a composição da matriz  $\underline{A}_e(t)$  idêntica à definida em (3.209).

De forma análoga, caso a excitação actuante seja não-estacionária e colorida, podendo a aceleração de base do filtro anteriormente mencionado ser caracterizada através de um processo estocástico  $\ddot{u}_{g^*}^o(t)$ , separável mediante a relação

$$\ddot{u}_{g^*}^o(t) = \theta(t) \ddot{u}_g^o(t) \quad (3.229)$$

em que a função de modulação  $\theta(t)$  é multiplicada pelo ruído branco estacionário e gaussiano de média nula e densidade espectral de potência  $S_o$ , deve substituir-se  $\ddot{u}_g^o(t)$  por  $\theta(t) \ddot{u}_g^o(t)$  nas equações (3.212), (3.213), (3.219) e (3.221). Pode assim concluir-se que a evolução temporal da matriz de covariância da resposta é regida igualmente pela equação (3.227), sendo neste caso a matriz  $\underline{S}_o(t)$  definida por

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \theta(t)^2 S_o \quad (3.230)$$

e tendo a matriz  $\underline{A}_e(t)$  uma composição semelhante à indicada por (3.221).

Se a não-estacionaridade da resposta for também motivada pela própria degradação estrutural, considerada função da energia dissipada, haverá que adicionar ainda a equação (3.192)

$$\dot{m}_{w_{d_i}} = (1 - \alpha_i) k_i E [z_i \dot{q}_i] \quad (3.231)$$

A análise da resposta sísmica não-estacionária, que passa pela determinação da evolução temporal da matriz de covariância instantânea da resposta, pode assim ser efectuada integrando numericamente as equações (3.227) e (3.231), e utilizando a técnica iterativa descrita em 3.6.2.

### 3.7.3 - Formulação modal complexa alternativa para análise da resposta não-estacionária

A análise da resposta sísmica não-estacionária pode ser também realizada utilizando uma formulação modal complexa alternativa, que permite evitar a integração numérica do sistema de equações diferenciais (3.227).

Essa formulação tem como primeiro objectivo conseguir desligar o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (3.208), em que  $\underline{A}_e = \underline{A}_e(t)$ , como foi sugerido por Singh, Maldonado e Heller [143], ou, o que é equivalente, desligar o sistema de equações diferenciais (3.206), em que  $\underline{E} = \underline{E}(t)$ , tal como é proposto por Chang, Mochio, Samaras e Shinozuka [108].

Neste último caso, por exemplo, torna-se necessário começar por resolver os problemas de valores e vectores próprios traduzidos pelas equações seguintes

$$-\underline{D}^{-1}\underline{E}\underline{\phi}_i = \lambda_i\underline{\phi}_i \quad (3.232)$$

$$-\underline{\psi}_j^T \underline{E} \underline{D}^{-1} = \lambda_j \underline{\psi}_j^T \quad (3.233)$$

ao longo dos sucessivos instantes de tempo  $t_k$  em que se processa a análise da resposta não-estacionária, supondo-se que os elementos da matriz  $\underline{E}(t)$  assumem valores aproximadamente constantes entre dois instantes de tempo consecutivos  $t_k$  e  $t_k + \Delta t$ .

Os vectores  $\underline{\phi}_i$  e  $\underline{\psi}_j^T$ , que representam respectivamente os vectores próprios à direita da matriz  $-\underline{D}^{-1}\underline{E}$  e à esquerda da matriz  $-\underline{E}\underline{D}^{-1}$ , respeitam a seguinte condição de ortogonalidade

$$\underline{\psi}_j^T \underline{D} \underline{\phi}_i = 0 \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (3.234)$$

como aliás se pode facilmente constatar pré-multiplicando a equação (3.232) por  $\underline{\psi}_j^T \underline{D}$ , pós-multiplicando (3.233) por  $\underline{D} \underline{\phi}_i$  e subtraindo membro a membro as equações obtidas. Analogamente pode verificar-se que

$$\underline{\psi}_j^T \underline{E} \underline{\phi}_i = 0 \quad , \quad \lambda_i \neq \lambda_j \quad (3.235)$$

Por outro lado, os vectores próprios  $\underline{\phi}_i$  e  $\underline{\psi}_j^T$  podem também ser normalizados por forma que

$$\underline{\psi}_i^T \underline{D} \underline{\phi}_i = 1 \quad (3.236)$$

verificando-se então que

$$\underline{\Psi}_i^T \underline{E} \underline{\Phi}_i = -\lambda_i \quad (3.237)$$

como se pode comprovar pré-multiplicando (3.232) por  $\underline{\Psi}_i^T \underline{D}$ .

Deste modo, introduzindo a transformação linear

$$\underline{y}(t_k + \tau) = \sum_{i=1}^{3N} \underline{\Phi}_i \beta_i(\tau) = \underline{T} \underline{\beta}(\tau) \quad (3.238)$$

em que  $\beta_i(\tau)$  representa a coordenada modal complexa de ordem  $i$ , podendo  $\tau$  assumir valores pertencentes ao intervalo  $[0, \Delta t]$  o sistema de equações diferenciais de primeira ordem (3.206) pode ser desligado, já que, por substituição de (3.238) em (3.206), se obtém

$$\underline{D} \sum_{i=1}^{3N} \underline{\Phi}_i \dot{\beta}_i(\tau) + \underline{E} \sum_{i=1}^{3N} \underline{\Phi}_i \beta_i(\tau) = \underline{f}(t_k + \tau) \quad (3.239)$$

e pré-multiplicando esta equação por  $\underline{\Psi}_i^T$ , e atendendo às relações (3.234) a (3.237), se conclui que

$$\dot{\beta}_i(\tau) = \lambda_i \beta_i(\tau) + \underline{\Psi}_i^T \underline{f}(t_k + \tau) \quad (3.240)$$

Tendo presente a equação (3.207) que define o vector  $\underline{f}$ , estas  $3N$  equações diferenciais de primeira ordem independentes nas coordenadas modais  $\beta_i$  podem também expressar-se através da relação

$$\dot{\beta}_i(\tau) = \lambda_i \beta_i(\tau) - L_i \ddot{u}_{g^*}(t_k + \tau) \quad (3.241)$$

em que  $L_i$  representa o factor de participação relativo ao  $i$ -ésimo vector próprio  $\underline{\Psi}_i^T$

$$L_i = \underline{\Psi}_i^T \left\{ \begin{array}{c} \underline{0} \\ \underline{M}_d \underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{array} \right\} \quad (3.242)$$

e  $\ddot{u}_{g^*}(t_k + \tau)$  o valor do processo não-estacionário caracterizador da aceleração de base no instante  $t_k + \tau$ , e que se admite poder ser expresso através do produto

$$\ddot{u}_{g^*}(t_k + \tau) = \theta(t_k + \tau) \ddot{u}_g(t_k + \tau) \quad (3.243)$$

sendo  $\theta(t)$  uma função de modulação determinística e  $\ddot{u}_g(t)$  um processo estacionário gaussiano de valor médio nulo.

Nestas condições, recorrendo à solução da equação (3.241) para  $\tau = \Delta t$

$$\beta_i(\Delta t) = e^{\lambda_i \Delta t} \beta_i(0) - \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_i(\Delta t - v)} L_i \ddot{u}_{g^*}(t + v) dv \quad (3.244)$$

pode facilmente obter-se a expressão da resposta  $\underline{y}(t_k + \Delta t)$  através da sobreposição modal traduzida pela equação (3.238).

Deste modo, a matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_y(t_k + \Delta t)$  no instante  $t_k + \Delta t$  pode ser quantificada através da relação

$$\begin{aligned} \underline{\mu}_y(t_k + \Delta t) &= R_e \left\{ E[\underline{y}(t_k + \Delta t) \underline{y}(t_k + \Delta t)]^{*T} \right\} \\ &= R_e \left\{ E \left\{ \left[ \sum_{i=1}^{3N} \underline{\phi}_i \beta_i(\Delta t) \right] \left[ \sum_{j=1}^{3N} \underline{\phi}_j \beta_j(\Delta t) \right]^{*T} \right\} \right\} \\ &= R_e \left\{ \sum_{i=1}^{3N} \sum_{j=1}^{3N} \underline{\phi}_i E[\beta_i(\Delta t) \beta_j(\Delta t)^*] \underline{\phi}_j^{*T} \right\} \end{aligned} \quad (3.245)$$

podendo o valor médio espectável  $E[\beta_i(\Delta t) \beta_j(\Delta t)^*]$  nela interveniente ser determinado com base na equação (3.244). Com efeito, dessa maneira pode escrever-se que

$$\begin{aligned} E[\beta_i(\Delta t) \beta_j(\Delta t)^*] &= E \left\{ \left[ e^{\lambda_i \Delta t} \beta_i(0) - L_i \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_i(\Delta t - v_1)} \ddot{u}_{g^*}(t_k + v_1) dv_1 \right] \right. \\ &\quad \left. \left[ e^{\lambda_j^* \Delta t} \beta_j^*(0) - L_j^* \int_0^{\Delta t} e^{\lambda_j^*(\Delta t - v_2)} \ddot{u}_{g^*}(t_k + v_2) dv_2 \right] \right\} \end{aligned} \quad (3.246)$$

ou mais simplesmente, efectuando o produto indicado e desprezando os termos em  $\beta_i(0) \ddot{u}_g(t + v_2)$  e  $\beta_j(0)^* \ddot{u}_{g^*}(t_k + v_1)$

$$\begin{aligned} E[\beta_i(\Delta t) \beta_j(\Delta t)^*] &\cong e^{(\lambda_i + \lambda_j^*) \Delta t} \{ E[\beta_i(0) \beta_j(0)^*] + \\ &\quad + L_i L_j^* \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\lambda_i v_1 - \lambda_j^* v_2} E[\ddot{u}_{g^*}(t_k + v_1) \ddot{u}_{g^*}(t_k + v_2)] dv_1 dv_2 \} \end{aligned} \quad (3.247)$$

Introduzindo também uma aproximação que consiste em tomar os valores da função de modulação a meio dos intervalos de integração de amplitude  $\Delta t$ , suposta muito pequena, pode ainda escrever-se que

$$E[\beta_i(\Delta t)\beta_j(\Delta t)^*] \cong e^{(\lambda_i + \lambda_j^*)\Delta t} \left\{ E[\beta_i(0)\beta_j(0)^*] + L_i L_j^* \theta^2 \left( t_k + \frac{\Delta t}{2} \right) \int_0^{\Delta t} \int_0^{\Delta t} e^{-\lambda_i v_1 - \lambda_j^* v_2} R_{\ddot{u}_g}(v_2 - v_1) dv_1 dv_2 \right\} \quad (3.248)$$

Por conseguinte, conjugando esta equação com a equação (3.245), podem determinar-se todos os elementos da matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_y$  correspondente ao instante  $t_k + \Delta t$ . O cálculo do integral duplo indicado na equação (3.248) exige, no entanto, o conhecimento da função de auto-correlação  $R_{\ddot{u}_g}(\tau)$  relativa ao processo estacionário gaussiano de média nula  $\ddot{u}_g(t)$ . Sendo a função densidade espectral de potência respectiva  $S_{\ddot{u}_g}(\omega)$  do tipo Kanai-Tajimi, caracterizada por uma densidade constante  $S_o$  e por um filtro de frequência natural  $\omega_f$  e coeficiente de amortecimento  $\xi_f$ , pode mostrar-se que a função  $R_{\ddot{u}_g}(\tau)$  é dada por [45]

$$R_{\ddot{u}_g}(\tau) = S_o \pi \frac{\omega_f}{2\xi_f} e^{-\xi_f \omega_f |\tau|} \left[ (1 + 4\xi_f^2) \cos(\omega_f \tau \sqrt{1 - \xi_f^2}) + (1 - 4\xi_f^2) \frac{\xi_f}{\sqrt{1 - \xi_f^2}} \text{sen}(\omega_f |\tau| \sqrt{1 - \xi_f^2}) \right] \quad (3.249)$$

Desta forma, torna-se viável a quantificação da matriz de covariância evolutiva da resposta, determinando em cada instante, de forma iterativa, os valores dos coeficientes de linearização  $c_{e_i}$  e  $k_{e_i}$ , os quais, uma vez atingida a necessária convergência, podem tomar-se iguais aos respectivos valores iniciais no instante seguinte.

De realçar ainda que esta formulação é susceptível de permitir uma interessante simplificação, que consiste em ter apenas em conta na análise do problema os modos complexos  $\phi_i$  que contribuem de forma mais significativa para a resposta do sistema, podendo tomar-se como indicador dessa contribuição o respectivo factor de participação  $L_i$ .

### 3.7.4 - Descrição dos programas de cálculo automático STWEN e NSTWEN

Tendo em consideração as formulações descritas em 3.7.2 e 3.7.3, foram desenvolvidos dois programas de cálculo automático com vista à análise estocástica do comportamento dinâmico de estruturas planas do tipo "shear-building" com comportamento não-linear histerético sujeitas a acções sísmicas horizontais.



O primeiro desses programas, designado por STWEN (e referenciado em [59] como PROG8), pressupõe a natureza estacionária da excitação actuante e da resposta estrutural, e por isso implicitamente também a inexistência de degradação de rigidez ou de resistência do sistema, tornando-se, no entanto, fácil a sua generalização por forma a contemplar estes aspectos tendo em atenção o referido em 3.7.2 sobre esta questão. Em relação à arquitectura desse programa, esquematicamente traduzida pelo fluxograma simplificado indicado na figura 3.22, há pois a destacar os seguintes passos:

- a) Leitura de dados gerais envolvendo
  - caracterização topológica da estrutura;
  - definição das características geométricas e mecânicas de todos os troços de pilar entre pisos, designadamente dos seis parâmetros  $\alpha_i, k_i, A_i, n_i, \beta_i$  e  $\gamma_i$  caracterizadores do correspondente comportamento histerético, de acordo com o modelo diferencial de Bouc-Wen;
  - leitura do valor das massas associadas a cada andar, e dos coeficientes de amortecimento correspondentes aos dois primeiros modos de vibração calculados com base na rigidez inicial, ou, em alternativa, leitura dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\beta_c$  a que se refere a equação (2.221);
  - caracterização da excitação actuante, podendo esta ser idealizada quer através de um ruído branco de intensidade espectral  $S_o$ , quer de um ruído branco filtrado caracterizado por um espectro de potência de Kanai-Tajimi de parâmetros  $S_o, \omega_f$  e  $\xi_f$ , sendo viável, em particular, a consideração de espectros desta natureza que aproximam convenientemente os espectros poli-lineares definidos pelo Regulamento Português de Segurança e Acções em Estruturas de Edifícios e Pontes (RSA);
- b) Formação da matriz de massa diagonal  $\underline{M}_d$  e de uma matriz de rigidez  $\underline{K}_l$  associada aos valores iniciais da rigidez dos diversos troços de pilares; determinação das frequências e modos de vibração correspondentes e, se necessário, dos coeficientes  $\alpha_c$  e  $\beta_c$  a que se refere a equação (2.221), quantificando através dela a matriz de amortecimento  $\underline{C}$ , que se supõe invariante ao longo da análise da resposta;
- c) Constituição das matrizes  $\underline{M}, \underline{K}$  e  $\underline{G}$  caracterizadas pelas equações (3.202) e (3.203), bem como das matrizes  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  na sua versão inicial, admitindo para o efeito os seguintes valores de partida para os coeficientes de linearização

$$c_{e_i} = A_i \quad k_{e_i} = -\delta_i \quad (3.250)$$

sendo  $\delta_i$  um valor positivo muito pequeno;

- d) Composição da matriz de estado  $\underline{A}_e$  definida por (3.209), mediante a conveniente manipulação das matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{C}$ ,  $\underline{K}$ ,  $\underline{G}$ ,  $\underline{K}_e$  e  $\underline{C}_e$ , no caso de um ruído branco, ou através da relação correspondente (3.221), nas situações em que a excitação seja idealizada através de um processo de natureza colorida;
- e) Formação da matriz  $\underline{S}_e$  caracterizadora da excitação actuante, recorrendo às relações (3.211) ou (3.223), também de acordo com a forma de idealização da acção sísmica;
- f) Resolução da equação de Liapunov (3.210) ou (3.222), mediante o recurso a uma eficiente rotina de cálculo baseada no algoritmo de Bartels e Stewart [23], chegando-se por essa via ao conhecimento de todos os elementos da matriz de covariância  $\underline{\mu}_y$ , caracterizadora da estrutura probabilística do processo estocástico vectorial estacionário  $\underline{y}(t)$  definido por (3.205) ou (3.217), que por hipótese se admite apresentar natureza gaussiana;
- g) Determinação dos valores corrigidos dos coeficientes de linearização  $c_{e_i}$  e  $k_{e_i}$ , através da utilização das equações (3.92) a (3.97), e tendo por base os valores de  $\sigma_{q_i}$ ,  $\sigma_{z_i}$  e  $\rho_{q_i, z_i}$  obtidos a partir dos elementos da matriz  $\underline{\mu}_y$ ;
- h) Correção da composição da matriz de estado  $\underline{A}_e$  por virtude da alteração das matrizes  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$ , e realização de uma nova iteração, resolvendo novamente a equação de Liapunov associada ao problema em questão;
- i) Análise da convergência do processo iterativo, mediante a comparação dos desvios padrões  $\sigma_{y_i}$ , obtidos em cada iteração, com os calculados na iteração anterior; para o efeito, e designando por  $r$  e  $r - 1$  os números de ordem de duas iterações consecutivas, o erro relativo definido por

$$\epsilon = \frac{1}{N_{A_e}} \sum_{i=1}^{N_{A_e}} \left| \frac{\sigma_{y_i}^{(r)} - \sigma_{y_i}^{(r-1)}}{\sigma_{y_i}^{(r)}} \right| \quad (3.251)$$

em que  $N_{A_e}$  é a dimensão da matriz  $\underline{A}_e$ , é comparado com uma tolerância máxima pré-definida  $\epsilon_{\max}$ ;

- j) Repetição dos passos descritos nas alíneas g), h) e i) caso não tenha sido atingida a desejada convergência, situação em que  $\epsilon > \epsilon_{max}$ ;
- l) Quantificação da matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_g$  relativa às forças de restituição inelásticas através da relação (3.225).

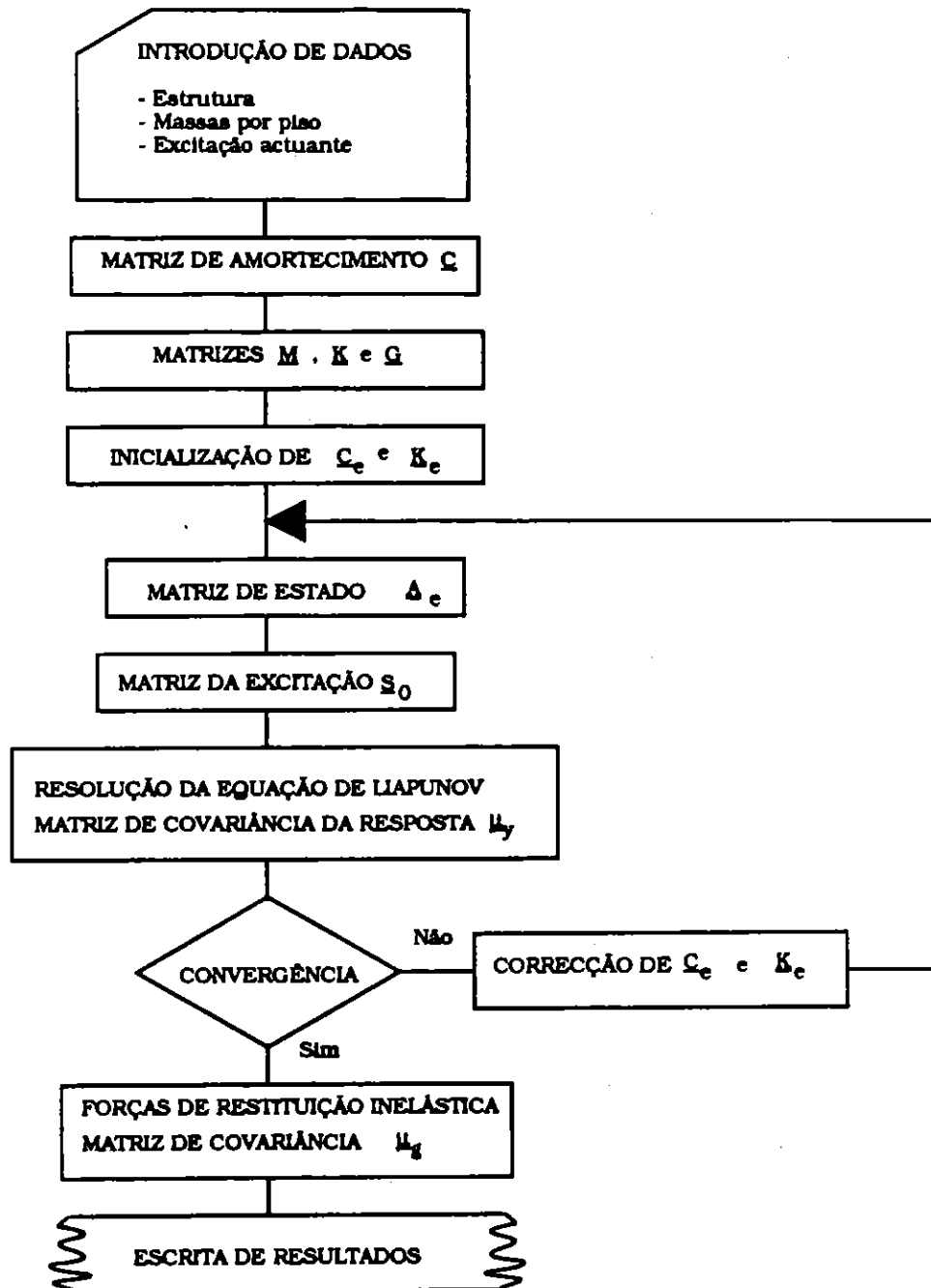


Fig. 3.22 - Fluxograma simplificado do programa STWEN.

