

UMA FORMULAÇÃO DE VOLUMES FINITOS PARA A SOLUÇÃO DE PROBLEMAS CONVECTIVOS-DIFUSIVOS, PARA QUAISQUER NÚMEROS DE PECLET

CARLOS M. FERNANDES

e

MAURI FORTES

*Departamento de Engenharia Mecânica
Universidade Federal de Minas Gerais
Belo Horizonte - Minas Gerais - Brazil*

SUMÁRIO

Apresenta-se uma metodologia de volumes finitos para solução de problemas convectivos-difusivos, que pode ser aplicada a escoamentos envolvendo quaisquer valores de números locais de Peclet. O método tem por base a integração do termo de advecção ao longo da linha de corrente e uma integração especial dos termos difusivos, pela utilização de médias de fluxos nas fronteiras dos volumes de controle. O método proposto mostrou-se bastante eficaz e acurado para resolver problemas complexos que normalmente levam a dispersões e difusões numéricas.

SUMMARY

A finite volume method for the solution of convective-diffusive problems is presented, which can be applied to flows with any Peclet numbers. The method is based on the integration of the advective term along a stream line and a special integration of the diffusive terms, using average flow at the boundary at the control volumes. The proposed method has shown to be efficient and accurate in complex applications normally leading to numeric dispersion and diffusion.

INTRODUÇÃO

O método de volumes finitos, MVF, (Spalding¹⁷), desenvolvido visando a solução numérica das equações de Navier-Stokes e de problemas convectivos-difusivos, mostrou-se bastante competitivo em relação aos métodos de diferenças finitas (MDF) e de elementos finitos (MEF). As soluções numéricas obtidas por meio de técnicas do MVF (Patankar⁷, Raithby^{11,12}, Sharif e Busnaina¹⁵; Patel et al.^{8,9}), MEF (Rice e Schnipke¹³, Brooks e Hughes¹) e MDF (Hoffman⁴), apresentam problemas (erros) numéricos, chamados de falsa difusão e dispersão numérica. Sharif e Busnaina¹⁵ fazem distinção

Recibido: Enero 1995

entre difusão e dispersão numéricas: pode-se definir difusão numérica como qualquer efeito que tende a suavizar ou amortecer gradientes ou descontinuidades presentes na solução exata de um problema, enquanto que dispersão numérica é o efeito que resulta em oscilações na solução aproximada.

Um grande número de métodos ou esquemas visando a diminuição de difusão e dispersão numéricas encontram-se disponíveis, na literatura, em revisões abrangentes aplicadas ao MDF (Hoffman⁴), MVF (Patankar⁷, Patel et al.⁹, Marchi⁵) e MEF (Rice e Schnipke¹³, Brooks e Hughes¹; Zienkiewicz e Taylor¹⁸). As técnicas de MDF, MVF e MEF mais citadas na literatura referente a soluções de equações de convecção-difusão, levaram aos esquemas de Diferenças a Montante (Upwind Difference Scheme ou UDS) (Brooks e Hughes¹, Patankar⁷; Patel et al.⁹), de Diferenças Centrais (Central Difference Scheme ou CDS) (Brooks e Hughes¹, Patankar⁷, Patel et al.⁹; Nieceke⁶), Exponencial (Locally-Exact Difference Scheme ou LEDS) (Spalding¹⁷, Patankar⁷); Híbrido (Hybrid Difference Scheme ou HDS) (Spalding¹⁷); Lei de Potência (Power Difference Scheme ou PDS) (Patankar⁷, Patel et al.⁹); de Diferenças a Montante Assimétrico (Ske Upstream Difference Scheme ou SUDS) (Raithby^{11,12}); de Diferenças Ponderadas a Montante (Weighted-Upstream Difference Scheme ou WUDS) (Raithby e Torrance¹⁰); de Interpolação Quadrática a Montante para Cinemática Convectiva (Quadratic Upstream Interpolation for Convective Kinematics ou QUICK); Diferencial Adaptável (Adaptable Difference Scheme ou ADS) (Marchi⁵); MEF com formulação de Galerkin (Brooks e Hughes¹); MEF do tipo montante (Upwind) na direção das linhas de corrente, que utilizam a formulação de Petrov-Galerkin, mínimos quadrados, esquemas de interpolação de alta ordem e outras aproximações (Brooks e Hughes¹, Rice e Schnipke¹³)

