Vol. **17**, **4**, 387–401 (2001)

Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería

Modelo de distribución de carga entre dos cuerpos con varios puntos en contacto

Manuel Estrems y Félix Faura
ETS Ingenieros Industriales
Universidad Politécnica de Cartagena
Paseo Alfonso XIII 48, 30203 Cartagena, España
Tel.: 34-968-32 57 78, Fax:34-968-32 54 33
e-mail: Manuel.Estrems@upct.es

José I. Pedrero
ETS Ingenieros Industriales
Universidad Nacional de Educación a Distancia
Aptdo. 60149, 28080 Madrid, España
Tel.: 34-91-398 64 30, Fax: 34-91-398 65 36
e-mail: jpedrero@ind.uned.es

Resumen

Basándose en el principio de mínima energía de deformación se ha obtenido el reparto de carga entre los distintos puntos en contacto entre dos cuerpos, utilizando dos instrumentos de minimización de la energía: las condiciones de Kuhn-Tücker y los Multiplicadores de Lagrange. Se ha deducido una expresión matricial directa y sencilla, sin recurrir a los algoritmos iterativos habituales. Mediante este método se ha determinado el reparto de carga entre filetes de un tornillo.

METHOD FOR THE DETERMINATION OF THE LOAD DISTRIBUTION BETWEEN TWO BODIES WITH SEVERAL CONTACT POINTS

Summary

A matricial formulation of the deformation energy of two bodies touching each other in several points has been developed. Based on the minimal deformation energy principle, the load distribution among the different contact points has been obtained, using two energy minimising methods: the Kuhn-Tücker conditions and the Lagrange's multipliers. A simple, direct matricial expression has been deduced without appealing to the usual iterative algorithms. Through this method, the load distribution among the fillets of a screw has been determined.

 ISSN: 0213–1315 Recibido: Marzo 2000

INTRODUCCIÓN

El estudio del contacto entre elementos mecánicos es de vital importancia para el análisis del fallo de éstos. La importancia es mayor cuando se trata de elementos transmisores de potencia, como engranajes, tornillos, etc., ya que en estos casos el contacto no se produce habitualmente en un punto, sino que se distribuye en distintas áreas. Estas áreas se pueden discretizar a efectos de cálculo en puntos.

El conocimiento de la distribución de la carga total en puntos de aplicación de ésta es necesario, por una parte, para el análisis estructural del componente (se puede provocar su rotura en un punto distinto de donde se aplica la carga), y por otra parte, para el análisis tensional del contacto, pues al conocer la fuerza localizada en un punto con unas características determinadas -de geometría, materiales y lubricación- se puede estudiar el fallo a fatiga, desgaste, "scuffing", etc.

La obtención de la distribución de carga ha sido tratada de varias maneras en la bibliografía: o bien se ha enfocado hacia el problema estructural y de contacto conjuntamente, o bien se han separado ambos estudios previa obtención del área de contacto para determinar después la distribución de carga en ésta.

El algoritmo simplex fue aplicado por Conry *et al*[1] para determinar de manera numérica la distribución de presiones en el contacto plano entre dos superficies curvas. Después de discretizar la curva de presión en cargas puntuales, obtuvieron que la solución coincidía con la distribución elíptica de Hertz. Este método es el más usado en la actualidad para resolver problemas de distribución de fuerzas, sin embargo, es iterativo y complejo, necesita valores iniciales y puede dar lugar a problemas de convergencia.

Existen diversos procedimientos para el cálculo de la presión de contacto entre componentes mecánicos, en concreto de los dientes de engranajes. El método de Ritz es un método aproximado que se basa en suponer que la solución al problema tiene una forma analítica con unos parámetros ajustables. Estos parámetros se escogen de forma que hagan la energía elástica mínima. Su precisión depende de que las funciones a ajustar sean las adecuadas. Yau *et al.*[2] hicieron una modelización de la deformación del diente de engranaje, tomando como funciones a ajustar los modos de vibración de una placa en voladizo, obteniendo un modelo que llaman "Shear Plate Model". Este modelo tiene la ventaja de que es tridimensional a la vez que reduce notablemente el tiempo de ordenador respecto a otros métodos.

Estos métodos de cálculo de la distribución de fuerza han tenido su máxima aplicación en el campo de los engranajes, ya que estos son unos elementos de diseño muy frecuentes y a la vez lo suficientemente complejos para ser objeto de un estudio detenido.

El método más usado para el cálculo tensional en dientes de engranajes es el Método de los Elementos Finitos (MEF), el cual posee gran robustez y flexibilidad. El método ha sido aplicado por muchos autores como Wilcox,[3] que modelizó los dos dientes en contacto con elementos de contacto en la superficie de ambos, obteniendo en un solo paso las tensiones estructurales y las de contacto. Para que este método sea fiable se requiere un mallado muy fino, sobre todo en las proximidades del punto de contacto en ambas piezas; al introducir elementos de contacto en la superficie de los dientes, el proceso de resolución se alarga al convertirse en un problema no lineal, el cual se complica aún más al tratar el problema tridimensional.

Para el cálculo de la distribución de fuerzas también se puede proceder separando el problema estructural del de contacto. En un trabajo realizado por Zhang *et al.*[4] se usó el TCA (Tooth Contact Analysis)[5] como preprocesador. Se habla por primera vez de matriz de flexibilidad para determinar la energía de deformación y, aplicando una corrección del algoritmo simplex desarrollada por Conry *et al.*,[1] se obtuvo el vector de fuerzas que hace mínima la energía de deformación. Este método tiene la ventaja de que la resolución por el MEF se realiza una vez (aunque solucionando muchos estados de carga) calculándose los desplazamientos posteriores por interpolación de resultados, evitando volver a utilizar el MEF.

