

# EVALUACIÓN DE LAS INTEGRALES SINGULARES DEL M.E.C. TRIDIMENSIONAL MEDIANTE TRANSFORMACIONES NO LINEALES

J. DOMÍNGUEZ

L. GRACIA

y

M. DOBLARÉ

*Departamento de Ingeniería Mecánica,  
Centro Politécnico Superior. Universidad de Zaragoza,  
María de Luna 3, 50015, Zaragoza (España)*

## RESUMEN

Se presenta en este trabajo una técnica para la evaluación de las integrales singulares que aparecen en el Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad tridimensional, basada en la utilización de transformaciones de coordenadas no lineales, tales como las utilizadas en el caso bidimensional.

## SUMMARY

A new technique for the computation of the singular integrals that appear in the Boundary Element Method in 3-D Elasticity is presented. It is based on the use of non-linear transformations of coordinates, as the ones used in the 2-D case.

## INTRODUCCIÓN

Uno de los aspectos esenciales para la aplicación del B.E.M. en su versión directa lo constituye el cálculo preciso de las integrales que aparecen en los coeficientes del sistema de ecuaciones resultado de la discretización del problema. Este cálculo exigió desde el principio la utilización de técnicas especiales, debido a las singularidades inherentes al integrando (singularidades débiles o singularidades en el sentido de Cauchy).

En el caso de discretizarse con elementos planos con aproximación constante o lineal, es posible realizar estas integraciones analíticamente<sup>2</sup>. Sin embargo, la extensión a elementos curvos es, en general, inviable. Otras muchas técnicas semianalíticas, como la suma y la resta de la singularidad esencial, pueden utilizarse con una precisión aceptable. Naturalmente, en este caso es necesario conocer el coeficiente de la singularidad para cualquier tipo de problema e interpolación, lo que exige un esfuerzo

Recibido: Abril 1995

analítico inicial, y sobre todo la necesidad de incorporar programaciones diferentes para cada tipo de problema perdiendo sistematización<sup>2</sup>.

Otra alternativa consiste en utilizar cuadraturas "ad hoc"<sup>2</sup>, o técnicas particulares, siendo posible obtener ciertos elementos singulares mediante la consideración de casos especiales (desplazamientos como sólido rígido). De nuevo se encuentran dificultades que surgen de la necesidad de utilizar distintos tipos de cuadratura para un mismo programa, y a veces la imposibilidad o dificultad de encontrar o programar dichos estados especiales de "deformación". Esta alternativa ha sido la más utilizada.

La necesidad de estas técnicas ha sido cada vez más imperiosa, por cuanto las técnicas de elementos de contorno adaptables han supuesto un gran salto cualitativo al imponer funciones de aproximación de alto grado y un gran número de nodos situados en el interior de los elementos.

También sería deseable la extensión de estas técnicas a situaciones quasi-singulares como las que se producen cuando el punto de colocación está muy próximo al elemento sobre el que se integra, lo que ocurre en el caso de elementos contiguos con longitudes muy distintas, en el cálculo de variables en puntos internos próximos al contorno y sobre todo en la versión  $p$ -adaptable donde los puntos de colocación pueden ubicarse muy próximos al contorno del elemento. La deseable completa libertad en la discretización hace necesario plantearse también este problema como uno de los más interesantes a resolver.

Por consiguiente, parece necesario buscar una cuadratura suficientemente robusta capaz de acometer de forma precisa y eficiente la integración de los términos singulares de diversos tipos que aparecen en la formulación del MEC, como los correspondientes a las situaciones apuntadas anteriormente. En realidad, existen cuadraturas especialmente indicadas para la integración de distintos tipos de integrando singular ( $\ln r$ ,  $1/r$ , ...)<sup>2</sup>; sin embargo, sería necesario incluir gran cantidad de fórmulas de este tipo ya que en las más precisas de ellas los pesos y abscisas dependen de la posición de la singularidad en el interior del intervalo (que es variable en la versión  $p$ -adaptable, por ejemplo).

La última posibilidad consiste en utilizar cuadraturas estándar y transformaciones no lineales del intervalo de integración que conduzcan a integrandos mejor condicionados o regulares. En problemas bidimensionales varias han sido propuestas<sup>1</sup>. No obstante, todavía no se ha extendido su uso al caso tridimensional.

