

CALCULO NUMERICO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES EN UN TORNILLO FISURADO

J. TORIBIO
M.A. ASTIZ
y
V. SANCHEZ-GALVEZ

*Departamento de Ciencia de Materiales,
Universidad Politécnica de Madrid,
E.T.S.I. Caminos, Ciudad Universitaria s/n,
28040 Madrid, España*

RESUMEN

En este artículo se calcula numéricamente el factor de intensidad de tensiones (K) para un tornillo fisurado sometido a carga axial, momento flector, distribución de tensiones residuales y carga producida por la tuerca. Los cálculos se han llevado a cabo mediante el Método de los Elementos Finitos, utilizando elementos singulares con nodos a un cuarto, junto con el Método de la Rigidez Diferencial para obtener el factor de intensidad de tensiones. Se han introducido dos modificaciones en el procedimiento de cálculo con el fin de mejorar la precisión de los resultados: el desplazamiento no sólo del nodo principal, sino también de los nodos a un cuarto situados en el plano normal y los nodos adyacentes localizados sobre la línea de la fisura, evitando tanto el cambio en la singularidad como el alabeo de la fisura.

SUMMARY

In this paper the stress intensity factor (K) for a cracked bolt subjected to tension loading, bending moment, residual stress distribution and nut loading is computed. Finite Element calculations with quarter-point singular elements have been carried out, together with the Stiffness Derivative Method to obtain the stress intensity factor. Two modifications were introduced into the computation procedure to improve the accuracy of the results: the displacement not only of the main node, but also of the quarter-point nodes located in the normal plane and the adjacent nodes placed in the crack line, avoiding both the change of the singularity and the crack curving.

Recibido: Julio 1990

INTRODUCCION

Los tornillos de alta resistencia se usan frecuentemente en las uniones entre diferentes componentes aeroespaciales. Sin embargo, su comportamiento mecánico todavía no se entiende a la perfección, sobre todo ante la presencia de fisuras y en los casos en que se requiere tolerancia al daño^{1,2}. En la estimación de la vida en servicio de componentes metálicos — los cuales juegan un papel preponderante en la industria aeronáutica y aeroespacial — un elemento imprescindible es el conocimiento del factor de intensidad de tensiones (K) para la geometría considerada.

Con respecto a las uniones atornilladas, se ha desarrollado un gran esfuerzo investigador durante los últimos años en esta área, con el fin de mejorar el conocimiento del comportamiento de tales elementos³⁻¹⁰. Sin embargo, grandes dificultades han salido a la luz a causa de la complejidad de la geometría. Más aún, las imprecisiones acerca de la verdadera carga actuando sobre el tornillo hacen el problema todavía más difícil de resolver.

Las publicaciones referentes a factores de intensidad de tensiones en tornillos fisurados son muy escasas, las referencias^{11,12,13} tratan ciertas configuraciones del cilindro roscado y presentan factores de intensidad de tensiones expresados como funciones de corrección. Los artículos^{14,15} ofrecen interesantes recopilaciones bibliográficas sobre soluciones de K en la literatura científica aplicables a fisuras en tornillos. La sorprendente conclusión es que, aunque se han desarrollado gran número de soluciones K en cilindros fisurados, pocas soluciones se refieren a fisuras en las proximidades de roscas. Los estudios acerca de propagación de fisuras por la fatiga son también escasos, aunque pueden encontrarse algunas referencias^{16,17,18}.

La mayoría de los resultados sobre K aplicables a tornillos fisurados han sido calculados para geometrías no roscadas (es decir cilindros fisurados). La referencia¹⁹ presenta cálculos numéricos de K usando un modelo de elementos finitos en tensión plana. Esto es únicamente un análisis pseudo-tridimensional, que estima sólo el valor medio de la tasa de liberación de energía a lo largo de la línea de la fisura. Los artículos^{20,21} tratan de soluciones K para un cilindro fisurado obtenidas por medio de análisis 3D por Elementos Finitos, y las referencias^{22,23} presentan soluciones para la misma geometría usando el Método de los Elementos de Contorno. En el artículo²⁴ se discute el efecto de superficie libre, y el²⁵ ofrece algunas soluciones K para un cilindro fisurado cargado a tracción y flexión. Las referencias²⁶⁻³⁰ se refieren a crecimiento de fisuras por fatiga en elementos cilíndricos. En algunos casos se utilizan soluciones empíricas del factor de intensidad de tensiones K para la fisura superficial en una placa³¹⁻³³ lo que demuestra la escasez de soluciones para el factor de intensidad de tensiones en geometrías complicadas tales como tornillos.

El presente artículo ofrece un amplio abanico de soluciones K para cilindros fisurados sometidos a carga axial, momento flector, distribución de tensiones residuales y carga producida por la tuerca, con el fin no sólo de presentar soluciones para tornillos bajo condiciones de carga muy complejas, sino también determinar la influencia de la tuerca sobre el factor de intensidad de tensiones.

GEOMETRIA Y CONDICIONES DE CARGA

La geometría analizada consiste en un tornillo ISO M8 $\times$ 1.0 con una fisura elíptica en superficie, sometido a diferentes condiciones de carga. Las dimensiones del tornillo son:

Diámetro máximo: 8 mm
 Diámetro mínimo: 6.77 mm
 Radio de fondo: 0.125 mm
 Paso de rosca: 1 mm

El tornillo se ha modelizado en roscas separadas, sin tener en cuenta la variación helicoidal, con el fin de preservar la simetría axial del problema.

Se ha considerado una fisura superficial situada en el fondo de rosca del tornillo en dirección perpendicular a su eje. La forma de la fisura es semi-elíptica (Figura 1) con su centro situado en la superficie del cilindro interior (diámetro mínimo) y semiejes "a" y "b", correspondientes a la profundidad y a la longitud transversal de la fisura, respectivamente. Se han considerado tres formas de fisura:

Superficial: $a/b = 0.2$
 Intermedia: $a/b = 0.6$
 Circular: $a/b = 1.0$

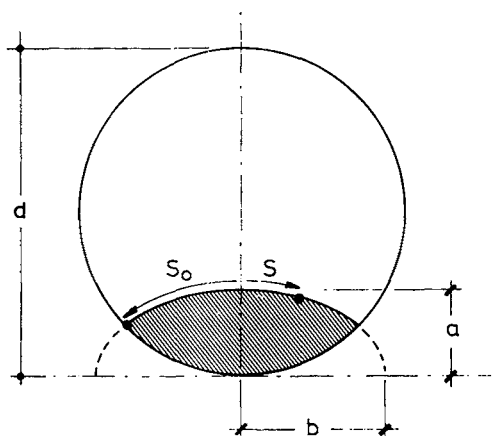


Figura 1. Forma de la fisura.

Se han utilizado cinco profundidades de fisura en los cálculos ($a/d = 0.1, 0.2, 0.3, 0.4$ y 0.5)

Se contemplan las siguientes condiciones de carga (ver Figura 2):

(a) **Carga axial**, que consiste en una distribución uniforme de tensiones aplicadas suficientemente lejos de la fisura.

(b) **Momento flector**, que consiste en una distribución de tensiones de flexión pura sin aplicación de carga neta en la dirección axial.

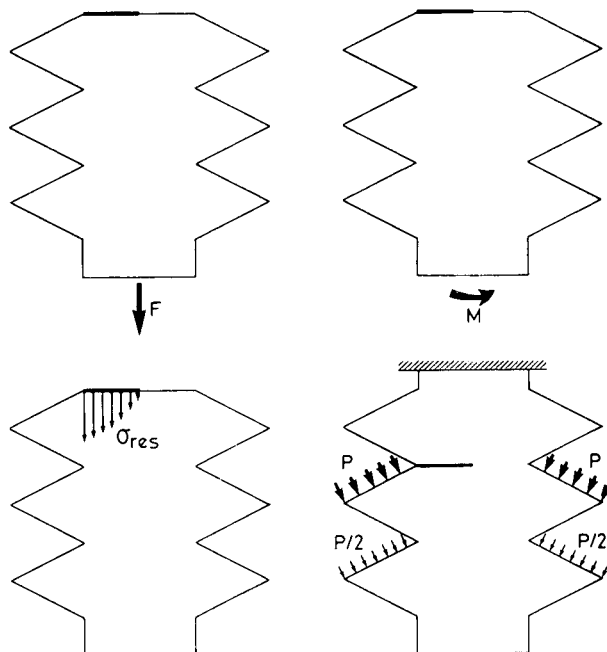


Figura 2. Condiciones de carga: (a) carga axial, (b) momento flector, (c) tensiones residuales, (d) carga debida a la tuerca.

(c) **Distribución de tensiones residuales.** Este tipo de carga es producido por las tensiones residuales generadas en el tornillo durante el proceso de laminado. Puesto que se supone material elástico-lineal, el principio de superposición será aplicable y utilizado para tener en cuenta la distribución de tensiones residuales en el tornillo, como se explica en la Figura 3.

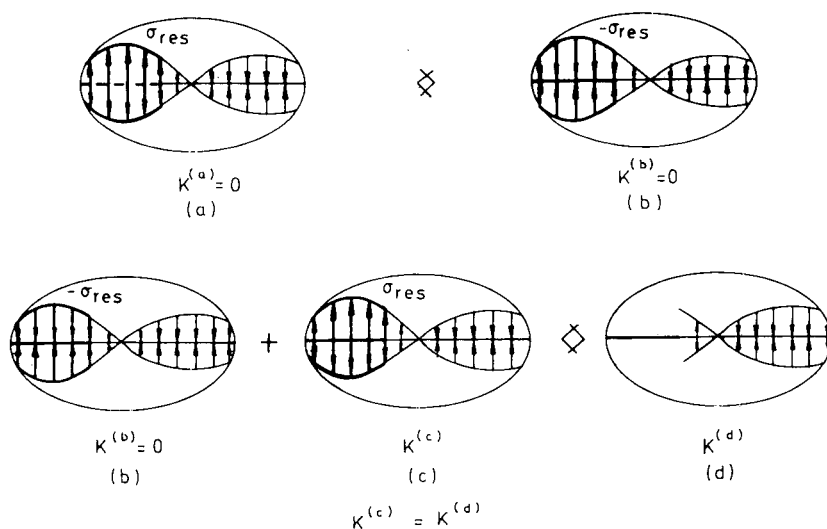


Figura 3. Principio de superposición.

