

ESTUDIO DEL DESPLAZAMIENTO DE UNA INTERFASE LÍQUIDO-GAS USANDO EL MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS. CASOS PLANO Y AXISIMÉTRICO

MARÍA D. GIAVEDONI

y

FERNANDO A. SAITA

*Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química
(UNL-CONICET)*

*Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina
Tel.: + 54-42-559175 Fax: + 54-42-550944*

RESUMEN

En este trabajo se emplea el método de elementos finitos combinado con una adecuada parametrización de la superficie libre para analizar el desplazamiento en estado estacionario de una burbuja en un líquido contenido inicialmente entre dos placas planas paralelas o en un tubo capilar de paredes rectas. Los valores obtenidos para variables, tales como el espesor de la película formada entre la burbuja y la pared del tubo, coinciden muy bien con los resultados experimentales y teóricos de la bibliografía. La técnica permite obtener soluciones en un rango muy amplio del número Capilar que incluye y extiende el rango analizado previamente en la literatura. Los resultados muestran un tipo de recirculación de flujo que no había sido descrito previamente.

ANALYSIS OF THE DISPLACEMENT OF A GAS-LIQUID INTERFACE USING THE FINITE ELEMENT METHOD. PLANE AND AXISYMMETRIC CASES

SUMMARY

In this work the finite element method combined with a suitable parametrization of the free surface is employed in order to analyze the steady displacement of an inviscid bubble in the liquid that initially fills the space between two parallel plates or a straight capillary tube. Computed values of variables such as the thickness of the liquid film between the bubble and the tube wall are in very good agreement with experimental and theoretical results reported in the literature. The technique employed is able to obtain solutions for a wide range of the Capillary values previously analyzed. The results show a type of recirculating flow that appears to have been overlooked before.

Recibido: Febrero 1997

INTRODUCCIÓN

La recuperación asistida de petróleo por inyección de CO_2 y la intrusión de aire en las fibras saturadas con agua en la manufactura de papel, son dos ejemplos de procesos en los cuales el fenómeno fundamental consiste en el desplazamiento de un líquido por un gas. Si bien los procesos mencionados involucran geometrías complicadas, el estudio del problema en geometrías simples (tubo capilar recto o placas planas paralelas) es un prototipo útil para analizar flujos multifásicos con el objeto de obtener estimaciones sobre variables tales como la eficiencia del desplazamiento.

Este problema ha sido ampliamente estudiado tanto teórica como experimentalmente. En efecto, Fairbrother y Stubbs¹ obtuvieron una correlación empírica entre la fracción de líquido (m) que queda adherido a las paredes del tubo y el número capilar (Ca), cuando la velocidad característica del sistema es baja. Esta correlación fue verificada por Taylor² quien estableció el rango de validez de la misma y encontró que m tiende a un valor asintótico cuando el Ca alcanza valores mayores a 2.

Bretherton³ fue el primero en estudiar analíticamente el problema del desplazamiento estacionario de una burbuja en un tubo capilar considerando que para valores pequeños del número Capilar la forma de la burbuja se aparta de la forma correspondiente al caso estático sólo en la zona donde los efectos viscosos son importantes, es decir, cerca de la pared. Suponiendo que en esta región la aproximación de lubricación es adecuada para describir el flujo y la forma de la interfase, este autor obtuvo correlaciones analíticas para el espesor de la película líquida y para la caída de presión en función del número Capilar, que concuerdan muy bien con sus resultados experimentales en el rango $10^{-4} < Ca < 10^{-2}$ y con los de los autores mencionados previamente para Ca pequeño, pero mayor a 10^{-3} . Finalmente, Ratulowski y Chang⁴ extendieron el análisis asintótico de Bretherton para valores más bajos de Ca usando una formulación en longitud de arco de una forma compuesta de la ecuación de lubricación.

Los principales trabajos numéricos que estudian este problema son los de Reinelt y Saffman⁵, Shen y Udell⁶, Lu y Chang⁷ y Martínez y Udell⁸. El primero considera las dos geometrías mencionadas y obtiene soluciones para valores del Ca entre 10^{-2} y 2, empleando una técnica de diferencias finitas y dos mallas, una curvilínea que sigue a la interfase y otra rectilínea paralela a las fronteras sólidas. Shen y Udell resuelven por elementos finitos el problema axisimétrico en el rango de Ca $5 \times 10^{-3} - 0,1$ y finalmente, Lu y Chang trabajando con elementos de contorno encuentran soluciones para el caso plano desde valores del Ca próximos a 5×10^{-4} (que son los menores valores para los cuales existen soluciones numéricas) hasta $Ca = 2$. En todos los trabajos mencionados, las fuerzas de inercia se consideran despreciables y la forma de la interfase se determina iterando sobre el balance de tensiones normales.