Para além da realização deste programa de cálculo automático, foi ainda elaborado um outro NSTWEN (referido em [59] como PROG9) que, assente na formulação de estado complexa descrita em 3.7.3, possibilita também a análise da evolução temporal das características da resposta de estruturas do tipo antes mencionado a excitações sísmicas de carácter não-estacionário, idealizadas através do produto de uma função de modulação determinística por um processo estocástico estacionário gaussiano colorido de valor médio nulo caracterizado por um espectro de Kanai-Tajimi.

Neste caso, são os seguintes os principais passos caracterizadores da arquitectura do programa realizado, sinteticamente apresentados no fluxograma simplificado indicado na figura 3.23:

- a) Leitura de dados gerais, os quais coincidem praticamente com os fornecidos para utilização do programa STWEN, salvo no que se refere à indicação do intervalo de tempo incremental  $\Delta t$  e do tempo máximo de análise da resposta não-estacionária  $T_{max}$ , bem como à caracterização da excitação actuante, havendo para o efeito que proceder à definição da função de modulação  $\theta(t)$ , podendo esta ser caracterizada através de uma sequência de troços lineares, ou mediante o recurso às funções utilizadas por Amin e Ang [3] ou Shinozuka e Sato [142];
- b) Formação da matriz de amortecimento  $\underline{C}$ , suposta invariante ao longo de toda a evolução temporal da resposta, bem como das matrizes  $\underline{M}$ ,  $\underline{K}$  e  $\underline{G}$ , seguindo o mesmo procedimento que foi já referido anteriormente para o caso do programa STWEN;
- c) Inicialização das matrizes  $\underline{C}_e(t_k)$  e  $\underline{K}_e(t_k)$  relativas ao instante genérico de análise  $t_k$ , começando por seguir o critério definido por (3.250) no instante inicial, e constituição das matrizes  $\underline{D}$  e  $\underline{E}(t_k)$  definidas por (3.207);
- d) Resolução dos problemas de valores e vectores próprios definidos pelas equações (3.232) e (3.233), recorrendo às sub-rotinas MQR, MHRE, MER, MVHR e MVRE da biblioteca SL-MATH (IBM), quantificando para o instante  $t_k$  os valores próprios  $\lambda_i$  (1 real e 2 complexos conjugados por cada grau de liberdade) e os vectores próprios complexos à direita  $\underline{\phi}_i$  e à esquerda  $\underline{\psi}_i^T$ ;
- e) Normalização dos vectores próprios complexos encontrados por forma a verificar-se a condição (3.236) e, simultaneamente, a relação (3.237);
- f) Quantificação dos factores de participação complexos  $L_i$  relativos a cada vector próprio  $\underline{\psi}_i^T$  através da equação (3.242);

- g) Formação da matriz de covariância modal complexa  $\underline{\mu}_\beta(t_k + \Delta t)$  relativa ao instante seguinte ao instante genérico de análise  $t_k$ , tendo por base a equação (3.248) e a própria constituição da matriz de covariância modal  $\underline{\mu}_\beta(t_k)$  nesse instante (nula para  $t_k = 0$ ); para o efeito o integral duplo representado nessa equação é avaliado numericamente, sendo os valores da função integranda calculados a partir do conhecimento dos valores próprios complexos  $\lambda_i$  e da função de auto-correlação  $R_{\ddot{u}_p}(\tau)$  definida por (3.249);
- h) Determinação da matriz de covariância  $\underline{\mu}_y(t_k + \Delta t)$ , caracterizadora da distribuição probabilística do processo estocástico vectorial definido por (3.205) no instante  $t_k + \Delta t$ , tendo presente a relação (3.245) e os vectores próprios complexos  $\underline{\phi}_i$ ;
- i) Cálculo iterativo dos coeficientes de linearização  $c_{e_i}$  e  $k_{e_i}$  que contribuem para a formação das matrizes  $\underline{C}_e(t)$  e  $\underline{K}_e(t)$ ; para o efeito aqueles coeficientes são recalculados, mediante a utilização das equações (3.92) a (3.97), em função das grandezas estatísticas  $\sigma_{\dot{q}_i}(t_k + \Delta t)$ ,  $\sigma_{z_i}(t_k + \Delta t)$  e  $\rho_{\dot{q}_i, z_i}(t_k + \Delta t)$ , obtidas directamente a partir dos elementos de  $\underline{\mu}_y(t_k + \Delta t)$ ; este procedimento é continuado enquanto o erro médio relativo  $\epsilon$  definido por (3.251), correspondente a duas iterações consecutivas, exceder uma tolerância máxima pré-definida  $\epsilon_{\max}$ ; cada vez que as matrizes  $\underline{C}_e(t)$  e  $\underline{K}_e(t)$  são recalculadas, a matriz  $\underline{E}(t)$  sofre a necessária recomposição, sendo repetidos todos os passos sumariamente descritos nas alíneas d), e), f), g) e h) até se acabar por atingir a desejada convergência ao nível do instante  $t_k + \Delta t$ ;
- j) Passagem à análise das características da resposta no instante seguinte, tomando como valores iniciais dos coeficientes de linearização os correspondentes aos do instante anterior, e seguindo novamente todo o procedimento descrito entre as alíneas d) e i), enquanto não for ultrapassado o período de tempo máximo de análise da resposta considerado.

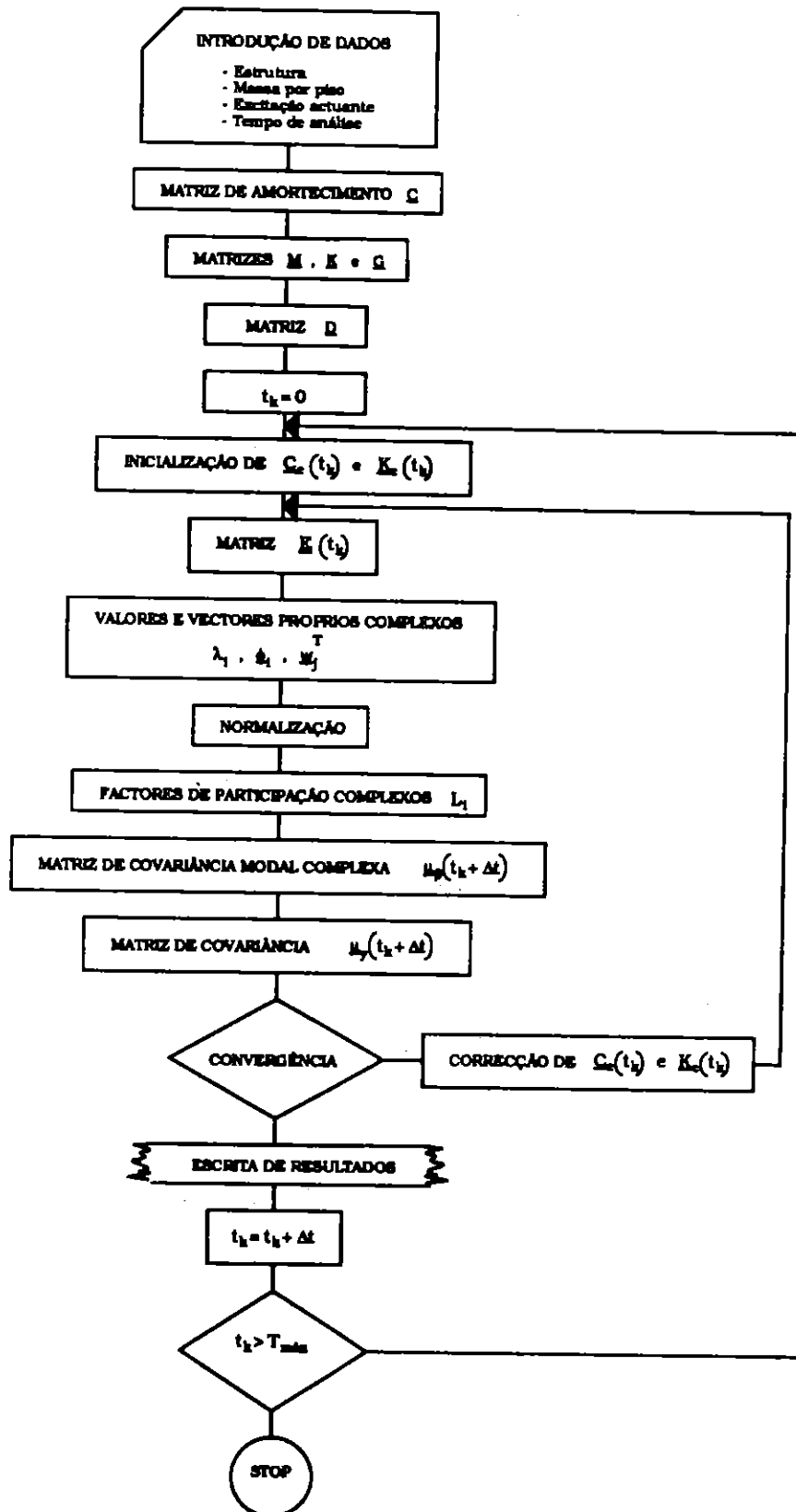


Fig. 3.23 - Fluxograma simplificado do programa NSTWEN.

### 3.7.5 - Exemplos de aplicação

O desenvolvimento dos programas de cálculo automático STWEN e NSTWEN foi acompanhado do tratamento de diversos exemplos de aplicação, sendo de realçar dois casos, já anteriormente abordados por Chang [45], e que se entendeu da maior utilidade tomar como referência por forma a, por um lado, testar o bom funcionamento dos modelos computacionais desenvolvidos e, por outro, avaliar o grau de rigor dos resultados alcançados face a valores obtidos por simulação numérica.

O primeiro exemplo diz respeito a uma estrutura de um único piso, com uma massa de  $0,933 \text{ kips} \cdot \text{s}^2 / \text{ft}$ , sendo os seguintes os valores dos parâmetros do modelo de Bouc-Wen utilizados para idealizar o comportamento histerético dos respectivos pilares:  $k = 35,2 \text{ kips} / \text{ft}$ ,  $\alpha = 0,04$ ,  $A = 1,0$ ,  $n = 1$ ,  $\beta = \gamma = 2 / \text{ft}$ . O amortecimento foi, por seu turno, quantificado através da relação (2.221), tomando  $\alpha_c = 0,614 / \text{s}$  e  $\beta_c = 0 \text{ s}$ .

A acção sísmica começou por ser idealizada através de um processo não-estacionário, obtido através do produto de um processo estacionário do tipo Kanai-Tajimi, com  $S_0 = 0,1 \text{ ft}^2 / \text{s}^3$ ,  $w_f = 15,56 \text{ rad} / \text{s}$  e  $\xi_f = 0,64$ , por uma função de modulação do tipo Shinozuka e Sato com  $a = 0,25 / \text{s}$ ,  $b = 0,50 / \text{s}$  e  $c = 0,25$ .

Nessas condições, foi calculada, mediante utilização do programa NSTWEN, a evolução temporal quer dos desvios padrões do deslocamento e da velocidade do piso em relação à base,  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$ , quer dos coeficientes de linearização  $c_a(t)$  e  $k_a(t)$ , tendo sido considerado um intervalo de tempo incremental  $\Delta t = 0,15 \text{ s}$ . A tradução gráfica dessa evolução ao longo dos primeiros  $10 \text{ s}$  encontra-se representada nas figuras 3.24 e 3.25, indicando-se nesta última também os valores de  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$  obtidos por Chang [45] com recurso a técnicas de simulação digital, envolvendo o tratamento estatístico de 100 realizações distintas dos processos de resposta, obtidas por aplicação de um método de integração directa a partir de outras tantas histórias temporais da aceleração de base, compatíveis com o modelo não-estacionário da excitação sísmica antes referido.

Da comparação dos valores alcançados com o programa NSTWEN com os apresentados por Chang, pôde constatar-se não só o bom funcionamento deste programa face a um modelo computacional análogo desenvolvido por aquele investigador com base no método de linearização estocástica equivalente, mas também a excelente aproximação conseguida por este método no que respeita à estimativa de  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$ .

No sentido de testar também o programa de cálculo STWEN, foi igualmente considerada uma função de modulação do tipo Heaviside, por forma a idealizar uma excitação pseudo-não-estacionária, cuja resposta estrutural, obtida pelo programa NSTWEN, se encontra traduzida de forma gráfica nas figuras 3.26 e 3.27. A evolução

temporal de  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$ , analisada ao longo de um intervalo de tempo 100 s, mostra pois a existência de uma tendência assintótica daquelas variáveis, sendo essa tendência bastante rápida no caso da velocidade de piso, mas significativamente mais lenta no caso do deslocamento correspondente, aspecto que é nitidamente motivado pela natureza não-linear histerética do comportamento estrutural, como resulta claro da comparação destes resultados com os de análises do mesmo tipo, envolvendo sistemas lineares [59]. É de realçar, por outro lado, que se registou uma excelente concordância entre os valores máximos de  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$  motivados pela excitação pseudo-não-estacionária e os correspondentes valores estacionários avaliados por aplicação do programa STWEN ( $\sigma_u = 0,118 ft$  e  $\sigma_{\dot{u}} = 0,518 ft/s$ ), sendo a diferença relativa máxima da ordem dos 4%, facto que serviu naturalmente também para testar o bom funcionamento deste modelo computacional.

Este mesmo exemplo foi ainda analisado para duas outras acções sísmicas com características em tudo semelhantes, salvo no que se refere à intensidade espectral  $S_o$ , que foi quadruplicada, encontrando-se as correspondentes evoluções temporais de  $c_e(t)$ ,  $k_e(t)$ ,  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$  traduzidas graficamente nas figuras 3.28 e 3.29. Como se pode concluir da sua observação, regista-se também neste caso uma apreciável compatibilidade dos resultados obtidos pelo método de linearização equivalente com os alcançados por simulações numéricas [45], o mesmo sucedendo entre os valores máximos de  $\sigma_u(t)$  e  $\sigma_{\dot{u}}(t)$ , decorrentes da aplicação da excitação pseudo-não-estacionária (fig. 3.30 e 3.31), e os valores estacionários estimados com base no programa STWEN ( $\sigma_u = 0,271 ft$  e  $\sigma_{\dot{u}} = 0,86 ft/s$ ), tendo-se obtido diferenças relativas da mesma ordem de grandeza que no caso anterior.

Como segundo exemplo de aplicação, apresenta-se o caso de uma estrutura do tipo "shear-building" com dois pisos, aos quais se encontram associadas massas de valor  $m_1 = 2,488$  e  $m_2 = 1,244 kips \cdot s^2 / ft$ , sendo o comportamento histerético dos pilares entre pisos caracterizado pelos seguintes parâmetros do modelo de Bouc-Wen:  $k_1 = 83,5$ ,  $k_2 = 35,2 kips / ft$ ,  $\alpha_1 = \alpha_2 = 0,04$ ,  $A_1 = A_2 = 1,0$ ,  $n_1 = n_2 = 1$ ,  $\beta_1 = \gamma_1 = 3,55 / ft$  e  $\beta_2 = \gamma_2 = 2,0 / ft$ . A matriz de amortecimento foi por sua vez quantificada através da relação (2.221), tomando  $\alpha_c = 0,263 / s$  e  $\beta_c = 0,00852 s$ . A acção sísmica foi caracterizada da mesma forma que no caso anterior, tendo-se igualmente considerado as duas funções de modulação já mencionadas, e fixado o valor da densidade espectral  $S_o$  em  $0,1 ft^2 / s^3$ .

Nas figuras 3.32 e 3.33 encontram-se representadas sob forma gráfica as evoluções temporais dos desvios padrões relativos aos deslocamentos relativos entre pisos,  $\sigma_{u_1}$  e  $\sigma_{u_2}$  e às velocidades correspondentes,  $\sigma_{\dot{u}_1}$  e  $\sigma_{\dot{u}_2}$  decorrentes da actuação daqueles dois tipos de excitação.



À semelhança do sucedido no exemplo anterior, verifica-se também uma excelente concordância de resultados face aos valores apresentados por Chang, calculados quer com base no método de linearização estocástica equivalente, quer com recurso a técnicas de simulação numérica.

Por outro lado, no caso da excitação pseudo-não-estacionária (Fig. 3.34 e 3.35) regista-se ainda uma boa compatibilidade de resultados em relação aos correspondentes valores estacionários, calculados com o programa STWEN ( $\sigma_{u_1} = 0,188 ft$ ,  $\sigma_{\dot{u}_2} = 0,133 ft/s$ ,  $\sigma_{\ddot{u}_1} = 0,387 ft$  e  $\sigma_{\ddot{u}_2} = 0,434 ft/s$ ), muito embora a diferença relativa encontrada para  $\sigma_{u_1}$  seja um pouco superior ao verificado nos exemplos anteriores, situando-se na ordem dos 10%.

É de realçar, no entanto, que estas pequenas diferenças relativas encontradas em relação aos valores assintóticos, praticamente inexistentes no caso de sistemas lineares, são aqui facilmente compreensíveis, sendo essencialmente resultantes das aproximações introduzidas por consecutivas linearizações do modelo histerético registadas ao cabo de cada intervalo de tempo incremental, e cujo efeito é cumulativo em termos da análise da resposta não-estacionária, como ressalta aliás evidente da observação da equação (3.248).

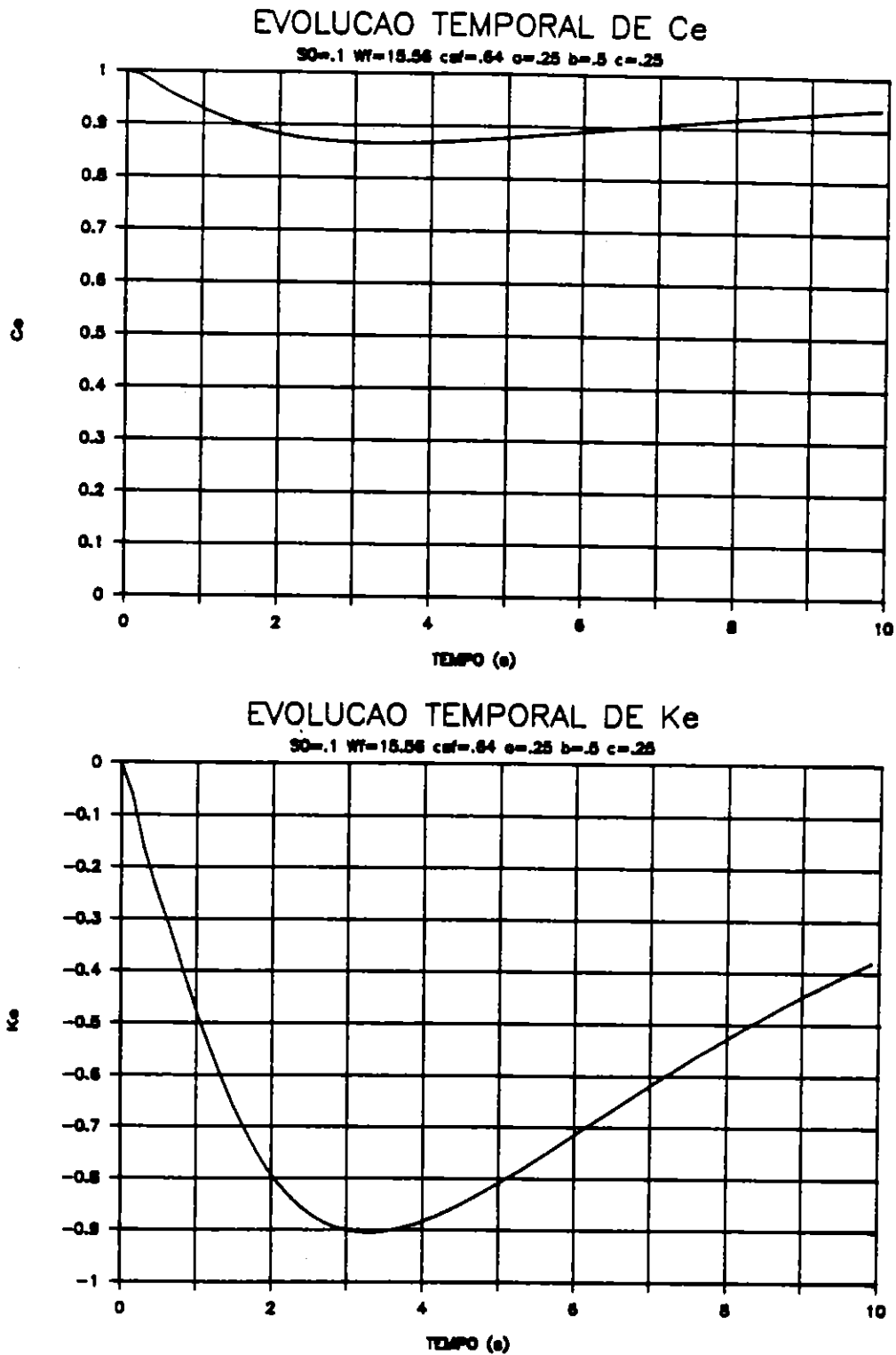


Fig. 3.24 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ )  
 Evolução temporal dos coeficientes  $c_e$  e  $k_e$