En un cuerpo no fisurado "a" sometido a una distribución general de tensiones residuales, el factor de intensidad de tensiones es cero. Tal cuerpo es equivalente a uno fisurado "b" en el cual el efecto del material es sustituido por una distribución de tensiones externas aplicadas sobre los labios de la fisura igual y opuesta a la distribución de tensiones residuales. En este caso, el factor de intensidad de tensiones es también cero.

Finalmente, los labios de la fisura en el sólido "b" se descargan. De acuerdo con el principio de superposición, el proceso de descarga es equivalente a añadir un tercer cuerpo "c" con una distribución de carga opuesta a la del cuerpo "b", es decir la primitiva distribución de tensiones residuales (con el mismo signo).

La superposición de "b" y "c" conduce al cuerpo "d", objetivo del análisis: un sólido fisurado sin carga exterior, con la fisura abierta debido a las tensiones residuales. Puesto que el factor de intensidad de tensiones del cuerpo "b" es cero, el factor de intensidad de tensiones del sólido "d" es idéntico al del sólido "c".

Por consiguiente, el factor de intensidad de tensiones en el sólido fisurado descargado, con la fisura abierta debido a las tensiones residuales, se calcula utilizando un sólido fisurado sometido a una distribución de tensiones sobre los labios igual a la primitiva distribución de tensiones residuales que existía en esa zona en el sólido no fisurado.

De acuerdo con las mediciones mediante difracción de rayos X realizadas previamente¹, se ha adoptado una distribución triangular de tensiones residuales (Figura 4). Las tensiones residuales superficiales nunca superan 800 MPa (tracción). La profundidad x para la cual las tensiones residuales se anulan se ha supuesto igual a 100 micras, de acuerdo con la experiencia previa en alambres laminados³⁴. La magnitud de la tensión residual interna se obtiene por consideraciones de equilibrio general del sólido, dando un valor inferior al 3% de la tensión residual superficial, el cual se ha considerado despreciable.

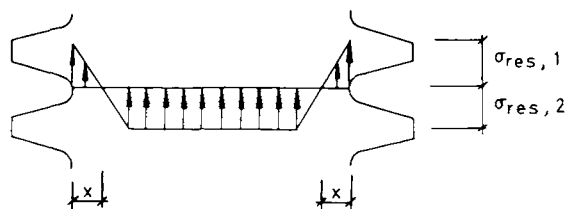


Figura 4. Distribución de tensiones residuales.

(d) **Carga producida por la tuerca:** En este caso la carga, debida a la tuerca, ha sido aplicada directamente en la rosca. El diseño de la carga se ha hecho teniendo en cuenta las referencias conteniendo resultados numéricos³⁶ y mediciones experimentales^{36,37} de la distribución de tensiones a lo largo de las superficies de rosca de un tornillo. De acuerdo con estas referencias, el sistema de cargas consiste en una presión uniforme aplicada directamente sobre los filetes de roscas situados

inmediatamente debajo de la fisura, con un valor p sobre el primer filete (el más próximo a la fisura) y la mitad de ese valor ($p/2$) sobre el segundo filete (debajo del primero).

La carga producida por la tuerca se ha aplicado en la zona de rosca más desfavorable desde el punto de vista de la Mecánica de la Fractura. La variación helicoidal (presión variable) no puede tenerse en cuenta si se quiere conservar la simetría axial del problema. La variación sobre las cargas de un filete sí puede tenerse en cuenta, pero representa un efecto de segundo orden, de acuerdo con las referencias^{11,12}. Por consiguiente, se ha adoptado presión constante sobre cada filete de rosca.

Los casos de carga (a), (b) y (c) presentan doble simetría tanto axial como transversal, y por lo tanto sólo es necesario analizar una cuarta parte del tornillo. El caso (d) únicamente tiene simetría axial, por lo que debe analizarse medio tornillo. El modelo de elementos finitos incluye tres filetes de roscas, lo que, teniendo en cuenta la simetría, equivale a seis en los casos (a), (b) y (c).

El principal objetivo del presente trabajo es la obtención de soluciones numéricas para el factor de intensidad de tensiones en un tornillo fisurado con las condiciones de carga ya mencionadas. El factor de intensidad de tensiones es función de la profundidad de la fisura, la posición dentro de la misma y la forma, es decir:

$$K = K\left(\frac{a}{d}, \frac{s}{s_0}, \frac{a}{b}\right) \quad (1)$$

Un aspecto importante consiste en conocer la variación de K a lo largo del borde de la fisura. Dependiendo de la excentricidad de la elipse, K será máximo o mínimo en el centro de la fisura, que es el punto de máxima profundidad. Este hecho debe ser tenido en cuenta en los cálculos de propagación de la fisura por la fatiga, e incluso en cualquier problema de Mecánica de la Fractura Elástica y Lineal donde se requiera conocer el máximo valor de K a lo largo del borde de la fisura.

Los resultados se expresarán en términos del factor de corrección adimensional Y :

$$Y = \frac{K}{\sigma\sqrt{\pi a}} \quad (2)$$

donde σ es una tensión representativa con diferentes valores dependiendo del sistema de cargas (ver Figura 2).

- Para carga axial, σ es la tensión axial remota en la sección neta del tornillo (distribución uniforme de tensiones):

$$\sigma = \frac{4F}{\pi d^2} \quad (3)$$

- En el caso del momento flector, σ representa la máxima tensión axial en la sección neta del tornillo (distribución triangular de tensiones):

$$\sigma = \frac{32M}{\pi d^3} \quad (4)$$

- Para la distribución de tensiones residuales, σ es la máxima tensión residual en la superficie del tornillo (ver Figura 4):

$$\sigma = \sigma_{\text{res},1} \quad (5)$$

- En el caso de carga producida por la tuerca, σ es la tensión neta en la dirección axial:

$$\sigma = \frac{4F_{TOT,z}}{\pi d^2} \quad (6)$$

donde $F_{TOT,z}$ es la carga total en dirección del eje del tornillo.

CALCULO NUMERICO DEL FACTOR DE INTENSIDAD DE TENSIONES

Generación de malla

Se ha creado un programa de ordenador para generar automáticamente mallas de elementos finitos en geometrías 3D. Dicho programa puede ser utilizado para generar los datos de entrada del programa de elementos finitos (coordenadas nodales y conexiones entre elementos finitos) para tornillos fisurados y no fisurados, así como para cualquier otro sólido.

El método de generación se basa en aplicaciones transfinitas^{38,39}. El cuerpo se divide en macroelementos que se adaptan exactamente a la geometría dada por medio de sus caras. Los macroelementos se dividen a continuación en elementos a lo largo de sus tres direcciones coordenadas. Para optimizar la ocupación de memoria se implementó un algoritmo de minimización de ancho de banda.

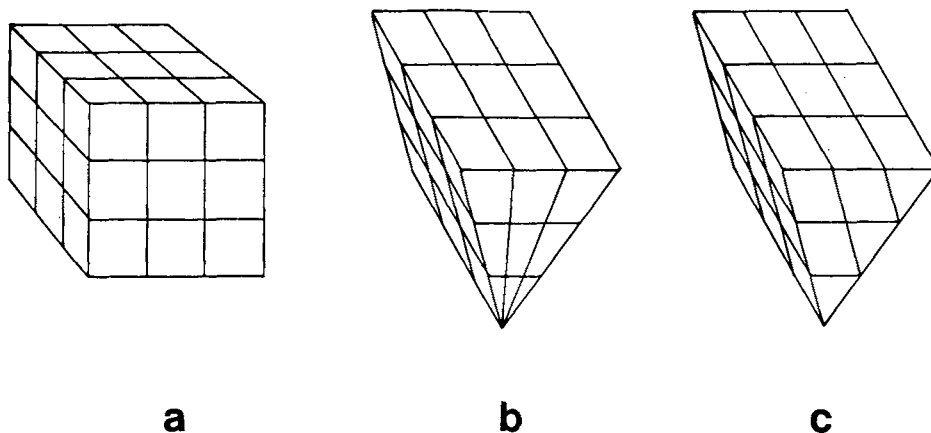


Figura 5. Tipos de macroelementos.

Se han utilizado tres tipos de macroelementos (Figura 5). El primero de ellos (a) es un sólido hexaédrico que puede ser transformado en un cubo. El segundo (b) es un sólido pentaédrico transformable en un prisma triangular, y se obtiene colapsando las caras de un cubo. El tercer tipo de macroelemento (c) es también un sólido pentaédrico transformable en un prisma triangular, pero en este caso todos los lados de la base triangular se dividen en el mismo número de segmentos para crear una distribución más o menos uniforme de elementos finitos.

Todos los macroelementos pueden utilizarse para generar dos tipos de elementos cuadráticos: elementos paralelepípedos de 20 nodos y elementos prismáticos de 15 nodos, los cuales, pueden ser deformados para modelizar singularidades tensionales.

La Figura 6 muestra una vista de la malla de elementos finitos utilizada para modelizar el tornillo fisurado, y la Figura 7 ofrece un detalle de la malla alrededor de la fisura. Para los casos de carga (a), (b) y (c) se ha diseñado una malla tipo con 39 macroelementos, 584 elementos, 3057 nodos y 9171 grados de libertad. La malla utilizada en el caso (d) contiene 46 macroelementos, 772 elementos, 3961 nodos y 11883 grados de libertad.

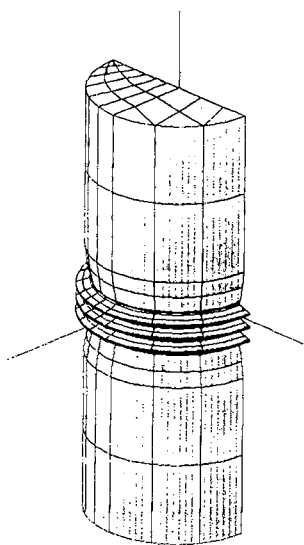


Figura 6. Malla de elementos finitos para el tornillo fisurado.