Como tem sido evidenciado na literatura (Brooks e Hughes¹, Smith e Hutton¹⁶, Patel et al.⁸, Marchi⁵; Zienkiewicz e Taylor¹⁸), praticamente todos os esquemas numéricos de MDF, MEF e MVF introduzem difusão e dispersão numéricas nas soluções.

Tendo por base a revisão sucinta apresentada acima e os seguintes argumentos:

- não foi encontrado, na literatura revista, um esquema que pudesse ser considerado ótimo, em termos de minimização de falsa difusão e dispersão numérica para uma vasta gama de números de Peclet;
- que existe a possibilidade de exploração de técnicas envolvendo todos ou dois dos MVF, MEF e MDF;
- que existem problemas que têm sido aceitos, pela literatura de diferenças, volumes e elementos finitos como padrões (benchmark), que, embora não permitam inferir que um método é “ótimo”, permitem, por outro lado, comparar os resultados a serem obtidos por um determinado esquema com vários outros propostos e em uso corrente, os objetivos específicos deste trabalho são:
 - apresentar uma metodologia de volumes finitos para a solução de problemas convectivos-difusivos, tendo por base um esquema a montante, na direção das linhas de corrente;

- apresentar um conjunto de soluções de problemas padrões (benchmark) e comparar as soluções obtidas pelo método proposto com outras soluções numéricas disponíveis na literatura.

MÉTODO

O objetivo deste trabalho é a solução numérica da equação de difusão-convecção ou equação de transporte

$$\rho u \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho v \frac{\partial \phi}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (1)$$

em que u e v são as componentes da velocidade nas direções das coordenadas x e y , ρ é a massa específica, ϕ é a variável dependente, S é o termo fonte e Γ é o coeficiente difusivo.

Obtenção de variáveis a montante

Neste trabalho, desenvolveu-se uma técnica de discretização dos termos de advecção, que possui algumas semelhanças com a técnica desenvolvida por Rice e Schnipke¹³, num esquema do MEF, visando a sua aplicação por meio do MVF.

Os termos convectivos da equação (1) podem ser reescritos em coordenadas de linha de corrente (s, n), Figura 1, na forma

$$u \frac{\partial \phi}{\partial x} + v \frac{\partial \phi}{\partial y} = u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} \quad (2)$$

em que s é uma coordenada de linha de corrente e u_s , o vetor velocidade tangente à linha de corrente, é dado por: $u_s = \sqrt{u^2 + v^2}$

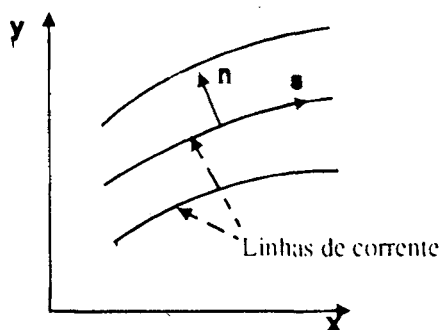


Figura 1. Coordenadas de linhas de corrente

Substituindo a equação (2) na equação (1), tem-se

$$\rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + S \quad (3)$$

A malha computacional mostrada na Figura 2 define quatro volumes de controle, que possuem, em comum, o ponto nodal P. Admite-se, a priori, que o ponto P seja um ponto nodal "downwind", isto é, um ponto a jusante de uma linha de corrente do campo de escoamento. Supõe-se ser conhecido o vetor velocidade no ponto P. O critério de escolha do volume de controle referente ao ponto nodal P pode ser exemplificado como segue. Se o vetor velocidade no ponto P estiver dirigido para o quadrante I da malha computacional, Figura 2, as coordenadas (x', y') estarão, necessariamente, nos lados s ou w do quadrante III (ou coincidirão com S ou W). Neste caso, o quadrante III torna-se o volume de controle para a integração da equação (2). Raciocínio análogo pode ser aplicado no caso das outras direções plausíveis de V.