En el trabajo que aquí se presenta se analiza numéricamente el desplazamiento en estado estacionario de un líquido por una burbuja gaseosa semiinfinita en un tubo capilar (problema axisimétrico) y entre dos placas planas paralelas (problema plano). La técnica numérica empleada determina la forma de la superficie libre simultáneamente con los campos de velocidad y presión, es decir, la solución completa del problema se obtiene en una sola etapa. Esta técnica fue desarrollada en la Universidad de

Minnesota^{9,10} y emplea el método de elementos finitos combinado con una adecuada parametrización de la superficie libre.

Las soluciones obtenidas cuando las fuerzas de inercia son despreciables, concuerdan muy bien con los resultados teóricos y experimentales de la bibliografía. Además, tanto en el caso plano como en el axisimétrico, la técnica numérica permite obtener resultados para valores del número Capilar tan pequeños como 5×10^{-5} que es un valor significativamente menor al existente en la bibliografía para cualquiera de las dos geometrías consideradas. Los campos de velocidad computados son sensibles al Capilar y muestran dos tipos de recirculación diferentes, uno de los cuales no ha sido descrito previamente en la literatura.

Finalmente, si bien en este problema el número de Reynolds no es muy alto, las soluciones obtenidas muestran que el espesor final de la película es sensible a las fuerzas de inercia, especialmente cuando el número Capilar es de orden uno. Este efecto se describe por primera vez en la literatura.

FORMULACIÓN MATEMÁTICA

Ecuaciones

Este trabajo considera el desplazamiento de un líquido viscoso y newtoniano por un gas inviscido en estado estacionario. El líquido se encuentra inicialmente contenido entre dos placas planas paralelas separadas entre sí por una distancia pequeña $2d$ (problema plano) o en el interior de un tubo capilar de paredes rectas y radio d (problema axisimétrico). Debido a que la longitud característica del sistema es muy pequeña, los efectos gravitatorios pueden considerarse despreciables frente a los efectos capilares y viscosos. En consecuencia, las ecuaciones que gobiernan el problema son Navier-Stokes y continuidad, que en su forma adimensional resultan

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0 \quad (1)$$

$$Re \, \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} - \nabla \cdot \mathbf{T} = 0, \quad \mathbf{T} = -\frac{p}{Ca} \mathbf{I} + [\nabla \mathbf{v} + (\nabla \mathbf{v})^T] \quad (2)$$

En (1) y (2) la velocidad característica es la velocidad de desplazamiento de la burbuja U y la longitud característica es d ; la presión está adimensionalizada con las fuerzas capilares (σ/d) . $Ca = \mu U / \sigma$ y $Re = \rho U d / \mu$ son el número Capilar y el número de Reynolds, respectivamente; ρ y μ son la densidad y la viscosidad de la fase líquida y σ es la tensión interfacial.

Condiciones de contorno

Si el sistema de referencia se mueve con velocidad U , las condiciones de contorno son las que se indican en la Figura 1.

La localización de la superficie libre se determina junto con los campos de velocidad y presión por medio de la condición cinemática

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (3)$$

Las condiciones de contorno que deben verificarse en la interfase establecen que no hay tensiones tangenciales y que las tensiones normales se balancean con las fuerzas capilares, es decir

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{n} = \frac{1}{Ca} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \mathbf{n} \quad (4)$$

En la ecuación anterior R_1 y R_2 son los radios de curvatura principales de la superficie libre

$$\frac{\mathbf{n}}{R_1} = \frac{d\mathbf{t}}{ds}, \quad \frac{\mathbf{n}}{R_2} = \frac{-\mathbf{n} \cdot \mathbf{e}_y}{y_{SL}} \mathbf{n} \quad (5)$$

en la ecuación (5) s es la longitud de arco. Notar que para flujos planos R_2 se hace infinito.