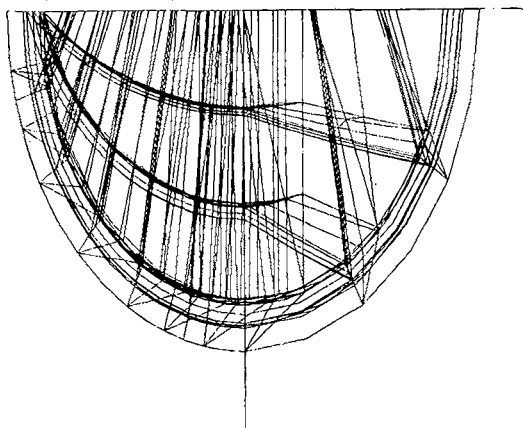


Figura 7. Detalle de la malla en las proximidades de la fisura.

Cálculos tensión-deformación

Los cálculos numéricos fueron realizados mediante el método de los elementos finitos en régimen elástico, utilizando elementos isoparamétricos cuadráticos: paralelepípedos de 20 nodos y prismas de 15 nodos.

Con el fin de modelizar la singularidad en el extremo de la fisura, se han utilizado elementos singulares con nodos a un cuarto^{40,41,42,43}. En estos elementos la singularidad en deformaciones se modeliza trasladando los nodos del centro de un lado en un elemento finito convencional a la posición de un cuarto del lado. Las ventajas del uso de tales elementos singulares se han puesto de manifiesto desde el punto de vista numérico (precisión) y económico (funciones de forma convencionales)^{44,45}. Sin embargo, la singularidad sólo es modelizada a lo largo de los lados de los elementos finitos.

Si la singularidad ha de ser modelizada también en cualquier dirección interna deben utilizarse elementos singulares colapsados, perdiendo entonces las ventajas económicas de los elementos singulares con nodos a un cuarto, puesto que deben

utilizarse funciones de forma no convencionales. En consecuencia, en vista del trabajo extra que se requiere para colapsar elementos, el uso de elementos con nodos a un cuarto se recomienda para cálculos 3D^{46,47}. Más aún, la diferencia entre los resultados obtenidos con elementos colapsados y no colapsados es inferior al 1,5%. Tales razones hicieron a los autores decidirse por el uso de elementos convencionales con nodos a un cuarto para los cálculos de elementos finitos.

Cálculo del factor de intensidad de tensiones

Para obtener el factor de intensidad de tensiones a lo largo de la línea de la fisura se ha utilizado una técnica energética: el Método de la Rigidez Diferencial, basado en el cálculo de la tasa de liberación de energía para una extensión virtual de fisura^{21,48-50}. Bajo ciertas restricciones geométricas, se ha demostrado que la tasa de liberación de energía se reduce a una forma tri-dimensional de la integral $J^{51,52}$, y ha sido utilizada en cálculos elastoplásticos 3D⁵³. La referencia⁵⁴ contiene una propuesta de uso de una técnica de rigidez diferencial para calcular eficientemente variaciones del factor de intensidad de tensiones para extrapolar resultados de K a diferentes profundidades de fisura.

El Método de la Rigidez Diferencial consiste en el cálculo de la tasa de liberación de energía cuando se lleva a cabo una extensión virtual en un punto de la fisura, trasladando el nudo que ocupa esa posición en dirección perpendicular al frente de fisura. La expresión para obtener la tasa de liberación de energía es una forma cuadrática de segundo orden en desplazamientos, es decir:

$$G = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\mathbf{K}_{a+\Delta a} - \mathbf{K}_a}{\Delta a} \mathbf{u} \quad (7)$$

donde $\mathbf{K}$ es la matriz de rigidez antes (a) y después ($a + \Delta a$) del desplazamiento virtual, y $\mathbf{u}$ el vector desplazamiento nodal en la situación de referencia.

Puesto que este método proporciona la tasa de liberación de energía, el factor de intensidad de tensiones se deriva de la misma bajo la hipótesis de deformación plana en las proximidades del frente de fisura. Esta hipótesis ha sido justificada teórica y numéricamente, aunque el dominio de validez puede ser muy pequeño. En cualquier caso la importancia de esta decisión en los valores del factor de intensidad de tensiones es muy pequeña, pues los errores debidos a la elección nunca superan el 3-4%^{11,12,22,23,55}.

El Método de la Rigidez Diferencial, que representa una aproximación energética, tiene dos importantes ventajas: precisión y economía de cálculo. La precisión es una consecuencia del carácter energético del método; no requiere conocer exactamente el campo tenso-deformacional en las proximidades de la singularidad producida por el extremo de la fisura, sino únicamente computar las matrices de rigidez y el vector desplazamiento en el cuerpo. La economía de cálculo es debida al hecho de que en la extensión virtual de fisura sólo se modifican las matrices de rigidez de los elementos deformados pertenecientes al primer anillo junto a la línea de la fisura.

La elección del desplazamiento virtual en el frente de las fisuras se hizo de acuerdo a los valores propuestos por Astiz²¹ y de Koning⁴⁷ para una fisura semi-elíptica en un cuerpo cilíndrico fisurado. El primero, que ha resuelto el problema por medio del Método de la Rigidez Diferencial, obtuvo resultados en concordancia excelente con

Athanassiadis²³, que utilizó el Método de los Elementos de Contorno. El valor propuesto es:

$$\Delta a = 0.0001 a$$

Se han introducido dos modificaciones en los cálculos con el fin de mejorar la precisión de los resultados:

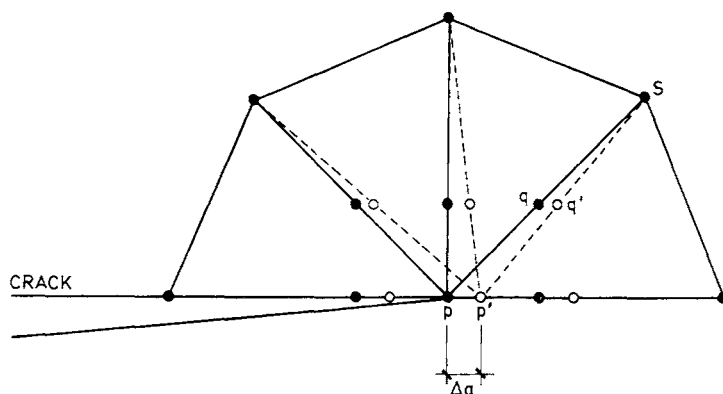


Figura 8. Modelización del avance de la fisura en el plano normal.

– Con respecto al avance de la fisura en el plano normal (Figura 8), se ha desplazado no sólo el nodo principal “p” situado en el frente de la fisura, sino también los nodos de cuarto de lado “q” pertenecientes al plano normal. Tal procedimiento preserva la singularidad del campo de deformaciones en las proximidades del extremo de la fisura, pues mantiene las relaciones 1/4 entre distancias a lo largo de elementos finitos en el plano normal a la fisura. Por lo tanto, si el desplazamiento del nodo principal es:

$$u_p = \Delta a$$

el desplazamiento de los nodos de cuarto de lado será:

$$u_q = \frac{3}{4}\Delta a$$

en la misma dirección contenida en el plano normal a la fisura.

– En el caso de los avances locales de la fisura en el plano de la misma (Figura 9a) se ha desplazado no sólo el nodo principal “p”, sino también la pareja de nodos adyacentes “a”. Con este sistema el área fisurada se incrementa en todas sus zonas, evitando que se curve la línea de la fisura y aparezcan disminuciones en el área fisurada (Figura 9b).

El desplazamiento de los dos nodos adyacentes será la mitad del desplazamiento del nodo principal:

$$u_a = \frac{1}{2}\Delta a$$

y en la misma dirección.

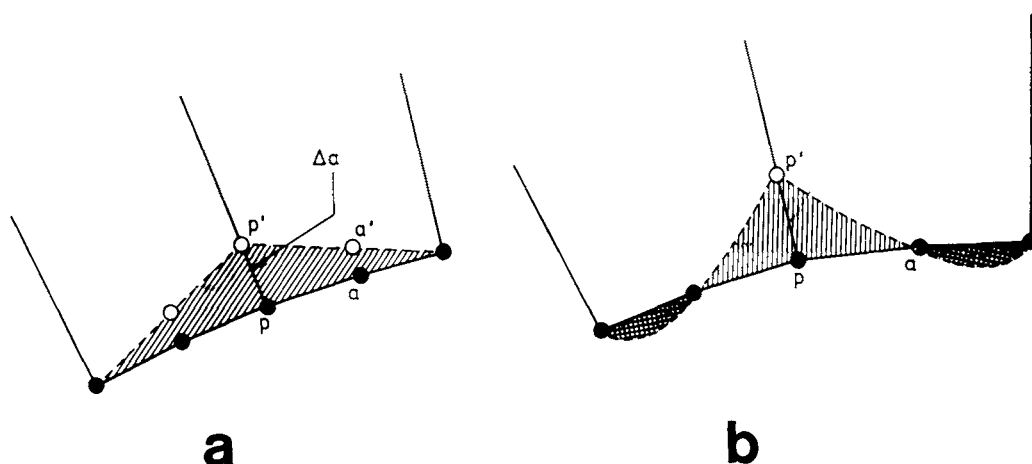


Figura 9. Avances locales de la fisura en el plano de la misma: (a) sin decrecimiento del área fisurada, (b) con decrecimiento del área fisurada.

ANALISIS DE RESULTADOS

Los resultados correspondientes a carga axial aparecen en la Tabla I. Para este tipo de carga se ha dibujado el factor de intensidad de tensiones en función de la profundidad de fisura en el centro de la misma (Figura 10) y en superficie (Figura 11). La Tabla II presenta los resultados relativos al momento flector. Las Figuras 12 y 13 muestran la representación gráfica del F.I.T. en función de la profundidad en el centro de la fisura y en superficie, respectivamente, para esa carga. La variación del F.I.T. a lo largo del frente de fisura se presenta en la Figura 14 (carga axial) y Figura 15 (momento flector).