## EVALUACIÓN DE LOS COEFICIENTES SINGULARES

Al margen de otro tipo de posibilidades para la evaluación de integrales con singularidad tipo Cauchy, la idea que se persigue con la transformación no lineal que se va a proponer es la de regularizar el integrando en las proximidades de la singularidad, realizando una transformación del espacio de integración real  $(x, y)$  en otro espacio  $(\xi, \eta)$  sobre la que se integra. Los objetivos de la transformación son:

- Agrupar los puntos de integración en torno a la singularidad  $(\xi_s, \eta_s)$ , para así evaluar mejor las contribuciones mayores de la integral.
- Aproximar el jacobiano a cero en las proximidades del punto singular  $(\xi_s, \eta_s)$ .

- Obtener variaciones suaves del jacobiano en el entorno del punto singular  $(\xi_s, \eta_s)$ .

Para poder utilizar las transformaciones unidimensionales, se define en primer lugar un sistema de referencia en coordenadas cilíndricas  $(r_{\xi\eta}, \theta_{\xi\eta})$  con centro en el punto singular (Figura 1). La posición de un punto cualquiera  $(\xi, \eta)$  en este espacio de integración viene dada por

$$\begin{aligned}\xi &= \xi_s + r_{\xi\eta} \cos \theta_{\xi\eta} \\ \eta &= \eta_s + r_{\xi\eta} \sin \theta_{\xi\eta}\end{aligned}\quad (1)$$

Se logra con ello desacoplar el problema de integración singular en un espacio bidimensional en dos de espacio unidimensional, en el sentido de la variación de las coordenadas cilíndricas definidas. Por otra parte la variación para la coordenada cilíndrica vendrá dada por

$$\theta_{\xi\eta} = \theta_i + (1 + \chi) \frac{\theta_f - \theta_i}{2} \quad (2)$$

siendo  $\theta_i, \theta_f$  los ángulos inicial y final de las cuatro zonas en que los radio-vectores que unen el punto singular con los vértices del recinto de integración dividen el mismo. Los recintos triangulares se estudian como cuadriláteros degenerados en uno de sus lados, con lo que valen todas las consideraciones que aquí se tengan en cuenta, siendo ahora tres el número de zonas.  $\chi$  es la coordenada del punto de Gauss utilizado en la cuadratura estándar, definida en el intervalo  $(-1, 1)$ .

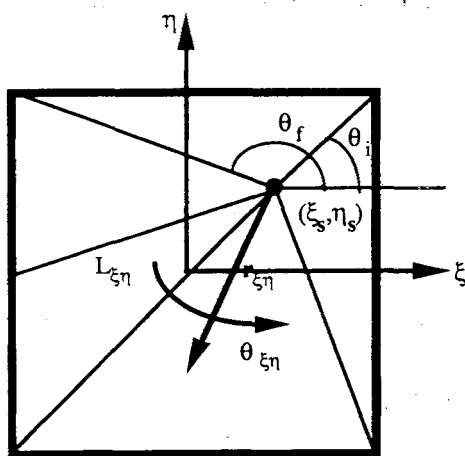


Figura 1. Espacio de integración elegido en la transformación.

La variación de la coordenada radial, por ejemplo, en la forma

$$r_{\xi\eta} = A + B(1 + \zeta) + C(1 + \zeta)^2 + D(1 + \zeta)^3 \quad (3)$$

se obtiene teniendo en cuenta los objetivos antes enumerados que se pretendían asegurar para la transformación no lineal. Las condiciones que se imponen a la transformación

anterior son, siendo  $\zeta$  la coordenada del punto de Gauss utilizado en la cuadratura estándar y definida en el intervalo  $(-1, 1)$

- $r_{\xi\eta}(\zeta = -1) = 0$
- $r_{\xi\eta}(\zeta = 1) = L_{\xi\eta}$
- $\left(\frac{dr_{\xi\eta}(\zeta)}{d\zeta}\right)_{\zeta=-1} = 0$
- El término dominante en la transformación no debe depender de  $\theta_{\xi\eta}$ .