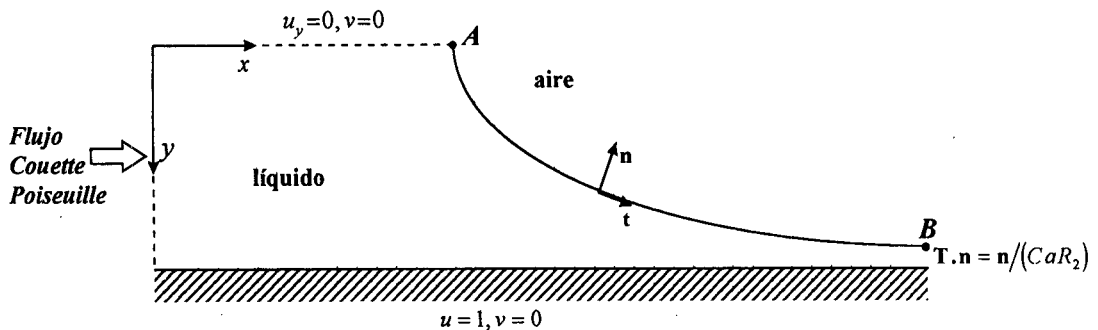


Figura 1. Sistema coordenado y condiciones de contorno

En el punto A se imponen la posición y la pendiente de la superficie libre y en B , a una distancia suficientemente grande de $x = 0$, se impone la pendiente. Sin embargo, el problema no está sobreespecificado porque existe una incógnita adicional, el espesor final de la película, que aparece como un parámetro en el perfil de velocidades impuesto en $x = 0$. El punto A es un punto de estancamiento ($\mathbf{v} = 0$).

MÉTODO NUMÉRICO

El sistema de ecuaciones se discretizó usando el método de elementos finitos. Los detalles de la técnica empleada y de la malla de elementos finitos generada se describen en¹¹. Se emplea interpolación mixta para aproximar el campo de velocidad y de presión y la superficie libre se parametriza por medio de *spines* siguiendo la propuesta de Kistler y Scriven¹⁰. Uno de los *spines* es obligado a seguir la posición del punto de

estancamiento (E) que aparece en la interfase para valores bajos del Capilar. Esta característica de la malla permite obtener soluciones para valores de este parámetro tan pequeños como 5×10^{-5} , al permitir un refinamiento local de la malla cerca de E y de esta manera resolver adecuadamente la velocidad interfacial en esta zona.

El conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales resultante de la discretización se resolvió en forma simultánea mediante el método de Newton y de un quasi Newton que se pone en funcionamiento cuando la norma del vector diferencia entre dos soluciones consecutivas es menor o igual a 10^{-2} . Esta estrategia permite reducir notablemente el tiempo de cómputo. El criterio de convergencia adoptado fue que la norma de este vector sea menor a 10^{-6} . Todos los cálculos fueron hechos en una computadora Alpha 1000 de Digital. El tiempo necesario para resolver una iteración completa usando el método de Newton es de aproximadamente 40 segundos de CPU cuando el número total de ecuaciones es 1986.

Para determinar una malla adecuada, se hicieron corridas variando el número de elementos y el número de nodos sobre la superficie libre. Algunos de los resultados obtenidos se presentan en Tabla I para $Ca = 5 \times 10^{-3}$ y para flujo plano. En esta tabla NE es el número total de elementos de la malla, $NNOFS$ es el número de nodos sobre la superficie libre, h_{∞} es el espesor final de la película que deja la burbuja al arrastrar al líquido, ΔP es la diferencia de presión entre los puntos A y B de la Figura 1 y (x_E, y_E) son las coordenadas del punto de estancamiento. Se observa que prácticamente no existen diferencias en los valores de las variables características del problema, aún cuando la diferencia en el número de elementos de las distintas mallas empleadas para obtenerlos sea grande. Resultados similares se obtuvieron para el caso axisimétrico.

NE	NNFOS	$1 - h_{\infty}$	ΔP	(x_E, y_E)
123	39	0,964	-1,096	(1,946; 0,103)
138	45	0,964	-1,096	(1,943; 0,104)
148	49	0,964	-1,096	(1,946; 0,104)

Tabla I. Resultados obtenidos con distintas mallas para h_{∞} , la posición del punto de estancamiento E y ΔP

Los resultados que se presentan en este trabajo fueron obtenidos con una malla que tiene 140 elementos y 49 nodos en la superficie libre. Para valores pequeños del número Capilar se obtienen mejores resultados si uno de los *spines* es obligado a seguir la posición del punto de estancamiento (E) y la malla se refina en los alrededores del mismo. Si el número Capilar aumenta, la película necesita una distancia mayor para relajarse. En consecuencia, la posición de la frontera $x = \infty$ se fijó teniendo en cuenta que el valor de h_{∞} sea insensible a la misma.

RESULTADOS

Se obtuvieron soluciones en el rango de Ca $5 \times 10^{-5} - 10$ y para cada valor de Ca entre $Re = 0$ y $Re_{\max}$. El valor de $Re_{\max}$ se obtuvo suponiendo que las propiedades y variables características del sistema toman los valores indicados en la Tabla II. En primer término vamos a considerar el caso en que las fuerzas de inercia son despreciables ($Re = 0$).