Los resultados concuerdan muy bien los previamente publicados por Reibaldi^{11,12} y Nord y Chung¹³, referentes al factor de intensidad de tensiones en barras roscadas. Sin embargo, el número de combinaciones entre geometrías de fisura y condiciones de carga analizadas en la presente investigación es mucho mayor.

A partir de los resultados de carga axial y momento flector se pueden hacer los siguientes comentarios:

- Los valores de F.I.T. en el centro de la fisura son mayores para fisuras superficiales a tracción (Figura 10), y menores para fisuras circulares a flexión (Figura 12).
- Los valores del F.I.T. en la superficie de la fisura son mayores para fisuras circulares a tracción (Figura 11), y menores para fisuras superficiales a flexión (Figura 13).
- Para fisuras superficiales, el F.I.T. es mayor en el centro de la fisura, y para circulares en la superficie. Esta conclusión es válida para todas las profundidades de fisura y para ambas condiciones de carga (tracción y flexión; Figuras 14 y 15).

A partir de estos resultados se hizo una interpolación polinómica de segundo orden con el fin de obtener expresiones analíticas utilizables para calcular la vida en fatiga.

a/b	a/d	$s/s_0 = 0$	1/4	2/4	3/4	1
0.2	0.1	0.99	0.89	0.84	0.76	0.65
	0.2	1.06	0.89	0.85	0.76	0.66
	0.3	1.25	0.89	0.85	0.78	0.70
	0.4	1.77	0.89	0.86	0.81	0.74
	0.5	2.08	0.89	0.87	0.83	0.78
1	0.1	0.75	1.01	1.03	1.10	1.22
	0.2	0.80	1.00	1.01	1.04	1.16
	0.3	0.88	1.00	1.02	1.08	1.22
	0.4	1.05	1.01	1.03	1.13	1.31
	0.5	1.27	1.01	1.06	1.19	1.43

Tabla I. Factor de intensidad de tensiones adimensionalizado (carga axial).

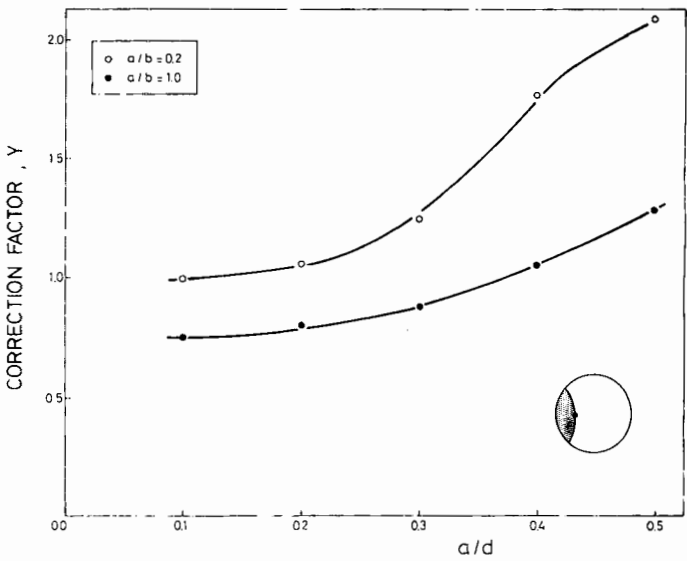


Figura 10. F.I.T. en función de la profundidad de fisura (centro; carga axial).

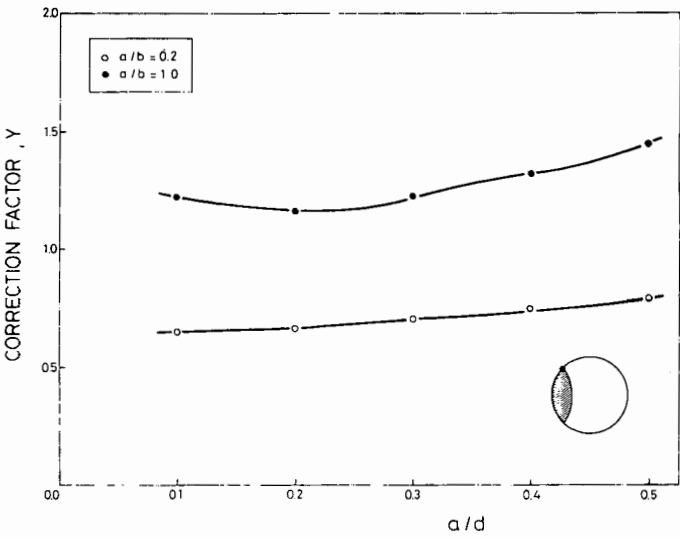


Figura 11. F.I.T. en función de la profundidad de fisura (superficie; carga axial).

a/b	a/d	$s/s_0 = 0$	1/4	2/4	3/4	1
0.2	0.14	0.79	0.79	0.78	0.70	0.57
	0.25	0.83	0.82	0.79	0.70	0.59
	0.37	0.91	0.90	0.86	0.79	0.69
	0.50	1.08	1.07	1.03	0.96	0.88
1	0.14	0.51	0.52	0.53	0.57	0.64
	0.25	0.52	0.53	0.56	0.63	0.74
	0.37	0.52	0.54	0.59	0.70	0.87
	0.50	0.56	0.59	0.66	0.83	1.06

Tabla II. Factor de intensidad de tensiones adimensionalizado (momento flector).

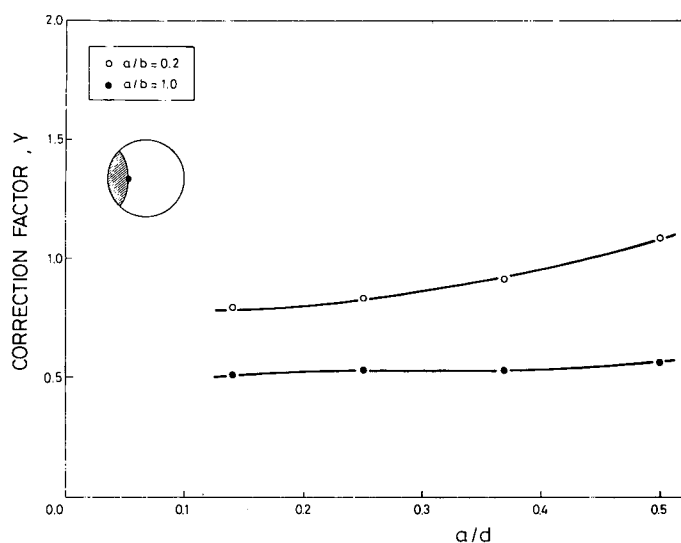


Figura 12. F.I.T. en función de la profundidad de fisura (centro; momento flector).

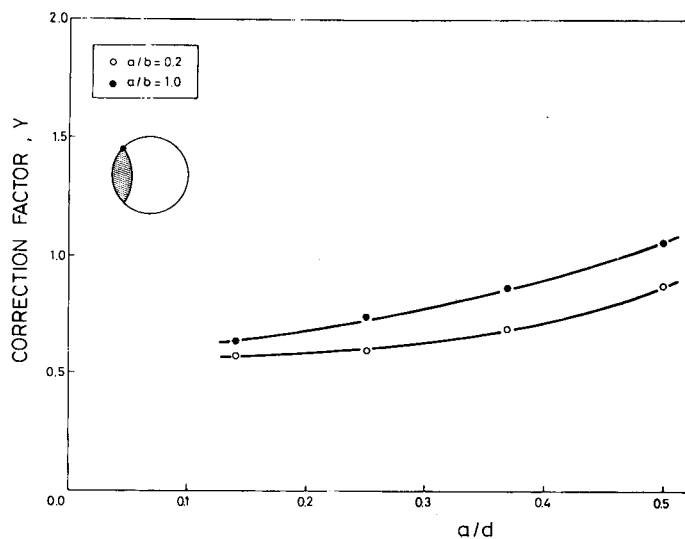


Figura 13. F.I.T. en función de la profundidad de fisura (superficie; momento flector).

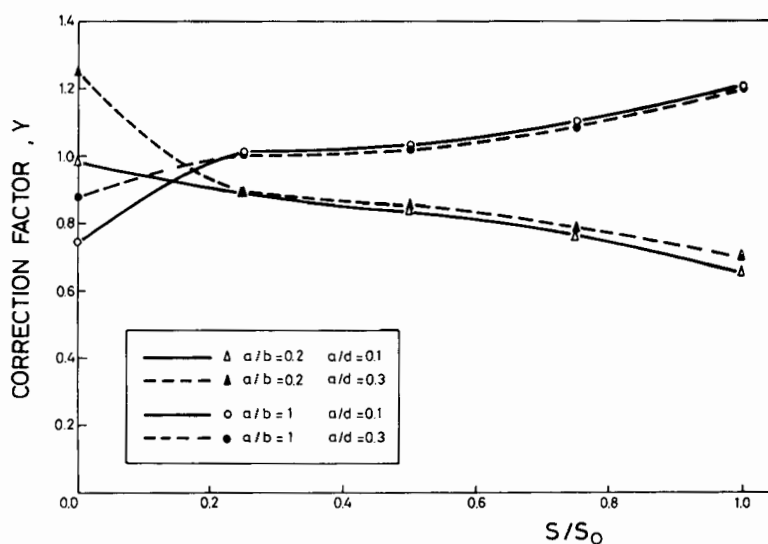


Figura 14. Variación del F.I.T. a lo largo del frente de fisura (carga axial).

