

# Mecánica de daño continuo

B. Luccioni

# **Mecánica de daño continuo**

B. Luccioni

Monografía CIMNE N°-71, Marzo 2003

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España

Primera edición: Marzo 2003

**MECÁNICA DEL MEDIO CONTINUO**

Monografía CIMNE M 71

© El autor

ISBN: 84-95999-19-6

Depósito legal: B-13719-2003

# Contenido

<b>1. Introducción.....</b>	<b>1.1</b>
1.1 Presentación.....	1.1
<b>2. Aspectos fenomenológicos.....</b>	<b>2.1</b>
2.1. Introducción.....	2.1
2.2. Naturaleza física del daño.....	2.1
2.2.1 Átomos, elasticidad y daño.....	2.2
2.2.2. Deslizamiento, plasticidad y deformaciones irreversibles.....	2.2
2.2.3. Escalas de los fenómenos de deformación.....	2.3
2.2.4. Diferentes manifestaciones del daño.....	2.3
2.2.5. Otras características del daño.....	2.6
2.3. Interpretación mecánica del daño.....	2.7
2.3.1. Variable de daño unidimensional.....	2.7
2.3.2. Concepto de tensión efectiva.....	2.8
2.3.3. Ejemplo de derivación micromecánica del daño.....	2.9
2.3.4. Otra forma basada en el concepto de tensión efectiva.....	2.11
2.4. Medición del daño.....	2.12
2.4.1. Medición directa.....	2.12
2.4.2. Módulo de elasticidad.....	2.12
2.4.3. Propagación de ondas de ultrasonido.....	2.13
2.4.4. Variación del microendurecimiento.....	2.14
2.4.5. Variación de la densidad.....	2.15
2.4.6. Variación de la resistencia eléctrica.....	2.16
2.4.7. Respuesta plástica cíclica.....	2.16
2.4.8. Fluencia lenta terciaria.....	2.17
2.4.9. Medición del daño en materiales compuestos.....	2.17
<b>3. Fundamentos de los modelos de daño.....</b>	<b>3.1</b>
3.1. Introducción.....	3.1
3.2. Clasificación de los modelos de daño.....	3.2
3.2.1. Escala.....	3.2
3.2.2. Modelos locales y no locales.....	3.3
3.2.3. Variable de daño.....	3.4
3.2.4. Interpretación del daño.....	3.5

3.3. Bases termodinámicas.....	3.10
3.3.1. <i>Introducción</i> .....	3.10
3.3.2. <i>Variables interna</i> .....	3.13
<b>4. Modelos de daño escalar.....</b>	<b>4.1</b>
4.1. Conceptos básicos.....	4.1
4.2. Bases termodinámicas.....	4.2
4.3. Modelo de Simo y Ju (1987a).....	4.2
4.3.1. <i>Fundamentos termodinámicos</i> .....	4.2
4.3.2. <i>Función umbral de daño</i> .....	4.3
4.3.3. <i>Regla de evolución del daño</i> .....	4.5
4.3.4. <i>Forma alternativa de escribir la evolución explícita de la variable de daño</i> .....	4.5
4.3.5. <i>Tensor de rigidez tangente</i> .....	4.6
4.3.6. <i>Función de endurecimiento/ablandamiento</i> .....	4.7
4.3.7. <i>Función umbral de daño de Mazars</i> .....	4.8
4.3.8. <i>Función umbral de daño para materiales con umbrales de daño distintos en tracción y compresión</i> .....	4.9
4.4. Forma alternativa de tratar el daño escalar: modelo implícito.....	4.11
4.4.1. <i>Criterio de daño</i> .....	4.12
4.4.2. <i>Condición de carga/descarga</i> .....	4.14
4.4.3. <i>Evolución del daño</i> .....	4.14
4.4.4. <i>Expresión tangente</i> .....	4.14
4.4.5. <i>Disipación</i> .....	4.15
4.4.6. <i>Comparación entre criterios de daño basados en energía de deformación y criterios de daño basados en tensión</i> .....	4.15
4.5. Tratamiento numérico.....	4.17
4.5.1. <i>Planteo general</i> .....	4.17
4.5.2. <i>Integración de la ecuación constitutiva en modelos explícitos e implícitos</i> .....	4.18
<b>5. Modelos de daño direccionado.....</b>	<b>5.1</b>
5.1. Introducción.....	5.1
5.1.1. <i>Concepto de la máxima tensión principal (Vector de daño)</i> .....	5.1
5.1.2. <i>Definición geométrica del tensor de daño de segundo orden</i> .....	5.2
5.1.3. <i>Definición termodinámica de un tensor de daño de cuarto orden</i> .....	5.4
5.1.4. <i>Definición energética de una variable doble escalar</i> .....	5.4
5.2. Formulación de la degradación elástica anisótropa (Carol et al 2001).....	5.6
5.2.1. <i>Marco teórico de la degradación elástica y el daño</i> .....	5.6
5.2.2. <i>Modelo de daño anisótropo básico</i> .....	5.9
5.2.3. <i>Tasa de daño pseudo-logarítmica y fuerzas conjugadas</i> .....	5.11
5.2.4. <i>Función de carga y regla de daño pseudo-logarítmica</i> .....	5.13
5.2.5. <i>Modelo Pseudo Rankine generalizado</i> .....	5.15