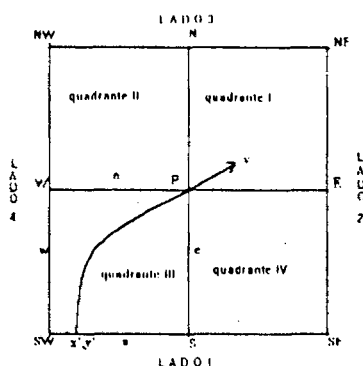


Figura 2. Esquema para visualização do ponto a montante (upwind) de um ponto nodal P

A localização do ponto (x', y') a montante da linha de corrente pode ser avaliada a partir de fatores de interpolação, como feito por Schnipke e Rice¹³. Os valores de F_p e F_n são definidos pelas expressões abaixo, em função das vazões mássicas nas fronteiras do volume de controle (Figura 3):

$$\text{Lado 1: } F_p = \max(\min(\frac{F_4}{F_3}, 1), 0) \quad \text{e} \quad F_n = \max(\min(\frac{F_2}{F_1}, 1), 0) \quad (4)$$

As vazões mássicas podem ser avaliadas por expressões da forma (Figura 3)

$$F_1 = \int_{y_{SW}}^{y_S} \rho u \, dy - \int_{y_{SW}}^{y_S} \rho v \, dx \quad (5)$$

Neste trabalho supõe-se que toda propriedade (variável) dependente (u, v, ϕ por exemplo) pode ser interpolada por um polinômio linear em todo o volume de controle e em sua superfície. Para o caso de fluidos incompressíveis, a integração da expressão acima leva a

$$F_1 = -\frac{1}{2} \rho (v_{SW} + v_S)(x_S - x_{SW}) \quad (6)$$

A Figura 3 mostra como F_p e F_n são orientados no volume de controle em relação ao nó "downwind" P. Os fatores de interpolação variam de zero a um. Se o ponto a montante estiver no lado 1, o valor F_n será um número entre zero e um e F_p será igual a um. Se o ponto a montante estiver no lado quatro F_n será igual a um e F_p terá valor entre zero e um. Se o ponto a montante coincidir com o ponto nodal SW, então, F_p e F_n serão iguais a um.

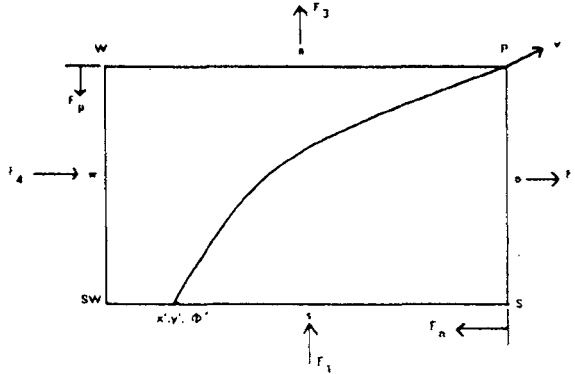


Figura 3. Vazões mássicas e fatores de interpolação relativos a um volume de controle no terceiro quadrante

Após calcular os fatores de interpolação, podem-se determinar as coordenadas (x,y) do ponto "upstream" e o valor da propriedade ϕ neste ponto. Se o ponto nodal P for um ponto "downwind" para a linha de corrente que passa pelo terceiro quadrante, então, supõe-se, neste trabalho, que

$$x' = (1 - F_p)x_W + (1 - F_n)x_S + F_p F_n x_{SW} \quad (7)$$

$$y' = (1 - F_p)y_W + (1 - F_n)y_S + F_p F_n y_{SW} \quad (8)$$

$$\phi' = (1 - F_p)\phi_W + (1 - F_n)\phi_S + F_p F_n \phi_{SW} \quad (9)$$

Expressões similares podem ser obtidas para outros nós situados em quadrantes diferentes.