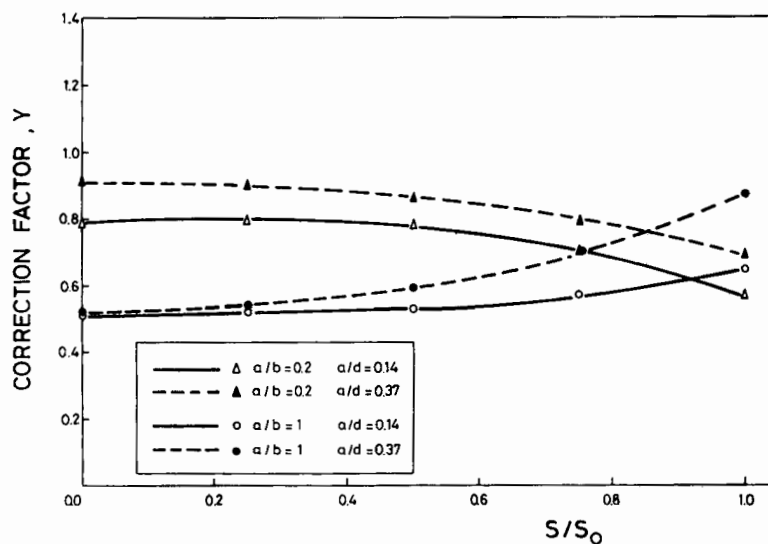


Figura 15. Variación del F.I.T. a lo largo del frente de fisura (momento flector).

En el caso de carga axial el factor de intensidad de tensiones adimensional es:

$\frac{a}{b}=0.2$	$s/s_0 = 0$	$Y = 0.968 - 0.581(a/d) + 5.786(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1/2$	$Y = 0.838 + 0.027(a/d) + 0.071(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1$	$Y = 0.634 + 0.082(a/d) + 0.429(a/d)^2$
$\frac{a}{b}=1$	$s/s_0 = 0$	$Y = 0.778 - 0.569(a/d) + 3.107(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1/2$	$Y = 1.056 - 0.349(a/d) + 0.714(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1$	$Y = 1.292 - 1.101(a/d) + 2.786(a/d)^2$

y para momento flector:

$$\begin{array}{ll}
 \underline{a/b=0.2} & s/s_0 = 0) \quad Y = 0.821 - 0.486(a/d) + 2.003(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 1/2) \quad Y = 0.864 - 0.948(a/d) + 2.557(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 1) \quad Y = 0.635 - 0.837(a/d) + 2.657(a/d)^2 \\
 \underline{a/b=1} & s/s_0 = 0) \quad Y = 0.530 - 0.193(a/d) + 0.499(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 1/2) \quad Y = 0.524 - 0.027(a/d) + 0.509(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 1) \quad Y = 0.561 + 0.410(a/d) + 1.173(a/d)^2
 \end{array}$$

Las soluciones K referidas a la distribución de tensiones residuales se muestran en la Tabla III. De acuerdo con estos valores se pueden hacer las siguientes observaciones:

a/b	a/d	$s/s_0 = 0$	1/3	2/3	1
0.2	0.1	0.046	0.042	0.044	0.050
	0.3	0.056	0.028	0.030	0.060
	0.5	0.022	0.006	0.008	0.026
1	0.1	0.006	0.013	0.027	0.062
	0.3	0.008	0.014	0.035	0.078
	0.5	0.004	0.009	0.018	0.035

Tabla III. Factor de intensidad adimensionalizado (distribución de tensiones residuales).

- Los valores del factor de intensidad de tensiones producidos por tensiones residuales son muy bajos, y por consiguiente pueden considerarse despreciables en comparación con los producidos por carga axial y momento flector.
- El factor de intensidad de tensiones aumenta cerca de la superficie del tornillo ($s/s_0 = 1$, Tabla III), debido a las condiciones de carga. Por consiguiente el principal efecto de las tensiones residuales sería la tendencia a disminuir la relación a/b entre semiejes de la elipse, y la opuesta para tensiones residuales compresivas.
- La influencia de las tensiones residuales en la propagación de fisuras por fatiga es despreciable, pues el correspondiente factor de intensidad de tensiones es constante y así las tensiones no tienen ninguna influencia en la oscilación del factor de intensidad de tensiones. Su única influencia se limita a un pequeño incremento en la relación R entre tensiones, que como es bien conocido tiene muy poca importancia en propagación de fisuras por fatiga.
- Las tensiones residuales tendrían una gran influencia en la iniciación de fisuras por fatiga. Dichas tensiones reducirían el número de ciclos necesarios para que un defecto superficial alcanzase una profundidad de 100 ó 200 micras. Pero para propagación de microfisuras la aproximación elástico-lineal utilizada no sería válida, y sería deseable un mayor esfuerzo investigador en esta línea.

Puesto que los valores K correspondientes a la distribución de tensiones residuales son muy pequeños, no merece la pena llevar a cabo ninguna interpolación para obtener expresiones analíticas.

La Tabla IV muestra las soluciones referidas a la carga debida a la tuerca, comparadas con las de carga axial. Debe hacerse notar que los valores de K para fisuras intermedias a tracción se obtuvieron por interpolación, puesto que sólo las fisuras superficial y circular se consideraron en los cálculos correspondientes a carga axial. Se ha dibujado el factor de intensidad de tensiones en función de la profundidad de la fisura en el centro de la misma (Figura 16) y en la superficie (Figura 17). En estas figuras Y representa el F.I.T. adimensionalizado para carga producida por la tuerca (trazo continuo) y para carga de tracción remota o carga axial pura (trazo discontinuo). La variación del F.I.T. a lo largo del frente de la fisura se presenta en la Figura 18 (fisura corta) y Figura 19 (fisura larga), con el mismo código gráfico que antes.

a/d	s/s ₀	SUPERFICIAL a/b = 0.2		INTERMEDIA a/b = 0.6		CIRCULAR a/b = 1	
		Y	Y*	Y	(Y*)	Y	Y*
0.1	0	2.35	0.99	2.88	0.87	1.72	0.75
	1/3	2.75	0.87	3.39	0.95	1.25	1.02
	2/3	2.69	0.79	3.27	0.94	3.90	1.08
	1	4.21	0.65	6.70	0.94	9.04	1.22
0.2	0	3.18	1.06	1.60	0.93	1.58	0.80
	1/3	2.80	0.88	1.39	0.94	1.17	1.00
	2/3	2.09	0.79	1.66	0.91	1.21	1.03
	1	2.92	0.66	2.32	0.91	1.91	1.16
0.3	0	2.76	1.25	1.41	1.07	1.42	0.88
	1/3	2.15	0.88	0.88	0.95	1.75	1.01
	2/3	2.14	0.80	1.21	0.93	1.06	1.06
	1	2.87	0.70	1.31	0.96	0.92	1.22
0.4	0	2.35	1.77	1.19	1.41	1.23	1.05
	1/3	1.66	0.88	1.02	0.95	1.49	1.02
	2/3	2.02	0.83	2.39	0.97	1.28	1.10
	1	2.13	0.74	2.33	1.03	0.76	1.31
0.5	0	2.17	2.08	1.51	1.68	1.16	1.27
	1/3	1.16	0.88	1.46	0.96	1.67	1.03
	2/3	1.90	0.84	2.18	1.00	0.47	1.15
	1	1.22	0.78	1.18	1.11	0.56	1.43

Y: carga directa debida a la tuerca

Y*: tracción axial remota

Tabla IV. Factor de intensidad de tensiones adimensionalizado (carga producida por la tuerca).

Referido al centro de la fisura, puede verse (Figura 16) que:

- La carga debida a la tuerca incrementa claramente el F.I.T. para las fisuras más cortas.
- Este efecto decrece con la profundidad de fisura.

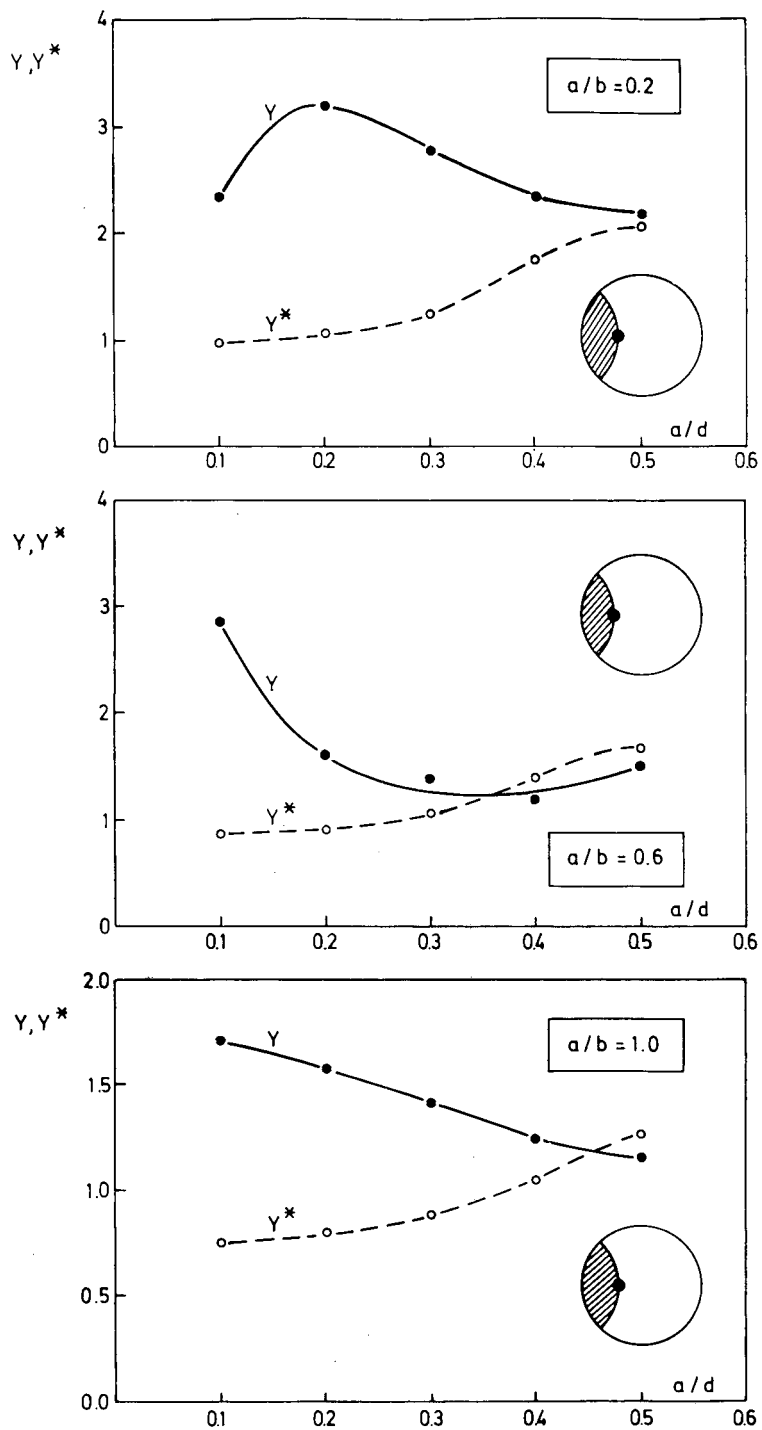


Figura 16. F.I.T. en función de la profundidad de fisura (centro ; Y para carga debida a la tuerca; Y^* para carga axial remota).