Recientemente Litvin *et al.*[6] han usado el MEF para hallar matrices de flexibilidad de varios dientes en contacto. Por este procedimiento se halla el error de transmisión y las elipses de contacto durante el engrane para cargas pequeñas. La deformación de los dientes se obtiene calculando previamente la distribución de la carga a lo largo de la línea de contacto, mediante la metodología Simplex de Conry *et al.*[1] Después se aplica la distribución calculada en un modelo de elementos finitos, obteniéndose de este modo las tensiones subsuperficiales a lo largo de la zona de contacto, las tensiones en la base del diente y las deformaciones del diente bajo grandes cargas que se usarán para recalcular los errores de transmisión.

Lo interesante de ese trabajo es el resultado, dada la complejidad de las herramientas empleadas. La distribución de carga obtenida dio un valor a la fuerza máxima de 1,5 veces el valor de la media, localizada alrededor del punto medio de la línea de contacto, lo cual está lejos de la suposición de distribución uniforme de carga que utilizan las normas de cálculo ISO[7] y AGMA.[8]

Para hallar la deformada del diente de un engranaje recto, la norma ISO[7] propone un modelo de rigidez del diente descrito por Henriot[9] el cual tiene una expresión simple. Recientemente, Cai[10] ha propuesto una mejora al modelo ISO de rigidez del par de dientes en contacto. Ambos modelos tratan de establecer una función de rigidez del conjunto total de dos pares de dientes conjugados. La utilidad que se le ha dado ha sido principalmente en el campo del estudio de vibraciones, y no en el cálculo estructural o de contacto.

Estos métodos no son en absoluto triviales y en la mayoría de los casos tienen que incorporar algoritmos excesivamente complejos para alguien no especialista. Además, el planteamiento y resolución requiere una gran inversión en tiempo de preproceso, de resolución y de interpretación de los resultados. Por todas estas razones, las investigaciones han ido enfocadas hacia la resolución de problemas parciales fácilmente interpretables y hacia la mejora de eficiencia computacional en tiempo y en equipo invertido.

De aquí surge la necesidad de desarrollar un método que, si bien pueda contener alguna simplificación, presente la robustez y flexibilidad necesarias para poder desarrollarlo fácilmente y resolver un amplio rango de problemas del contacto entre componentes mecánicos. En el presente artículo se ha desarrollado una metodología que cumple con esas condiciones. Para ello se partirá de la determinación de la energía total de contacto entre dos cuerpos, para después minimizarla y obtener la distribución de carga. Gran parte de la eficacia de esta metodología se debe a la formulación matricial del problema energético.

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El contacto entre dos cuerpos se produce normalmente en áreas de superficie cuyas dimensiones cambian dependiendo de la fuerza que ejercen los cuerpos entre sí. Estas áreas son elipses en el caso de que las dos superficies sean curvas. Cuando la elipse de contacto tiene una dimensión que predomina sobre la otra, se puede aproximar esa superficie a una línea de contacto en la que cada punto se puede estudiar bajo la hipótesis de deformación plana.

En muchos componentes mecánicos, como los engranajes, se procura que la carga se reparta sobre una línea cuya longitud no aumente al aumentar la fuerza de contacto y cuyo ancho dependa de la fuerza que actúe en cada punto de la línea. Además, en estos casos existe un predominio de las deformaciones estructurales frente a las deformaciones superficiales en los puntos en contacto, con lo que a la hora de estimar la energía del sistema se pueden despreciar las deformaciones locales frente a las estructurales.

La línea de contacto se puede discretizar a su vez en cargas puntuales equidistantes, quedando el problema reducido a calcular la distribución de fuerzas entre los distintos puntos de contacto entre dos cuerpos. Habitualmente se conoce la fuerza total que dos cuerpos están ejerciendo entre sí. Esta fuerza se distribuirá entre los distintos puntos de la línea de contacto de forma que la energía total de deformación elástica sea mínima.

La obtención de la distribución de carga pasaría por desarrollar una expresión de la energía de deformación del sistema y minimizarla, obteniendo el reparto de carga entre los distintos puntos de discretización. En este artículo se ha seguido este procedimiento utilizando el método de las condiciones de Kuhn-Tücker y, además, el método de los multiplicadores de Lagrange cuya utilización, por ser más conocido, puede ayudar a entender mejor la metodología usada. Por los dos métodos se llega a la misma ecuación matricial a partir de la cual se puede despejar de forma directa el vector de fuerzas.

El objetivo de este trabajo ha sido la obtención de la ecuación matricial, de forma que se pueda trabajar directamente con ella para resolver un amplio rango de problemas de contacto. Para ello, el artículo se ha dividido en las siguientes secciones:

- Obtención de una expresión de la energía de deformación de un sistema formado por dos cuerpos con varios puntos en contacto y la formulación de este problema en forma matemática.
- Minimización de la energía elástica de deformación usando dos métodos: las condiciones de Kuhn-Tücker y el método de los multiplicadores de Lagrange.
- Utilización de los resultados obtenidos para deducir una expresión matricial, con la que se obtiene directamente la distribución de fuerzas.
- Demostración de su utilidad mediante la resolución de un problema de reparto de carga entre filetes de un tornillo de potencia.

ENERGÍA DE DEFORMACIÓN EN EL CONTACTO ENTRE DOS CUERPOS ELÁSTICOS

El modelo de cuerpo elástico escogido para explicar los conceptos utilizados es el de la viga en voladizo de sección variable. Su equivalencia al comportamiento del diente recto de engranaje se ha utilizado en otros trabajos[11] y se puede suponer válida para desplazamientos pequeños. También se puede suponer que el comportamiento elástico es lineal, es decir, la magnitud de los desplazamientos y las tensiones en cada punto son proporcionales a la carga aplicada. Esta nueva suposición implica que el material es elástico y que las deformaciones son pequeñas.