Discretização da equação de transporte

A fim de obter um algoritmo de discretização da equação (4), deve-se definir o quadrante no qual será feita a integração. Para isso analisa-se a direção e o sentido do vetor velocidade. Considere a malha computacional apresentada na Figura 2. Integrando a equação (4), no terceiro quadrante dessa figura, tem-se

$$\int_w^e \int_s^n \rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} dx dy = \int_w^e \int_s^n \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n \partial \partial y \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) dx dy + \int_w^e \int_s^n S dx dy \quad (10)$$

Nesta equação, o termo advectivo pode ser aproximado por

$$\int_w^e \int_s^n \rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s}; \quad dxdy = u_s \frac{(\phi_P - \phi')}{\Delta s} \int_w^e \int_s^n; \quad dxdy = A(\phi_P - \phi') \quad (11)$$

sendo Δx e Δy são as dimensões do volume de controle e

$$\Delta s = \sqrt{(x_P - x')^2 + (y_P - y')^2}, \quad u_s = \sqrt{u_P^2 + v_P^2} \quad e \quad A = \rho \frac{u_s}{\Delta s} \Delta x \Delta y \quad (12)$$

Integrando a equação (10), tem-se

$$A(\phi_P - \phi') = \Delta y \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_e} - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_w} \right) + \Delta x \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y_n} - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y_s} \right) + S' \quad (13)$$

onde

$$S' = \int_w^e \int_s^n S; \quad dxdy \quad (14)$$

Admitindo-se que as propriedades nas fronteiras em e, w, n e s sejam obtidas pela média aritmética das propriedades nos pontos nodais adjacentes, a equação (13) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned} A(\phi_P - \phi') = & \frac{\Delta y \Gamma_e}{(\delta x)_e} \left[\frac{1}{2}(\phi_E + \phi_{SE}) - \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) \right] - \frac{\Delta y \Gamma_w}{(\delta x)_w} \left[\frac{1}{2}(\phi_P + \phi_S) - \right. \\ & \left. - \frac{1}{2}(\phi_W + \phi_{SW}) \right] + \frac{\Delta x \Gamma_n}{(\delta y)_n} \left[\frac{1}{2}(\phi_N + \phi_{NW}) - \frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) \right] - \\ & - \frac{\Delta x \Gamma_s}{(\delta y)_s} \left[\frac{1}{2}(\phi_P + \phi_W) - \frac{1}{2}(\phi_S + \phi_{SW}) \right] + S' \end{aligned} \quad (15)$$

Fazendo

$$D_e = \frac{\Delta y(\Gamma_P + \Gamma_S)}{4(\delta x)_e} \quad D_w = \frac{\Delta y(\Gamma_W + \Gamma_{SW})}{4(\delta x)_w} \quad (16)$$

$$D_n = \frac{\Delta x(\Gamma_P + \Gamma_W)}{4(\delta y)_n} \quad D_s = \left(\frac{\Delta x(\Gamma_S + \Gamma_{SW})}{4(\delta y)_s} \right) \quad (17)$$

onde

$$(\delta x)_e = x_E - x_P \quad \text{e} \quad (\delta x)_w = x_P - x_W \quad (18)$$

$$(\delta y)_n = y_N - y_P \quad \text{e} \quad (\delta y)_s = y_P - y_S \quad (19)$$

Substituindo as equações (16) e (17) em (15) tem-se

$$\begin{aligned} A[\phi_P - (1 - Fp)\phi_W - (1 - Fn)\phi_S - FpFn\phi_{SW}] = D_e(\phi_E + \phi_{SE} - \phi_P - \phi_S) - \\ - D_w(\phi_P + \phi_S - \phi_W - \phi_{SW}) + D_n(\phi_N + \phi_{NW} - \phi_P - \phi_W) - \\ - D_s(\phi_P + \phi_W - \phi_S - \phi_{SW}) + S' \end{aligned} \quad (20)$$