$U = 10^{-3} - 0,3 \text{ m/s}$
$\sigma = 15 \times 10^{-3} - 75 \times 10^{-3} \text{ N/m}$
$\mu = 10^{-3} - 10^{-1} \text{ Pa s}$
$d = 0,5 \times 10^{-3} - 10^{-3} \text{ m}$
$\rho = 10^3 \text{ kg/m}^3$

Tabla II. Propiedades físicas de los fluidos y variables características del sistema

Efectos inerciales despreciables

Soluciones del caso plano

La Figura 2 muestra el espesor final del film para valores del Ca entre 5×10^{-5} y 10. En esta figura se indican también los resultados de la teoría asintótica de Bretherton³ y los obtenidos mediante diferencias finitas por Reinelt y Saffman⁵ y con elementos de contorno por Lu y Chang⁷. Se observa que para $Ca < 10^{-2}$ nuestras soluciones concuerdan muy bien con los resultados teóricos de Bretherton ($h_{\infty} = 1,3375 Ca^{2/3}$), mientras que para valores mayores del Capilar las diferencias son significativas, resultado esperable si se tiene en cuenta que el análisis de Bretherton es válido para velocidades muy bajas ($Ca \rightarrow 0$). Para $Ca > 10^{-2}$ nuestras soluciones concuerdan bien con las obtenidas mediante diferencias finitas por Reinelt y Saffman y con elementos de contorno por Lu y Chang, pero tanto nuestras soluciones como las de Reinelt y Saffman difieren significativamente de estas últimas cuando $0,01 \leq Ca < 0,8$.

En la Figura 3 se ilustra la caída de presión entre los puntos A y B de la Figura 1 en función del Capilar. También se muestran los valores calculados con la teoría asintótica³ y los calculados numéricamente por Reinelt y Saffman⁵ y por Lu y Chang⁷. Para valores bajos del número Capilar, la solución que se presenta aquí es la que mejor se aproxima a la teoría asintótica de Bretherton ($\Delta P = 1 + 3,72 Ca^{2/3}$) y para valores del $Ca > 0,1$ nuestra solución coincide muy bien con los resultados reportados en⁵, pero no con los presentados en⁷. Es importante mencionar que la presión es la variable menos precisa

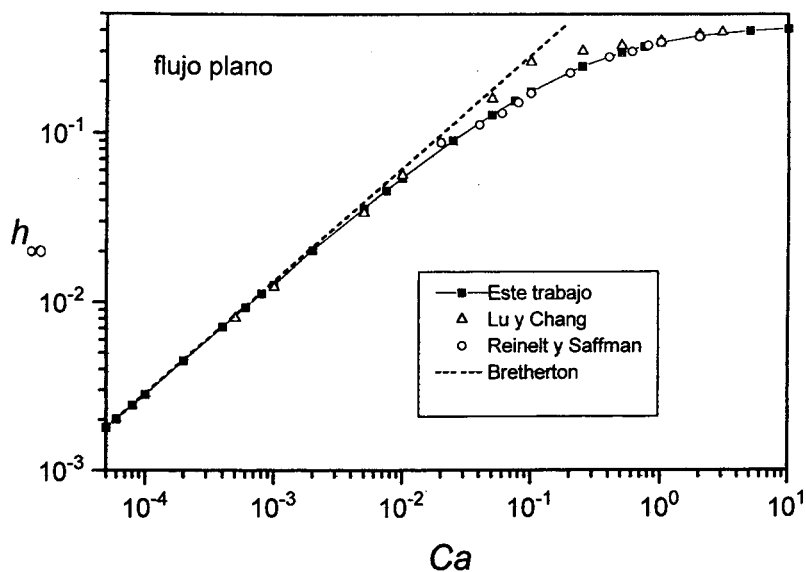


Figura 2. Valores del espesor de la película líquida en función del número Capilar (flujo plano)

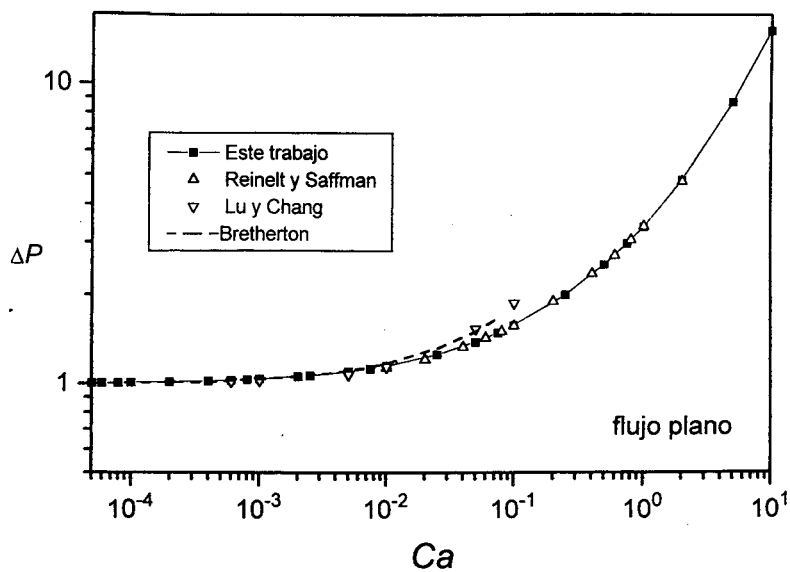


Figura 3. Valores de la caída de presión entre los puntos *A* y *B* (Figura 1) en función del número Capilar (flujo plano)

de las soluciones de Lu y Chang porque se determina a partir de la curvatura local del frente de la burbuja.