La energía de deformación U es función cuadrática de la fuerza aplicada F_i y la rigidez del elemento mecánico k_i (Apéndice I).

$$U = \frac{1}{2} F_i^2 k(x) \tag{1}$$

Si dos vigas contactan en un punto y en ese punto actúan la una contra la otra con una fuerza unidad, tal como se muestra en la Figura 1, los desplazamientos en ambas vigas vendrán dados por la rigidez de cada una. La suma de ambos desplazamientos dará como resultado la rigidez del par de vigas.

La Figura 2 muestra cómo evoluciona la energía de deformación total para una carga unidad. Su forma coincide con la de la suma de las rigideces de ambos cuerpos cuando están en contacto en un sólo punto. La energía total de deformación será por lo tanto igual a la suma de las energías de deformación de los dos cuerpos y se denomina habitualmente como rigidez de contacto. Esta energía será

$$U = \frac{1}{2}(F_i\delta_1 + F_i\delta_2) = \frac{1}{2}{F_i}^2(k_1(x) + k_2(h-x)) \tag{2}$$

donde δ_1 y δ_2 son las flechas respectivas en los puntos de contacto.

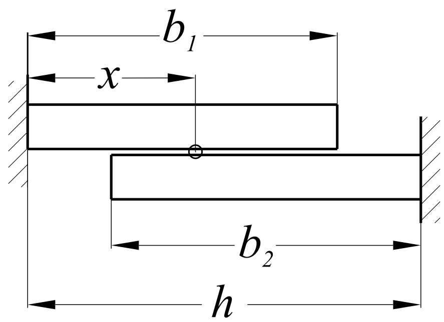

Figura 1. Sistema de dos cuerpos elásticos con un punto en contacto

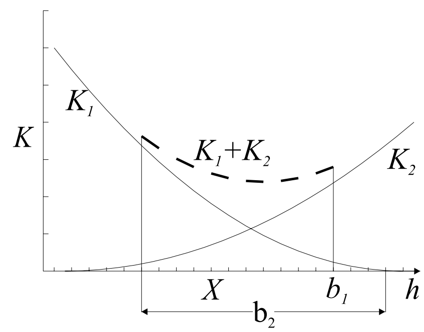

Figura 2. Evolución de la rigidez en función de la localización del punto de contacto

Cuando el contacto entre los cuerpos se produce en dos puntos, la energía ya no depende únicamente de las propias rigideces, pues el desplazamientos del punto donde actúa una fuerza también depende del valor del esfuerzo aplicado en el otro punto. A la flecha de la viga en el punto x cuando actúa una fuerza unidad en el punto x_i se le va a llamar $\delta(x, x_i)$.

Cuando actúan dos fuerzas sobre una viga, F_1 en x_1 y F_2 en x_2, el desplazamiento total en x_1 y en x_2 será

$$\begin{aligned} \delta_{T1} &= F_1\delta(x_1, x_1) + F_2\delta(x_1, x_2) \\ \delta_{T2} &= F_1\delta(x_2, x_1) + F_2\delta(x_2, x_2) \end{aligned} \tag{3}$$

Si el contacto se produce en dos puntos, a partir del valor de las fuerzas aplicadas, se podrá obtener la expresión de la energía total de deformación de la viga U_1

$$2U_1 = F_1\left(F_1\delta_1\left(x_1, x_1\right) + F_2\delta_1\left(x_1, x_2\right)\right) + F_2\left(F_1\delta_1\left(x_2, x_1\right) + F_2\delta_1\left(x_2, x_2\right)\right) \tag{4}$$

donde el subíndice 1 de U_1 y δ_1 denota la viga 1.

La ecuación (4) se puede expresar de forma más clara utilizando la notación matricial

$$2U_1 = [F_1F_2]\begin{bmatrix} \delta_1(x_1, x_1) & \delta_1(x_1, x_2) \\ \delta_1(x_2, x_1) & \delta_1(x_2, x_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \tag{5}$$

Cuando los dos cuerpos están en contacto en dos puntos, la energía total de deformación es igual a la energía de deformación de un cuerpo más la del otro. Teniendo en cuenta que:

- F_1 y F_2 son iguales para los dos cuerpos por el principio de Newton de acción-reacción.
- Si la ecuación de la elástica de la segunda viga δ_2', (ζ, ζ_i) viene expresada en coordenadas locales ζ, se realizará un cambio de coordenadas para expresarla en las mismas coordenadas que δ_1, que se tomarán como coordenadas globales, con lo que se podrá operar con las dos elásticas en el mismo sistema de referencia.

La energía total de deformación será

$$U = U_1 + U_2 = \frac{1}{2}\,[F_1 F_2]\begin{bmatrix} \delta_1(x_1,x_1)+\delta_2(x_1,x_1) & \delta_1(x_1,x_2)+\delta_2(x_1,x_2) \\ \delta_1(x_2,x_1)+\delta_2(x_2,x_1) & \delta_1(x_2,x_2)+\delta_2(x_2,x_2) \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad (6)$$

lo que se suele expresar de forma más simplificada

$$U = \frac{1}{2}\,[F_1 \quad F_2]\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} \qquad (7)$$

y generalizando para muchos puntos en contacto

$$U = \frac{1}{2}[F]^T[C][F] \qquad (8)$$

en donde

$$c_{ij} = \sum_k \delta_k(x_i, x_j); \quad k = 1, 2 \qquad (9)$$

En este punto cabe hacer dos observaciones:

- Por el teorema de reciprocidad de Raleigh-Betti se tiene que $c_{ij} = c_{ji}$, con lo que la matriz de coeficientes es simétrica.
- Si se admite que el desplazamiento de cada punto se produce únicamente por la fuerza que actúa en dicho punto, la matriz $[C]$ (matriz de los desplazamientos) es diagonal, por lo que no hace falta el conocimiento de la elástica en cada estado de carga para la elaboración de $[C]$, sino únicamente de la rigidez de cada punto.