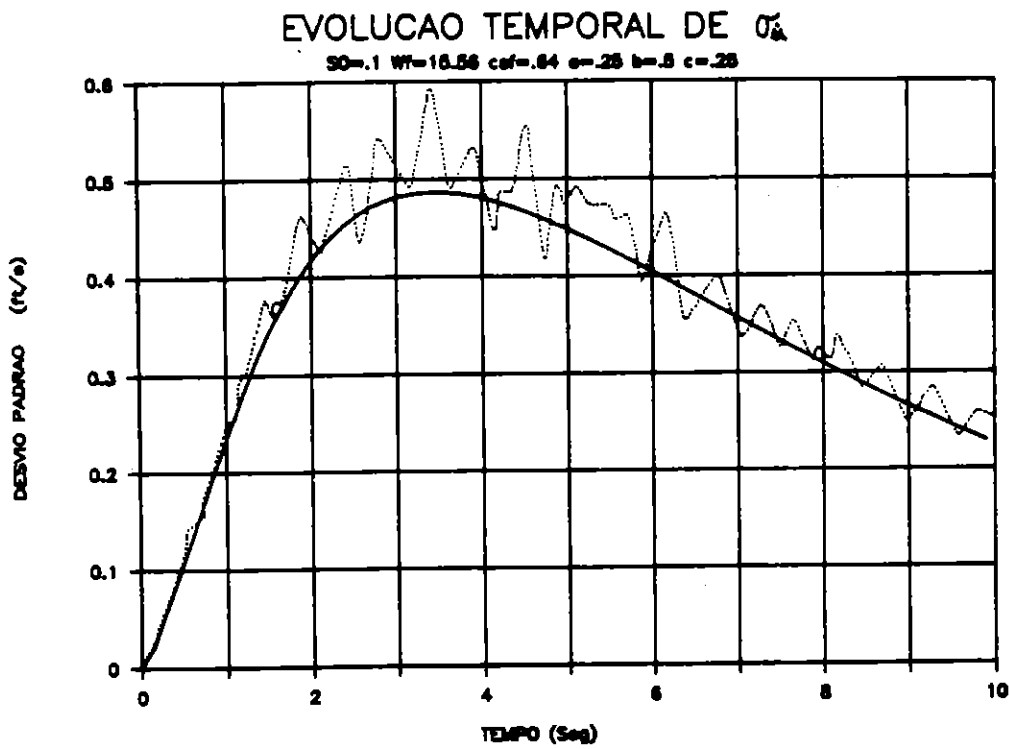
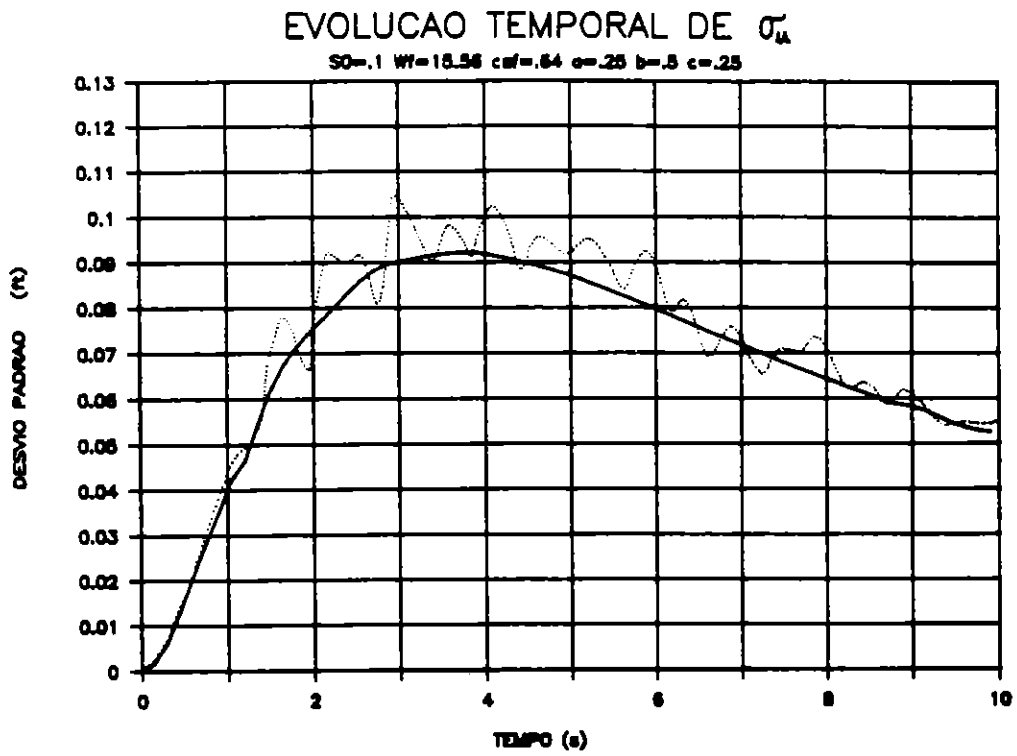


Fig. 3.25 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ )  
 Evolução temporal de  $\sigma_u$  e  $\sigma_{\dot{u}}$ .

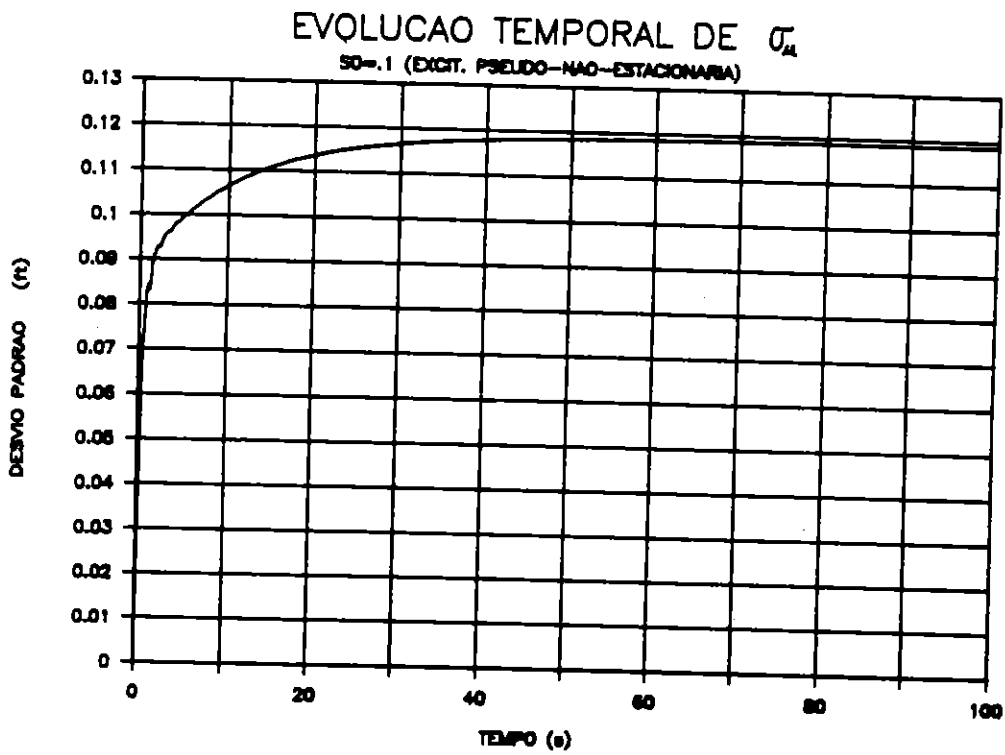
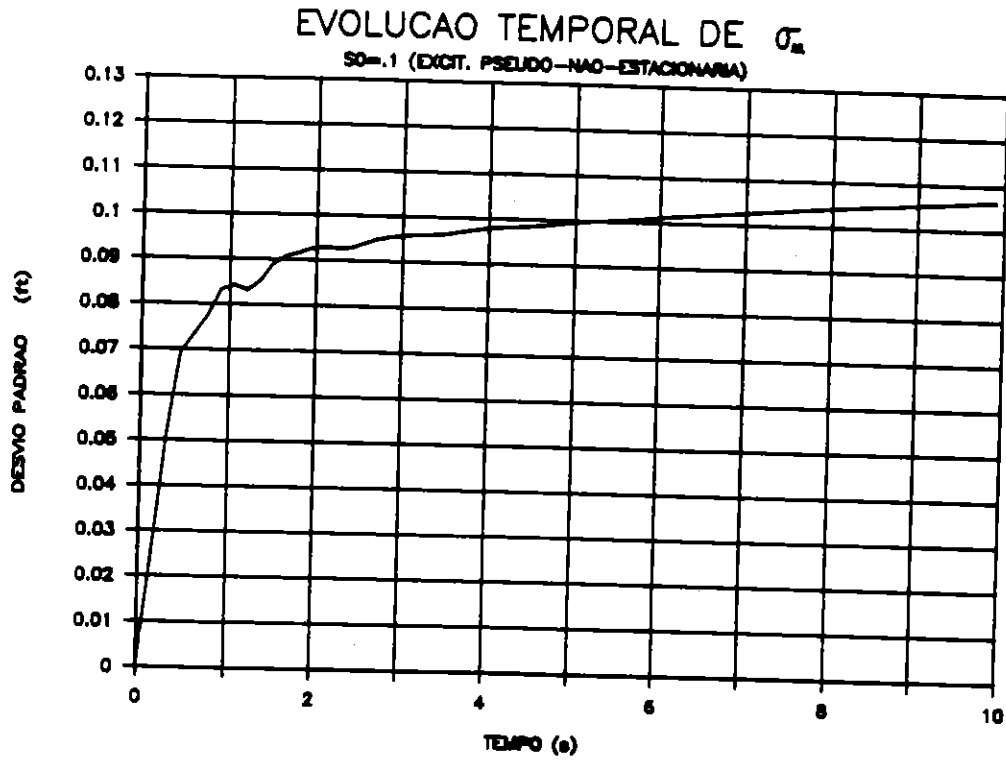


Fig. 3.26 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ );  
 Evolução temporal de  $\sigma_u$ .

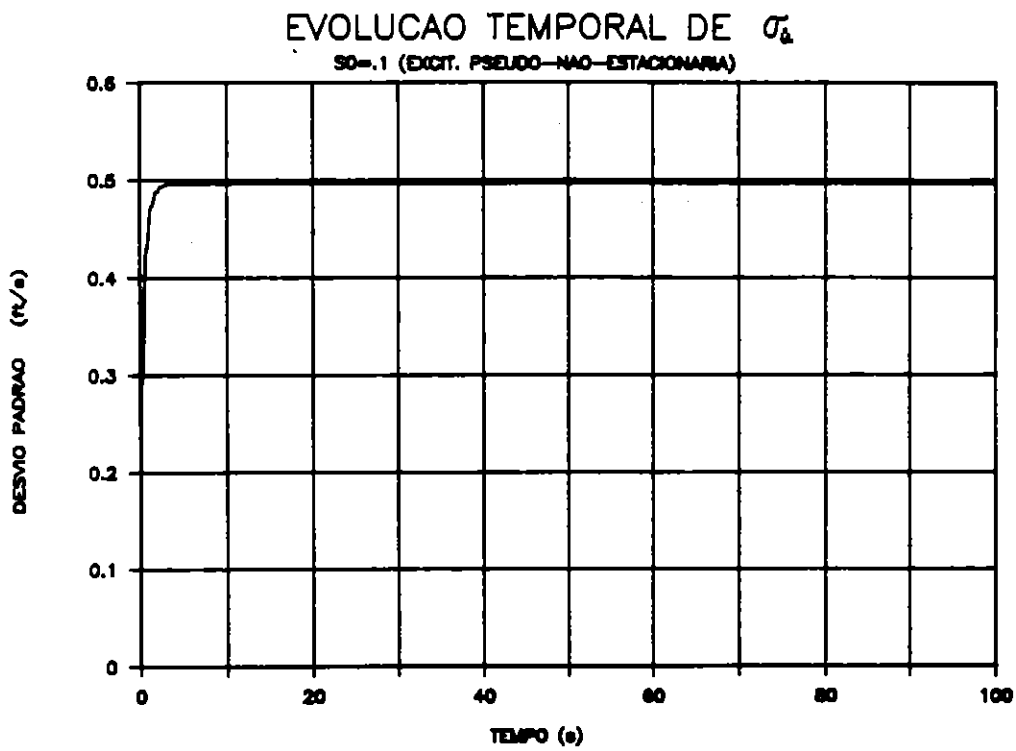
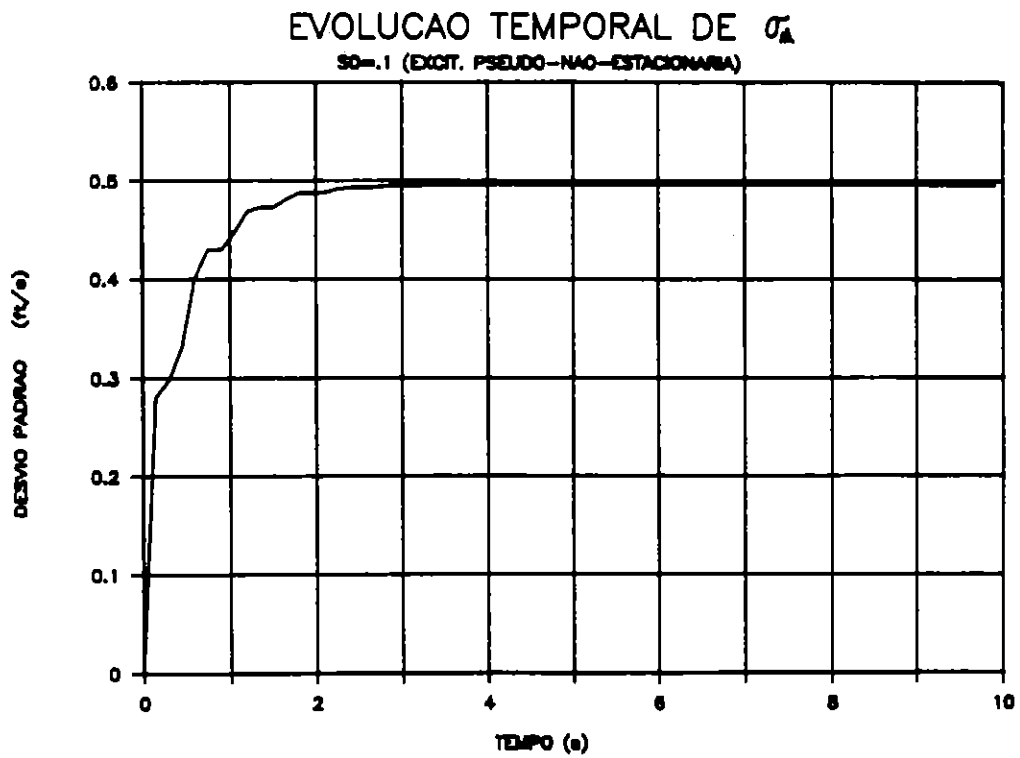


Fig. 3.27 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ );  
 Evolução temporal de  $\sigma_u$ .

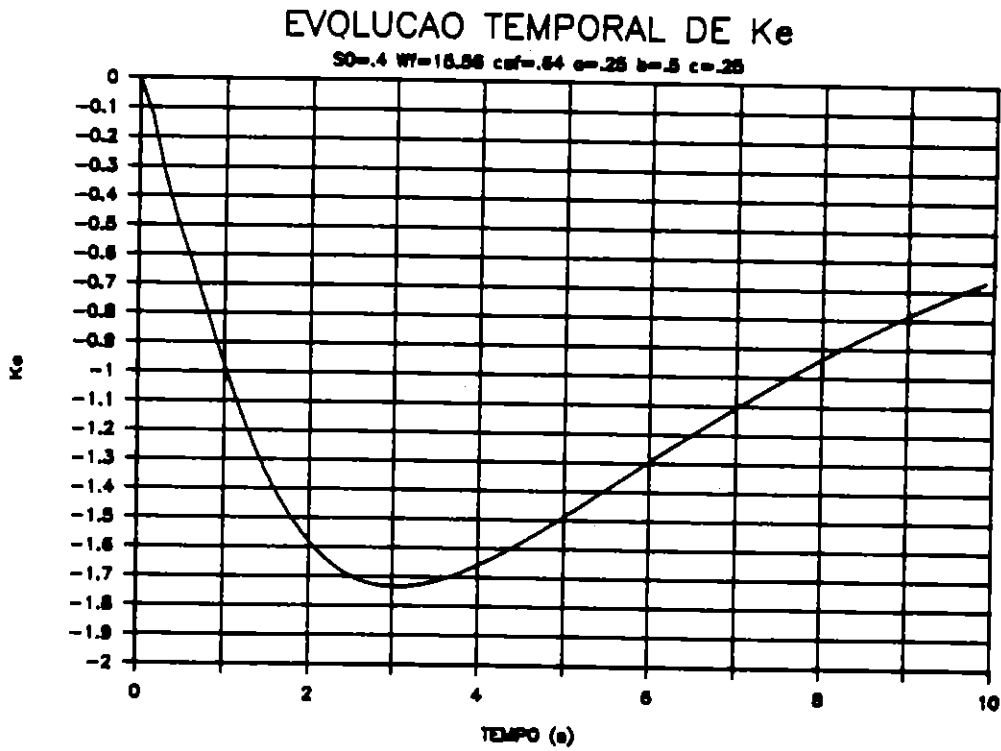
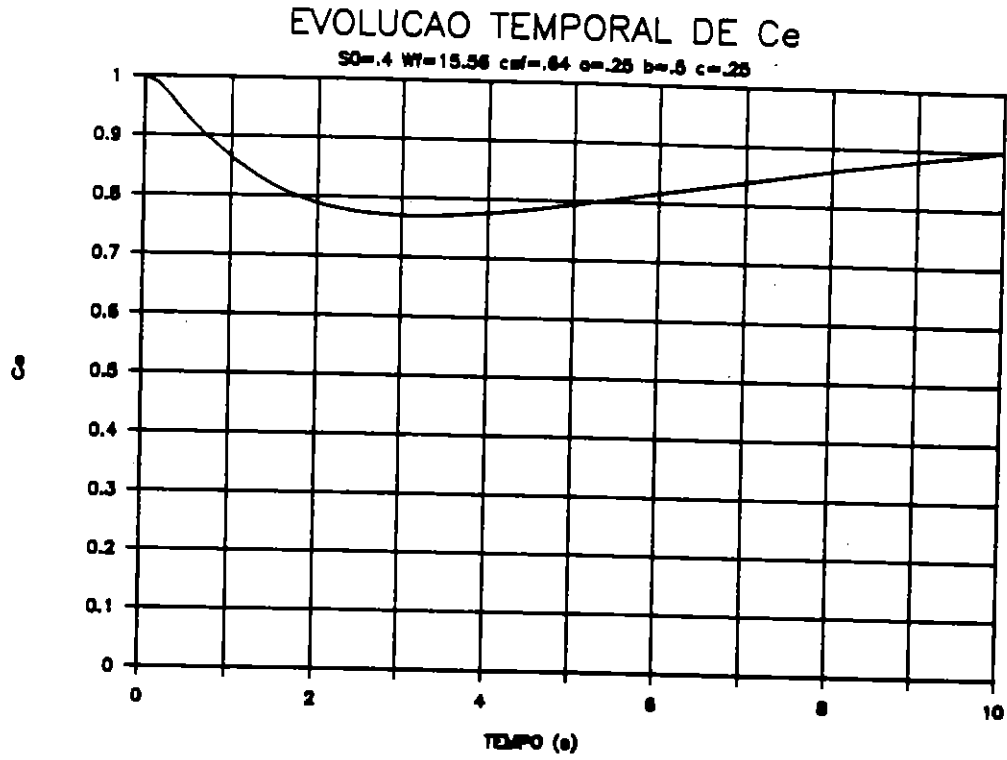


Fig. 3.28 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ( $S_0 = 0,4$ )  
 Evolução temporal dos coeficientes  $c_e$  e  $k_e$ .

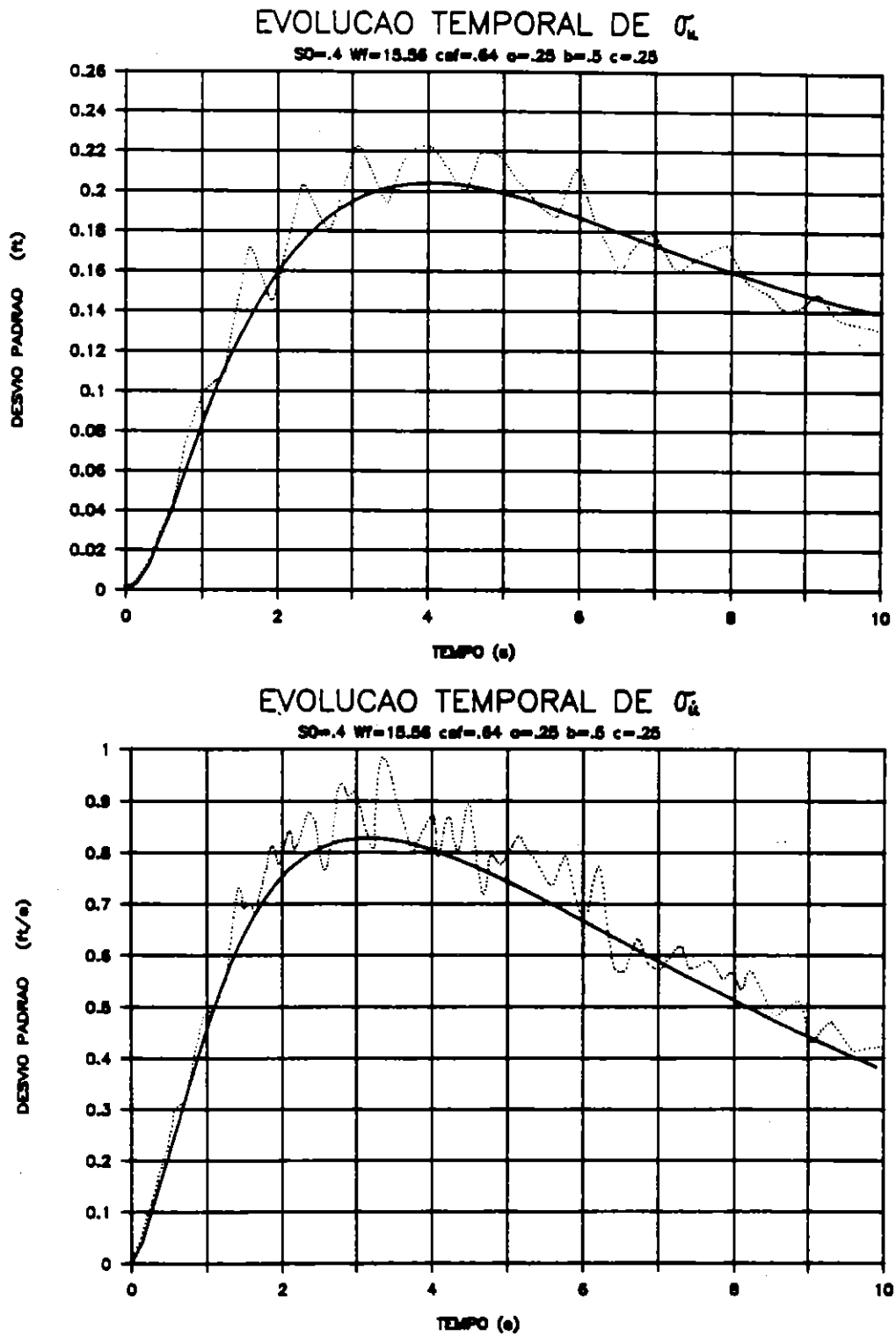


Fig. 3.29 - Sistema de 1-GL; Excitação não-estacionária ( $S_0 = 0, 4$ )  
 Evolução temporal de  $\sigma_u$  e  $\sigma_{\dot{u}}$ .