Reagrupando os termos nesta equação, obtém-se

$$a_P\phi_P = a_E\phi_E + a_W\phi_W + a_N\phi_N + a_S\phi_S + b \quad (21)$$

em que

$$\begin{aligned} a_E = D_e \quad a_W = D_w + A(1 - Fp) \quad a_N = D_n \quad a_S = D_s + A(1 - Fn) \\ a_P = A + D_e + D_w + D_n + D_s \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} b = (AFpFn + D_w + D_s)\phi_{SW} + D_n\phi_{NW} + D_e\phi_{SE} - \\ - (D_n + D_s)\phi_W - (D_e + D_w)\phi_S + S' \end{aligned}$$

RESULTADOS E DISCUSSÃO

A fim de validar o modelo proposto, solucionaram-se dois problemas que têm sido considerados como padrões (benchmark) para se avaliar a capacidade de um método qualquer (MDF, MEF ou MVF) minimizar falsa difusão e dispersão numéricas.

Escoamento laminar puramente convectivo

Este problema teve o objetivo de analisar a capacidade de o método proposto neste trabalho prever o transporte puramente convectivo de uma propriedade ao longo de uma linha de corrente. O domínio do problema é uma região quadrada, como mostrado na Figura 4. Presume-se que o campo de velocidade seja uniforme no domínio^{13,1,2}; à entrada da região, em $y < y_c$, a propriedade ϕ do fluido vale 1 e em $y \geq y_c$, $\phi = 0$.

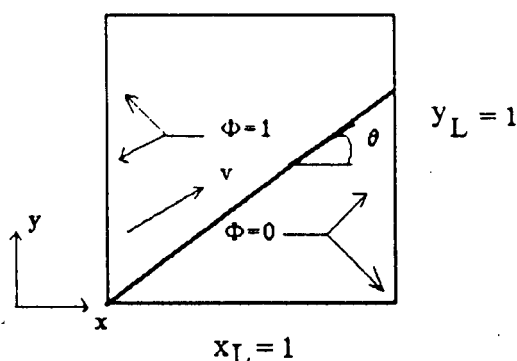


Figura 4. Esquema do problema de escoamento puramente convectivo

Sendo nulo o coeficiente difusivo Γ , a equação de transporte para o problema, equação (4) torna-se

$$\rho u_s \frac{\partial \phi}{\partial s} = 0 \quad \text{em que} \quad u = \cos \theta \quad e \quad v = \sin \theta \quad (23)$$

em que u e v são os componentes do vetor velocidade e θ é o ângulo de inclinação do vetor velocidade em relação eixo de coordenadas x .

As condições de contorno são

$$\text{Em } y = 0 \quad e \quad 0 \leq x \leq 1 \Rightarrow \phi = 0 \quad (24)$$

$$\text{Em } x = 0 \quad e \quad 0 \leq y \leq 1 \Rightarrow \phi = 1$$

As condições de contorno nos lados de saída do escoamento não devem, em princípio, ser especificadas, pois a equação (23) é uma equação diferencial hiperbólica de primeira ordem. O problema foi simulado para valores de θ iguais a 22.5, 45 e 67.5°. A região do escoamento foi discretizada numa malha com 21x21 pontos nodais.

Os resultados estão plotados nos gráficos das Figuras 5 e 6; os dados para 67.5° não foram mostrados pois coincidiram (simetricamente) com os dados para 22.5°.