Por el principio de mínima energía, la configuración final de tensiones y deformaciones de un sistema será tal que su energía interna alcance un valor mínimo estacionario; ya que, en virtud el teorema de Menabrea, un sistema hiperestático adquiere la configuración final de fuerzas y deformaciones que haga mínima la energía de deformación elástica.

De acuerdo con ello, en el caso del contacto entre dos cuerpos elásticos en varios puntos, el vector de fuerzas se puede hallar minimizando la función de energía U, sujeta a las restricciones de que la fuerza total es igual al valor dado y que no existe adhesión entre las superficies, y por lo tanto, todas las fuerzas deben ser positivas.

La formulación matemática del problema tendría el siguiente enunciado:

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & \displaystyle\sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j & \\ & \displaystyle\sum f_i = F & \text{(a)} \\ & f_i \geq 0 & \text{(b)} \\ & i = 1 \dots n & \end{array} \qquad (10)$$

Las incógnitas de este problema son las fuerzas puntuales f_i. La restricción (a) de la ecuación (10) se deduce de que la fuerza total con que actúa un cuerpo contra otro F es un dato de partida y que las fuerzas puntuales tienen todas la misma dirección. La restricción (b) de la ecuación (10) se basa en que en el contacto no hay fuerzas de adhesión o atracción, ya que antes de que hubiera tracción dejaría de haber contacto.

La formulación del problema se ha realizado considerando dos sólidos con varios puntos en contacto, aunque en realidad se trata de áreas de contacto. En el caso de elementos transmisores de potencia como engranajes, tornillos, etc., estas áreas se simplifican por líneas de contacto cuando hay una dimensión que predomina sobre la otra y, a su vez, se pueden discretizar estas líneas de contacto en una sucesión de cargas puntuales con el fin de simplificar los cálculos.

MÉTODOS DE MINIMIZACIÓN DE LA ENERGÍA DE DEFORMACIÓN

Para la resolución matemática del problema planteado en la ecuación (10) existen varios métodos. La función objetivo es cuadrática, lo que hace que no se puedan aplicar las técnicas de programación lineal que son las más extendidas para resolver problemas de optimización. Las rutinas típicas de programación cuadrática tienen el inconveniente de ser iterativas y laboriosas y pueden surgir problemas de convergencia. También existe la posibilidad de linealizar el problema como hizo Vijayarangan *et al.*[12] para solucionar el contacto entre cuerpos. Uno de los métodos adoptados ha sido el de asemejar el problema al tipificado de Kuhn-Tücker mucho más general y suficientemente conocido. Otro método ha consistido en la aplicación del método de los multiplicadores de Lagrange. Ambas técnicas ya fueron usadas para modelizar el contacto en procesos de compactación pulvimetalúrgica por Cante *et al.*,[13] pero definiendo el problema de forma integral.

Método de las condiciones de Kuhn-Tücker

El problema señalado anteriormente es equivalente al conocido como problema de Kuhn-Tücker,[14] por lo tanto, sus soluciones son equivalentes y bastará con solucionar el problema de Kuhn-Tücker, de carácter más general, una vez establecidas las condiciones de necesidad y suficiencia para la equivalencia del problema. El enunciado del problema de Kuhn-Tücker viene dado, según la versión de Reklaitis,[14] por la ecuación siguiente

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & f(x) & \\ \text{sujeto a} & g_j(x) \geq 0 & j = 1 \ldots J \\ & h_k(x) = 0 & k = 1 \ldots K \\ & x = \{x_1, x_2, \ldots, x_N\} & \end{array} \tag{11}$$

La equivalencia entre este enunciado y la ecuación (10) se hace patente introduciendo en el problema de Kuhn-Tücker las siguientes sustituciones

$$\begin{aligned} x_i &= f_i \\ f(x) &= U\{f\} = \sum_{i,j} f_i c_{if} f_j \\ g_i(x) &= f_i & J = N \\ h_k(x) &= \sum_{i=1}^{N} f_i - F & K = 1 \end{aligned} \tag{12}$$

Este problema, conforme a la teoría de Kuhn-Tücker, equivale a encontrar, además del vector $x_{N\times1}$, los vectores $u_{1\times J}$, y $v_{1\times K}$ que cumplen las condiciones de las expresiones (13) siguientes, siempre que se cumplan las condiciones de necesidad y suficiencia señaladas en el Apéndice II.

$$\begin{aligned} \nabla f(x) - \sum_{j=1}^{J} u_j \nabla g_j(x) - \sum_{k=1}^{K} v_k \nabla h_k(x) = 0 \\ u_j g_j(x) = 0 \\ u_j \geq 0 \end{aligned} \tag{13}$$

Haciendo las sustituciones en el problema equivalente y operando las condiciones (13), resulta que las u_i son nulas, quedando el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} 2f_i c_{ii} + \sum_{j \neq i} c_{ij} f_j - v = 0 \\ \sum_i f_i - F = 0 \end{aligned} \tag{14}$$

No se ha encontrado ningún significado físico a v, siendo un simple operador para calcular la solución.

Al hacer la equivalencia de Kuhn-Tücker han aparecido las variables c_{ij} y v, aumentando el número de ecuaciones pero también igualando su número al número de incógnitas, y eliminando las inecuaciones.

Lo usual en la solución de la mayoría de los problemas de Kuhn-Tücker es que la equivalencia no salga tan sencilla lo que obliga, como en los ejemplos presentados por Reklaitis,[14] a solucionarlos por tanteo. Las condiciones de necesidad y suficiencia se verifican en este caso, como se aprecia en el Apéndice II, lo que significa que la solución única que resuelve el problema es la auténtica, es decir, que las f_i de la solución del sistema de ecuaciones (14) constituyen la verdadera distribución de fuerzas que resuelven el problema entre dos cuerpos en contacto.