Hay que ser riguroso en el tipo de exigencias que se le hacen a la función, ya que transformaciones que obvian algunas de ellas, como se demuestra en [1], poseen errores implícitos. Con estas premisas, los mejores resultados, dentro de las pruebas realizadas, se han obtenido para la transformación

$$r_{\xi\eta} = C(1 + \zeta)^2 + \frac{L_{\xi\eta} - 4C}{8}(1 + \zeta)^3 \quad (5)$$

que cumple las tres primeras condiciones y donde sólo falta caracterizar el valor de  $C$  para que se cumpla la cuarta. Del análisis de la función anterior, realizando su derivada primera e igualando a cero, se obtienen dos extremos (máximos-mínimos) para los valores

$$\begin{aligned} \zeta &= -1 \\ \zeta &= \frac{-3L_{\xi\eta} - 4C}{3L_{\xi\eta} - 12C} \end{aligned} \quad (6)$$

Se desea que la función elegida no presente ningún valor extremo en el interior del intervalo de integración  $(-1 \leq \zeta \leq 1)$ , condición que debe cumplir el segundo de los valores anteriores, de donde se concluye que el valor de  $C$  está acotado entre 0. y 0.75. Los mejores resultados en las pruebas realizadas se obtienen para valores de  $C = 0.75$ , siendo éste el valor recomendado (Figura 2).

## RESULTADOS

Con el método anteriormente descrito se evaluaron las siguientes integrales sobre los dominios indicados en las figuras que se muestran a continuación.

- Evaluación de la integral  $\int_{\Omega} \frac{\cos \theta}{r^2} d\Omega$  sobre el dominio de la Figura 3.

Los resultados de la integración con el procedimiento descrito anteriormente se comparan con los resultados calculados analíticamente en la forma siguiente

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{\cos \theta}{r^2} d\Omega &= \int_0^{2\pi} \int_{\varepsilon}^L \frac{\cos \theta}{r^2} r dr d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta d\theta \int_{\varepsilon}^L \frac{dr}{r} = \\ &= \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln |r|_{\varepsilon}^L d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta [\ln L(\theta) - \ln \varepsilon] d\theta = \int_0^{2\pi} \cos \theta \ln L d\theta \quad (7) \end{aligned}$$

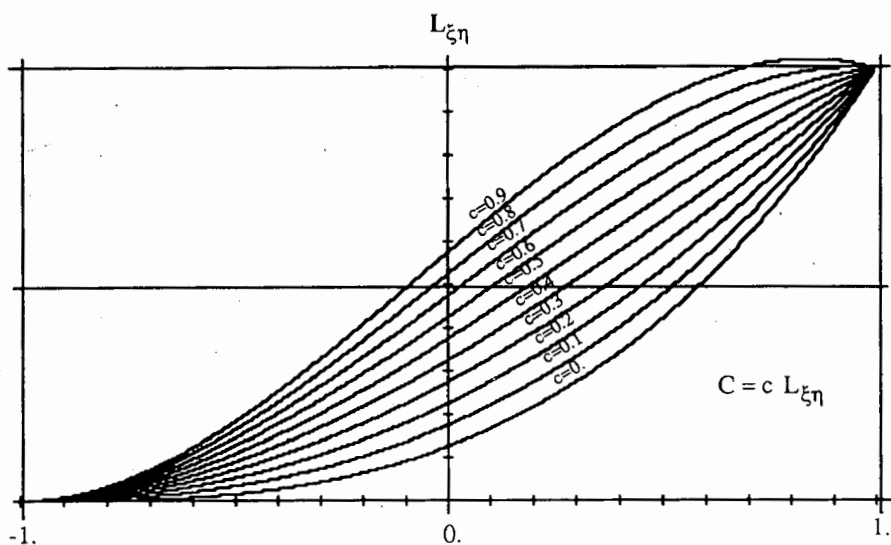
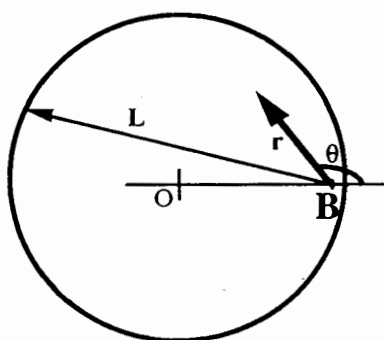


Figura 2. Función de transformación elegida dependiendo del valor  $C$ .



radio de la circunferencia = 1.  
distancia del centro O al punto B = 0.95

Figura 3. Dominio de evaluación de la integral.