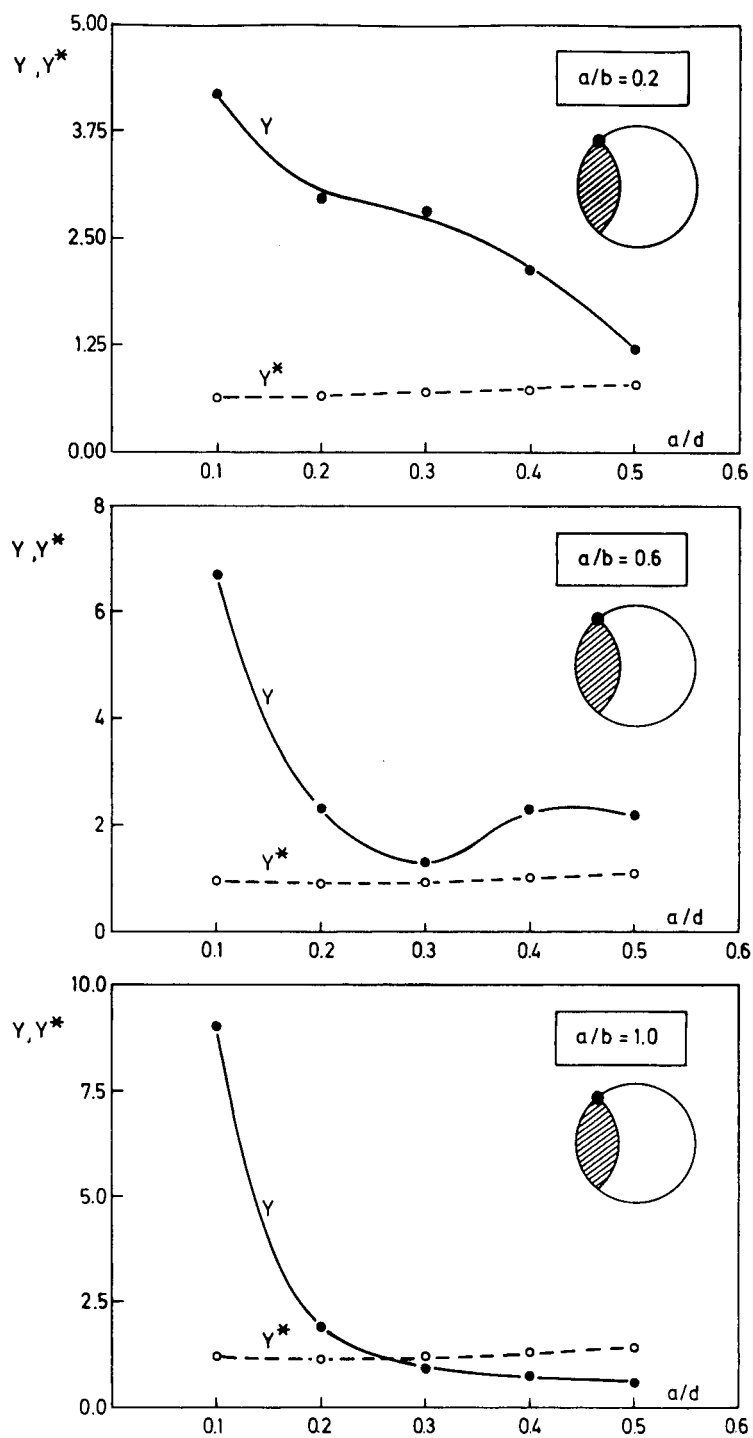


Figura 17. F.I.T. en función de la profundidad de fisura (superficie; Y para carga debida a la tuerca; Y^* para carga axial remota).

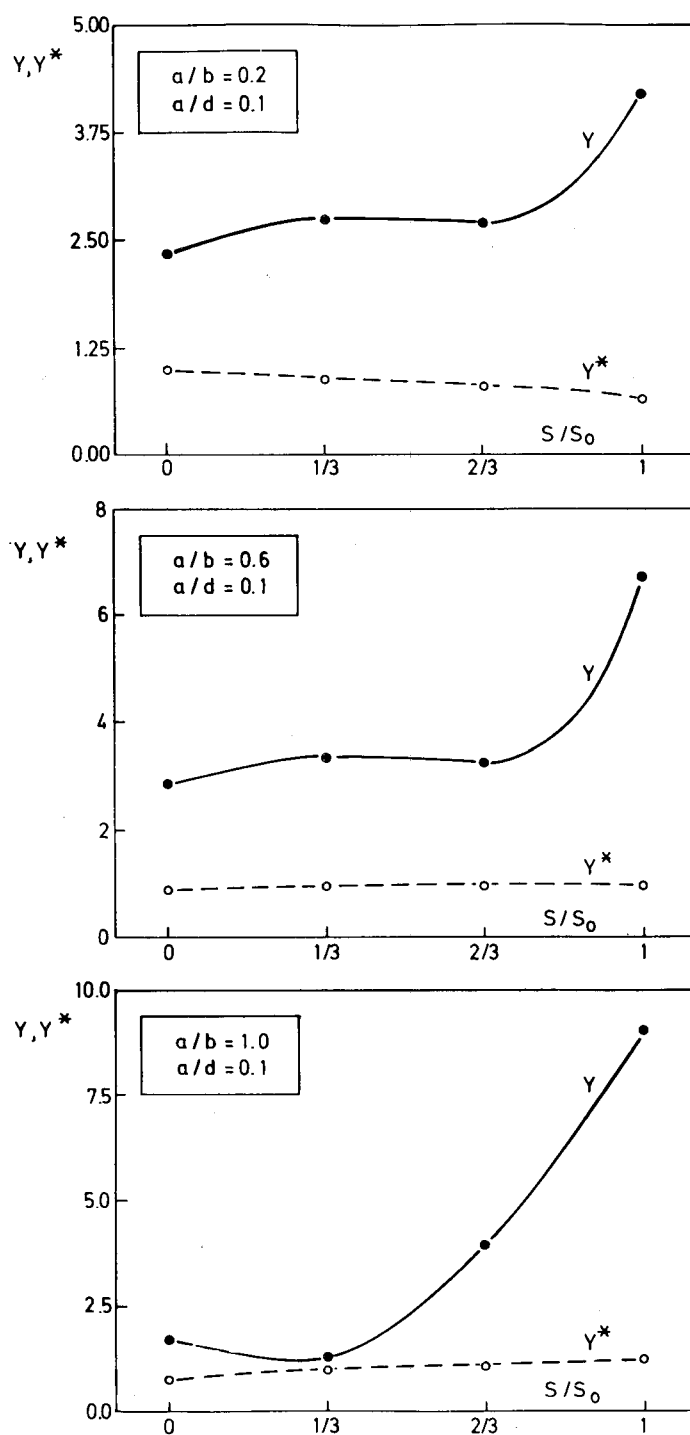


Figura 18. Variación del F.I.T. a lo largo del frente de fisura (fisura corta; Y para carga debida a la tuerca; Y^* para carga axial remota).

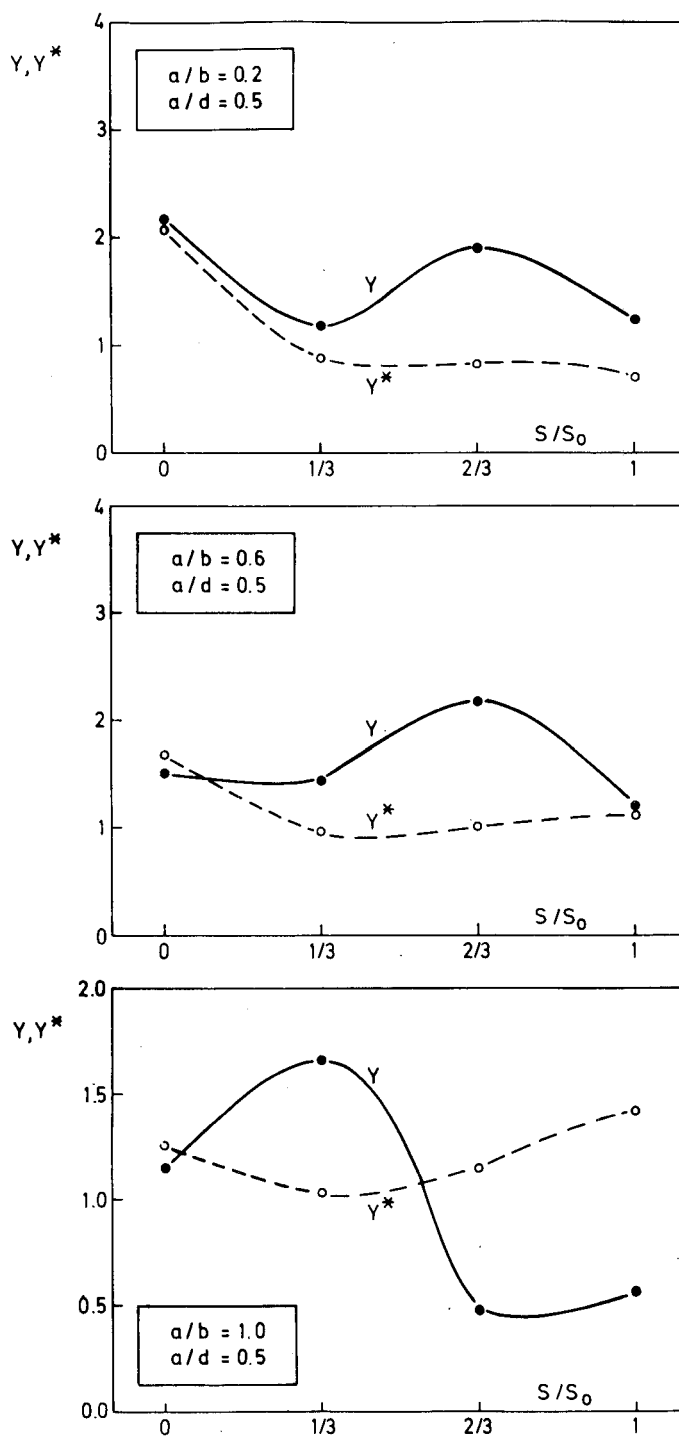


Figura 19. Variación del F.I.T. a lo largo del frente de fisura (fisura larga; Y para carga debida a la tuerca; Y^* para carga axial remota).