El tipo de fuerza puntual es singular al dar tensiones infinitas en el punto de aplicación de la carga, pero lo que interesan son las deformaciones estructurales y no las locales, por lo que el modelo se puede considerar válido. A su vez, si el número de puntos cargados es suficientemente elevado, la solución se aproxima más a la verdadera. Asignando a cada fuerza puntual un área, se obtiene la distribución de presiones sobre la superficie de contacto.

Método de los multiplicadores de Lagrange

Se presenta ahora una versión del problema solucionado por el método de los multiplicadores de Lagrange. En el cálculo de la distribución de carga por este método, el sistema de ecuaciones final es idéntico al que resulta de la formulación por las condiciones de Kuhn-Tücker.

Partiendo del problema mostrado en la ecuación (10) se pueden sustituir las inecuaciones de la restricción (b) introduciendo valores a_i como incógnitas, quedando el problema definido de la forma

$$\begin{array}{lll} \text{minimizar} & \sum_i \sum_j f_i c_{ij} f_j 6 & \\ & \sum f_i = F & \text{(a)} \\ & f_i - a_i^2 = 0 & \text{(b)} \\ & i = 1 \dots n & \end{array} \tag{15}$$

donde con las a_i se han introducido n variables y n restricciones, eliminando las inecuaciones. La función a minimizar, siguiendo el método de los multiplicadores de Lagrange, tendrá la forma

$$U = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} f_i c_{ij} f_j - \lambda \left(\sum_{i=1}^{n} f_i - F \right) - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i (f_i - a_i^2) \tag{16}$$

Siguiendo el método, se procede a hacer estacionaria la función U

$$\frac{\partial U}{\partial f_i} = 0 = 2f_i c_{ii} + \sum_{j\neq i} c_{ij} f_i - \lambda - \lambda_i \tag{17}$$

$$\frac{\partial U}{\partial a_i} = 0 = +2\lambda_i a_i \tag{18}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda_i} = 0 = -(f_i - a_i^2) \tag{19}$$

$$\frac{\partial U}{\partial \lambda} = 0 = -\left(\sum f_i - F\right) \tag{20}$$

De (18) se deduce que todos los λ_i son nulos, con lo que de (17) y (20) se obtiene un sistema de $n+1$ ecuaciones con $n+1$ incógnitas, que proporciona los valores de f_i y de λ. Este sistema de ecuaciones coincide con el proporcionado por las condiciones de Kuhn-Tücker, obtenido anteriormente, que de igual modo se puede representar en forma matricial, pues las ecuaciones son lineales, con lo que el sistema que queda es equivalente al dado en la expresión (14) con sólo sustituir v por λ.

Habitualmente, el multiplicador de Lagrange λ suele tener un significado físico concreto. En este caso no se ha encontrado, siendo un simple operador necesario para hallar la solución del problema.

Se puede percibir que los valores de las f_i proporcionados por el método de los multiplicadores de Lagrange son todos positivos, pues antes de que una fuerza f_i fuera negativa dejaría de haber contacto. Sin embargo, matemáticamente podría ocurrir que a_i fuera un número complejo. Una demostración intuitiva de que esto no ocurre es que, para que la energía fuera mínima y la fuerza total sea constante, una fuerza negativa f_i supondría que las fuerzas positivas tendrían que aumentar, con lo que la energía del sistema total aumentaría, con lo que se incumpliría el principio de mínima energía.

De todas formas, al estar demostrado matemáticamente que las condiciones de Kuhn-Tücker se cumplen, se puede extender esta conclusión al método de los multiplicadores de Lagrange, pues los resultados son los mismos.

MÉTODO PROPUESTO

Las soluciones al reparto de carga dadas por las condiciones de Kuhn-Tücker y por los multiplicadores de Lagrange expresadas en (14) tienen su forma matricial del siguiente modo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \\ 2c_{11} & c_{12} & \dots & c_{1(n-1)} & c_{1n} & -1 \\ c_{21} & 2c_{22} & \dots & \dots & c_{2n} & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_{n1} & \dots & \dots & \dots & 2c_{nn} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

La matriz cuadrada de la ecuación (21) se obtiene directamente a partir de la matriz de desplazamientos $[C]$, añadiendo la primera fila y la última columna y multiplicando por dos los términos de la diagonal principal. En adelante se le va a llamar matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$ y tiene unas dimensiones de $(n+1)\times(n+1)$.

De la expresión (21) se puede despejar el vector de fuerzas f_i, invirtiendo la matriz de desplazamientos modificada $[C^*]$. El sistema de ecuaciones no es homogéneo y la matriz diagonalizable, con lo que la solución consistente en el vector de fuerzas f_i será única.

Para la obtención de los valores de la matriz de los desplazamientos $[C]$ se puede recurrir a un método analítico, como se ha realizado en el ejemplo ilustrativo que se ha expuesto al final del trabajo, o mediante el método de los elementos finitos (MEF). Este último método se puede aplicar directamente, modelizando simultáneamente los dos componentes en contacto mediante los elementos de contacto, de los que suelen disponer los distintos códigos, pero esto requiere una gran capacidad computacional y mucho tiempo de cálculo, pues el problema no es lineal. Otra posibilidad es utilizar el MEF para hallar la matriz de los desplazamientos de cada uno de los elementos, solucionando los dos problemas correspondientes a los dos sólidos en contacto por separado. Se combinan ambas matrices y se opera para obtener la matriz de los desplazamientos modificada $[C^*]$, pudiendo a partir de la ecuación (21) obtener directamente el vector de fuerzas f_i sin necesidad de recurrir a elementos no lineales de contacto y consiguiendo una mayor precisión al haber resuelto cada uno de los elementos por separado, permitiendo usar un mallado mucho más fino en cada caso.