5.2.6. Evolución del umbral de daño o función de resistencia.....	5.16
5.2.7. Comentarios finales.....	5.17
5.3. Modelo de daño direccionado (Luccioni et al 2003).....	5.17
5.3.1. Introducción.....	5.17
5.3.2. Interpretación del daño.....	5.17
5.3.3. Bases termodinámicas.....	5.22
5.3.4. Regla de flujo.....	5.24
5.3.5. Función umbral de daño.....	5.25
5.3.6. Evolución del daño.....	5.27
5.3.7. Tensor de rigidez tangente.....	5.27
5.3.8. Regla de endurecimiento.....	5.28
5.3.9. Consideración de la anisotropía inicial.....	5.30
5.3.10. Implementación numérica.....	5.34
5.3.11. Ejemplos de validación .....	5.36
5.3.12. Ejemplos de aplicación.....	5.42
<b>6. Modelos de daño unilateral.....</b>	<b>6.1</b>
6.1. Introducción .....	6.1
6.2. Condiciones que deben cumplir los modelos de daño unilateral.....	6.2
6.2.1. Capacidad para simular simultáneamente daño unilateral anisótropo.....	6.2
6.2.2. Conservación de la energía.....	6.2
6.3. Modelo de daño unilateral con variables escalares.....	6.3
6.4. Modelo de Daño Anisótropo de Ju.....	6.4
6.5. Modelo de daño anisótropo y unilateral de Chaboche.....	6.7
6.5.1. Conceptos básicos.....	6.7
6.5.2. Direcciones principales de daño.....	6.8
6.5.3. Comportamiento elástico activo.....	6.8
6.5.4. Superficie de daño.....	6.9
6.5.5. Dirección de crecimiento del daño.....	6.10
6.6. Modelo de daño escalar unilateral (Martín 2001).....	6.11
6.6.1. Bases termodinámicas.....	6.11
6.6.2. Función de carga.....	6.14
6.6.3. Evolución del daño.....	6.14
6.6.4. Disipación espuria.....	6.14
6.6.5. Simetría del tensor secante y continuidad de los campos de tensiones y deformaciones para condiciones unilaterales.....	6.16
6.6.6. Implementación numérica.....	6.17
6.6.7. Ejemplo ilustrativo.....	6.18
<b>7. Modelos de daño viscoso.....</b>	<b>7.1</b>
7.1. Introducción .....	7.1