La forma adoptada por la interfase depende del número Capilar como puede

observarse en la Figura 4, donde se ve que para valores pequeños de este parámetro la interfase se asemeja a un arco de círculo, forma característica del caso estático donde las fuerzas capilares son las que dominan, mientras que a medida que la fuerzas viscosas aumentan (mayor Ca), la burbuja se alarga.

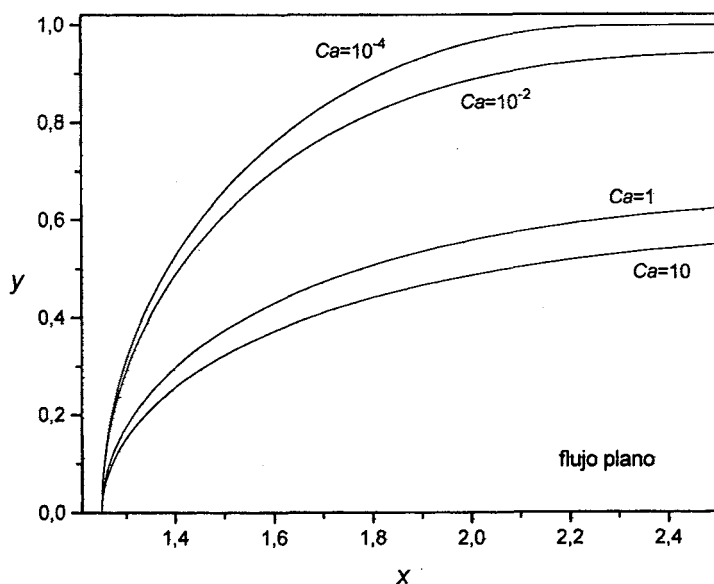


Figura 4. Forma de la interfase para distintos valores del número Capilar (flujo plano)

Cuando el sistema coordenado está fijo a la interfase, un balance de masa elemental indica que si $h_{\infty} < 1/3$ debe existir una zona donde el líquido recircule. Un análisis de las soluciones obtenidas con la metodología descrita en este trabajo permitió detectar los dos tipos de recirculación siguientes, los que se analizan detalladamente en¹¹.

- a) Para valores bajos del número Capilar, el punto de estancamiento E se localiza cerca de la pared y a medida que Ca aumenta, se desplaza a lo largo de la interfase hacia el punto A de la Figura 1. La recirculación que existe en este caso se extiende hasta la superficie libre.
- b) Para un determinado valor del Capilar se produce el colapso de E con A en un único punto de estancamiento el que se desplaza luego a lo largo de la línea de simetría a medida que Ca aumenta, para desaparecer cuando $h_{\infty} > 1/3$. La recirculación que existe en este caso se extiende desde $x = -\infty$ hacia la interfase, sin llegar a ella salvo cuando ocurre el colapso.

Giavedoni y Saita¹¹ indican los valores del Ca para los cuales tiene lugar la transición de a) a b) y de b) a un flujo sin recirculación. Es importante mencionar que el tipo de flujo descrito en b) no ha sido mencionado previamente en la bibliografía.

Soluciones del caso axisimétrico

En la Figura 5 se ilustran los valores de m en función del número Capilar; $m = 1 - (1 - h_\infty)^2$ es la fracción de volumen de líquido que queda pegado a la pared del tubo por el pasaje de la burbuja semiinfinita. Además, en la misma figura se indican los resultados experimentales de Taylor², la correlación empírica de Fairbrother y Stubbs¹ ($m = Ca^{1/2}$) y las soluciones numéricas de Reinelt y Saffman⁵, Shen y Udell⁶ y Martínez y Udell⁸. El valor calculado de m concuerda muy bien con los resultados experimentales de Taylor y con las soluciones numéricas mencionadas. Con respecto a la correlación¹, la mejor concordancia se encuentra para valores del Capilar entre 4×10^{-3} y 0,10, rango en el cual las diferencias no superan al 6 %, mientras que para $Ca < 4 \times 10^{-3}$ los valores calculados numéricamente son hasta un 30 % menores que los de esta correlación. Sin embargo, si las soluciones numéricas se comparan con los valores de la teoría asintótica de Bretherton³, las diferencias no superan al 1,8 % cuando $Ca = 10^{-4}$ y alcanzan el 12 % cuando $Ca = 10^{-2}$.