La tendencia es opuesta en las fisuras circulares e intermedias más profundas. Esto puede explicarse como un efecto de flexión, debido a la carga en la zona opuesta a la fisura, que produce dos áreas descargadas frente al extremo de la fisura junto a la superficie del tornillo (Figura 20).

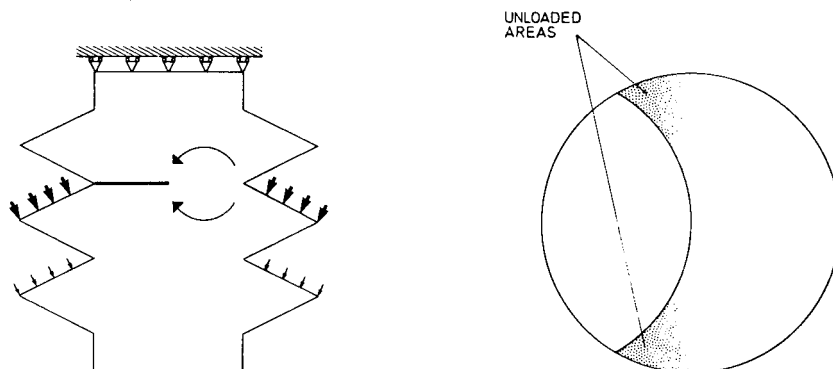


Figura 20. Efecto de flexión y áreas descargadas próximas a la superficie libre.

Con respecto a la superficie de la fisura, la Figura 17 muestra que:

- La carga debida a la tuerca incrementa mucho (aún más que en el centro de la fisura) el F.I.T. para las fisuras más cortas.
- Este efecto aumenta con la relación a/b y disminuye con la longitud de fisura.
- La tendencia es opuesta en las fisuras circulares más profundas, debido al efecto de flexión ya mencionado.

Se han obtenido curvas similares en el centro y en la superficie de la fisura (Figuras 18 y 19). En relación con la variación del F.I.T. a lo largo de la línea de la fisura, puede afirmarse que:

- El F.I.T. aumenta en las proximidades de la superficie del tornillo, debido a la carga aplicada por la tuerca directamente sobre la rosca.
- Este efecto es más importante en fisuras cortas, y menos en fisuras largas.
- La tendencia puede ser opuesta para fisuras circulares largas, por causa del efecto de flexión.

A partir de estos resultados, y por medio de una interpolación de segundo orden, se pueden obtener las siguientes expresiones analíticas, útiles para el cálculo de la vida en fatiga:

$$\begin{array}{ll}
 \underline{a/b=0.2} & s/s_0 = 0) \quad Y = 1.914 + 7.424(a/d) - 14.36(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 1/3) \quad Y = 2.930 + 0.291(a/d) - 6.714(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 2/3) \quad Y = 3.058 - 5.036(a/d) + 5.643(a/d)^2 \\
 & s/s_0 = 1) \quad Y = 4.736 - 7.070(a/d) + 0.500(a/d)^2
 \end{array}$$

$\underline{a/b=0.6}$	$s/s_0 = 0$	$Y = 4.248 - 16.74(a/d) + 22.64(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1/3$	$Y = 5.662 - 27.93(a/d) + 39.50(a/d)^2$
	$s/s_0 = 2/3$	$Y = 4.792 - 20.44(a/d) + 31.64(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1$	$Y = 10.32 - 47.42(a/d) + 60.64(a/d)^2$
$\underline{a/b=1}$	$s/s_0 = 0$	$Y = 1.918 - 1.941(a/d) + 0.786(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1/3$	$Y = 0.958 + 2.531(a/d) - 2.286(a/d)^2$
	$s/s_0 = 2/3$	$Y = 5.686 - 24.49(a/d) + 29.50(a/d)^2$
	$s/s_0 = 1$	$Y = 15.42 - 81.07(a/d) + 104.9(a/d)^2$

La obtención del factor de intensidad de tensiones para un tornillo fisurado solicitado directamente por la tuerca representa un esfuerzo importante dentro de la investigación en el campo de la Mecánica de la Fractura. Más aún, cualquier cálculo de tolerancia al daño requiere una estimación de la vida en fatiga del elemento estructural, y tal predicción envuelve gran cantidad de problemas muy difíciles referidos a una geometría tan complicada como un tornillo fisurado. Algunas de estas dificultades pueden ser puestas de manifiesto aquí:

- Redistribución de la carga, según la fisura crece, conduciendo a relajar la rosca más cargada y a tensionar la menos cargada. Una primera aproximación de carácter ingenieril consistiría en tomar un valor medio de los resultados correspondientes a carga axial remota y carga debida a la tuerca, es decir $(Y + Y^*)/2$ en la Tabla IV.
- El presente trabajo no incluye fisuras muy cortas, pero la tendencia parece ser un fuerte incremento del F.I.T. en tales fisuras, debido a la carga directa en la rosca producida por la tuerca, y la concentración tensional producida por el fondo de rosca (que se comporta como una entalla).
- En los puntos de la superficie de la fisura la teoría alcanza el límite de validez de la Mecánica de la Fractura Elástica y Lineal (MFEL), debido a la mayor extensión de la zona plástica en tales áreas.
- La fractura del tornillo representa un problema 3D, y por lo tanto debe formularse un criterio de fractura: global/energético basado en G_{IC} , o local/tensional basado en K_{IC} .
- Si se utiliza un criterio de fractura local debería emplearse un valor crítico del factor de intensidad de tensiones superior a la tenacidad de fractura.
- Problemas específicos referidos a crecimiento de fisuras por fatiga, tales como cierre de fisura, evolución de la excentricidad de la misma, etc., quedan claramente fuera del alcance de este artículo.

CONCLUSIONES E INVESTIGACIONES FUTURAS

- Se ha calculado numéricamente el factor de intensidad de tensiones para un tornillo fisurado sometido a carga axial, momento flector, distribución de tensiones residuales y carga debida a la tuerca.
- Se han introducido dos modificaciones en el cálculo con el fin de mejorar la precisión de los resultados numéricos utilizando el Método de la Rigidez Diferencial: el desplazamiento de los nodos a un cuarto (plano normal) y de los

nodos adyacentes (línea de fisura).

3. Se ha llevado a cabo una interpolación polinómica de segundo orden con los resultados numéricos, con el fin de proporcionar expresiones analíticas utilizables para estimaciones de la vida en fatiga de los elementos estructurales.
4. Los valores de K para carga axial son superiores en el centro de fisuras superficiales y en el borde exterior de fisuras circulares.
5. Los valores de K para momento flector son también superiores en el centro de fisuras superficiales y en el borde exterior de fisuras circulares.
6. Los valores de K en el caso de distribución de tensiones residuales aumentan cerca de la superficie libre, aunque pueden desprejarse en propagación por fatiga. Su única influencia se refiere a iniciación de fisuras por fatiga.
7. La carga producida por la tuerca incrementa claramente el factor de intensidad de tensiones para las fisuras más cortas, sobre todo en la superficie, debido a la aplicación directa de la carga sobre la rosca.
8. Este efecto disminuye con la profundidad de fisura, lo cual es bueno desde el punto de vista de la vida en servicio.
9. La tendencia es opuesta para las fisuras circulares más profundas, debido al efecto de flexión.
10. El peor efecto de la tuerca se debe a las siguientes tres condiciones simultáneas:
 - Fisuras cortas
 - Puntos próximos a la superficie libre
 - Fisuras circulares.

Estas conclusiones se basan en hipótesis de MFEL. Las investigaciones futuras se desarrollarán en las siguientes direcciones:

1. Obtención más precisa de la carga aplicada en la rosca por la tuerca.
2. Redistribución de la carga entre diferentes roscas, según la fisura crece por fatiga.
3. Aproximación más precisa de la geometría del tornillo, teniendo en cuenta la variación helicoidal.
4. Método numérico más refinado para obtener valores de K más precisos a diferentes profundidades.
5. Comprobación experimental de los resultados numéricos, utilizándolos para predecir la vida en fatiga.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo fue financiado por la Agencia Espacial Europea (ESA) bajo subcontrato R 1190.3131 E entre MBB-ERNO y el Departamento de Ciencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Madrid. Los autores agradecen vivamente dicha financiación, así como el apoyo del Dr. Henriksen (ESA-ESTEC) y del Dr. Müller-Wiesner (MBB-ERNO).