7.2. Localización del daño e inestabilidad.....	7.2
7.3. Modelo de daño escalar explícito dependiente del tiempo (Simo y Ju 1987)....	7.4
7.3.1. <i>Extensión del modelo independiente del tiempo</i> .....	7.4
7.3.2. <i>Condición de positividad para unicidad de la solución</i> .....	7.5
7.3.3. <i>Propagación de ondas infinitesimales</i> .....	7.5
7.3.4. <i>Implementación numérica</i> .....	7.7
7.4. Modelo de daño escalar implícito dependiente del tiempo (Luege et al 2002)..	7.8
7.4.1. <i>Introducción</i> .....	7.8
7.4.2. <i>Bases termodinámicas</i> .....	7.9
7.4.3. <i>Criterio de daño</i> .....	7.9
7.4.4. <i>Regla de evolución del daño</i> .....	7.10
7.4.5. <i>Tratamiento numérico</i> .....	7.10
7.4.6. <i>Operador tangente consistente</i> .....	7.12
7.4.7. <i>Ejemplos de aplicación</i> .....	7.14
<b>8. Modelos de daño y plasticidad. ....</b>	<b>8.1</b>
8.1. <i>Introducción</i> .....	8.1
8.2. <i>Forma general de los modelos de daño y plasticidad</i> .....	8.1
8.2.1. <i>Diferentes formas de acoplamiento</i> .....	8.1
8.2.2. <i>Acoplamiento disipativo</i> .....	8.3
8.3. <i>Modelo de daño escalar explícito acoplado con plasticidad</i> .....	8.4
8.3.1. <i>Bases termodinámicas</i> .....	8.4
8.3.2. <i>Reglas de evolución de la plasticidad y el daño</i> .....	8.5
8.3.3. <i>Respuesta plástica</i> .....	8.5
8.3.4. <i>Tensor elastoplástico dañado tangente</i> .....	8.7
8.3.5. <i>Tratamiento numérico</i> .....	8.7
8.4. <i>Modelo de daño escalar acoplado con plasticidad</i> .....	8.9
8.4.1. <i>Introducción</i> .....	8.9
8.4.2. <i>Bases termodinámicas</i> .....	8.9
8.4.3. <i>Proceso plástico</i> .....	8.10
8.4.4. <i>Proceso de daño</i> .....	8.11
8.4.5. <i>Plasticidad y daño acoplados</i> .....	8.12
8.4.6. <i>Otra forma de escribir el modelo</i> .....	8.13
8.4.7. <i>Implementación numérica</i> .....	8.14
8.4.8. <i>Ejemplos de aplicación</i> .....	8.17
8.5. <i>Modelo de daño escalar viscoso unilateral y plasticidad</i> .....	8.19
8.5.1. <i>Modelo de daño y plasticidad independiente del tiempo</i> .....	8.20
8.5.2. <i>Regularización viscosa</i> .....	8.23
8.5.3. <i>Tratamiento numérico</i> .....	8.23
8.6. <i>Daño dependiente de la velocidad de deformación acoplado con viscoplasticidad</i> .....	8.25
8.6.1. <i>Formulación teórica</i> .....	8.25

---

8.6.2. <i>Potencial plástico y criterio de fluencia</i> .....	8.27
8.6.3. <i>Criterio de daño y potencial de daño</i> .....	8.28
8.6.4. <i>Daño dependiente de la velocidad de deformación acoplado con viscoplasticidad</i> .....	8.29
8.6.5. <i>Interpretación del daño</i> .....	8.32
8.6.6. <i>Expresión incremental para el tensor de daño</i> .....	8.34
8.6.7. <i>Ecuación constitutiva tangente</i> .....	8.35
8.6.8. <i>Implementación numérica</i> .....	8.36

## **Referencias**





# 1. Introducción

## 1.1. Presentación

La Mecánica del Daño Continuo es una herramienta atractiva para describir el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales que fue ampliamente desarrollada y aplicada a numerosas situaciones durante las últimas dos décadas. Desde la introducción del concepto de daño por Kachanov en 1958, los modelos que involucran la degradación elástica se han tornado cada día más populares, alcanzado actualmente niveles que permiten su aplicación a problemas prácticos de ingeniería.

En esta monografía se intenta presentar un marco teórico general que permita analizar la gran cantidad de modelos de daño continuo existentes, no sólo desde el punto de vista de su formulación sino también teniendo en cuenta su capacidad para reproducir las evidencias experimentales correspondientes a un amplio rango de materiales y su implementación numérica en códigos de elementos finitos. La monografía se restringe al tratamiento del daño en pequeñas deformaciones y dentro del marco de la Mecánica de Medios Continuos.

En el Capítulo 2 se presentan algunos aspectos fenomenológicos del daño, su interpretación física y matemática. En el Capítulo 3 se desarrollan las bases termodinámicas de los modelos de daño, junto a una posible clasificación de los mismos. A partir del Capítulo 4, se desarrollan distintos tipos de modelos de daño continuo de complejidad creciente, comenzando con los modelos de daño escalar en el Capítulo 4, siguiendo por los modelos de daño direccionado en el Capítulo 5, los modelos de daño unilateral en el Capítulo 6, los modelos de viscoso en el Capítulo 7, para terminar finalmente con los modelos de plasticidad y daño acoplados en el Capítulo 8. Todos estos capítulos comienzan con una presentación del fenómeno físico a describir y del marco teórico correspondiente y se acompañan con la descripción de modelos concretos, para los cuales se incluye, además, esquemas de los algoritmos para su implementación numérica en un código de elementos finitos.

Esta monografía fue escrita con la idea de que sirva de texto de apoyo al desarrollo de la asignatura “Mecánica de Daño Continuo” del Programa de Doctorado en Ingeniería Civil de la Escuela de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona. Deseo dejar constancia de mi agradecimiento al Prof. Carlos Agelet Saracibar, director de dicho programa de doctorado, quien gestionó una Ayuda para Movilidad de Profesores de Tercer Ciclo en los Programas de Doctorado, que me permitió dictar de esta asignatura, como así también al CIMNE por la colaboración brindada. No puedo dejar de reconocer mi agradecimiento al Prof. Sergio Oller quien motivó y alentó esta iniciativa desde sus comienzos.