Vários autores (Brooks e Hughes¹, Rice e Schnipke¹⁴, Fernandes e Lemos², Zienkiewicz e Taylor¹⁸; Patankar⁷) publicaram soluções numéricas para este problema, obtidas pela aplicação de vários esquemas dos MEF e MVF para o tratamento do termo convectivo da equação de transporte. A maior parte dos esquemas, neles incluídos o de Galerkin e Petrov-Galerkin (Zienkiewicz e Taylor¹⁸) e SUDS, apresentaram

oscilações espaciais não físicas e os modelos CDS, UDS, LEDS e seus assemelhados (Patankar⁷, Brooks e Hughes¹) apresentaram problemas de difusão numérica. O modelo, apresentado neste trabalho, não mostrou problemas de oscilações espaciais não físicas. Para o ângulo $\theta = 45^\circ$, a solução numérica coincidiu com a exata, não ocorrendo qualquer difusão numérica. Para $\theta = 22.5^\circ$ e 67.5° ocorreu uma pequena falsa difusão, que, no entanto, foi igual ou menor que o apresentado por todos os esquemas citados.

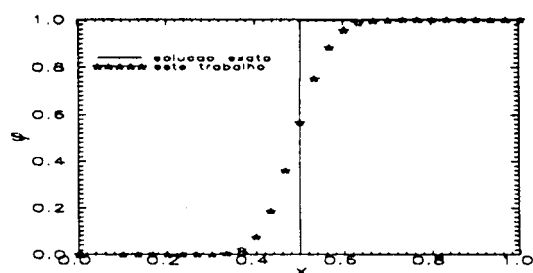


Figura 5. Solução do problema puramente convectivo para $\theta = 22.5^\circ$

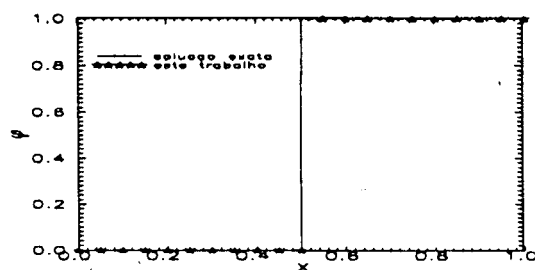


Figura 6. Solução do problema puramente convectivo para $\theta = 45^\circ$

O problema de Smith e Hutton¹⁶

Este caso-teste foi proposto por Smith e Hutton¹⁶ com a finalidade de avaliar a performance de vários métodos numéricos ao serem aplicados para obter aproximações para a solução de problemas convectivos-difusivos com linhas de corrente curvas (recirculação), condições complexas de contorno e sob toda a faixa de números de Peclet (Figura 7). O problema de Smith e Hutton, portanto, permite avaliar o desempenho de esquemas computacionais quando da solução de problemas altamente difusivos e problemas puramente convectivos.

A equação (3) foi avaliada no domínio mostrado na Figura 7, onde o campo de velocidade é dado pelas relações abaixo:

$$u = 2y(1 - x^2) \quad \text{e} \quad v = -2x(1 - y^2) \quad \text{para} \quad -1 \leq x \leq 1 \quad \text{e} \quad 0 \leq y \leq 1 \quad (25)$$

As condições de contorno para o problema são

$$\begin{aligned}
 &\text{em } y = 0 \text{ e } -1 \leq x \leq 0 \text{ (entrada)} \Rightarrow \phi = 1 + \tanh[10(1 + 2x)] \\
 &\text{em } x = -1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \text{ e } -1 \leq x \leq 1 \text{ e } x = 1 \text{ e } 0 \leq y \leq 1 \\
 &\quad \Rightarrow \phi = 1 - \tanh(10) \\
 &\text{em } y = 0 \text{ e } 0 \leq x \leq -1 \text{ (saída)} \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0
 \end{aligned} \tag{26}$$

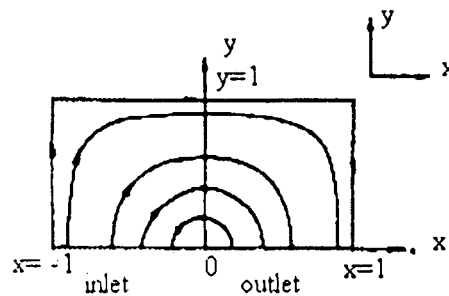


Figura 7. Diagrama das linhas de corrente do problema proposto por Smith e Hutton¹⁶

O domínio foi discretizado numa malha de 61x31 pontos nodais. O problema foi resolvido para números de Peclet iguais a 10, 100, 1000 e 1×10^6 . Os resultados, plotados nos gráficos das Figuras 8 a 12, foram comparados com os obtidos por Schonauer, cujos dados foram considerados por Smith e Hutton¹⁶ como padrões (benchmark). Os resultados foram, também, comparados com os simulados por Gurgel³ que usou a metodologia proposta por Rice e Schnipke¹³; os dados de Gurgel³ não são mostrados.