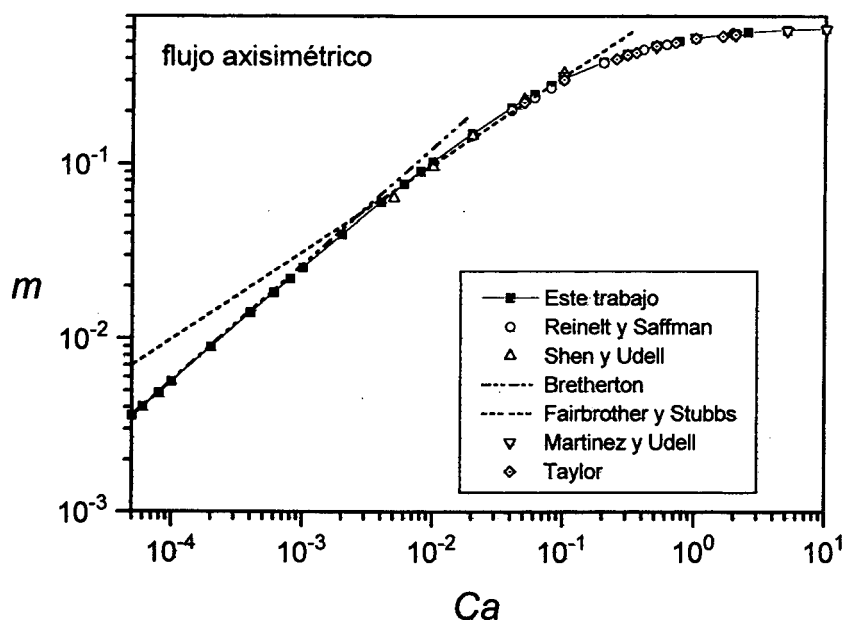


Figura 5. Valores del parámetro m en función del número Capilar (flujo axisimétrico)

A medida que el Capilar aumenta, m tiende a un valor asintótico igual a 0,592 para $Ca = 10$. Este valor concuerda muy bien con los hallados experimentalmente por Cox¹² ($m \approx 0,60$) y numéricamente por Martínez y Udell⁸ ($m \approx 0,59$) e indica que aproximadamente el 60 % del líquido queda adherido a las paredes del tubo como consecuencia del pasaje de la burbuja. Además, para $Ca = 2$, $m \approx 0,56$, valor muy próximo al de Taylor³ ($m \approx 0,55$).

A diferencia de lo descrito por Shen y Udell⁶ para $Ca > 0,2$ o por Martínez y Udell⁸ para $Ca > 2$, nuestras soluciones no muestran oscilaciones en la interfase para ningún valor del Capilar dentro del rango analizado: $5 \times 10^{-5} \leq Ca \leq 10$.

En la Figura 6 se ilustra la diferencia de presión entre los puntos A y B de la Figura 1, ΔP . Se muestran también los valores calculados con la ecuación de Bretherton y las soluciones numéricas presentadas en^{5,6}.

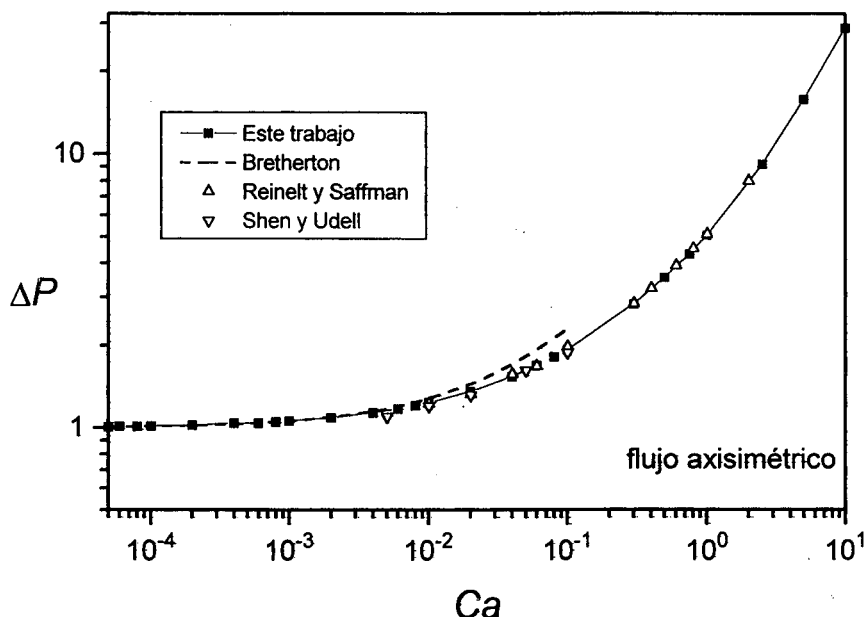


Figura 6. Valores de la caída de presión entre los puntos A y B (Figura 1) en función del número Capilar (flujo axisimétrico)