REFERENCIAS

1. V. Sánchez-Gálvez, M.A. Astiz, J. Toribio y J.M. Campos, "Damage Tolerance of Metallic Structures. Task 2200. WP 2210 (Phase I) Stress Intensity Factors in Cracked Bolts", *European Space Agency Technical Report*, (1989).
2. J. Toribio y V. Sánchez-Gálvez, "Damage Tolerance of Metallic Structures. Task 2200. WP2210 (Phase II). Stress Intensity Factor in a Cracked Bolt Subjected to Nut-Loading", *European Space Agency Technical Report*, (1989).
3. D. Müller-Wiesner, "Report on Crack Growth Calculations for Tension Loaded Bolts", MBB-ERNO, *Technical Note TN-OT217-029/88*, Bremen, Germany, (1988).
4. D. Müller-Wiesner, "Report on the Introduction of Fatigue Cracks in Bolts", MBB-ERNO, *Technical Note TN-OT217-020/88*, Bremen, Germany, (1988).
5. D. Müller-Wiesner, "Report on the Assessment of NDI-Results on Small Bolts", MBB-ERNO, *Technical Note TN-OT217-024/88*, Bremen, Germany, (1988).
6. D. Müller-Wiesner, "Test Plan for Fracture Mechanics Tests on Bolts M5 $\times$ 0.8 and M8 $\times$ 1.0", MBB-ERNO, *Technical Note TN-OT217-029/88*, Bremen, Germany, (1988).
7. J. Toribio, "Fracture in bolts. Stress intensity factor solution", 4th. Progress Meeting of the Programme *Damage Tolerance of Metallic Structures*, *European Space Agency*, Noordwijk, The Netherlands, (1987).
8. J. Toribio, "Application of the Stiffness Derivative Method to the computation of the stress intensity factor in a cracked bolt", 5th. Progress Meeting of the Programme *Damage Tolerance of Metallic Structures*, *European Space Agency*, Madrid, España, (1988).
9. J. Toribio, "Effect of the nut on the stress intensity factor in a cracked M8 bolt", 3rd. Progress Meeting (Phase II) of the Programme *Damage Tolerance of Metallic Structures*, *European Space Agency*, Bremen, Germany, (1989).
10. J. Toribio, "Stress intensity factor in a cracked bolt subjected to nut loading", 4th. Progress Meeting (Phase II) of the Programme *Damage Tolerance of Metallic Structures*, *European Space Agency*, Noordwijk, The Netherlands, (1989).
11. G.G. Reibaldi y M. Eiden, "Spacelab Bolt Fracture Mechanics Analysis", *ESTEC Working Paper*, No. 1274, (1981).
12. G.G. Reibaldi, "Stress intensity factor solutions for a cracked bolt", in *Advances in Fracture Research (ICF6)*, (Edited by Valluri et al.), Vol. 2, pp. 1177-1183, (1984).
13. K.J. Nord y T.J. Chung, "Fracture and surface flaws in smooth and threaded round bars", *Int. J. Fracture*, Vol. 30, pp. 47-55, (1986).
14. C.E. Springfield y H.Y. Jung, "Investigation of stress concentration factors-stress intensity factor interaction for flaws in filleted rods", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 31, pp. 135-144, (1988).
15. L.A. James y W.J. Mills, "Review and synthesis of stress intensity factor solutions applicable to cracks in bolts", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 30, pp. 641-654, (1988).
16. N. Makhutov, V. Zatsarinny y V. Kagan, "Initiation and propagation mechanics of low cycle fatigue cracks in bolts", in *Advances in Fracture Research (ICF5)*, (Edited by D. Francois et al.), Vol. 2, pp. 605-612, (1981).
17. W.D. Dover, "Crack shape evolution studies in threaded connection using A.C.F.M.", *Fatigue of Engng. Mater. Struct.*, Vol. 5, pp. 349-353, (1982).
18. T.L. Mackay y B.J. Alperin, "Stress intensity factors for fatigue cracking in high-strength bolts", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 21, pp. 391-397, (1985).
19. O.E.K. Daoud y D.J. Cartwright, "Strain energy release for a straight fronted edge crack in a circular bar subject to bending", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 19, pp. 701-707,

- (1984).
20. W.S. Blackburn, "Calculation of stress intensity factors for straight cracks in grooved and ungrooved shafts", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 8, pp. 731-736, (1976).
21. M.A. Astiz y M. Elices, "On the application of the stiffness derivative method to two and three-dimensional fracture problems", *Proc. Second Int. Conf. Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 93-106, (1980).
22. A. Athanassiadis, "Stabilité, ténacité, propagation des fissures dans les fils et barres en acier", Laboratoire Central des Ponts et Chaussées, *Rapport de Recherche LPC*, Vol. 89, (1979).
23. A. Athanassiadis, J.M. Boissenot, P. Brevet, D. Francois y A. Raharinaivo, "Linear elastic fracture mechanics computations of cracked cylindrical tensioned bodies", *Int. J. Fracture*, Vol. 17, pp. 553-566, (1981).
24. D.N. Fenner y M.J. Abdul Mihsein, "Crack front elastic stress state for three-dimensional crack problems", *Int. J. Fracture*, 25, pp. 121-131, (1984).
25. C.K. Ng y D.N. Fenner, "Stress intensity factors for an edge cracked circular bar in tension and bending", *Int. J. Fracture*, Vol. 36, pp. 291-303, (1988).
26. T. Loretzen, N.E. Kjaer y T. Henriksen, "The application of fracture mechanics to surface cracks in shafts", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 23, pp. 1005-1014, (1986).
27. E. Hojfeldt y C.B. Ostervig, "Fatigue crack propagation in shafts with shoulder fillets", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 25, pp. 421-427, (1986).
28. M. Caspers, C. Mattheck y D. Munz, "Fatigue crack propagation in cylindrical bars", *Z. Werkstofftech.*, Vol. 17, pp. 327-333, (1986).
29. M. Caspers y C. Mattheck, "Weighted averaged stress intensity factors of circular-fronted cracks in cylindrical bars", *Fatigue Fract. Engn. Mater. Struct.*, Vol. 9, pp. 329-341, (1987).
30. M.A. Mahmoud y A. Hosseini, "Assesment of stress intensity factor and aspect ratio variability of surface cracks in bending plates", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 24, pp. 207-22, (1986).
31. I.S. Raju y J.C. Newman, "Stress intensity factors pfor a wide range of semi-elliptical surface cracks in finite-thickness plates", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 11, pp. 817-829, (1979).
32. J.C. Newman y I.S. Raju, "An empirical stress-intensity factor equation for the surface crack", *Engng. Fracture Mech.*, Vol. 15, pp. 185-192, (1981).
33. I.S. Raju y J.C. Newman, "Stress intensity factors for circumferential surface cracks in pipes and rods", in *Fracture Mechanics: Seventeenth Volume, ASTM STP*, Vol. 905, pp. 789-805, (1986).
34. J.M. Campos y M. Elices, "Tensiones residuales internas en alambres trefilados", *Anales de Mecánica de la Fractura*, Vol. 4, pp. 143-157, (1987).
35. V.E. Schnack, "Genaue kerbspannungs analyse von schraubenmutterverbindungen", *VDI-Z 122*, Vol. 11, pp. 101-109, (1980).
36. V.K. Kloos y W. Thomala, "Spannungsverteilung in schraubengewinde", *VDI-Z 121*, Vol. 12, pp. 127-137, (1979).
37. E.A. Patterson y B. Kenny, "Stress analysis of some nut-bolt connections with modifications to the external shape of the nut", *J. Strain Anal.*, Vol. 22, pp. 187-193, (1987).
38. W.J. Gordon y C.A. Hall, "Construction of curvilinear coordinate systems and applications to mesh generation", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 7, pp. 461-477, (1973).

39. R. Haber, M.S. Shepard, J.F. Abel, R.H. Gallagher y D.P. Greenberg, "A general two-dimensional graphical finite element preprocessor utilizing discrete transfinite mapping", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 17, pp. 1015-1044, (1981).
40. R.D. Henshell y K.G. Shaw, "Crack tip finite elements are unnecessary", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, pp. 495-507, (1975).
41. R.S. Barsoum, "On the use of isoparametric finite elements in linear fracture mechanics", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 10, pp. 25-37, (1976).
42. R.S. Barsoum, "Triangular quarter point elements as elastic and perfectly plastic crack tip elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 11, pp. 85-98, (1977).
43. P.P. Lynn y A.R. Ingraffea, "Transition elements to be used with quarter-point crack-tip elements", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 12, pp. 1031-1036, (1978).
44. L. Banks-Sills y Y. Bortman, "Reappraisal of the quarter-point quadrilateral element in linear elastic fracture mechanics", *Int. J. Fracture*, Vol. 25, pp. 169-180, (1984).
45. L. Banks-Sills y D. Sherman, "Comparison of methods for calculating stress intensity factors with quarter-point elements", *Int. J. Fracture*, Vol. 32, pp. 127-140, (1986).
46. G. Bartelds y A.U. De Koning, "Application of Finite Element Methods to the Analysis of Cracks", National Aerospace Laboratory (NLR), The Netherlands, *Report NLR TR 78138U*, (1978).
47. A.U. De Koning, "Comparison of some Methods to Calculate Stress Intensity Values from Results of Finite Element Analysis", National Aerospace Laboratory (NLR), The Netherlands, *Memorandum SC-78-170*, (1979).
48. D.M. Parks, "A stiffness derivative finite element technique for determination of crack tip stress intensity factors", *Int. J. Fracture*, Vol. 10, pp. 487-502, (1974).
49. D.M. Parks, "Virtual crack extension: general finite element technique for J-integral evaluation", *Proc. First Int. Conf. Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 464-478, (1978).
50. T.K. Hellen, "On the method of virtual crack extension", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. 9, pp. 187-207, (1975).
51. H.D. Delorenzi, "On the energy release rate and the J-integral for 3-D crack configurations", *Int. J. Fracture*, Vol. 19, pp. 183-193, (1982).
52. H.D. Delorenzi, "Energy release rate calculations by the finite element method", *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 21, pp. 129-143, (1985).
53. G.G. Trantina, H.D. Delorenzi y W.W. Wilkening, "Three-dimensional elastic plastic finite element analysis of small surface cracks", *Engng. Fracture Mechanics*, Vol. 18, pp. 925-938, (1983).
54. A.U. De Koning y C.J. Lof, "K-distributions extrapolated on the basis of stress intensity rates", *Proc. Third Int. Conf. Numerical Methods in Fracture Mechanics*, pp. 195-203, (1984).
55. M.A. Astiz, "An incompatible singular elastic element for two- and three-dimensional crack problems", *Int. J. Fracture*, Vol. 31, pp. 105-124, (1986).