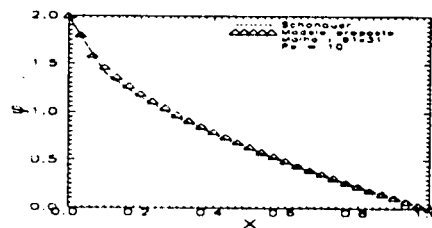


Figura 8. Solução do problema de Smith e Hutton para $Pe = 10$

Os dados apresentados por Smith e Hutton¹⁶ referem-se a soluções numéricas obtidas por vários esquemas de MEF, MVF e MDF; a principal conclusão de Smith e Hutton foi que os métodos que apresentam ótima performance para baixos números de Peclet mostram-se inadequados para simular problemas envolvendo altos números de Peclet e vice-versa. Os dados mostrados nas Figuras 8 a 12 mostram que, mesmo para a malha ainda não bem refinada, os dados aproximam-se bastante dos de Schonauer, que foram obtidos por uma técnica de diferenças finitas de alto custo computacional.

Os dados aproximam-se mais dos dados de Schonauer que os obtidos pela aplicação do método de Schnipke e Rice¹³, por Gurgel³.

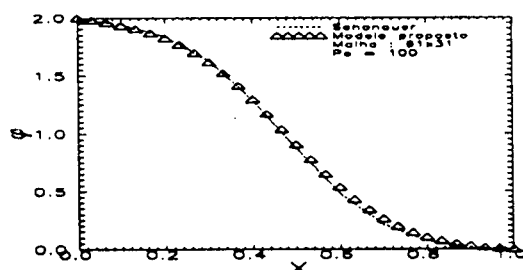


Figura 9. Solução do problema de Smith e Hutton para $Pe = 100$

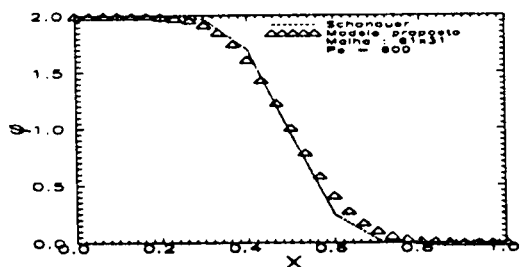


Figura 10. Solução do problema de Smith e Hutton para $Pe = 500$

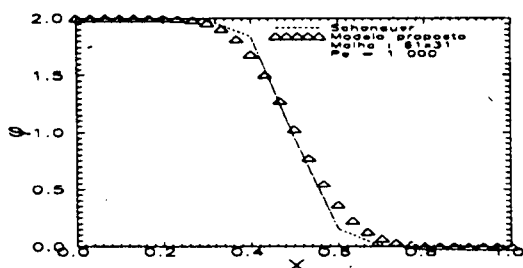


Figura 11. Solução do problema de Smith e Hutton para $Pe = 1000$

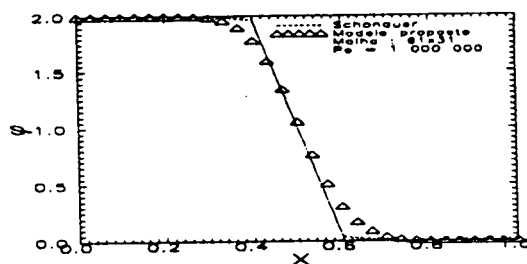


Figura 12. Solução do problema de Smith e Hutton para $Pe = 10^6$

CONCLUSÕES

O esquema diferencial a montante, na direção das linhas de corrente, ("Streamline Upwind"), desenvolvido neste trabalho, mostrou-se estável para uma ampla faixa de números de Peclet e não apresentou oscilações ou dispersões numéricas apreciáveis para qualquer número de Peclet, quando submetido a dois testes críticos. O método mostrou-se mais eficiente que o método de Rice e Schnipke¹⁴, cuja estrutura de discretização dos termos convectivos foi utilizada.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem a FAPEMIG pelo suporte financeiro dado a este trabalho.