B. Luccioni



# 2. Aspectos fenomenológicos

## 2.1 Introducción

En términos generales el *daño* de los materiales es el proceso físico progresivo por el cual se rompen los mismos. La mecánica del daño es el estudio, a través de variables mecánicas, de los mecanismos involucrados en el deterioro de los materiales cuando son sometidos a cargas. En la microescala esto es la acumulación de microtensiones en la vecindad de defectos o interfaces y la rotura de ligaduras, que dañan ambos al material. En la mesoescala del volumen representativo esto se traduce en el crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos que, en conjunto, inician una fisura. En la macroescala el daño está representado por el crecimiento de dicha fisura. Los dos primeros niveles pueden ser estudiados a través de variables de daño de la Mecánica de los Medios Continuos definidas a nivel de mesoescala. El tercer nivel se estudia normalmente utilizando la Mecánica de Fractura con variables definidas a nivel macroscópico.

La Mecánica del Daño Continuo fue introducida por primera vez por Kachanov (1958) y alcanzó actualmente niveles que permiten su aplicación a problemas prácticos de ingeniería. En contraste con la Mecánica de Fractura, que considera el proceso de iniciación y crecimiento de microfisuras como un proceso discontinuo, la Mecánica del Daño Continuo utiliza variables continuas relacionadas con la densidad de estos defectos para describir el deterioro del material antes de la iniciación de macrofisuras.

## 2.2 Naturaleza física del daño (Lemaitre 1996)

### 2.2.1. Átomos, Elasticidad y Daño.

Todos los materiales están constituidos por átomos que se encuentran unidos entre sí por ligaduras resultantes de la interacción de campos electromagnéticos. La elasticidad está directamente relacionada con el movimiento relativo de los átomos. El estudio físico de las propiedades de una red de átomos conduce a la teoría de la elasticidad. Pero una forma más fácil de escribir estas ecuaciones es hacerlo directamente en la mesoescala a partir de la propiedad de reversibilidad de la deformación, que implica

una relación uno a uno y, eventualmente, incorporar las propiedades de linealidad e isotropía.

Cuando se produce un despegue (rotura de ligaduras) comienza el proceso de daño. Por ejemplo, los metales están compuestos por cristales: arreglos regulares de átomos excepto en las líneas de dislocación donde hay átomos ausentes. Si se aplican tensiones tangenciales las dislocaciones se pueden mover por el desplazamiento de las ligaduras creando deformaciones plásticas por deslizamiento, sin rotura de ligaduras.

Si la dislocación es detenida por un microdefecto o la concentración de microtensiones, se crea una zona de restricción en la que se pueden detener otras dislocaciones. Este proceso ya no puede ocurrir sin daño por rotura de ligaduras. Otros mecanismos de daño en metales son el despegue intergranular y la decohesión entre inclusiones y matriz.

Los mecanismos de daño en otros tipos de materiales tienen orígenes distintos:

- En polímeros el daño ocurre por rotura de ligaduras que existen entre largas cadenas de moléculas.
- En compuestos el daño ocurre por despegue de fibras y matriz polimérica.
- En cerámicos el daño es producido fundamentalmente por decohesión entre inclusiones y matriz.
- En el hormigón, el mecanismo de daño temprano es también una decohesión entre agregados y cemento con una compleja influencia del agua.
- En la madera el daño se produce en el punto débil que es la unión de las células de celulosa

Todos estos mecanismos crean, a su vez, microdeformaciones plásticas.

En todos los casos la elasticidad está fuertemente influenciada por el daño ya que el número de ligaduras atómicas, responsables de la elasticidad, decrece con el daño. Este acoplamiento, que ocurre a nivel de estado del material, definido aquí por la deformación elástica y el daño, es llamado acoplamiento de estado.

### 2.2.2. Deslizamiento, plasticidad y deformaciones irreversibles.

La mayoría de los materiales, en particular los geomateriales, presentan un comportamiento no lineal acompañado de deformaciones permanentes, cuando son sometidos a cargas mecánicas. En los geomateriales, las deformaciones permanentes son causadas por la microfisuración. El daño o degradación de rigidez está relacionado con la iniciación, crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos.

En los metales, la plasticidad está directamente relacionada con los deslizamientos que ocurren por movimiento de las dislocaciones. En ningún caso, esos movimientos inducen una deformación volumétrica apreciable.