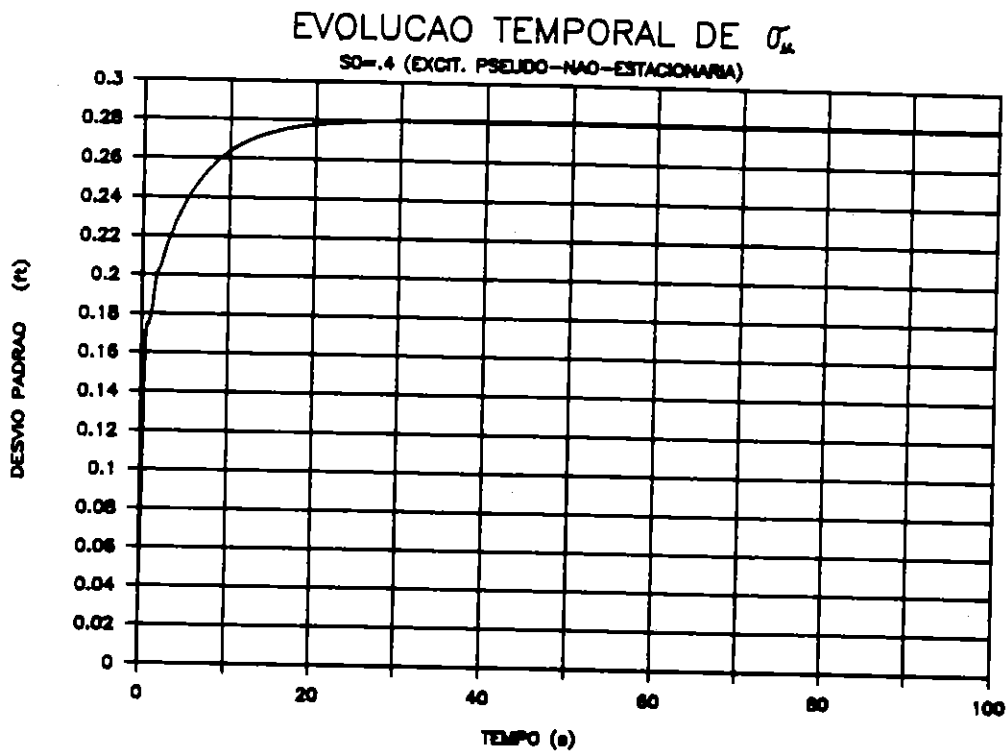
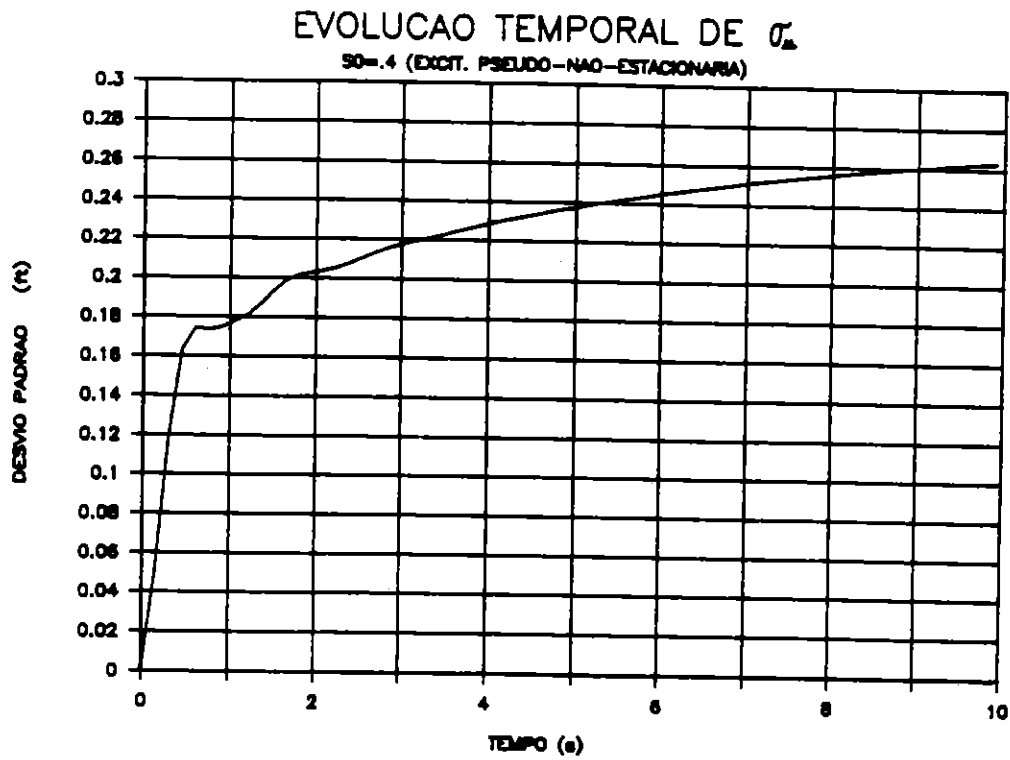


Fig. 3.30 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ( $S_0 = 0,4$ );  
 Evolução temporal de  $\sigma_u$ .



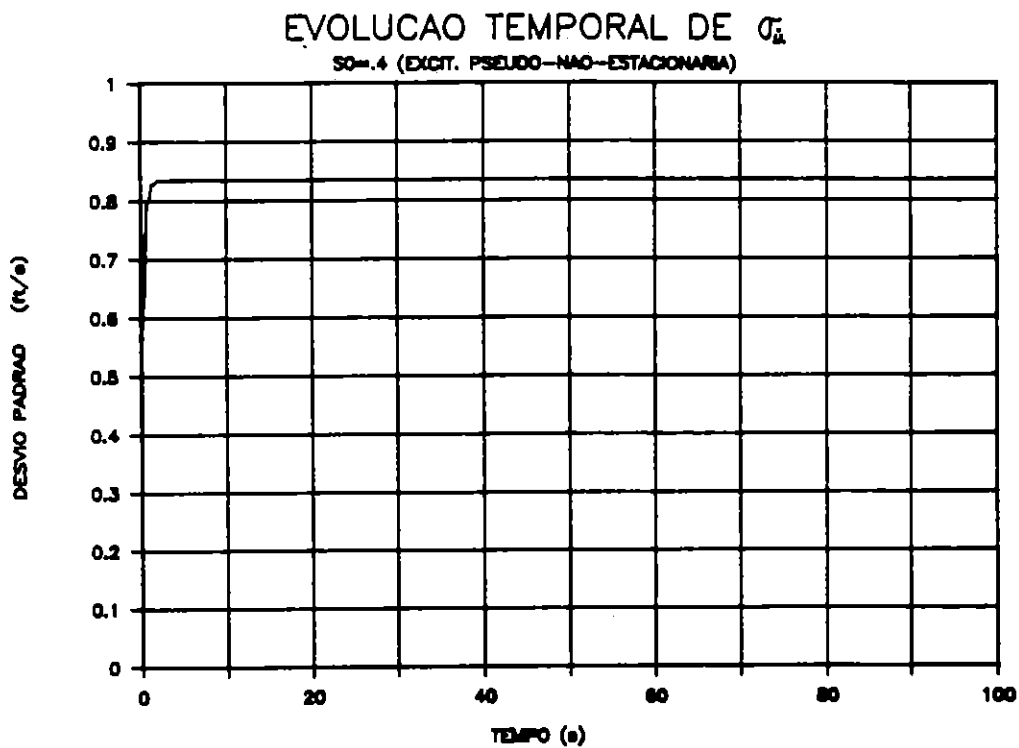
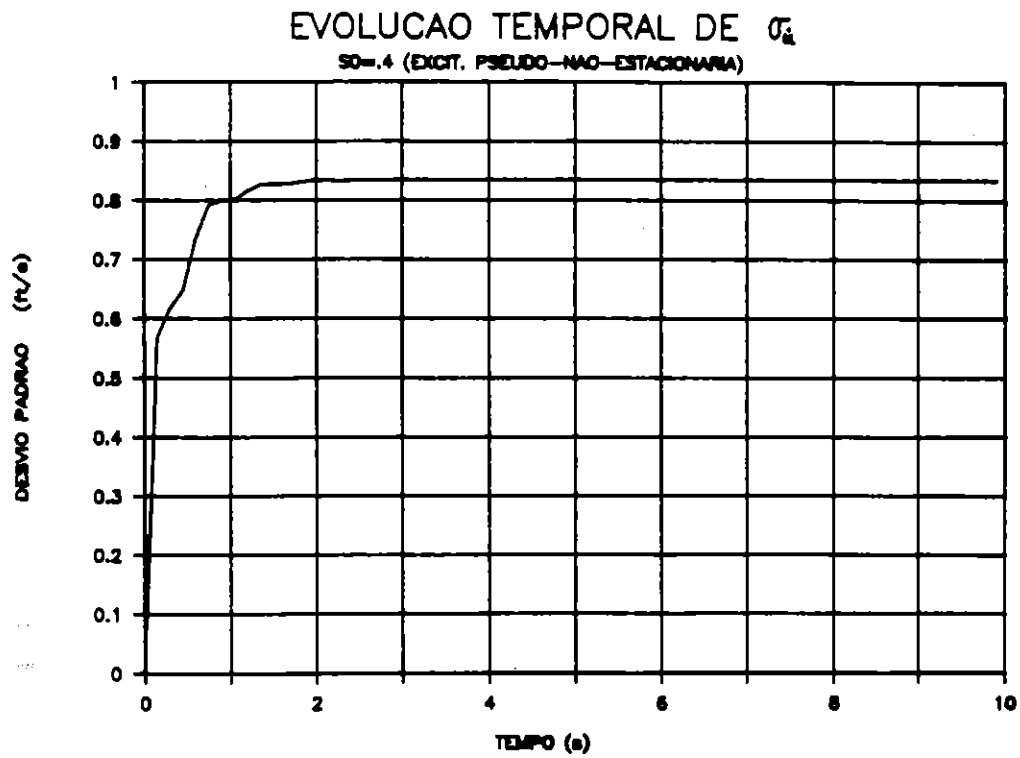


Fig. 3.31 - Sistema de 1-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ( $S_0 = 0,4$ );  
 Evolução temporal de  $\sigma_{\ddot{u}}$ .

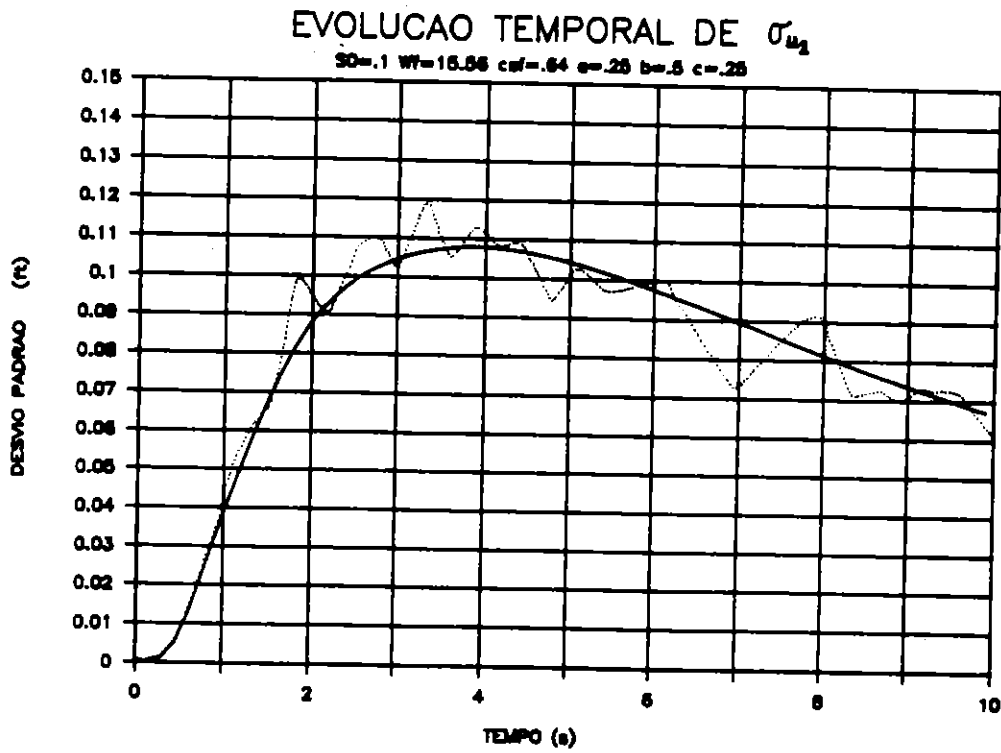
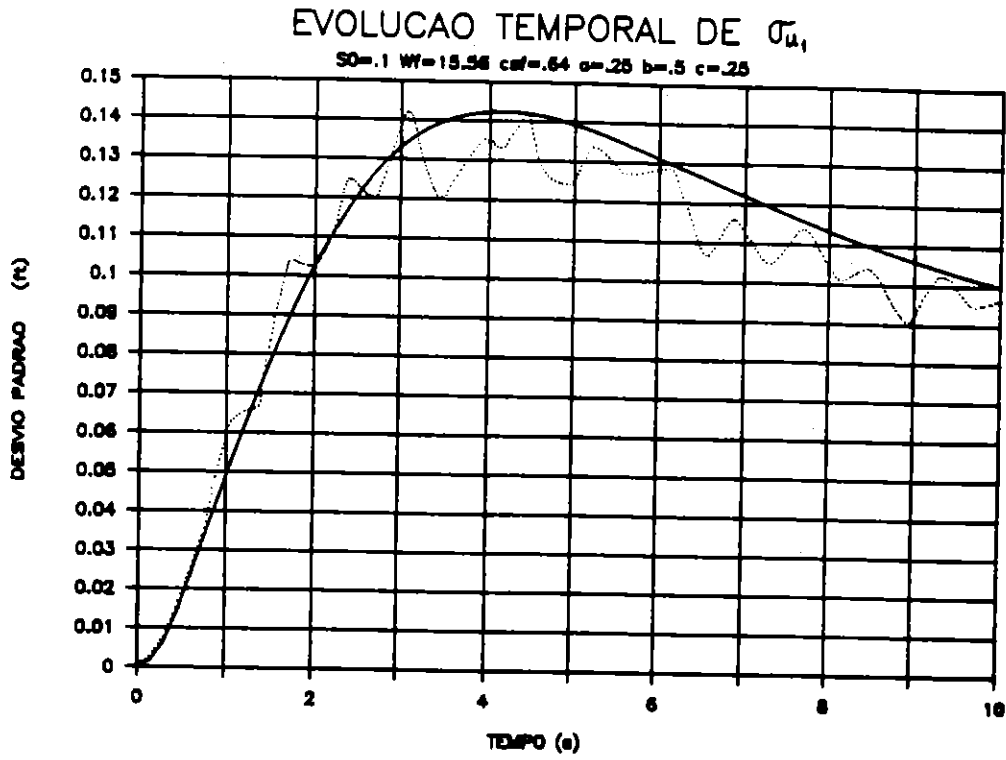


Fig. 3.32 - Sistema de 2-GL; Excitação não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ )  
 Evolução temporal de  $\sigma_{u_1}$  e  $\sigma_{u_2}$

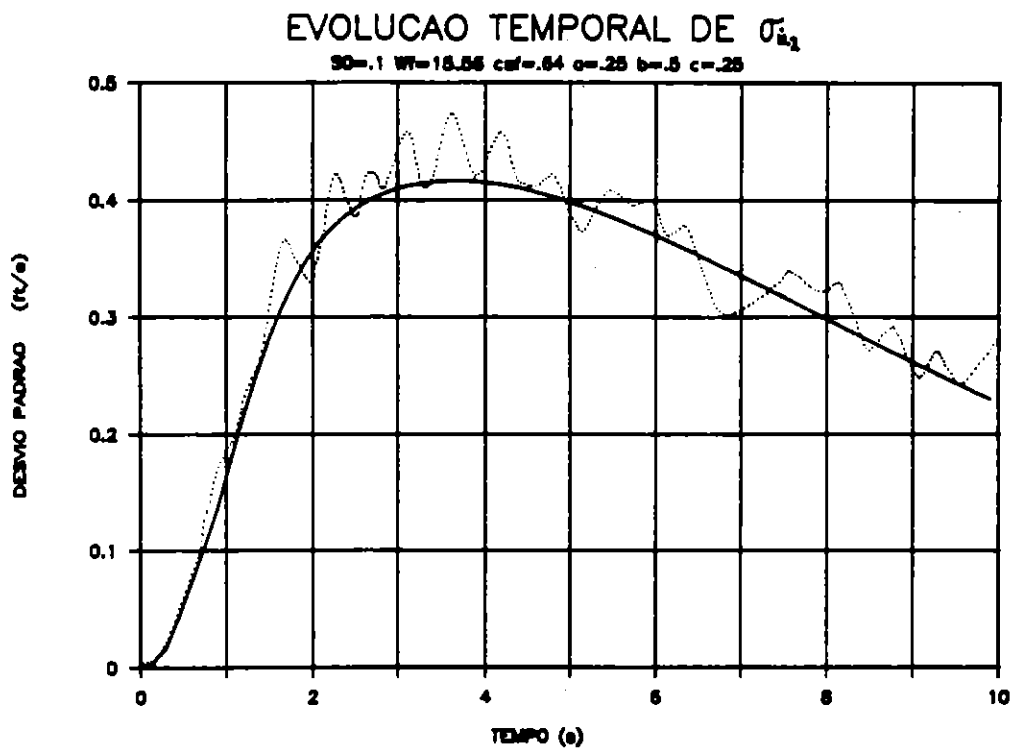
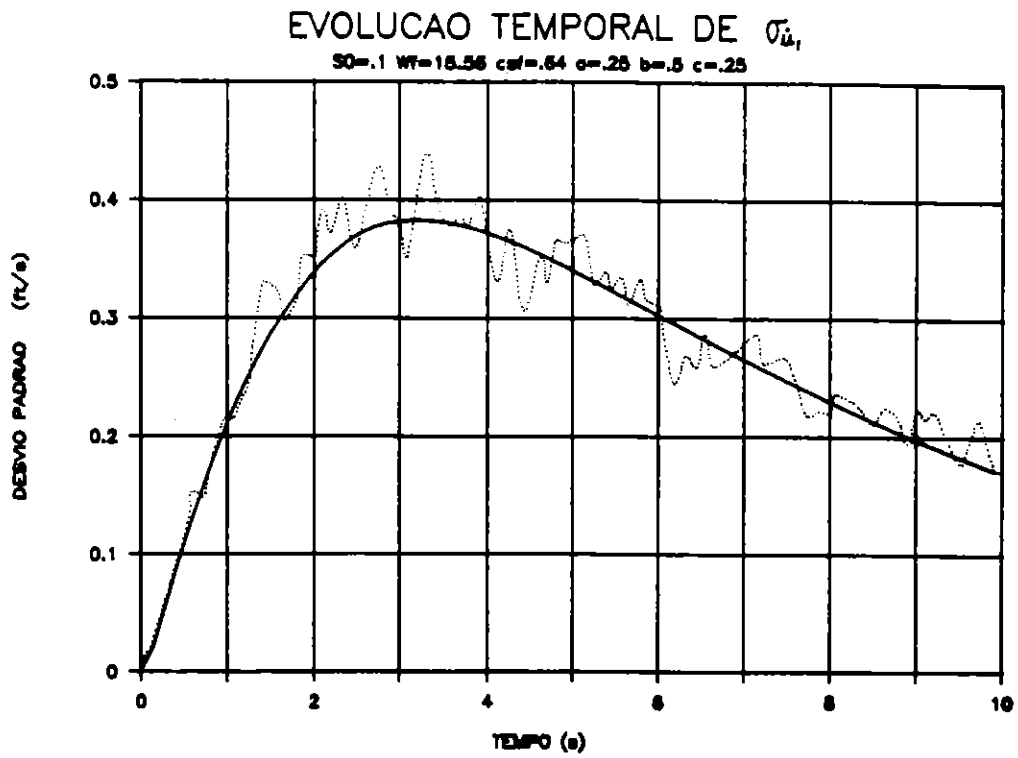


Fig. 3.33 - Sistema de 2-GL; Excitação não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ )

Evolução temporal de  $\sigma_{\dot{u}_1}$  e  $\sigma_{\dot{u}_2}$

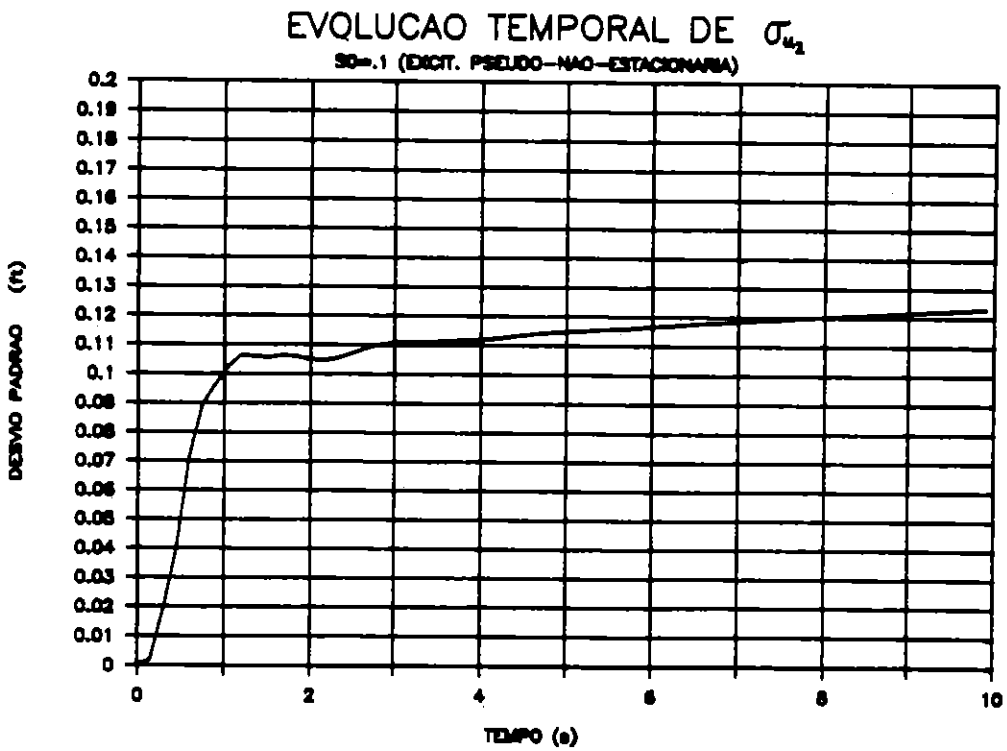
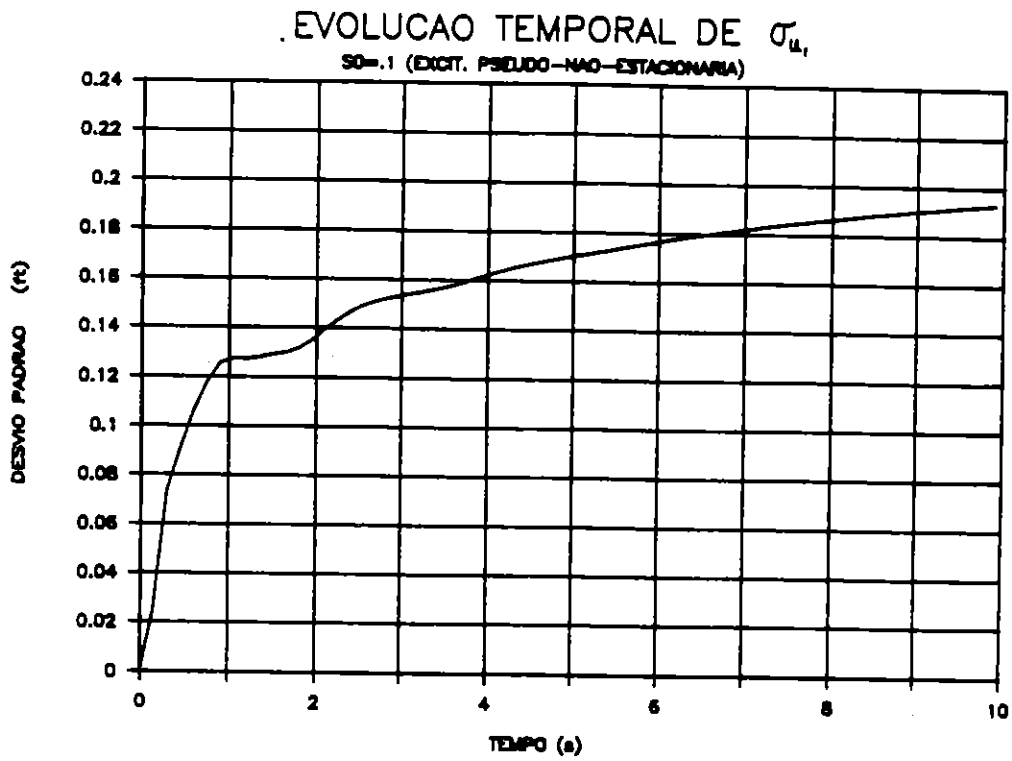


Fig. 3.34 - Sistema de 2-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ( $S_o = 0, 1$ ); Evolução temporal de  $\sigma_{u_1}$  e  $\sigma_{u_2}$

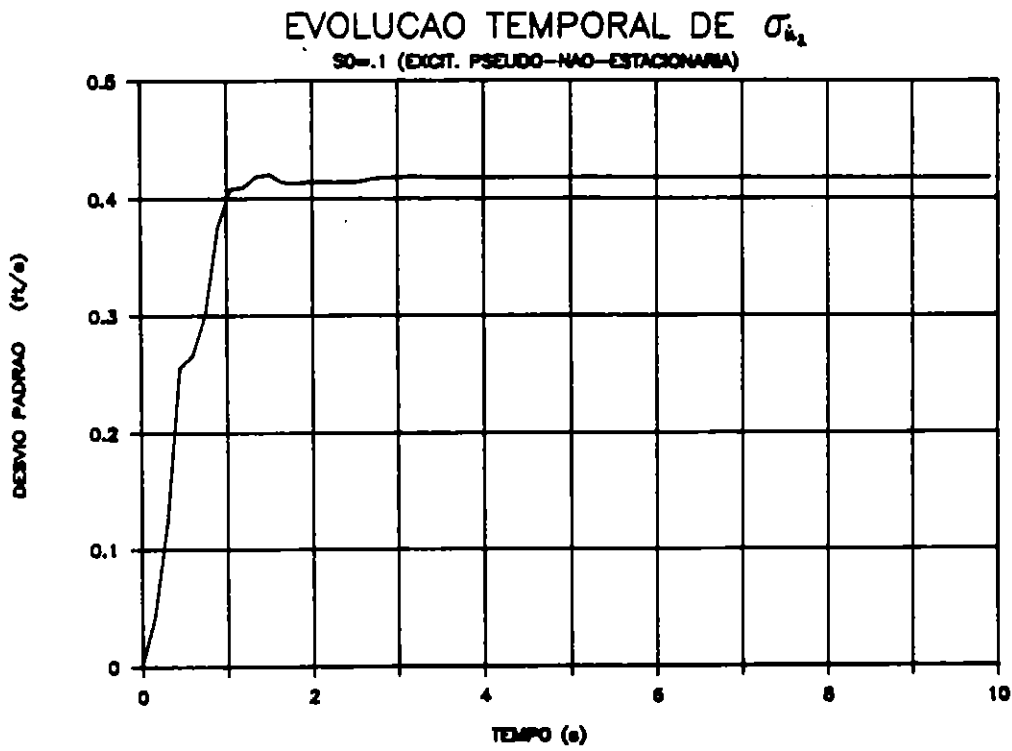
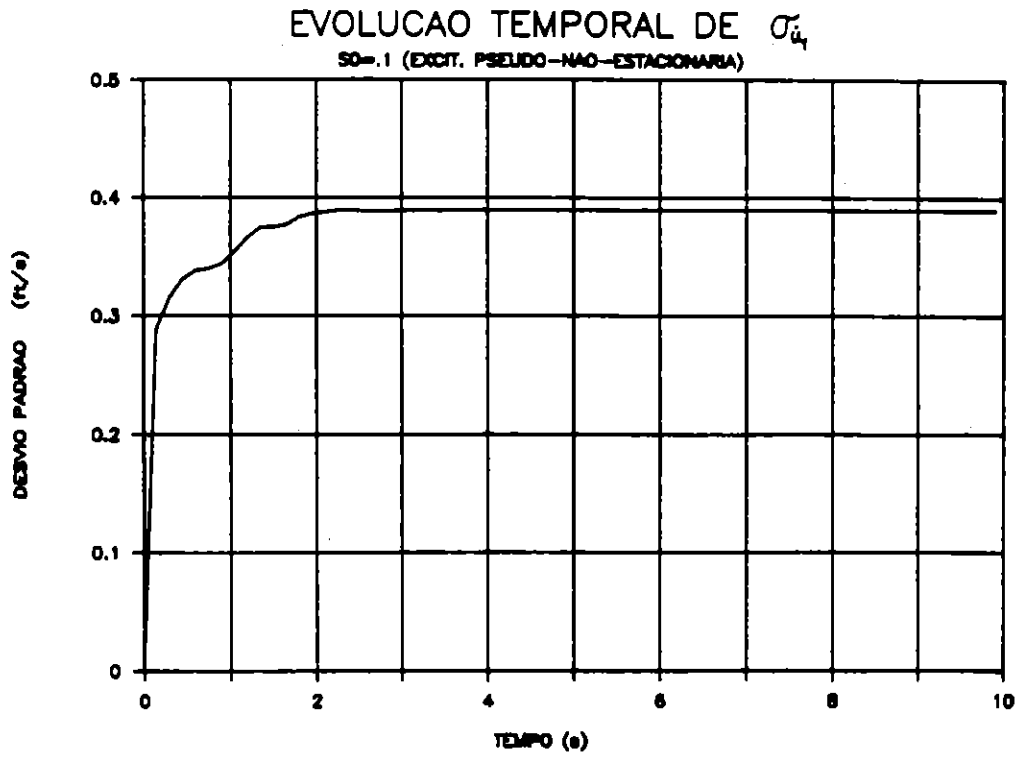


Fig. 3.35 - Sistema de 2-GL; Excitação pseudo-não-estacionária ( $S_0 = 0, 1$ ); Evolução temporal de  $\sigma_{u_1}$  e  $\sigma_{u_2}$

### 3.7.6 - Resposta sísmica estacionária ou não-estacionária de pórticos planos com rótulas não-lineares hysteréticas nas extremidades das barras

Considere-se agora o comportamento não-linear hysterético de um pórtico, idealizado através de uma discretização da estrutura num conjunto de elementos de funcionamento elástico e linear, interligados através de rótulas plásticas supostamente localizadas nas extremidades das barras.

Para o efeito, considere-se apenas a barra genérica  $l$  representada na figura 3.36, que estabelece a ligação entre os nós  $i$  e  $j$  da estrutura. Designando por  $\underline{F}_l$  o vector constituído pelas 6 componentes das forças nodais nas extremidades, por  $\underline{u}_l$  o vector dos deslocamentos generalizados correspondentes e por  $\underline{\psi}_l$  o vector formado pelas rotações inelásticas  $\psi_{li}$  e  $\psi_{lj}$  nas duas rótulas plásticas respectivas, fácil é constatar que entre eles se verifica a relação

$$\underline{F}_l = \underline{K}_l \underline{u}_l - \underline{Q}_l \underline{\psi}_l \quad (3.252)$$

sendo

$$\underline{K}_l = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{2EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{12EI}{L^3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \quad \underline{Q}_l = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{6EI}{L^2} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \\ -\frac{6EI}{L^2} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.253)$$

Nestas condições, o equilíbrio dinâmico do sistema, quando sujeito a uma acção aleatória estacionária, poderia ser traduzido, mediante a consideração de 3 graus de liberdade em cada nó livre, através do sistema de equações diferenciais de segunda ordem

$$\underline{M}\ddot{\underline{u}} + \underline{C}\dot{\underline{u}} + \underline{K}\underline{u} - \underline{Q}\underline{\psi} = \underline{p}^u(t) \quad (3.254)$$

em que  $\underline{u}$  seria o vector representativo dos deslocamentos associados à totalidade dos graus de liberdade considerados, resultando as matrizes  $\underline{K}$  e  $\underline{Q}$  do espalhamento conveniente das matrizes  $\underline{K}_l$  e  $\underline{Q}_l$  relativas a cada barra constituinte da estrutura.  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$

seriam por sua vez as matrizes de massa e de amortecimento referidas às coordenadas generalizadas consideradas,  $\underline{\psi}$  o vector das rotações inelásticas registadas nas rótulas plásticas e  $\underline{p}^u(t)$  o processo estocástico vectorial estacionário caracterizador da excitação.

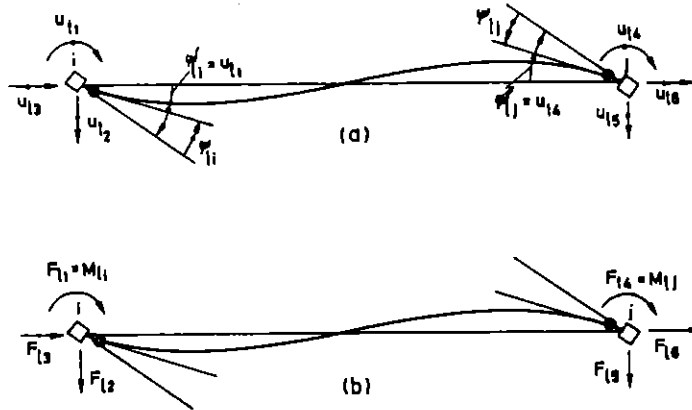


Fig. 3.36 - Deslocamentos, forças nodais e rotações inelásticas.

Sucede porém que, tendo apenas em consideração os efeitos da acção sísmica horizontal, muitas das componentes quer do vector das acções, quer dos vectores das forças de inércia e de amortecimento são nulas, havendo pois vantagem em introduzir um número mais reduzido de coordenadas generalizadas, condensando também o número de equações utilizadas para traduzir o equilíbrio dinâmico do sistema.

Assim, designando por  $\underline{q}$  um vector constituído por N deslocamentos nodais caracterizadores dos deslocamentos horizontais dos N pisos, e por  $\underline{q}_o$  o vector que aglutina as restantes componentes do vector  $\underline{u}$ , de tal forma que

$$\underline{u}^T = [\underline{q}^T, \underline{q}_o^T] \quad (3.255)$$

o movimento do sistema pode ser descrito pela equação

$$\begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\underline{q}} \\ \ddot{\underline{q}}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{C} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\underline{q}} \\ \dot{\underline{q}}_o \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{K}_{MM} & \underline{K}_{MO} \\ \underline{K}_{OM} & \underline{K}_{OO} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{q}_o \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \underline{Q}_M \\ \underline{Q}_o \end{Bmatrix} \underline{\psi} = \begin{Bmatrix} -\underline{M}\underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (3.256)$$

em que  $\underline{M}$  e  $\underline{C}$  representam as matrizes de massa e de amortecimento referidas às N coordenadas  $q_i$ , e  $\underline{K}_{MM}$ ,  $\underline{K}_{MO}$ ,  $\underline{K}_{OM}$ ,  $\underline{K}_{OO}$ ,  $\underline{Q}_M$  e  $\underline{Q}_o$  constituem submatrizes de  $\underline{K}$  e  $\underline{Q}$ .

Esta igualdade matricial permite de imediato concluir não só que

$$\underline{q}_o = \underline{K}_{oo}^{-1} (\underline{Q}_o \underline{\psi} - \underline{K}_{oM} \underline{q}) \quad (3.257)$$

mas também que

$$\underline{M} \ddot{\underline{q}} + \underline{C} \dot{\underline{q}} + \underline{K}_c \underline{q} - \underline{Q}_c \underline{\psi} = -\underline{M} \underline{\alpha} \ddot{u}_g(t) \quad (3.258)$$

sendo as matrizes condensadas  $\underline{K}_c$  e  $\underline{Q}_c$  dadas por

$$\begin{aligned} \underline{K}_c &= \underline{K}_{MM} - \underline{K}_{MO} \underline{K}_{OO}^{-1} \underline{K}_{OM} \\ \underline{Q}_c &= \underline{Q}_M - \underline{K}_{MO} \underline{K}_{OO}^{-1} \underline{Q}_o \end{aligned} \quad (3.259)$$

Por outro lado, o vector  $\underline{M}_p$ , constituído pelos momentos flectores  $M_{ii}$  e  $M_{li}$ , actuantes nas extremidades da barra genérica  $l$ , pode também relacionar-se com os vectores de deslocamentos nodais  $\underline{u}_l$  e de rotações inelásticas  $\underline{\psi}_l$  através da equação

$$\underline{M}_l = \underline{Q}_l^T \underline{u}_l - \underline{K}_{\psi l} \underline{\psi}_l \quad (3.260)$$

em que

$$\underline{K}_{\psi l} = \begin{bmatrix} \frac{4EI}{L} & \frac{2EI}{L} \\ \frac{2EI}{L} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (3.261)$$

Procedendo ao adequado agrupamento de todas as equações deste tipo, referentes à totalidade das barras da estrutura, pode conseguir-se a expressão do vector  $\underline{M}_p$ , que engloba os valores de todos os momentos plásticos, em função dos vectores  $\underline{u}$  e  $\underline{\psi}$ , obtendo-se que

$$\underline{M}_p = \underline{Q}^T \underline{u} - \underline{K}_{\psi} \underline{\psi} \quad (3.262)$$

Tendo presente (3.255), pode também escrever-se que

$$\underline{M}_p = [\underline{Q}_M^T \underline{Q}_o^T] \begin{Bmatrix} \underline{q} \\ \underline{q}_o \end{Bmatrix} - \underline{K}_{\psi} \underline{\psi} \quad (3.263)$$

equação que, conjugada com (3.257), permite escrever directamente  $\underline{M}_p$  em função de  $\underline{q}$  e de  $\underline{\psi}$  através da relação

$$\underline{M}_p = \underline{Q}_1 \underline{q} - \underline{Q}_2 \underline{\psi} \quad (3.264)$$



com

$$\begin{aligned}\underline{Q}_1 &= \underline{Q}_M^T - \underline{Q}_o^T K_{oo}^{-1} K_{oM} \\ \underline{Q}_2 &= \underline{K}_\psi - \underline{Q}_o^T K_{oo}^{-1} \underline{Q}_o\end{aligned}\quad (3.265)$$

Por outro lado ainda, supondo-se a lei constitutiva do comportamento histerético de cada rótula plástica descrita através do modelo de Bouc-Wen, podem escrever-se as seguintes equações relativas ao funcionamento de cada rótula

$$M_u = \alpha_u k_u \psi_u + (1 - \alpha_u) k_u z_u \quad (3.266)$$

$$\dot{z}_u = A_u \dot{\psi}_u - \beta_u |\dot{\psi}_u| |z_u|^{n_u-1} - \gamma_u \dot{\psi}_u |z_u|^{n_u} \quad (3.267)$$

Considerando a linearização das equações (3.267) sob a forma habitual

$$\dot{z}_u = c_u^e \dot{\psi}_u + k_u^e z_u \quad (3.268)$$

e procedendo ao conveniente agrupamento de todas as equações (3.266) e (3.268), obtêm-se também relações matriciais do tipo

$$\underline{M}_p = \underline{Q}_3 \underline{\psi} + \underline{Q}_4 \underline{z} \quad (3.269)$$

$$\underline{\dot{z}} = \underline{C}_e \underline{\dot{\psi}} + \underline{K}_e \underline{z} \quad (3.270)$$

em que  $\underline{Q}_3$ ,  $\underline{Q}_4$ ,  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  são matrizes diagonais constituídas respectivamente pelos valores de  $\alpha_u k_u$ ,  $(1 - \alpha_u) k_u$ ,  $c_u^e$  e  $k_u^e$ .