El vector solución de las ecuaciones (21) y (22) es la primera columna de la inversa de la matriz de coeficientes multiplicado por F.

El método presentado es simple y económico:

- La restricción sólo aumenta la matriz final en una fila y una columna.
- Sólo se necesita el cálculo de una columna de la matriz inversa. Esto evita una gran cantidad de operaciones al ordenador.

Por el método de diagonalización de Gauss-Jordan, el aumento de la matriz complementaria sería sólo en una columna con el valor F en la primera fila y cero en el resto, en lugar de añadir tantas como filas hay en la matriz original. Con esto se tienen $n^2(n-1)$ operaciones algebraicas menos que usando el método de diagonalización completo, siendo n la dimensión de la matriz a invertir

Cuando se tienen diferentes zonas de contacto cuyos desplazamientos son independientes entre sí (ej. cuando dos o más pares de dientes de engranaje están en contacto simultáneamente), la matriz $[C^*]$ tiene muchos ceros, pues el desplazamiento producido en los puntos de una zona de contacto no influye en el desplazamiento de otra. Las ecuaciones matriciales tendrían una forma como la que sigue

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \\ [C]_1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & [C]_2 & \dots & 0 & -1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & [C]_N & -1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \{f\}_1 \\ \{f\}_2 \\ \dots \\ \{f\}_N \\ v \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{Bmatrix} \tag{22}$$

siendo $[C]_1$, $[C]_2$,... $[C]_N$ las matrices de desplazamiento correspondientes a cada zona de contacto, con la diagonal duplicada.

Cuando la matriz de los desplazamientos $[C]$ es diagonal ($c_{ij} = 0$ cuando $i \neq j$), de la ecuación (21) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$v = \frac{2F}{\displaystyle\sum_i \frac{1}{c_{ii}}} \tag{23}$$

$$f_i = \frac{\dfrac{1}{c_{ii}}}{\displaystyle\sum_j \frac{1}{c_{jj}}} F \tag{24}$$

De esta última expresión se deduce que cuanto menor es c_{ii}, mayor es la fuerza soportada por el punto i, por lo que se podría decir que en la línea de contacto entre dos cuerpos cuya evolución de la rigidez tiene el mínimo en un punto intermedio (como la línea discontinua de la Figura 2), la distribución de fuerza tendrá un máximo en el punto donde está el mínimo de rigidez conjunta.

Ejemplo ilustrativo

Se ha escogido un ejemplo sencillo que muestra la utilidad del método. El problema elegido consiste en determinar el reparto de carga entre los filetes de un tornillo de potencia. Este tornillo de potencia tiene cuatro espiras que se han modelizado como cuatro dientes circulares que están equidistantes a lo largo del tornillo, como se aprecia en la Figura 3. La sección circular del tornillo es A_1, la sección de la tuerca a mover es A_2 y la distancia entre espiras es la longitud de paso P. La fuerza total aplicada F es igual a la suma de las reacciones en cada uno de los dientes F_1, F_2, F_3 y F_4. En el cálculo de la rigidez de cada punto de contacto se desprecia la deformación del diente frente al alargamiento del tornillo y de la tuerca en la dirección de su eje de giro.

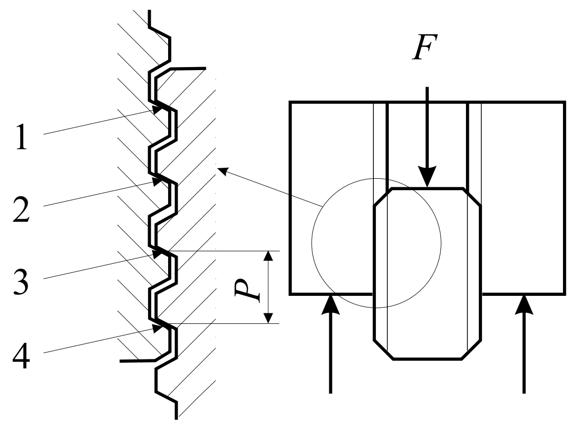

Figura 3. Configuración de un tornillo de potencia

La deformación de un sólido elástico de sección uniforme viene dado por

$$\Delta l = \frac{F}{EA} l \tag{25}$$

En el caso del tornillo, la deformación de un diente Δl_i será la suma de la deformación de cada uno de los tramos hasta el punto de aplicación de la carga. La deformación tomada en el tornillo a la altura del punto 1 es 0, porque la fuerza F en el tornillo se considera aplicada a la misma altura del punto de contacto del diente. En el punto 2 la deformación del tornillo será proporcional a la fuerza total y a la distancia deformada según la siguiente expresión

$$\Delta l_2 = \frac{F - F_1}{E_1 A_1} P = \frac{F_2 + F_3 + F_4}{E_1 A_1} P \tag{26}$$

En el punto 3 será la suma de la del punto 2 más la compresión en el tramo 2-3, sometido a una fuerza es $F_3 + F_4$

$$\Delta l_3 = \frac{F_3 + F_4}{E_1 A_1} P + \frac{F_2 + F_3 + F_4}{E_1 A_1} P = \frac{F_2 + 2(F_3 + F_4)}{E_1 A_1} P \tag{27}$$

De este modo se puede determinar el desplazamiento de cada uno de los puntos en el tornillo y en la tuerca cuando se ejerce una fuerza total F, tal como se muestra en la Tabla I.