Se observa que los valores computados concuerdan bien con los de la teoría asintótica para valores del Capilar menores a 8×10^{-3} . Este resultado es razonable, ya que esta teoría es válida para $Ca \leq 5 \times 10^{-3}$. Además, nuestras soluciones concuerdan muy bien con las obtenidas por Reinelt y Saffman y se apartan levemente de las calculadas por Shen y Udell. En la gráfica ΔP parece tender a infinito para Ca grande. Este efecto se debe a que la presión está escalada con σ/d en todo el rango de Ca y si bien esta es una adimensionalización adecuada para valores pequeños del Capilar, no lo es para $Ca \geq 1$, donde la presión es de orden μ/Ud .

Como ocurre en el caso plano, cuando el sistema coordenado se desplaza con la fase gas, un balance de masa muestra que el campo de velocidad debe presentar una recirculación cuando $m \leq 1/2$. También en este caso se detectaron los dos tipos de recirculación descritos para el flujo plano. Una descripción detallada de los campos de velocidad se puede consultar en¹¹. De acuerdo a nuestras soluciones, hay una zona de recirculación de flujo siempre que el Ca sea menor a aproximadamente 0,7. Este resultado se corresponde excelentemente bien con el reportado por Martínez y Udell⁸, si bien estos autores no mencionan la recirculación descrita en párrafo b) del apartado anterior.

En efecto, la única referencia que existe en la bibliografía es la efectuada por G.I. Taylor hace 35 años, señalando que las descripciones dadas en a) y b) del apartado anterior son los dos flujos con recirculación más simples compatibles con valores de $m \leq 1/2$.

Efectos inerciales

Para determinar el efecto de las fuerzas de inercia sobre el espesor de la película líquida, efectuamos corridas en las cuales el número Capilar se mantuvo constante y se aumentó el número de Reynolds desde cero hasta un valor máximo compatible con los valores de las propiedades físicas de los fluidos y de los parámetros relevantes del sistema, indicados en la Tabla II.

En la Figura 7 se ilustran los valores computados del espesor final de la película líquida (h_∞) en función del número de Reynolds para las dos geometrías de flujo analizadas en este trabajo. Es fácil ver que para $Ca < 0,01$, h_∞ es sensible a la variación de Re sólo en el caso plano, donde se observa un muy ligero aumento de esta variable cuando el número de Reynolds aumenta.

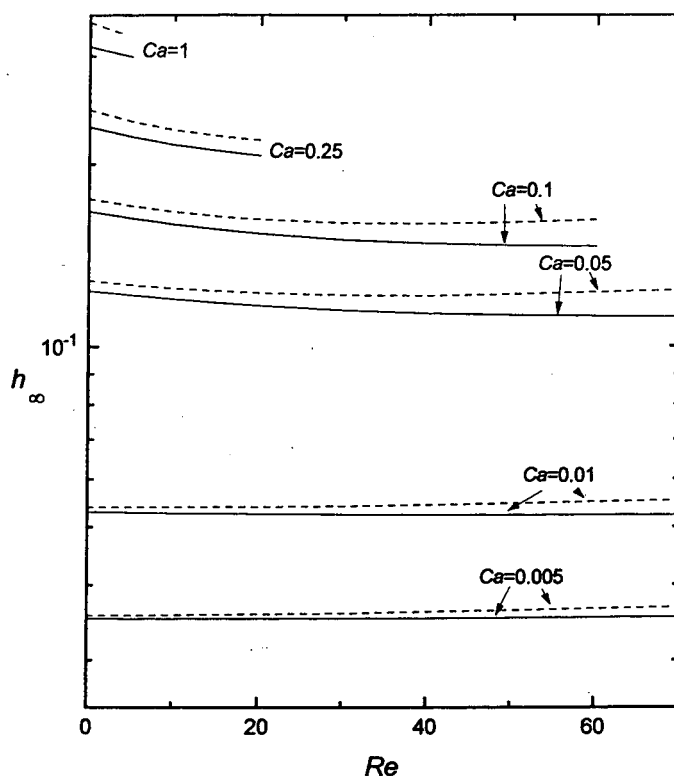


Figura 7. Efecto del número de Reynolds sobre el espesor final de la película líquida para distintos valores del número Capilar. Las curvas en líneas de trazo corresponden al caso plano y las curvas en línea llena al caso axisimétrico

Cuando $Ca > 0,05$, la influencia de las fuerzas de inercia resulta más evidente, siendo el flujo plano más sensible que el axisimétrico.