Igualando os segundos membros das equações (3.264) e (3.269), pode retirar-se a expressão do vector  $\underline{z}$  em função de  $\underline{q}$  e  $\underline{\psi}$

$$\underline{z} = \underline{Q}_4^{-1} [\underline{Q}_1 \underline{q} - (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \underline{\psi}] \quad (3.271)$$

a qual, mediante substituição em (3.270), possibilita concluir que

$$\underline{\dot{\psi}} = \left[ -\underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) - \underline{C}_e \right]^{-1} \left[ \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 \underline{q} - \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 \dot{\underline{q}} - \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \underline{\psi} \right] \quad (3.272)$$

Deste modo, as equações (3.258) e (3.272) caracterizam no seu conjunto o equilíbrio dinâmico do sistema estrutural em análise e a forma de comportamento não-linear histerético correspondente, podendo ser expressas de forma mais condensada através da introdução do vector de estado

$$\underline{y} = \left\{ \begin{array}{c} \underline{q} \\ \dot{\underline{q}} \\ \underline{\psi} \end{array} \right\} \quad (3.273)$$

resultando então que

$$\underline{D}\dot{\underline{y}}(t) + \underline{E}\underline{y}(t) = \underline{f}(t) \quad (3.274)$$

sendo

$$\underline{D} = \begin{bmatrix} \underline{M} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{M} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{I} \end{bmatrix} \quad \underline{E} = \begin{bmatrix} \underline{0} & -\underline{M} & \underline{0} \\ \underline{K}_e & \underline{C} & -\underline{Q}_e \\ -\underline{Q}_e \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 & \underline{Q}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 & \underline{Q}_e \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \end{bmatrix} \quad \underline{f}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{M}\underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (3.275)$$

com

$$\underline{Q}_e = \left[ -\underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) - \underline{C}_e \right]^{-1} \quad (3.276)$$

Alternativamente, pode também escrever-se

$$\dot{\underline{y}}(t) = \underline{A}_e \underline{y}(t) + \underline{x}(t) \quad (3.277)$$

em que

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1} \underline{K}_e & -\underline{M}^{-1} \underline{C} & \underline{M}^{-1} \underline{Q}_e \\ \underline{Q}_e \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e \underline{Q}_4^{-1} \underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e \underline{K}_e \underline{Q}_4^{-1} (\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) \end{bmatrix} \quad \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ -\underline{\alpha} \\ \underline{0} \end{Bmatrix} \ddot{u}_g(t) \quad (3.278)$$

Se o processo estocástico  $\ddot{u}_g(t)$  for do tipo ruído branco de média nula e densidade espectral  $S_o$ , a matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_y$  obedece à equação de Liapunov

$$\underline{A}_e \underline{\mu}_y + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o = \underline{0} \quad (3.279)$$

com

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\alpha}\underline{\alpha}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} S_o \quad (3.280)$$

No caso mais geral de a aceleração de base ser traduzida por um processo estocástico  $\ddot{u}_g(t)$  caracterizado por um espectro de potência de Kanai-Tajimi, deve proceder-se à introdução de um filtro, à semelhança do procedimento utilizado em 3.7.2, tendo nesse caso o vector de estado a seguinte constituição

$$\underline{y}^T = [\underline{q}^T, \dot{\underline{q}}^T, \underline{\psi}^T, u_f, \dot{u}_f] \quad (3.281)$$

e sendo a matriz de estado  $\underline{A}_e$  e o vector da excitação  $\underline{x}(t)$  dados por

$$\underline{A}_e = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{I} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ -\underline{M}^{-1}\underline{K}_c & -\underline{M}^{-1}\underline{C} & \underline{M}^{-1}\underline{Q}_c & \underline{\alpha}\alpha_1 & \underline{\alpha}\alpha_o \\ \underline{Q}_e\underline{K}_e\underline{Q}_4^{-1}\underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e\underline{Q}_4^{-1}\underline{Q}_1 & -\underline{Q}_e\underline{K}_e\underline{Q}_4^{-1}(\underline{Q}_2 + \underline{Q}_3) & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & -\alpha_1 & -\alpha_o \end{bmatrix} \underline{x}(t) = \begin{Bmatrix} \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ \underline{0} \\ -1 \end{Bmatrix} \ddot{u}_g^o(t) \quad (3.282)$$

em que  $\ddot{u}_g^o(t)$  representa o ruído branco de intensidade espectral  $S_o$  actuante sobre o filtro de frequência natural  $w_f$  e coeficiente de amortecimento  $\xi_f$ , sendo  $\alpha_o = 2\xi_f w_f$  e  $\alpha_1 = w_f^2$

Nessas condições, a matriz de covariância da resposta  $\underline{\mu}_y$  pode ser obtida através da resolução da equação de Liapunov (3.279), tomando neste caso

$$\underline{S}_o = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{1} \end{bmatrix} S_o \quad (3.283)$$

Caso a aceleração de base assuma um carácter não-estacionário, sendo idealizada através do produto

$$\ddot{u}_{g*}(t) = \theta(t)\ddot{u}_g(t) \quad (3.284)$$

de uma função de modulação  $\theta(t)$  por um ruído branco gaussiano  $\ddot{u}_g(t)$  de média nula e densidade espectral de potência  $S_o$ , não só as matrizes de linearização  $\underline{C}_e$  e  $\underline{K}_e$  se tornam dependentes do tempo, como também se torna necessário substituir  $\ddot{u}_g(t)$  por  $\theta(t)\ddot{u}_g(t)$  nas equações (3.256), (3.258), (3.275) e (3.278), acabando a evolução temporal da matriz de covariância da resposta por ser regulada pela equação

$$\dot{\underline{\mu}}_y(t) = \underline{A}_e(t)\underline{\mu}_y(t) + \underline{\mu}_y \underline{A}_e^T + 2\pi \underline{S}_o(t) \quad (3.285)$$

em que

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\alpha}\underline{\alpha}^T & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \end{bmatrix} \theta^2(t) S_o \quad (3.286)$$

sendo a composição da matriz  $\underline{A}_e(t)$  idêntica à referida em (3.278).

No caso mais geral de uma excitação não-estacionária do tipo colorido, em que a aceleração de base do filtro anteriormente referido seja idealizada através do produto definido pela equação (3.229), isto é

$$\ddot{u}_{g^*}^o(t) = \theta(t)\ddot{u}_g^o(t) \quad (3.287)$$

deve analogamente substituir-se  $\ddot{u}_g^o(t)$  por  $\theta(t)\ddot{u}_g^o(t)$  em (3.282), podendo concluir-se neste caso que a evolução temporal da matriz de covariância da resposta é regida igualmente pela equação (3.285), passando a matriz  $\underline{S}_o(t)$  a ser definida por

$$\underline{S}_o(t) = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & \underline{0} & 1 \end{bmatrix} \theta^2(t) S_o \quad (3.288)$$

e tendo a matriz  $\underline{A}_e(t)$  uma composição semelhante à indicada por (3.282).

Sendo a não-estacionaridade da resposta originada também pela própria degradação estrutural, torna-se necessário ter simultaneamente em consideração a equação (3.231), podendo efectuar-se a caracterização evolutiva da resposta sísmica não-estacionária integrando numericamente as equações (3.285) e (3.231), e utilizando a técnica iterativa referida em 3.6.2.

# Apêndice A

## Hierarquias de grandezas estatísticas utilizadas na caracterização completa da estrutura probabilística de um processo estocástico

Sendo um processo estocástico  $x(t)$  constituído por um número infinito de sequências aleatórias tradutoras da evolução temporal de uma dada grandeza, o seu valor  $x(t_i)$ , em cada instante  $t_i$ , pode unicamente ser definido em termos probabilísticos com base na estatística conjunta da totalidade das realizações que constituem o processo, tornando-se em princípio necessário, para uma completa caracterização probabilística de  $x(t)$ , o conhecimento de todas as funções densidade de probabilidade pluridimensionais do tipo .

$$p_n(\underline{X}) = p(X_1, X_2, \dots, X_n) \quad n = 1, 2, \dots \quad (A.1)$$

cuja definição é a seguinte

$$\begin{aligned} p(X_1, X_2, \dots, X_n) dX_1 dX_2 \dots dX_n &= \quad (A.2) \\ &= P(X_1 < x(t_1) < X_1 + dX_1; X_2 < x(t_2) < X_2 + dX_2; \dots; X_n < x(t_n) < X_n + dX_n) \end{aligned}$$

Alternativamente, a estrutura probabilística de  $x(t)$  pode também ser definida a partir do completo conhecimento de toda a hierarquia de funções características  $C_n(\underline{\theta}) = C(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$ , transformadas de Fourier multidimensionais de cada uma das funções  $p_n(\underline{X}) = p(X_1, X_2, \dots, X_n)$  com  $n = 1, 2, \dots$ , ou seja

$$\begin{aligned} C_n(\underline{\theta}) &= E[\exp(i\theta^T \underline{X})] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(i\theta^T \underline{X}) p_n(\underline{X}) dX_1 dX_2 \dots dX_n \quad (A.3) \end{aligned}$$

Uma terceira via, que possibilita igualmente uma conveniente descrição estatística do processo, baseia-se no conhecimento da hierarquia de momentos

$$\begin{aligned} m_n(X_1, X_2, \dots, X_n) &= E[X_1 X_2 \dots X_n] \quad (A.4) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} X_1 X_2 \dots X_n p_n(\underline{X}) dX_1 dX_2 \dots dX_n \end{aligned}$$

os quais facilmente se relacionam com as funções características correspondentes. De facto, e de uma forma mais geral, os momentos estatísticos

$$m_r(X_i, X_j, \dots, X_l) = E[X_i X_j \dots X_l] \quad (A.5)$$

em que  $r \leq n$  representa a ordem do momento, ou seja, o número total de argumentos, e  $i, j, \dots, l$  são índices que podem assumir quaisquer valores inteiros entre 1 e  $n$ , podem ser obtidos directamente a partir da função característica  $C_n(\underline{\theta})$ , já que

$$m_r(X_i, X_j, \dots, X_l) = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r C_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \dots \partial \theta_l} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \quad (A.6)$$

No caso mais geral de momentos de ordem qualquer, e utilizando a seguinte notação

$$m_{r_1 \dots r_n} = E[X_1^{r_1} X_2^{r_2} \dots X_n^{r_n}] \quad (A.7)$$

a relação entre estes momentos e a função  $C_n(\underline{\theta})$  é a seguinte

$$m_{r_1 \dots r_n} = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r C_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_1^{r_1} \partial \theta_2^{r_2} \dots \partial \theta_n^{r_n}} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \quad (A.8)$$

sendo a ordem  $r = \sum_{i=1}^n r_i$ , podendo verificar-se que  $r \geq n$ .

Por outro lado, torna-se possível proceder, com base na equação (A.8), a um desenvolvimento em série de McLaurin da função característica  $C_n(\underline{\theta})$ , dado por

$$C_n(\underline{\theta}) = 1 + \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,t=1}^n m_r(X_i, X_j, \dots, X_t) \theta_i \theta_j \dots \theta_t \quad (A.9)$$

o qual evidencia que o conhecimento da hierarquia de momentos estatísticos torna viável também a determinação da hierarquia de funções características, sendo pois equivalentes estas três formas de descrição da estrutura probabilística do processo estocástico  $x(t)$ .

Esta descrição pode ainda ser realizada com base num outro conjunto de grandezas estatísticas, designadas por cumulantes, e que se podem obter também a partir da função característica  $C_n(\underline{\theta})$ , tomando derivadas do respectivo logaritmo neperiano. Os cumulantes de ordem  $r \leq n$  são assim definidos por

$$k_r(X_i, X_j, \dots, X_l) = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r \ln C_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j \dots \partial \theta_l} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \quad (A.10)$$

Por analogia com a equação (A.7), podem também definir-se cumulantes de ordem qualquer, através da relação

$$k_{r_1 \dots r_n} = (-i)^r \left\{ \frac{\partial^r \ln C_n(\underline{\theta})}{\partial \theta_1^{r_1} \partial \theta_2^{r_2} \dots \partial \theta_n^{r_n}} \right\}_{\underline{\theta}=\underline{0}} \quad (A.11)$$

sendo  $r = \sum_{i=1}^n r_i$ .

Procedendo, de forma semelhante, a um desenvolvimento em série de McLaurin de  $\ln C_n(\underline{\theta})$ , tendo em atenção que  $\ln C_n(\underline{0}) = 0$  e tomando exponenciais de ambos os membros, obtém-se por sua vez a seguinte relação

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp \left\{ \sum_{r=1}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,l=1}^n k_r(X_i, X_j, \dots, X_l) \theta_i \theta_j \dots \theta_l \right\} \quad (A.12)$$

tornando-se deste modo também evidente que o conhecimento da hierarquia de cumulantes é equivalente ao conhecimento da hierarquia das funções características, do ponto de vista da descrição probabilística do processo estocástico  $x(t)$ .

As equações (A.9) e (A.12) representam assim dois desenvolvimentos em série da função característica  $C_n(\underline{\theta})$ , tornando-se possível, à custa da sua igualdade, exprimir directamente os momentos estatísticos  $m_r$  em função dos cumulantes  $k_r$  [152], e vice versa [77]. Assim, por exemplo

$$m_1(X_i) = k_1(X_i) \quad (A.13)$$

$$m_2(X_i, X_j) = k_2(X_i, X_j) + k_1(X_i)k_1(X_j) \quad (A.14)$$

$$m_3(X_i, X_j, X_l) = k_3(X_i, X_j, X_l) + 3\{k_1(X_i)k_2(X_j, X_l)\}_p + k_1(X_i)k_1(X_j)k_1(X_l) \quad (A.15)$$

$$m_4(X_i, X_j, X_l, X_m) = k_4(X_i, X_j, X_l, X_m) + 3\{k_2(X_i, X_j)k_2(X_l, X_m)\}_p + 4\{k_1(X_i)k_3(X_j, X_l, X_m)\}_p + 6\{k_1(X_i)k_1(X_j)k_2(X_l, X_m)\}_p + k_1(X_i)k_1(X_j)k_1(X_l)k_1(X_m) \quad (A.16)$$

representando  $\{ \}_p$  a média aritmética dos termos resultantes das permutações dos índices.

Estas expressões, cuja complexidade aumenta significativamente com a ordem dos momentos considerados, apresentam no entanto uma forma mais simples caso as variáveis aleatórias  $X_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) assumam valor médio nulo, sendo então

$$m_1(X_i) = k_1(X_i) = 0 \quad (A.17)$$

$$m_2(X_i, X_j) = k_2(X_i, X_j) \quad (A.18)$$

$$m_3(X_i, X_j, X_l) = k_3(X_i, X_j, X_l) \quad (A.19)$$

$$m_4(X_i, X_j, X_l, X_m) = k_4(X_i, X_j, X_l, X_m) + 3\{k_2(X_i, X_j)k_2(X_l, X_m)\}_p \quad (A.20)$$

$$m_5(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) = k_5(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) + 10\{k_2(X_i, X_j)k_3(X_k, X_l, X_m)\}_p \quad (A.21)$$

$$m_6(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m, X_n) = k_6(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m, X_n) + 15\{k_2(X_i, X_j)k_4(X_k, X_l, X_m, X_n)\}_p + 15\{k_2(X_i, X_j)k_2(X_k, X_l)k_2(X_m, X_n)\}_p + 10\{k_3(X_i, X_j, X_k)k_3(X_l, X_m, X_n)\}_p \quad (A.22)$$

Embora ressalte claro do que foi dito anteriormente que, do ponto de vista teórico, uma completa caracterização probabilística do processo  $x(t)$  exige o conhecimento da função densidade de probabilidade pluridimensional  $p_n(\underline{X})$ , da função característica correspondente  $C_n(\underline{\theta})$ , dos momentos estatísticos  $m_n(\underline{X})$  ou dos cumulantes  $k_n(\underline{X})$ , para qualquer valor inteiro de  $n$ , sucede porém que o conhecimento das grandezas estatísticas de primeira e segunda ordem é da maior importância, não só porque em geral nelas reside a parcela mais importante da informação relativa à caracterização probabilística do processo, mas inclusivamente porque casos há em que todas as grandezas estatísticas de ordem superior podem ser expressas em função das de primeira e segunda ordem.

Neste último caso, incluem-se os processos estocásticos gaussianos, que modelam de forma realista muitos fenómenos físicos de interesse em Dinâmica Estrutural e na Engenharia Sísmica.

Um processo estocástico  $x(t)$  diz-se gaussiano se todas as funções densidade de probabilidade pluridimensionais referidas por (A.1) puderem ser expressas sob a forma



$$p(X_1, X_2, \dots, X_n) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2} |\underline{\mu}_x|^{1/2}} \exp\left[-\frac{1}{2}(\underline{X} - \underline{m}_x)^T \underline{\mu}_x^{-1} (\underline{X} - \underline{m}_x)\right] \quad (A.23)$$

em que  $\underline{X}$  representa o vector das  $n$  variáveis aleatórias  $X_1, X_2, \dots, X_n$  correspondentes aos valores do processo  $x(t)$  nos instantes  $t_1, t_2, \dots, t_n$ , tendo em conta a totalidade das realizações que o constituem,  $\underline{m}_x$  é o vector formado pelos valores médios daquelas variáveis e  $\underline{\mu}_x$  a matriz das correspondentes funções de auto-covariância.

Torna-se assim claro que a distribuição probabilística de processos desta natureza fica inteiramente caracterizada mediante o conhecimento de momentos estatísticos de primeira e segunda ordem (médias e covariâncias), podendo todos os momentos de ordem superior expressar-se em função daqueles.

A hierarquia de funções  $C_n(\underline{\theta}) = C(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$  correspondentes a um processo estocástico gaussiano pode obter-se conjugando a equação (A.23) com (A.3), o que conduz a [77]

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left(i \underline{m}_x^T \underline{\theta} - \frac{1}{2} \underline{\theta}^T \underline{\mu}_x \underline{\theta}\right) \quad (A.24)$$

ou

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left(i \sum_{j=1}^n m_{x_j} \theta_j - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n \mu_{jl}^x \theta_j \theta_l\right) \quad (A.25)$$

sendo  $m_{x_j}$  a  $j$ -ésima componente do vector  $\underline{m}_x$  e  $\mu_{jl}^x$  o elemento da matriz  $\underline{\mu}_x$  correspondente à linha  $j$  e à coluna  $l$ .

Tendo presente as relações verificadas entre momentos estatísticos e cumulantes, expressas pelas expressões (A.13) e (A.14)

$$m_{x_j} = m_1(X_j) = k_1(X_j) \quad (A.26)$$

$$\begin{aligned} \mu_{jl}^x &= E[(X_j - m_{x_j})(X_l - m_{x_l})] = E[X_j X_l] - E[X_j]E[X_l] \\ &= m_2(X_j, X_l) - m_1(X_j)m_1(X_l) = k_2(X_j, X_l) \end{aligned} \quad (A.27)$$

a hierarquia das funções características  $C_n(\underline{\theta})$  pode estabelecer-se também em função dos cumulantes através da equação

$$C_n(\underline{\theta}) = \exp\left[i \sum_{j=1}^n k_1(X_j) \theta_j - \frac{1}{2} \sum_{j,l=1}^n k_2(X_j, X_l) \theta_j \theta_l\right] \quad (A.28)$$

Comparando esta equação com a relação geral expressa pela equação (A.12), pode concluir-se que, no caso de processos estocásticos gaussianos, são nulos todos os cumulantes de ordem superior a dois, aspecto que constitui aliás uma propriedade de grande interesse desta classe de processos.

É ainda de realçar que, mesmo no caso de processos estocásticos não-gaussianos, em que os cumulantes de ordem superior à segunda não são nulos, as respectivas famílias de funções características, ou de funções densidade de probabilidade pluridimensionais, podem exprimir-se em termos das funções homólogas, correspondentes a processos estocásticos gaussianos com os mesmos cumulantes de primeira e segunda ordem.

Para tal, convém introduzir a noção de quasi-momentos [98, 134, 152]  $b_r(X_i, X_j, \dots, X_l)$ , definidos por forma que

$$\begin{aligned} \exp\left\{\sum_{r=3}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,l=1}^n k_r(X_i, X_j, \dots, X_l) \theta_i \theta_j \dots \theta_l\right\} = \\ = 1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,l=1}^n b_r(X_i, X_j, \dots, X_l) \theta_i \theta_j \dots \theta_l \end{aligned} \quad (A.29)$$

sendo a ordem  $r$  correspondente igual ao número de argumentos.

Nessas condições, e tendo presente a equação (A.12)

$$C_n(\underline{\theta}) = C_n^g(\underline{\theta}) \left\{ 1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{i^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,l=1}^n b_r(X_i, X_j, \dots, X_l) \theta_i \theta_j \dots \theta_l \right\} \quad (A.30)$$

em que a família de funções características correspondentes ao processo estocástico gaussiano com iguais cumulantes de primeira e segunda ordem é representada por  $C_n^g(\underline{\theta})$ .

Os quasi-momentos podem relacionar-se com os cumulantes com base na equação (A.29). No entanto, e tendo em consideração que, confrontando as equações (A.9), (A.12) e (A.29), se conclui que as relações entre momentos e cumulantes são idênticas às verificadas entre cumulantes e quasi-momentos, desde que se considerem nulos os momentos e os cumulantes de primeira e segunda ordem, facilmente se deduz, impondo  $k_1$  e  $k_2$  iguais a zero nas equações (A.15), (A.16) e afins de ordem superior, que

$$\begin{aligned} b_3(X_i, X_j, X_l) &= k_3(X_i, X_j, X_l) \\ b_4(X_i, X_j, X_l, X_m) &= k_4(X_i, X_j, X_l, X_m) \\ b_5(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) &= k_5(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m) \end{aligned} \quad (A.31)$$

$$b_6(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m, X_n) = k_6(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m, X_n) + \\ + 10\{k_3(X_i, X_j, X_k)k_3(X_l, X_m, X_n)\}_p$$

$$b_7(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m, X_n, X_o) = k_7(X_i, X_j, X_k, X_l, X_m, X_n, X_o) + \\ + 35\{k_3(X_i, X_j, X_k)k_4(X_l, X_m, X_n, X_o)\}_p$$

$C_n(\underline{\theta})$  pode relacionar-se com a correspondente família de funções densidade de probabilidade  $p_n(\underline{X})$  através da transformada inversa de Fourier de ordem  $n$

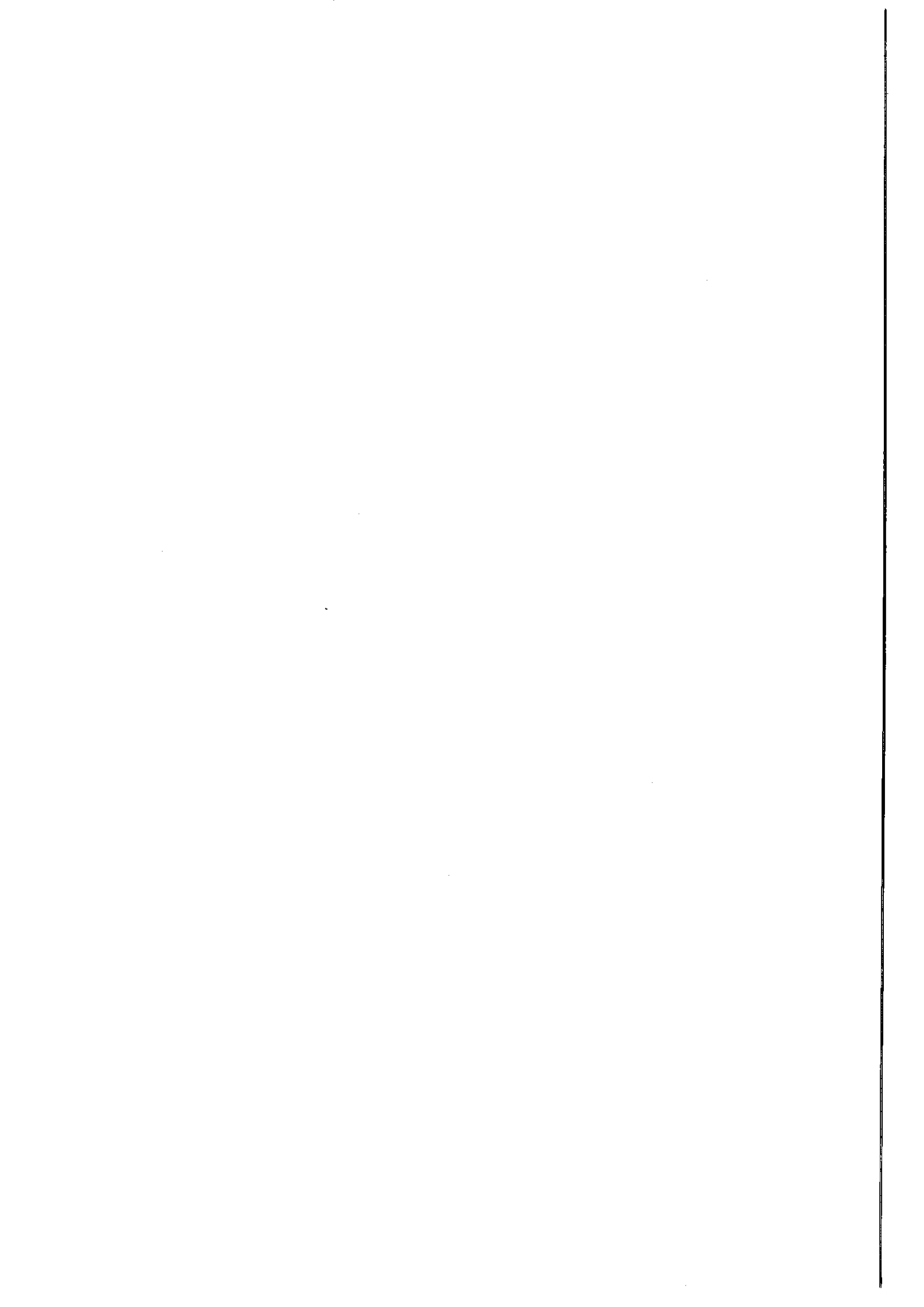
$$p_n(\underline{X}) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\underline{\theta}^T \underline{X}) C_n(\underline{\theta}) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n \quad (A.32)$$