Punto	Tornillo	Tuerca
1	0	$(F_1 3 + F_2 2 + F_3)P/E_2 A_2$
2	$(F_2 + F_3 + F_4)P/E_1 A_1$	$(2F_1 + 2F_2 + F_3)P/E_2 A_2$
3	$(F_2 + 2F_3 + 2F_4)P/E_1 A_1$	$(F_1 + F_2 + F_3)P/E_2 A_2$
4	$(F_2 + 2F_3 + 3F_3)P/E_1 A_1$	0

Tabla I. Desplazamientos en los puntos de contacto en función de las fuerzas

La energía total de deformación será la suma de los productos de la fuerza que actúa en cada punto por su desplazamiento, tanto en el tornillo como en la tuerca. Arreglando los términos, queda la siguiente formulación matricial

$$E = P\,[\,F_1 \quad F_2 \quad F_3 \quad F_4\,] \begin{bmatrix} \frac{3}{E_2A_2} & \frac{2}{E_2A_2} & \frac{1}{E_2A_2} & 0 \\ \frac{2}{E_2A_2} & \frac{2}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1} & \frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2} & \frac{1}{E_1A_1} \\ \frac{1}{E_2A_2} & \frac{1}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1} & \frac{1}{E_2A_2} + \frac{2}{E_1A_1} & \frac{2}{E_1A_1} \\ 0 & \frac{1}{E_1A_1} & \frac{2}{E_1A_1} & \frac{3}{E_1A_1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \end{bmatrix} \tag{28}$$

El problema se resuelve minimizando la función anterior sujeta a la restricción de que la fuerza total sea igual a F y que cada una de las fuerzas sea positiva. El problema queda entonces resuelto aplicando la expresión (21), de donde se puede obtener la fuerza que soporta cada filete del tornillo.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2\frac{3}{E_2A_2} & \frac{2}{E_2A_2} & \frac{1}{E_2A_2} & 0 & -1 \\ \frac{2}{E_2A_2} & 2\left(\frac{2}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1}\right) & \frac{1}{E_1A_1} + \frac{1}{E_2A_2} & \frac{1}{E_1A_1} & -1 \\ \frac{1}{E_2A_2} & \frac{1}{E_2A_2} + \frac{1}{E_1A_1} & 2\left(\frac{1}{E_2A_2} + \frac{2}{E_1A_1}\right) & \frac{2}{E_1A_1} & -1 \\ 0 & \frac{1}{E_1A_1} & \frac{2}{E_1A_1} & 2\frac{3}{E_1A_1} & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ v \end{bmatrix} P = \begin{bmatrix} F \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{29}$$

Mediante la obtención de la primera columna de la matriz invertida se tiene la porción de fuerza que soporta cada filete. Este método también se puede aplicar al estudio del reparto de carga a lo largo de la línea de contacto en engranajes helicoidales, mediante la adecuada discretización, como hizo Estrems *et al.*,[16,17] y a otras muchas aplicaciones, como la determinación de aprietes en la sujeción de piezas a máquinas herramienta, etc.

CONCLUSIONES

Los métodos usados para la determinación de la distribución de carga entre dos cuerpos con varios puntos en contacto habitualmente son muy costosos en requerimientos de hardware y software y en la mayoría de los casos se tienen que resolver con algoritmos excesivamente complejos para alguien no especialista. Además, su planteamiento y resolución requiere una gran inversión en tiempo de preproceso, de resolución y de interpretación de los resultados. En este artículo se ha desarrollado un método que, si bien tiene alguna simplificación, presenta la robustez y flexibilidad necesaria para poder implementarlo fácilmente y resolver un amplio rango de problemas del contacto entre componentes mecánicos, con la suficiente aproximación.

Se ha realizado una formulación matricial de la energía de deformación de dos cuerpos con varios puntos en contacto entre sí. A partir del principio de mínima energía de deformación se ha obtenido el reparto de carga entre los distintos puntos en contacto, utilizando dos métodos de minimización de la energía: las condiciones de Kuhn-Tücker y el más conocido de los multiplicadores de Lagrange.

Las soluciones obtenidas por ambos procedimientos son equivalentes y se les ha dado una formulación matricial que posee las siguientes ventajas:

- La solución se obtiene de modo directo, a partir de un sistema de n ecuaciones con n incógnitas.
- Al solucionar el sistema de ecuaciones se realizan $n^2(n-1)$ operaciones menos que la inversión habitual de Gauss-Jordan, ya que la matriz de términos independientes sólo tiene un elemento no nulo.

Por último se ha mostrado un ejemplo ilustrativo, en el que el procedimiento se aplica para determinar el reparto de carga ente filetes de un tornillo de potencia.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se ha desarrollado en el marco del proyecto "Estudio de la Generación de Perfiles Conjugados para Dientes de Engranajes. Desarrollo de los Modelos de Comportamiento a Flexión y a Presión superficial", financiado por la Dirección General de Investigación Científica y Técnica (PB95-0876) y, complementariamente, por el Vicerrectorado de Investigación de la UNED. Los autores desean expresar su agradecimiento a ambas entidades.

REFERENCIAS

1 T.F. Conry y A. Seireg, "A Mathematical programming method for design of elastic bodies in contact", *Trans. ASME Journal of Applied Mechanics*, Vol. **2**, N° 6, pp. 387–392, (1971).

2 E. Yau, H.R. Busby y D.R. Houser, "A Rayleigh-Ritz approach to modeling bending and shear deflections of gear teeth", *Computers and Structures*, Vol. **50**, N° 5, pp. 705–713, (1994).

3 L.E. Wilcox, "Finite-element analysis pinpoints gear-tooth streses", *Machine Design*, Vol. **23**, pp. 88–92, (1978).

4 Y. Zhang y Z. Fang, "Analysis of transmission errors under load of helical gears with modified tooth surfaces", *Trans. ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **119**, N° 1, pp. 120–126, (1997).