Nuestros resultados indican que el espesor del film presenta un comportamiento no monotónico; en efecto h_{∞} primero disminuye y luego aumenta cuando el número de Reynolds aumenta. Este comportamiento se puede observar claramente en la Figura 7 para $Ca = 0,05$ y si bien se produce también a valores más altos del Capilar, en esta figura sólo se muestra la región donde h_{∞} disminuye, debido a que las soluciones correspondientes a Re mayores no representan casos compatibles con los valores de la Tabla II.

Es importante señalar que Wassmuth *et al.*¹³ también encontraron que el espesor de la burbuja al desplazarse entre placas planas cuando $Re \approx 20$ es menor que el calculado con la teoría asintótica de Bretherton o que el reportado en⁵ para $Re = 0$, cuando $0,015 < Ca < 0,05$.

CONCLUSIÓN

En este trabajo se ha analizado el desplazamiento en estado estacionario de un gas en el seno de un líquido contenido inicialmente entre placas planas paralelas o en el interior de un tubo capilar de paredes rectas. La técnica numérica empleada permite obtener soluciones en un amplio rango de los números adimensionales característicos del problema: Ca y Re .

Cuando las fuerzas de inercia son despreciables, nuestros resultados abarcan y extienden el rango de valores del número Capilar explorado por medio de diferentes metodologías. La concordancia que existe entre nuestras soluciones y los valores calculados con la teoría asintótica de Bretherton es excelente cuando $Ca \leq 10^{-3}$, mientras que para valores mayores de este parámetro concuerdan muy bien con la mayoría de las soluciones numéricas publicadas previamente.

El análisis de los campos de velocidad computados para distintos valores de Ca permitió detectar dos tipos distintos de flujo con recirculación, uno de los cuales no había sido reportado previamente en la bibliografía.

Finalmente, la técnica numérica presentada permite analizar sin esfuerzo adicional la influencia de las fuerzas de inercia sobre el espesor final de la película líquida.

REFERENCIAS

1. F. Fairbrother y A.E. Stubbs, "Studies in Electroendosmosis. Part VI. The Bubble-Tube Method of Measurements", *J. Chem. Sci.*, Vol. 1, pp. 527-529, (1935).
2. G.I. Taylor, "Deposition of a Viscous Fluid on the Wall of a Tube", *J. Fluid Mech.*, Vol. 10, pp. 161-165, (1961).
3. F.P. Bretherton, "The Motion of Long Bubbles in Tubes", *J. Fluid Mech.*, Vol. 10, pp. 166-188, (1961).

4. J. Ratulowski y H.C. Chang, "Transport of Gas Bubbles in Capillaries", *Phys. Fluids*, Vol. 1, pp. 1642-1655, (1989).
5. D.A. Reinelt y P.G. Saffman, "The Penetration of a Finger into a Viscous Fluid in a Channel and Tube", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, 6, pp. 542-561, (1985).
6. E.I. Shen y K.S. Udell, "A Finite Element Study of Low Reynolds Number Two Phase-Flow in Cylindrical Tubes", *ASME J. Appl. Mech.*, 52, pp. 253-256, (1985).
7. W.Q. Lu y H.C. Chang, "An Extension of the Biharmonic Boundary Integral Method to Free Surface Flow in Channels", *J. Comput. Phys.*, Vol. 77, pp. 340-360, (1988).
8. M.J. Martínez y K.S. Udell, "Boundary Integral Analysis of the Creeping Flow of Long Bubbles in Capillaries", *ASME J. Appl. Mech.*, Vol. 56, pp. 211-217, (1989).
9. H. Saito y L.E. Scriven, "Study of Coating Flow by the Finite Element Method", *J. Comp. Phys.*, Vol. 42, pp. 53-76, (1981).
10. S.F. Kistler y L.E. Scriven, "Coating Flows", en *Computational Analysis of Polymer Processing*, J.R.A. Pearson y S.M. Richardson (Eds.), Applied Science, Londres, (1984).
11. M.D. Giavedoni y F.A. Saita, "The Axisymmetric and Plane Cases of a Gas Phase Displacing a Newtonian Liquid-A Simultaneous Solution of the Navier-Stokes Equations", *Phys. Fluids*, Vol. 9, pp. 2420-2428, (1997).
12. B.G. Cox, "On Driving a Viscous Fluid out of a Tube", *J. Fluid. Mech.*, Vol. 14, pp. 81-98, (1962).
13. F. Wassmuth, W.G. Laidlaw y D.A. Coombe, "Calculation of Interfacial Flows and Surfactant Redistribution as a Gas/Liquid Interface Moves between Two Parallel Plates", *Phys. Fluids*, Vol. 5, pp. 1533-1548, (1993).