Como esta relação é válida, em particular, para os processos de natureza gaussiana, e observando que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} i^r \theta_i \theta_j \dots \theta_l \exp(-i\underline{\theta}^T \underline{X}) C_n^g(\underline{\theta}) d\theta_1 d\theta_2 \dots d\theta_n = \\ = \left(-\frac{\partial}{\partial X_i}\right) \left(-\frac{\partial}{\partial X_j}\right) \dots \left(-\frac{\partial}{\partial X_l}\right) p_n^g(\underline{X}) \quad (A.33)$$

pode obter-se com base na equação (A.30) o seguinte desenvolvimento da função  $p_n(\underline{X})$  do processo não-gaussiano, em termos da função correspondente do processo gaussiano de iguais cumulantes de primeira e segunda ordem,  $p_n^g(\underline{X})$ , e dos quasi-momentos  $b_r$

$$p_n(\underline{X}) = \left\{ 1 + \sum_{r=3}^{\infty} \frac{(-1)^r}{r!} \sum_{i,j,\dots,l=1}^n b_r(X_i, X_j, \dots, X_l) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial X_i}\right) \left(\frac{\partial}{\partial X_j}\right) \dots \left(\frac{\partial}{\partial X_l}\right) \right\} p_n^g(\underline{X}) \quad (A.34)$$



## Apêndice B

### Expressões dos coeficientes de linearização $c_{e_5}$ e $k_{e_5}$ relativos ao modelo histerético de Noori-Baber-Wen [111]

$$c_{e_5} = m_\lambda m_\xi [m_A E_1 - m_v (\beta E_2 + \gamma E_3)] / m_n \quad (B.1)$$

$$k_{e_5} = m_\lambda m_\xi [-2m_A E_4 + 2m_v (\beta E_5 + \gamma E_6) - m_v (\beta E_7 + \gamma E_8)] / m_n \quad (B.2)$$

em que

$$E_1 = \frac{\sqrt{\pi/2}}{m_\xi \sigma_{y_3}} [1 - \text{erf}(m_\xi / \sqrt{2} \sigma_{y_3})] \exp(m_\xi^2 / 2\sigma_{y_3}^2) \quad (B.3)$$

$$E_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_3}} \left\{ \int_0^\infty y_3^n / \alpha_1 \exp(\alpha_2) [1 - \text{erf}(\phi)] dy_3 - \right. \\ \left. - (-1)^n \int_0^\infty y_3^n / \alpha_1 \exp(\alpha_2) [1 - \text{erf}(\phi)] dy_3 \right\} \quad (B.4)$$

$$E_3 = \frac{2}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_3}} \int_0^\infty y_3^n / \alpha_1 \exp(\alpha_2) dy_3 \quad (B.5)$$

$$E_4 = 2\rho_{y_3 y_4} [\sigma_{y_4} / (\sqrt{2\pi} \sigma_{y_3}^2)] \int_0^\infty y_3^2 / \alpha_1^2 \exp(\alpha_2) dy_3 \quad (B.6)$$

$$E_5 = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_3}} \int_0^\infty y_3^{n+1} / \alpha_1^2 [1 - \text{erf}(\phi)] dy_3 - \\ - \int_0^\infty y_3^{n+1} / \alpha_1^2 \exp(\alpha_2) [1 - \text{erf}(-\phi)] dy_3 \quad (B.7)$$

$$E_6 = \frac{2\rho_{y_3 y_4} \sigma_{y_4}}{\sqrt{2\pi} \sigma_{y_3}^2} \int_0^\infty y_3^{n+2} / \alpha_1^2 \exp(\alpha_2) dy_3 \quad (B.8)$$

$$E_7 = \frac{n}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}} \int_0^\infty y_3^{n-1} / \alpha_1 \exp(\alpha_2) [1 - \text{erf}(\phi)] dy_3 - \int_0^\infty y_3^{n-1} / \alpha_1 \exp(\alpha_2) [1 - \text{erf}(-\phi)] dy_3 \quad (B.9)$$

$$E_8 = \frac{2n\rho_{y_3y_4}}{\sqrt{2\pi}\sigma_{y_3}^2} \int_0^\infty y_3^n / \alpha_1 \exp(\alpha_2) dy_3 \quad (B.10)$$

$$\alpha_1 = m_\xi^2 + y_3^2 \quad \alpha_2 = -y_3^2 / 2\sigma_{y_3}^2 \quad (B.11)$$

$$\phi = -\rho_{y_3y_4} y_3 / \left[ \sigma_{y_3} \sqrt{2(1 - \rho_{y_3y_4}^2)} \right] \quad (B.12)$$

sendo  $\text{erf}(\phi)$  a função de erro, definida por

$$\text{erf}(\phi) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\phi e^{-u^2} du \quad (B.13)$$

## Bibliografia

- [1] AHMAD, S.; IRONS, B. e ZIENKIEWICZ, O.C. - "Analysis of Thick and Thin Shell Structures by Curved Finite Elements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 2, (1970).
- [2] AHMADI, G. - "Mean Square Response of a Duffing Oscillator to a Modulated White Noise Excitation by the Generalized Method of Equivalent Linearization", *Journal of Sound and Vibration*, Vol 71, N° 1, pp. 9-15, (1980).
- [3] AMIN, M. e ANG, A.H-S. - "Nonstationary Stochastic Model of Earthquake Motions", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 94, pp. 559-583, (1968).
- [4] ANDRONOV, A.; PONTRYAGIN, L. e WITT, A. - "On Statistical Investigation of Dynamical Systems", *Zh. Eksp. Teor. Fiz*, Vol. 3, pp. 165-180, (1933).
- [5] APOSTOL, T.M. - "Calculus", Xerox College Publ., (1969).
- [6] ARIARATNAM, S.T. - "Random Vibrations of Non-linear Suspensions", *Journal Mechanical Engineering Science*, Vol. 2, N° 3, pp. 195-201, (1960).
- [7] ARIARATNAM, S.T.; SCHUËLLER, G.I. e ELISHAKOFF, I. (eds) - "Stochastic Structural Dynamics, Progress in Theory and Applications", Elsevier Applied Science, (1988).
- [8] ARNOLD - "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications", John Wiley & Sons, (1974).
- [9] ASANO, K. e IWAN, W.D. - "An Alternative Approach to the Random Response of Bilinear Hysteretic Systems", *Earth. Eng. and Struct. Dynamics*, Vol. 12, pp. 229-236, (1984).
- [10] ASSAF, S.A. e ZIRKLE, L. D. - "Approximate Analysis of Non-linear Stochastic Systems", *Int. J. Control*, pp. 477-492, (1976).

- [11] ATALIK, T.S. - "Stochastic Random Response of Nonlinear Multi-Degree-of-Freedom Systems by a Direct Equivalent Linearization Technique", Ph. D. Thesis, Duke University, (1974).
- [12] ATALIK, T.S. e UTKU, S. - "Stochastic Linearization of Multi-degree-of-freedom Non-linear Systems", Earthquake Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 411-420, (1976).
- [13] ATKINSON, J.D. - "Eigenfunction Expansions for Randomly Excited Nonlinear Systems", J. Sound Vib., Vol. 30, pp. 153-172, (1973).
- [14] AUGUSTI, G.; BARATTA, A. e CASCIATI, F. - "Probabilistic Methods in Structural Engineering", Chapman and Hall, London, (1984).
- [15] BABER, T.T. - "Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Systems", Journal of Engineering Mechanics, Vol. 110, N° 7, pp. 1036-1049, (1984).
- [16] BABER, T.T. - "Modal Analysis for Random Vibration of Hysteretic Frames", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, pp. 841-859, (1986).
- [17] BABER, T.T. - "Nonzero Mean Random Vibration of Hysteretic Frames", Computer & Structures, Vol. 23, N° 2, pp. 265-277, (1986).
- [18] BABER, T.T. e NOORI, M.N. - "Modeling General Hysteresis Behavior and Random Vibration Application", Journal of Vibration, Acoustics, Stress and Reliability in Design, Vol. 108, pp. 411-420, (1986).
- [19] BABER, T.T. e WEN, Y.K. - "Stochastic Equivalent Linearization for Hysteretic Degrading, Multistorey Structures", Report UILU-ENG-80-2001, University of Illinois at Urbana-Champaign, (1980).
- [20] BABER, T.T. e WEN, Y.K. - "Random Vibration of Hysteretic, Degrading Systems", Journal of Engineering Mechanics, ASCE, Vol. 107, pp. 1069-1087, (1981).
- [21] BABER, T.T. e WEN, Y.K. - "Stochastic Response of Multi-Storey Yielding Frames", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 10, pp. 403-416, (1982).
- [22] BARBAT, A.H. - "Stochastic Prediction of Seismic Response Spectra", Seminar on The Prediction of Earthquakes, Lisboa, (1988).
- [23] BARTELS, R.H. e STEWART, G.W. - "Solution of the Matrix Equation  $AX + BX = C$ ", Algorithm 432, Communications of the ACM, Vol. 15, N° 9, (1972).



- [24] BENAROYA, H. - "Stochastic Structural Dynamics - A Theoretical Basis and a Selective Review of the Literature", Tech. Report, Air Force Office of Scientific Research, USA, (1984).
- [25] BHANDARI, R.G. e SHERRER, R.E. - "Random Vibrations in Discrete Non-linear Dynamic Systems", J. Mech. Eng. Sci., pp. 168-174, (1968).
- [26] BOGOLIUBOV, N.N. e MITROPOLSKY, Y.A. - "Asymptotic Methods in the Theory of Nonlinear Oscillators", Gordon and Breach, (1964).
- [27] BOOTON, R.C. - "The Analysis of Nonlinear Control Systems with Random Inputs", IRE Trans. Circuit Theory, pp. 32-34, (1954).
- [28] BOUC, R. - "Forced Vibration of Mechanical Systems with Hysteresis", Abstract, Proc. 4<sup>th</sup> Conf. Nonlin. Oscill., Praga, (1967).
- [29] BOVER, D.C.C. - "Moment Equation Methods for Non-linear Stochastic Systems", J. Math. Anal. Applic., pp. 306-320, (1978).
- [30] BRANSTETTER, L.J.; JEONG, G.D.; YAO, J.T.P.; WEN, Y.K. e LIN, Y.K. - "Mathematical Modelling of Structural Behaviour during Earthquakes", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, N<sup>o</sup> 3, pp. 130-145, (1988).
- [31] CAETANO, ELSA - Relatório de investigação, FEUP, (1989).
- [32] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Methods of Non-linear Stochastic Dynamics for the Assessment of Structural Fragility", Nuclear Engineering and Design, Vol. 90, pp. 341-356, (1985).
- [33] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Reliability Assessment of Non-linear Random Frames", em "Probabilistic Methods in the Mechanics of Solids and Structures", Eggwertz S. e Lind N.C. (eds), Springer-Verlag, pp. 469-478, (1985).
- [34] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Non-linear Stochastic Dynamics by Equivalent Linearization", Proc. 2<sup>nd</sup> Int. Workshop on Stochastic Methods in Structural Mechanics, Pavia, (1985).
- [35] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Equivalent Linearization in Non-linear Random Vibration Problems", Proc. Int. Conf. on Vib. Problems in Eng., Xian, China, (1986).
- [36] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Non-linear Stochastic Dynamics of Frames", Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Recent Adv. in Struct. Dynamics, Southampton, (1988).

- [37] CASCIATI, F. e FARAVELLI, L. - "Stochastic Equivalent Linearization for 3-D Frames", J. of Engineering Mechanics, Vol. 114, Nº 10, pp. 1760-1771, (1988).
- [38] CASCIATI, F.; FARAVELLI, L. e SINGH, M.P. - "Non-linear Structural Response and Modelling Uncertainty on System Parameters and Seismic Excitation", Proc. 8<sup>th</sup> European Conference on Earthquake Engineering, Lisboa, (1986).
- [39] CAUGHEY, T.K. - "Random Excitation of a System With Bilinear Hysteresis", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 27, Nº 4, pp. 649-652, (1960).
- [40] CAUGHEY, T.K. - "Equivalent Linearization Techniques", The Journal of the Acoustical Society of America, Vol. 35, Nº 11, pp. 1706-1711, (1963).
- [41] CAUGHEY, T.K. - "Derivation and Application of the Fokker-Planck Equation to Discrete Nonlinear Dynamic Systems Subjected to White Random Excitation", J. of Acoust. Soc. America, Vol. 35, Nº 11, pp. 1683-1692, (1963).
- [42] CAUGHEY, T.K. - "Nonlinear Theory of Random Vibrations", Adv. Applied Mechanics, Vol. 11, pp. 209-253, (1971).
- [43] CAUGHEY, T.K. - "On the Response of Non-linear Oscillators to Stochastic Excitation", Probab. Eng. Mechanics, Vol. 1, Nº1, pp. 2-4, (1986).
- [44] CAUGHEY, T.K. e DIENES, J.K. - "The behavior of linear systems with random parametric excitation", J. Math. Phys., pp. 300-318, (1962).
- [45] CHANG, T.P. - "Seismic Response of Nonlinear Structures using the Stochastic Equivalent Linearization Technique", Ph. D. Thesis, Columbia University, (1985).
- [46] CHANG, T.P.; MOCHIO, T. e SAMARAS, E. - "Seismic Response Analysis of Nonlinear Structures", Prob. Engineering Mechanics, Vol. 1, Nº 3, pp. 157-166, (1986).
- [47] CHUANG, K. e KAZDA, F. - "A Study of Nonlinear Systems with Random Inputs", AIEE, 78, (1959).
- [48] CLOUGH, R.W. e PENZIEN, J. - "Dynamics of Structures", Mc Graw-Hill, (1975).
- [49] COSTA, A. - "Análise Sísmica de Estruturas Irregulares", Tese de Doutoramento, FEUP, (1989).

- [50] CRANDALL, S.H. - "Perturbation Techniques of Random Vibration of Nonlinear Systems", J. of Acoust. Soc. of America, Vol. 35, Nº 11, pp. 1700-1705, (1963).
- [51] CRANDALL, S.H. - "The Spectrum of Random Vibration of a Non-linear Oscillator", Proc. 11<sup>th</sup> Cong. Applied Mechanics, Munich, (1964).
- [52] CRANDALL, S.H. - "On Statistical Linearization for Nonlinear Oscillators", Problems of the Asymptotic Theory of Nonlinear Oscillators, Academy of Sciences of the Ukrainian SSR, Kiev, (1977).
- [53] CRANDALL, S.H. - "Heuristic and equivalent linearization techniques for random vibration of nonlinear oscillators", Proc. 8<sup>th</sup> Int. Conf. Nonlinear Oscillation, pp. 211-226, Praga, (1978).
- [54] CRANDALL, S.H. - "Non-Gaussian Closure for Random Vibration of Non-linear Oscillators", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 15, pp. 303-313, (1980).
- [55] CRANDALL, S.H. - "Non-Gaussian Closure Techniques for Stationary Random Vibration", Int. J. Non-linear Mech., Vol. 20, Nº 1, pp. 1-8, (1985).
- [56] CRANDALL, S.H. e ZHU, W.Q. - "Random Vibration: A Survey of Recent Developments", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 50, Nº 4, pp. 953-962, (1983).
- [57] CUMMING, I.G. - "Computing Aspects of Problems in Nonlinear Prediction and Filtering", Ph. D. Thesis, Imperial College, London, (1967).
- [58] CUMMING, I.G. - "Derivation of the moments of a continuous stochastic system", Int. J. Contr., pp. 85-90, (1967).
- [59] CUNHA, ÁLVARO A.M.F. - "Dinâmica Estrutural Estocástica; Aplicações à Engenharia Sísmica", Tese de Doutoramento, Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, (1990).
- [60] CUNHA, ÁLVARO A.M.F. - "The Role of the Stochastic Equivalent Linearization Method in the Analysis of the Non-linear Seismic Response of Building Structures", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 23, pp. 837-857, (1994).
- [61] DASHEVSKII, M.L. - "Approximate analysis of the accuracy on nonstationary systems using the method of semi-invariants", Automation and Remote Control, pp. 1673-1690, (1967).

- [62] DASHEVSKII, M.L. e LIPSTER, R.S. - "Application of conditional semi-invariant in problems of nonlinear filtering of Markov process", Automation and Remote Control, pp. 912-921, (1967).
- [63] DASHEVSKII, M.L. - "Equations for the semi-invariants of nonlinear dynamic system", Automation and Remote Control, pp. 1605-1613, (1968).
- [64] DAVENPORT, A.G. - "Vibration of Structures Induced by Wind", Schock and Vibration Handbook (eds. Harris & Crade), McGraw-Hill, N.Y., (1976).
- [65] DEBCHAUDHURY, A. e GASPARINI, D. - "Response of MDOF Systems to Vector Random Excitation", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 108, pp. 367-385, (1982).
- [66] DUARTE, R.T. - "Uma Teoria Linear do Comportamento Dinâmico das Estruturas sujeitas a Acções Sísmicas", Tese, LNEC, (1978).
- [67] EINSTEIN, A. - "The Theory of Brownian Movement", Dover, N.Y., (1956).
- [68] FARAVELLI, L.; CASCIATI, F. e SINGH, M.P. - "Stochastic Equivalent Linearization Algorithms and their Applicability to Hysteretic Systems", Meccanica, Vol. 23, pp. 107-112, (1988).
- [69] FOKKER, A.P. - "Die Mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole in Strahlungs-field", Ann. Physik, 43, (1914).
- [70] FOSTER, E.T. - "Semilinear Random Vibrations in Discrete Systems", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 35, Nº 3, pp. 560-564, (1968).
- [71] GASPARINI, D.A. - "Response of MDOF Systems to Nonstationary Random Excitation", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 105, pp. 13-27, (1979).
- [72] GASPARINI, D.A. - "Dynamic Response to Nonstationary Nonwhite Excitation", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 106, pp. 1233-1248, (1980).
- [73] GOTO, H. e IEMURA, H. - "Linearization Techniques for Earthquake Response of Simple Hysteretic Structures", Proc. Jap. Soc. Civ. Eng., Nº 212, pp. 109-119, (1973).
- [74] GULKAN, P. e SOZEN, M.A. - "Response and Energy-Dissipation of Reinforced Concrete Frames Subjected to Strong Base Motions", Civil Eng. Studies, SRS, Nº 377, Dept. Civil Eng., University of Illinois, Urbana, (1971).

- [75] HERBERT, R.E. - "Random Vibrations of a Nonlinear Elastic Beam", J. Acoust. Soc. America, Vol. 36, pp. 2090-2094, (1964).
- [76] IBRAHIM, R.A.; SOUNDARARAJAN, A. e HEO, H. - "Stochastic Response of Nonlinear Dynamic Systems Based on a Non-Gaussian Closure", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 52, Nº 6, pp. 965-970, (1985).
- [77] IBRAHIM, R.A. - "Parametric Random Vibration", John Wiley & Sons, (1985).
- [78] ILIN, A.M. e KHASHMINSKII - "On Equations of Brownian Motion", Theory Probability Applic., 9, pp. 421-444, (1964).
- [79] ITÔ, K. - "On Stochastic differential equations", Mem. Amer. Math. Soc., Nº 4, (1951).
- [80] IYENGAR, R.N. e DASH, P.K. - "Study of the Random Vibration of Nonlinear Systems by the Gaussian Closure Technique", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 45, pp. 393-399, (1978).
- [81] IWAN, W.D. - "A Generalization of the Concept of Equivalent Linearization", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 8, pp. 279-287, (1973).
- [82] IWAN, W.D. - "Application of Nonlinear Analysis Techniques", Applied Mechanics in Earthquake Engineering, Applied Mech. Div., ASME, AMD - Vol. 8, pp. 135-161, (1974).
- [83] IWAN, W.D. e MASON, A.B. - "Equivalent Linearization for Systems Subjected to Non-stationary Random Excitation", Int. J. Non-Lin. Mech., Vol. 15, pp. 71-82, (1980).
- [84] IWAN, W.D. e PAPAZIROU, L.G. - "The stochastic response of strongly yielding systems", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, Nº 2, pp. 75-82, (1988).
- [85] IWAN, W.D. e YANG, I-M. - "Statistical Linearization for Nonlinear Structures", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 97, pp. 1609-1623, (1971).
- [86] IWAN, W.D. e YANG, I-M. - "Application of Statistical Linearization Techniques to Nonlinear Multidegree-of-Freedom Systems", Journal of Applied Mechanics, ASME, Vol. 39, Nº 2, pp. 545-550, (1972).
- [87] KANAI, K. - "An Empirical Formula for the Spectrum of Strong Earthquake Motions", Bull. Research Instit., Vol. 39, University of Tokyo, Japan, (1961).