REFERÊNCIAS

1. A.N. Brooks and T.R.J. Hughes, "Streamline upwind Petrov-Galerkin formulations for convection dominated flows with particular emphasis on the incompressible Navier-Stokes equations", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **32**, pp. 199-259, (1982).
2. C.M. Fernandes and M.J.S. Lemos, "A note on numerical diffusion in two-dimensional convection-diffusion problems", in *Anais do II Encontro Nacional de Ciências*, (1988).
3. C.E.P. Gurgel, "Avaliação de um método de elementos finitos segregados, a montante, para a solução de problemas convectivos-difusivos", *Tese de Mestrado em Engenharia Mecânica*, UFMG, pp. 80, (1993).
4. J.D. Hoffman, "Numerical Methods for Engineers and Scientists", McGraw-Hill, New York, (1993).
5. C.H. Marchi, "High order schemes for the solution of fluid flows without numerical dispersion", *Revista Brasileira de Ciências Mecânicas*, Vol. **15**, 3, pp. 231-249, (1993).
6. A.O. Nieckele, "An evaluation of the linear flux spline scheme and modified versions of the central difference scheme for two dimensional convection-diffusion problems", in *Anais do Primeiro Encontro de Ciências Térmicas, Rio de Janeiro*, pp. 51-54, (1986).
7. S.V. Patankar, "Numerical Heat Transfer and Fluid Flow", McGraw-Hill Book Company, New York, (1980).
8. M.K. Patel, N.C. Markatos and M. Cross, "Method of reducing false-diffusion errors in convection-diffusion problems", *Appl. Math. Modelling*, Vol. **9**, pp. 302-6, (1985).
9. M.K. Patel, M. Cross, and N.C. Markatos, "An evaluation of eleven discretization schemes for predicting elliptic flow and heat transfer in supersonic jets", *Int.J. Heat Mass Transfer*, Vol. **30**, pp. 1907-1925, (1987).
10. G.D. Raithby and K.E. Torrance, "Upstream-weighted differencing schemes and their applications to elliptic problems involving fluid flow", *Comp. Fluids*, Vol. **2**, pp. 191-206, (1974).
11. G.D. Raithby, "A critical evaluation of upstream differencing applied to problems involving fluid flow", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **9**, pp. 75-103, (1976).
12. G.D. Raithby, "Skew upstream differencing scheme for problems involving fluid flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **9**, pp. 153-164, (1976).
13. J.G. Rice and R.J. Schnipke, "A monotone streamline upwind finite element method for convection-dominated flows", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **48**, pp. 313-327, (1985).

14. J.G. Rice and R.J. Schnipke, "An equal-order velocity-pressure formulation that does not exhibit spurious pressure modes", *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. **58**, pp. 135-149, (1986).
15. M.A.R. Sharif and A.A. Busnaina, "Evaluation and comparison of bounding techniques for convection-diffusion problems", *Journal of Fluids Engineering*, Vol. **115**, pp. 33-40, (1993).
16. R.M. Smith and A.G. Hutton, "The numerical treatment of advection: performance comparasion of current methods", *Numerical Heat Transfer*, Vol. **5**, pp. 439-461, (1982).
17. D.B. Spalding, "A novel finite difference formulation for differencial expressions involving both first and second derivatives", *Int. Journal Numerical Methods in Engineering*, Vol. **4**, pp. 551-559, (1972).
18. O.C. Zienkiewicz and R.L. Taylor, "*The Finite Element Method*", Vol. **2**, 4th Ed., London, pp. 807, (1991).