Esta última expresión se calcula siguiendo una regla trapezoidal de elevado número de divisiones en dirección tangencial  $\theta$  y con una cuadratura estándar, también con un elevado número de puntos, en dirección radial  $r$ . El resultado obtenido de esta forma es  $-6.26227192682246$ .

A continuación se compara el resultado analítico con el obtenido al realizar la integración con el método propuesto (y en este caso particular por ser el dominio circular en dirección tangencial se considera una división de tipo trapezoidal, en vez de gaussiana como la propuesta). Se adjuntan en la Figura 4 dos curvas de error:

- Una de ellas considera un número de divisiones fijo en dirección tangencial ( $n_{\theta}=100$ ) y va variando el número de puntos de Gauss en dirección de la integración radial.
- La otra considera un número de puntos de Gauss fijo en dirección de la integración radial ( $n_r=100$ ) y va variando el número de divisiones de la regla trapezoidal en dirección tangencial.

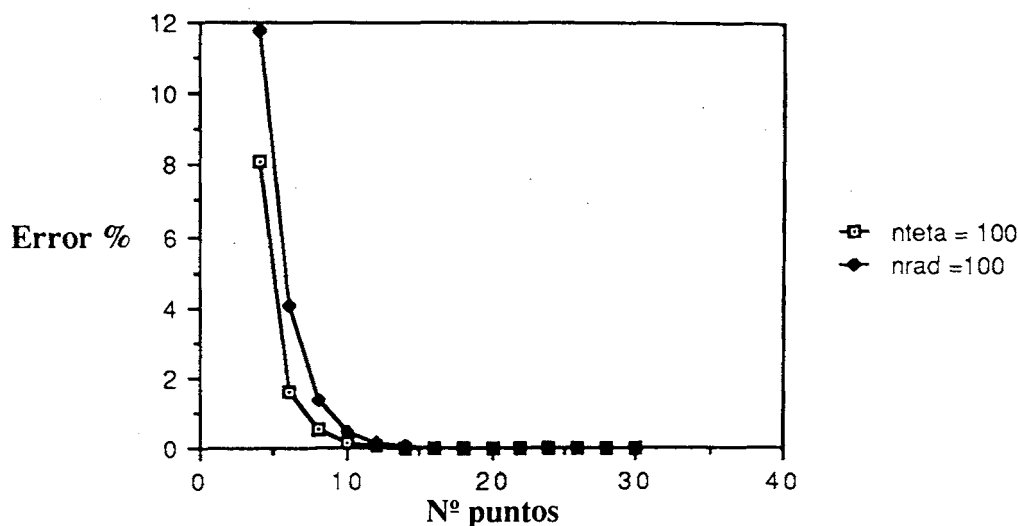


Figura 4. Error en la evaluación de la integral.

Como se puede apreciar en la gráfica a partir de 12 puntos de integración los errores son muy pequeños. En la Tabla I se muestra el error cometido para diversos números de puntos de integración. Como puede observarse, se obtienen unos resultados satisfactorios, habida cuenta de la cercanía del punto de singularidad al contorno exterior.

nteta=nrad	Error %
6	2.31517
8	1.90236
10	0.30117
12	0.22588
14	0.02881
16	0.02645
18	0.00176
20	0.00120

Tabla I. Error en los resultados según el número de puntos de Gauss en la integral 1.

- Evaluación de la integral  $\int_{\Omega} \frac{\cos \theta}{r^2} d\Omega$  sobre el dominio de la Figura 5.

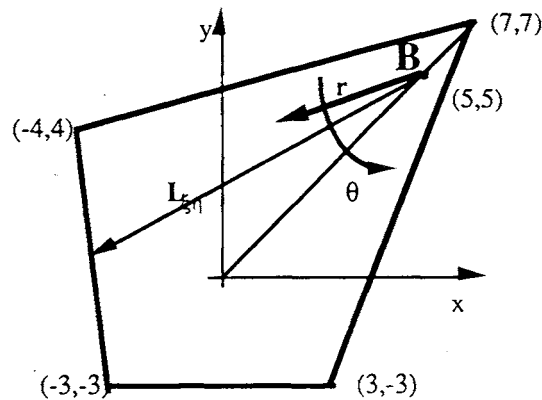


Figura 5. Dominio de evaluación de la integral.