- [88] KHASHMINSKII, R.Z. - "A Limit Theorem for the Solution of Differential Equations with Random Right Hand Sides", *Theory Probability Applic.*, pp. 390-405, (1966).
- [89] KHINTCHINE, A. - "Korrelation Theories der Stationären Stochastischen Prozess", *Math. Ann.*, Vol. 109, pp. 604-615, (1934).
- [90] KIMURA, K. e SAKATA, M. - "Non-stationary Responses of a Non-symmetric Non-linear System Subjected to a Wide Class Random Excitation", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 76, N° 2, pp. 261-272, (1981).
- [91] KLEIN, G.H. - "Random Excitation of a Nonlinear System with Tangent Elasticity Characteristics", *J. Acoust. Soc. America*, Vol. 36, pp. 2095-2105, (1964).
- [92] KOBORI, T.; MINAI, R. e SUZUKI, Y. - "Statistical Linearization Techniques of Hysteretic Structures to Earthquake Excitations", *Bulletin of the Disaster Prevention Research Institute*, Vol. 23, Kyoto University, (1973).
- [93] KOBORI, T.; MINAI, R. e SUZUKI, Y. - "Statistical Linearization Techniques for Dynamical Systems with Fluctuating Hysteresis", *Theoretical and Applied Mechanics*, Vol. 23, University of Tokyo, (1975).
- [94] KOLMOGOROV, A. - "Über die Analytischen Methoden in Wahrscheinlichkeitsrechnung", *Math. Ann.*, Vol. 104, pp. 415-458, (1931).
- [95] KRAMERS, H.A. - "Brownian Motion in a Field of Force and the Diffusion Model of Chemical Reactions", *Physica*, Vol. 7, (1940).
- [96] KRYLOV, N. e BOGOLIUBOV, N. - "Introduction to Nonlinear Mechanics", Princeton University Press, N.Y., (1943).
- [97] KUSHNER, H.J. - "The Cauchy Problem for a Class of Degenerate Parabolic Equations and Asymptotic Properties of the Related Diffusion Processes", *J. Differential Equations*, pp. 209-231, (1969).
- [98] KUZNETZOV, P.I.; STRATONOVITCH, R.L. e TIKHONOV, V.I. - "Non-linear Transformation of Stochastic Processes", Pergamon Press, U.K., (1965).
- [99] LANGLEY, R.S. - "Structural Response to Non-stationary Non-white Stochastic Ground Motions", *Earth. Eng. and Struct. Dynamics*, Vol. 14, pp. 909-924, (1986).
- [100] LIN, Y.K. - "Probabilistic Theory of Structural Dynamics", Mc Graw-Hill, (1967).

- [101] LIN, Y.K. e WU, W.F. - "Applications of Cumulant Closure to Random Vibration Problems", Proc. Symp. Random Vibration, ASME, Winter Ann. Mtg., New Orleans, (eds. Huang, T.C. e Spanos, P.D.), AMD, Vol. 65, (1984).
- [102] LUTES, L.D. - "Equivalent Linearization for Random Vibration", J. Eng. Mech. Div., ASCE, Vol. 96, pp. 227-242, (1970).
- [103] LUTES, L.D. e TAKEMIYA, H. - "Random Vibration of a Yielding Oscillator", J. Eng. Mech. Div., Vol. 100, pp. 343-358, (1974).
- [104] LYON, R.H. - "Response of a Nonlinear String to Random Excitation", J. Acoust. Soc. America, Vol. 32, pp. 953-960, (1960).
- [105] LYON, R.H. - "On the Vibration Statistics of a Random Excited Hard-Spring Oscillator", Journal of the Acoustical Society of America, (1961).
- [106] MASON, A.B. - "Some Observations on the Random Response of Linear and Nonlinear Dynamical Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1978).
- [107] MAYFIELD, W.W. - "A Sequence Solution to Fokker-Planck Equation", IEEE Trans. Theory, IT19 (2), pp. 165-175, (1973).
- [108] MOCHIO, T.; SAMARAS, E. e SHINOZUKA, M. - "Stochastic Equivalent Linearization for Finite Element-Based Reliability Analysis", Proc. 4th ICOSSAR, Kobe, (1985).
- [109] MORISON, J.R.; O'BRIEN, M.P.; JOHNSON, J.N. e SCHAST, S.A. - "The Force Exerted by Surface Waves on Piles", Petroleum Trans., ASME, Vol. 189, pp. 149-154, (1950).
- [110] NIGAM, N.C. - "Introduction to Random Vibrations", MIT Press, (1983).
- [111] NOORI, M.N. - "Random Vibration of Degrading Systems with General Hysteretic Behaviour", Ph. D. Thesis, Faculty of the School of Engineering and Applied Sciences, University of Virginia, (1984).
- [112] NOORI, M.; CHOI, J-D. e DAVOODI, H. - "Zero and nonzero random vibration analysis of a new general hysteresis model", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 1, N° 4, pp. 192-201, (1986).
- [113] ORABI, I.I. e AHMADI, G. - "An Iterative Method for Non-stationary Response Analysis of Non-linear Random Systems", Journal of Sound and Vibration, Vol. 119, N° 1, pp. 145-157, (1987).
- [114] ORNSTEIN, L.S. - Konink. Akad. Wetenschap. Amsterdam, (1917).

- [115] PAOLA, M.Di; IOPPOLO, M. e MUSCOLINO, G. - "Stochastic seismic analysis of multidegree of freedom systems", Engineering Struct., Vol. 6, pp. 113-118, (1984).
- [116] PAPAZIROS, L.G. - "Some Observations on the Random Response of Hysteretic Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1987).
- [117] PARK, Y.J. e ANG, A.H-S. - "Mechanistic Seismic Damage Model for Reinforced Concrete", Journal of Structural Engineering, Vol. 111, N° 4, pp. 722-739, (1985).
- [118] PARK, Y.J.; ANG, A.H-S. e WEN, Y.K. - "Seismic Damage Analysis of Reinforced Concrete Buildings", J. Struct. Eng., ASCE, Vol. 111, N° 4, pp. 740-757, (1985).
- [119] PARK, Y.J.; WEN, Y.K. e ANG, A.H-S. - "Random Vibration of Hysteretic Systems Under Bi-directional Ground Motions", Earthquake Engineering and Structural Dynamics, Vol. 14, pp. 543-557, (1986).
- [120] PATULA, E.J. e IWAN, W.D. - "On the Validity of Equation Difference Minimization Techniques", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 7, pp. 1-17, (1972).
- [121] PAYNE, H.J. - "An Approximate Method for Nearly Linear First Order Stochastic-Differential Equations", Int. J. Control, pp. 451-468, (1968).
- [122] PFAFFINGER, D.D. - "Probabilistic Dynamic Analysis with Adina", Computer & Structures, Vol. 13, pp. 637-646, (1981).
- [123] PIRES, J.E.A.; WEN, Y.K. e ANG, A.H-S. - "Stochastic Analysis of Liquefaction Under Earthquake Loading", Tech. Report UILU-ENG-83-2005, University of Illinois, (1983).
- [124] PLANCK, M. - "Über einen Satz der Statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie", Sitz-Berlin Akad-Wiss, (1917).
- [125] PRADLWARTER, H.J. e CHEN, X-W. - "On the response of a linear MDOF - system to nonstationary colored and white noise excitation", European Earthquake Engineering, Vol. 1, pp. 41-46, (1988).
- [126] PRADLWARTER, H.J. e SCHUËLLER, G.I. - "Accuracy and Limitations of the Method of Equivalent Linearization for Hysteretic Multi-Storey Structures" em "Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems", Proc. IUTAM Symposium, Innsbruck, Springer-Verlag, (1987).

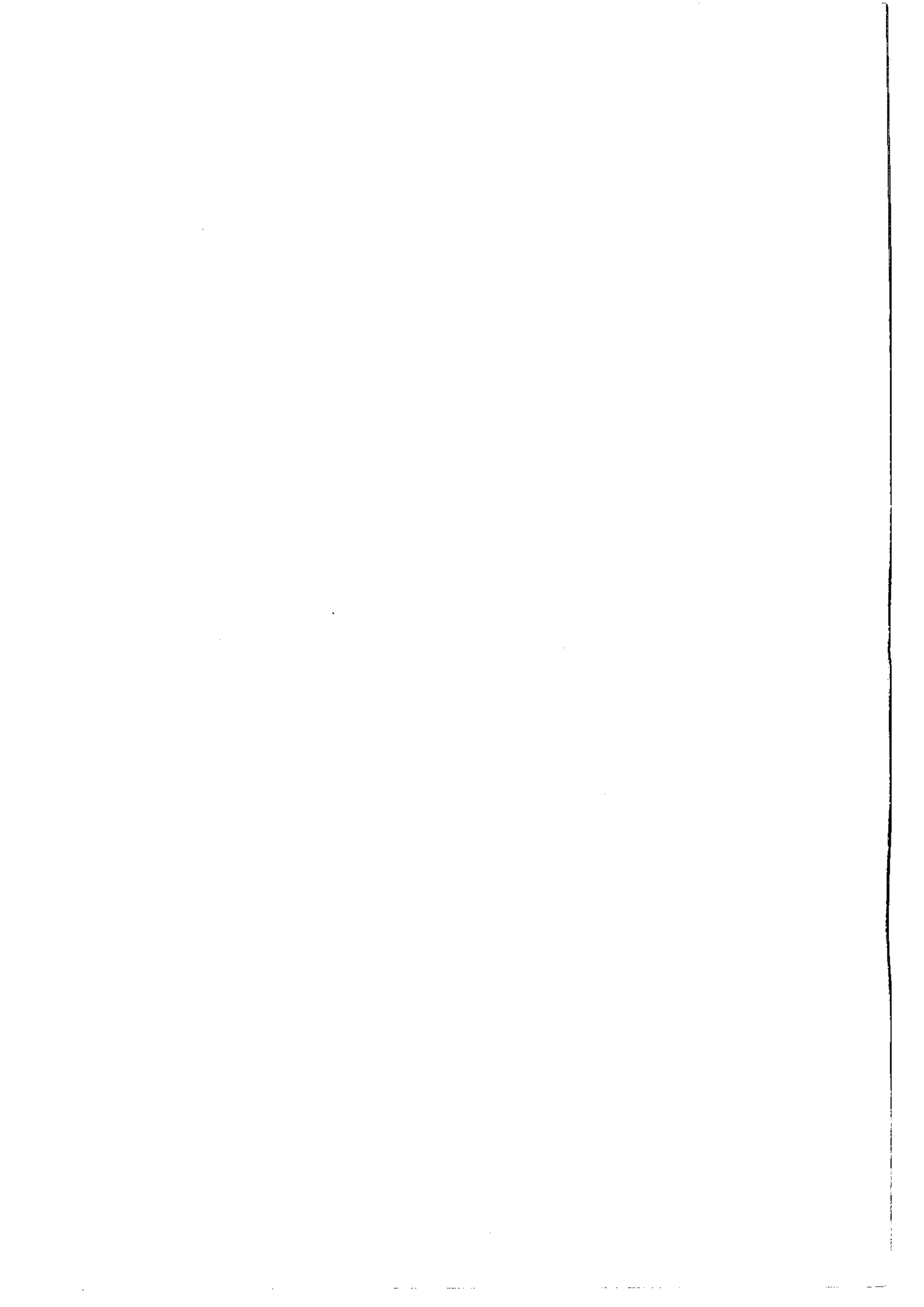


- [127] PRADLWARTER, H.J.; SCHUËLLER, G.I. e CHEN, X-W. - "Consideration of Non-Gaussian Response Properties by Use of Stochastic Equivalent Linearization", Proc. 3<sup>rd</sup> Int. Conf. on Recent Adv. in Struct. Dynamics, Southampton, (1988).
- [128] PRESS, H. e HOUBOLT, J.C. - "Some Applications of Generalized Harmonic Analysis to Gust Loads on Airplanes", J. Aero. Sci., Vol. 22, N<sup>o</sup> 1, pp. 17-26, (1955).
- [129] RICE, S.O. - "Mathematical Analysis of Random Noise", em "Selected Papers on Noise and Stochastic Processes", Wax ed., (1954).
- [130] ROBERTS, J.B. - "The Response of an Oscillator with Bilinear Hysteresis to Stationary Random Excitation", J. Appl. Mech., ASME, Vol. 45, pp. 923-928, (1978).
- [131] ROBERTS, J.B. - "Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation, Part I: Markov Methods", The Shock and Vibration Digest, Vol. 13, N<sup>o</sup> 4, pp. 17-28, (1981).
- [132] ROBERTS, J.B. - "Response of Nonlinear Mechanical Systems to Random Excitation, Part II: Equivalent Linearization and Other Methods", The Shock and Vibration Digest, Vol. 13, N<sup>o</sup> 5, pp. 15-29. (1981).
- [133] ROBERTS, J.B. e SPANOS, P.D. - "Stochastic Averaging: An Approximate Method of Solving Random Vibration Problems", Int. J. Non-Linear Mechanics, Vol. 21, N<sup>o</sup> 2, pp. 111-134, (1986).
- [134] ROBERTS, J.B. e SPANOS, P.D. - "Random Vibration and Statistical Linearization", John Wiley, Chichester, U.K., (1990).
- [135] SAGE, A.P. e MELSA, J.L. - "Introdução às Probabilidades e Processos Estocásticos", Editora Portuguesa de Livros Técnicos e Científicos, (1983).
- [136] SAKATA, M. e KIMURA, K. - "Calculation of the Non-Stationary Mean Square Response of a Non-linear System Subjected to Non-white Excitation", Journal of Sound and Vibration, Vol. 73, N<sup>o</sup> 3, pp. 333-343, (1980).
- [137] SCHIEHLEN, W.O. - "Random Vehicle Vibrations", Random Vibration - Status and Recent Developments (eds. Elishakoff e Lyon) Elsevier, Amsterdam, pp. 379-388, (1985).

- [138] SCHUËLLER, G.I. e SHINOZUKA, M. - "Stochastic Methods in Structural Dynamics", Martinus Nijhoff Publ., (1987).
- [139] SHINOZUKA, M. - "Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes", The Journal of the Acoust. Soc. of America, Vol. 49, N° 1, pp. 357-368, (1971).
- [140] SHINOZUKA, M. - "Monte Carlo Solution of Structural Dynamics", Computers & Structures, Vol. 2, pp. 855-874, (1972).
- [141] SHINOZUKA, M. - "Random Processes in Engineering Mechanics", 4<sup>th</sup> ASCE EMD Speciality Conference, Purdue University, (1983).
- [142] SHINOZUKA, M. e SATO, Y. - "Simulation of Nonstationary Random Processes", Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 93, pp. 11-40, (1967).
- [143] SINGH, M.P.; MALDONALDO, G.O. e HELLER, R.A. - "Modal Analysis of Nonlinear Hysteretic Structures for Seismic Motions", em "Nonlinear Stochastic Dynamic Engineering Systems", IUTAM Symposium, Ziegler & Schuëller (eds.), Spring-Verlag, (1987).
- [144] SMITH, P.W. - "Response of Nonlinear Structures to Random Excitation", J. Acoust. Soc. America, Vol. 34, (1962).
- [145] SMOLUCHOWSKI, M.V. - "Drei Vortage über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen", Phys. Zeit, 17, (1916).
- [146] SPANOS, P.D. - "Linearization Techniques for Non-Linear Dynamical Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1977).
- [147] SPANOS, P.D. - "Stochastic Linearization Method for Dynamic Systems with Asymmetric Nonlinearities", EMRL 1126, University of Texas at Austin, (1978).
- [148] SPANOS, P.D. - "Formulation of Stochastic Linearization for Symmetric or Asymmetric M.D.O.F. Nonlinear Systems", J. Appl. Mech., Vol. 47, N° 1, pp. 209-211, (1980).
- [149] SPANOS, P.D. - "Stochastic Linearization in Structural Dynamics", Applied Mechanics Reviews, Vol. 34, N° 1, pp. 1-8, (1981).
- [150] SPANOS, P.D. e LUTES, L.D. - "A Primer of Random Vibration Techniques in Structural Engineering", The Shock and Vibration Digest, Vol. 18, N° 4, pp. 3-10, (1986).

- [151] ST. DENIS, M. e PIERSON, W.J. - "On the Motions of Ships in Confused Seas", Trans. Society of Naval Architects and Marine Engineers (SNAME), Vol. 61, (1953).
- [152] STRATONOVICH, R.L. - "Topics in the Theory of Random Noise", Gordon & Breach, (1964).
- [153] SUES, R.H.; MAU, S.T. e WEN, Y.K. - "Systems Identification of Degrading Hysteretic Restoring Forces", J. Eng. Mech., ASCE, Vol. 114, N° 5, pp. 833-846, (1988).
- [154] SUES, R.H.; WEN, Y.K. e ANG, A.H-S. - "Stochastic Seismic Performance Evaluation of Buildings", Tech. Report UILU-ENG-83-2008, University of Illinois at Urbana Champaign, (1983).
- [155] SUES, R.H.; WEN Y.K. e ANG, A.H-S. - "Stochastic Evaluation of Seismic Structural Performance", J. Struct. Eng., Vol. 111, N° 6, pp. 1204-1218, (1985).
- [156] SUZUKI, Y. e MINAI, R. - "Application of Stochastic Differential Equation to Seismic Reliability Analysis of Hysteretic Structures", Probabilistic Engineering Mechanics, Vol. 3, N° 1, pp. 43-52, (1988).
- [157] TAKEMIYA, H. e LUTES, L.D. - "Stationary Random Vibration of Hysteretic Systems", Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE, Vol. 103, pp. 673-687, (1977).
- [158] TAKIZAWA, H. - "Nonlinear models for simulating the dynamic damaging processes of low rise reinforced concrete buildings during severe earthquakes", Earth. Eng. and Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 73-94, (1975).
- [159] TAKIZAWA, H. e AOYAMA, H. - "Biaxial Effects in Modelling Earthquake Response of R/C Structures", Earth. Eng. in Struct. Dynamics, Vol. 4, pp. 523-552, (1976).
- [160] TO, C.W.S. - "The Response of Nonlinear Structures to Random Excitations", Shock and Vibration Digest, Vol. 16, N° 4, pp. 13-18, (1984).
- [161] TOLAND, R.H. e YANG, C.H. - "Random Walk Model for First-Passage Probability", Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 97, pp. 791-807, (1971).
- [162] TUNG, C.C. - "The Effects of Runway Roughness on the Dynamic Response of Airplanes", J. Sound and Vibration, Vol. 5, N° 1, pp. 164-172, (1967).

- [163] UHLENBECK, G.E. e ORNSTEIN, L.S. - "On the Theory of Brownian Motion", *Phys. Rev.*, Vol. 36, (1930).
- [164] VANMARCKE, E.H. - "Structural Response to Earthquakes", *Seismic Risk and Engineering Decisions* (eds. Lomnitz & Rosenblueth), Elsevier, Amsterdam, (1976).
- [165] YAMAZAKI, F. - "Simulation of Stochastic Fields and its Application to Finite Element Analysis", Ohsaki Research Institute, Inc., (1987).
- [166] YANG, C.Y. - "Random Vibration of Structures", John Wiley & Sons, (1986).
- [167] YANG, I-M. - "Stationary Random Response of Multidegree-of-Freedom Systems", Ph. D. Thesis, California Institute of Technology, (1970).
- [168] WANG, M.C. e UHLENBECK, G.E. - "On the Theory of Brownian Motion II", *Reviews of Modern Physics*, Vol. 17, N° 2, (1945).
- [169] WARD, H.S. - "Analog Simulations of Earthquake Motions", *ASCE, J. Eng. Mech. Div.*, pp. 173-190, (1965).
- [170] WEN, Y.K. - "Approximate Method for Nonlinear Random Vibration", *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 101, pp. 389-401, (1975).
- [171] WEN, Y.K. - "Method for Random of Hysteretic Systems", *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, Vol. 102, pp. 249-264, (1976).
- [172] WEN, Y.K. - "Stochastic Seismic Response Analysis of Hysteretic Multi-Degree-of-Freedom Structures", *Earth. Eng. Struct. Dyn.*, Vol. 7, pp. 181-191, (1979).
- [173] WEN, Y.K. - "Equivalent Linearization for Hysteretic Systems Under Random Excitation", *Journal of Applied Mechanics, ASME*, Vol. 47, N° 1, pp. 150-154, (1980).
- [174] WEN, Y.K. - "Stochastic Response and Damage Analysis of Inelastic Structures", *Probabilistic Engineering Mechanics*, Vol. 1, N° 1, pp. 49-57, (1986).
- [175] WEN, Y.K. - "Methods of Random Vibration for Inelastic Structures", *Applied Mechanics Review*, Vol. 42, N° 2, pp. 39-52, (1989).
- [176] WEN, Y.K. e ANG, H-S. - "Inelastic Modelling and System Identification", *Proc. Workshop "Structural Safety Evaluation Based on System Identification Approaches"*, Fridr. Vieweg & Sohn, (1988).



- [177] WIENER, N. - "Generalized Harmonic Analysis", Acta Math. Stockh., 55, pp. 117-258, (1930).
- [178] WOLAVER, L.E. - "Second order properties of Nonlinear Systems Driven by Random Noise", Ph. D. Thesis, University of Michigan, Ann Arbor, (1964).
- [179] WU, W.F. e LIN, Y.K. - "Cumulant-Neglect Closure for Non-Linear Oscillators Under Random Parametric and External Excitations", Int. J. Non-linear Mechanics, Vol. 19, N° 4, pp. 349-362, (1984).
- [180] WU, W.F. - "Comparison of Gaussian Closure Technique and Equivalent Linearization Method", Prob. Engineering Mechanics, Vol. 2, N° 1, pp. 2-8, (1987).