5 Gleason Works, "Understanding tooth contact analysis", *Division of Gleason Works*, Rochester, NY, (1981).

6 F.L. Litvin, J.-S. Chen J. Lu y R.F. Handschuh, "Application of finite element analysis for determination of load share, real contact ratio, precision of motion and stress analysis", *Trans. ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **118**, N° 3, pp. 561–567, (1996).

7 ISO International Standard 6336, "Calculation of load capacity of spur and helical gears", *International Organization for Standardization*, Ginebra, (1996).

8 AGMA Information Sheet 908-B89, "Geometry factors for determining the pitting resistance and bending strength of spur, helical and herringbone gear teeth", *American Gear Manufacturers Association*, Alexandria, VA, (1989).

9 G. Henriot, "*Traité théorique et practique des engrenages*", Dunod, Paris, (1979).

10 Y. Cai, "Simulation on the rotational vibration of helical gears in consideration of the tooth separation phenomenon (A new stiffness function of helical involute tooth pair)", *Trans. ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **117**, N° 3, pp. 213–222, (1995).

11 Y. Zhang, F.L. Litvin, N. Maruyama, R. Takeda y M. Sugimoto, "Computerized analysis of meshing and contact of gear real tooth surfaces", *Trans. ASME Journal of Mechanical Design*, Vol. **116**, N° 3, pp. 697–700, (1994).

12 S. Vijayarangan y N. Ganesan, "Stress analysis of composite spur gear using the finite element approach", *Computers and Structures*, Vol. **46**, N° 5, pp. 869–875, (1993).

13 J.C. Cante, J. Oliver y S. Oller, "Simulación numérica de procesos de compactación de pulvimateriales. Parte 1: Modelo constitutivo, de contacto y fricción", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **14**, N° 1, pp. 67–99, (1998).

14 G.V. Reklaitis, A. Ravindran y K.M. Ragsdell, "*Engineering optimization. Methods and applications*", John Willey & Sons, Nueva York, pp. 191–200, (1983).

15 H. Arsham y M. Oblak, "Matrix inversion: a computational algebra approach", *International Journal of Mathematical Education Science and Technology*, Vol. **27**, N° 4, pp. 599–605, (1996).

16 M. Estrems, "Modelo de cálculo a presión superficial de engranajes cilíndricos de perfil de evolvente", *Tesis doctoral*, ETSI Industriales, Universidad de Murcia, (1998).

17 M. Estrems, F. Faura y J.I. Pedrero, "Distribución de carga entre dientes de engranajes helicoidales: Resolución por el método de los elementos finitos simplificado", *Revista Iberoamericana de Ingeniería Mecánica*, Vol. **3**, N° 1, pp. 21–30, (1999).

APÉNDICE I: RIGIDEZ DE UNA VIGA EMPOTRADA EN UN EXTREMO

Se define la rigidez K_1 de la viga en un punto P como el desplazamiento del punto P donde se aplica la carga y en la dirección de ésta cuando el valor de la misma es la unidad. Si se representa gráficamente la rigidez respecto de la distancia de P al empotramiento, se obtiene una curva creciente K como la mostrada en la Figura 2. Al ser un material elástico y los desplazamientos pequeños, el desplazamiento en un punto será proporcional a la carga aplicada, pues se trabaja dentro del ámbito lineal.

$$\delta = F_i k(x) \tag{30}$$

La energía de deformación de la viga será igual al producto de la fuerza por el desplazamiento en el punto de aplicación de la carga, y dividido por dos si se supone el proceso de aplicación es cuasiestático, con lo que al sustituir la ecuación (30) resulta que la energía de deformación U es función cuadrática de la fuerza aplicada.

$$U = \frac{1}{2} F_i \delta = \frac{1}{2} F_i F_i k(x) \tag{31}$$

Si dos vigas contactan en un punto y en ese punto actúan la una contra la otra con una fuerza unidad, tal como se muestra en la Figura 1, los desplazamientos en ambas vigas vendrán dados por la rigidez de cada una. La suma de ambos desplazamientos dará como resultado la rigidez del par de vigas. Al venir las rigideces en función de la distancia desde el punto de carga hasta el empotramiento, en una de las vigas se hará una traslación del origen de coordenadas de forma que la nomenclatura usada en las expresiones coincida con las entidades de acotación de la Figura 1.

APÉNDICE II: CONDICIONES DE NECESIDAD Y SUFICIENCIA

La solución del sistema de ecuaciones cumple las condiciones de necesidad y suficiencia de Kuhn-Tücker, para la resolución del problema (10). La condición de necesidad tiene la siguiente expresión

$$\begin{array}{rl} f, g, h & \in \mathcal{C}^1 \\ \nabla g, \nabla h & \text{independientes} \\ \exists \{x\} & \text{solución} \end{array} \tag{32}$$

con lo que

$$\Rightarrow \quad \exists \quad \{v\} \quad \text{y} \quad \{u\}; \qquad [\{x\}, \{v\}, \{u\}] \quad \equiv \quad \text{solución} \tag{33}$$

El problema que aquí se plantea, se trata un problema del continuo real, por lo que al hacer las equivalencias se obtiene, por un lado, que las funciones son continuas, como se puede observar en las equivalencias descritas en la Ecuación (12); por otro, que los gradientes independientes, dado que son constantes e iguales a la unidad en todos sus componentes; y por último, que la incógnita existe, pues el problema es real.

La condición de suficiencia se expresa del siguiente modo

$$\left\{ \begin{array}{cc} f(x) & \text{convexa} \\ g_i(x) & \text{cóncava} \\ h_k(x) & \text{lineal} \\ \{x\} & \text{solución} \end{array} \right\} \Rightarrow \{x\} \quad \text{mínimo de} \quad f(x) \tag{34}$$

Todas estas condiciones las cumple el problema de modo evidente si se observan las transformadas (12), por lo que la solución del problema (10) dado por el sistema de ecuaciones matricial (21) es la óptima.