Para un elevado número de divisiones en dirección tangencial  $\theta$ , se evalúa el valor de la integral de forma analítica como se hacía en el ejemplo anterior con una cuadratura estándar normal, también con un elevado número de puntos, en dirección radial  $r$ . El resultado obtenido de esta forma es  $-2.2306592923069$ .

A continuación se compara el resultado analítico con el obtenido al realizar la integración con el método propuesto. Se adjuntan en la Figura 6 dos curvas de error:

- Una de ellas considera un número de divisiones fijo en dirección tangencial (nteta=100) y va variando el número de puntos de Gauss en dirección de la integración radial.
- La otra considera un número de puntos de Gauss fijo en dirección de la integración radial (nrad=100) y va variando el número de divisiones de la regla trapezoidal en dirección tangencial.

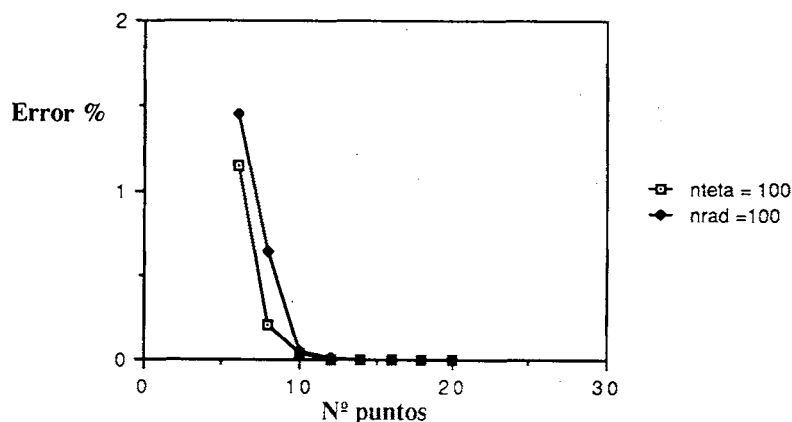


Figura 6. Error en la evaluación de la integral.

Si se toman diversos valores de  $nteta=nrad$ , se obtienen los errores que se muestran en la Tabla II.

Se observa que también en este ejemplo los resultados son altamente satisfactorios.

$nteta=nrad$	Error %
4	17.73531
6	1.69919
8	0.09135
10	0.060881
12	0.01174
14	0.000111
16	0.000077
18	0.000048
20	0.0000067
20	0.0000008

Tabla II. Error en los resultados según el número de puntos de Gauss en la integral 2.

El número de divisiones indicado en dirección circunferencial es el total, de manera que el número de divisiones para cada zona es directamente proporcional al ángulo subtendido por los radio-vectores que unen el punto singular con los vértices del recinto de integración. Se incluye la Figura 7 para  $nteta=1000$  y  $nrad=5$  que permite conocer la transformación utilizada sobre el dominio en cuestión en coordenadas paramétricas  $\zeta, \eta$  y en coordenadas cartesianas  $x, y$ .

Por último, una posibilidad alternativa consiste (se muestra un caso extremo, con el punto singular cerca del límite del recinto de integración, en la Figura 8) en subdividir el recinto de integración, de forma que se realiza una integración singular sobre el cuadrado que tiene como centro el punto singular y se integra de forma normal sobre los demás rectángulos.



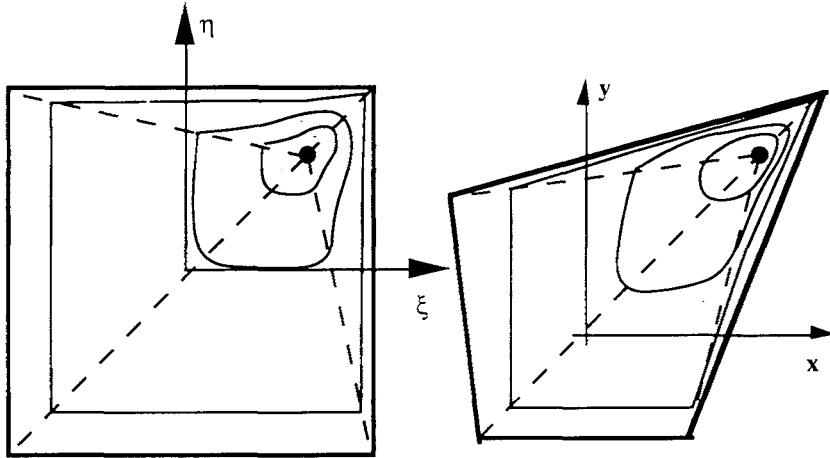


Figura 7. Disposición de los puntos de Gauss en la integración singular.

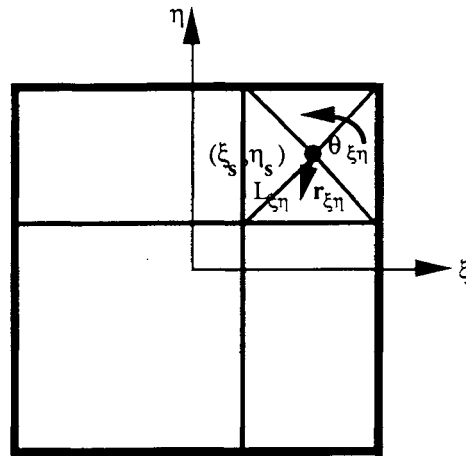


Figura 8. Alternativa de subdivisión del área clave para la evaluación de la integral singular.

Con esta alternativa, se obtienen unos resultados prácticamente idénticos que con el enfoque anterior, si bien la algorítmica es mucho más compleja, dado que el número de rectángulos en que se subdivide el recinto de integración puede ser variable, dependiendo de la posición del punto singular en el mismo (por ejemplo, si está cercano a un extremo y en el punto medio de su longitud  $\xi = 0.8$ ,  $\eta = 0$ , el número de rectángulos varía de 3 a 5).

La técnica de integración singular presentada en este artículo ha sido validada con otros integrandos, aportando igualmente resultados satisfactorios e incorporada con éxito en programas de elementos de contorno<sup>3</sup>. La simplicidad y eficacia de la misma

puede ser comparada con otras aproximaciones tradicionales mucho más complicadas, como las aportadas por Guiggiani y Gigante<sup>4</sup>, o la de Hayami<sup>5</sup>.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado un método general y a la vez eficiente para la evaluación de las integrales singulares y cuasi-singulares que aparecen en el Método de los Elementos de Contorno en Elasticidad tridimensional.

Frente a las técnicas habituales en Elasticidad tridimensional, se presenta como mucho más simple y fácil de programar.

La validez del mismo se ha verificado en base a una serie de ejemplos, algunos de los cuales se han presentado en el apartado anterior.

La técnica descrita se ha incorporado a un programa de elementos de contorno, proporcionando resultados completamente satisfactorios.

## AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha sido subvencionado en parte por la CICYT a través del Proyecto de Investigación ESP91-1029-C02-01.

## REFERENCIAS

1. E. Alarcón, M. Doblaré y J. Sanz-Serna, "Evaluación de integrales singulares y cuasisingulares en el Método de los Elementos de Contorno bidimensional mediante transformaciones no lineales", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. 7, 2, pp. 123-137, (1991).
2. M. Doblaré, "Computational Aspects of the Boundary Element Method", Chap. 4 in *Topics in Boundary Element Research*, Vol. 3, pp. 51-131, (Ed. C.A. Brebbia), Springer-Verlag (1987).
3. J. Domínguez-Hernández, "Un nuevo enfoque en el Método de los Elementos de Contorno. Aplicaciones en Elasticidad Tridimensional", *Tesis Doctoral*, C.P.S. de Ingenieros, Universidad de Zaragoza, (1992).
4. M. Guiggiani y A. Gigante, "A general algorithm for multidimensional Cauchy principal value integrals in the Boundary Element Method", *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol. 57, pp. 906-915, (1990).
5. K. Hayami y C.A. Brebbia, "Quadrature methods for singular and nearly singular integrals in 3D Boundary Element Method", *Boundary Elements X*, (Ed. C.A. Brebbia), Vol. 1, pp. 237-264, Springer-Verlag (1988).