En otros materiales las deformaciones irreversibles pueden ocurrir por otros mecanismos:

- Reordenación de moléculas en polímeros.
- Microfisuras en cerámicos donde la gran resistencia de la estructura no permite movimiento de las dislocaciones.
- Movimiento a lo largo de superficies de decohesión en hormigón.
- Rearreglo de las celdas en madera.

En algunos casos, estos mecanismos pueden inducir cambios de volumen.

En todos los casos, el daño influye en las deformaciones plásticas o irreversibles sólo porque el área elemental de resistencia decrece a medida que decrece el número de ligaduras. Pero el daño no influye directamente en el mecanismo de deslizamiento mismo, es decir, no existe acoplamiento de estado entre plasticidad y daño.

### 2.2.3. Escalas de los fenómenos de deformación y daño.

La Mecánica del Daño Continuo trabaja con cantidades definidas en puntos matemáticos. Desde el punto de vista físico estas cantidades representan promedios en un cierto volumen. El elemento representativo de volumen debe ser lo suficientemente pequeño para evitar el suavizado de altos gradientes pero suficientemente grande como para representar un promedio de los microprocesos. Para fines experimentales y análisis numérico es útil considerar los siguientes órdenes de magnitud para los elementos representativos de volumen que definen la escala de la mesomecánica:

- |   |                      |
|---|----------------------|
| • Metales y cerámicos:                      | $(0.1 \text{ mm})^3$ |
| • Polímeros y la mayoría de los compuestos: | $(1 \text{ mm})^3$   |
| • Madera:                                   | $(10 \text{ mm})^3$  |
| • Hormigón:                                 | $(100 \text{ mm})^3$ |

Otra propiedad importante a considerar es que el daño es siempre más localizado que la deformación.

En resumen:

- La microescala es la escala de los mecanismos utilizados para considerar deformaciones y daño
- La mesoescala es la escala en la que se escriben las ecuaciones constitutivas para el análisis mecánico.
- La macroescala es la escala de las estructuras de ingeniería.

### 2.2.4. Diferentes manifestaciones del daño

Aún cuando en la microescala el daño está gobernado por un solo mecanismo general de despegue, en la mesoescala se puede manifestar de varias formas dependiendo de la naturaleza del material, del tipo de carga y de la temperatura.

### Daño frágil

El daño se llama frágil cuando la fisura se inicia en la mesoescala sin una cantidad apreciable de deformación plástica. Esto significa que las fuerzas no son suficientes para producir deslizamientos pero son mayores que las fuerzas de despegue. El grado de localización es alto. Ver Figura 2.1.

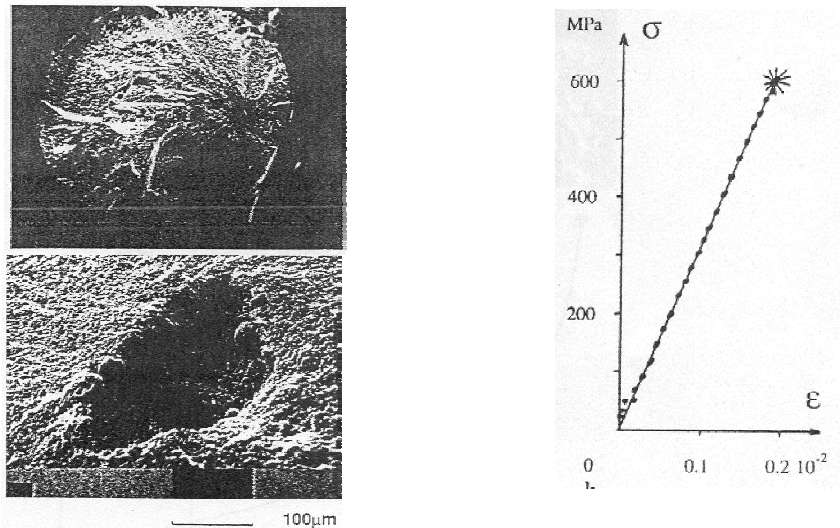


Figura 2.1 Daño frágil (Lemaitre 1996)

### Daño dúctil

El daño se denomina dúctil cuando ocurre simultáneamente con deformaciones plásticas mayores que un cierto umbral. Resulta de la nucleación de cavidades debido a decohesiones entre inclusiones y matriz seguida de su crecimiento y coalescencia a través del fenómeno de inestabilidad plástica. Como consecuencia de ello, el grado de localización del daño dúctil es comparable a aquel de la deformación plástica. Ver Figura 2.2.

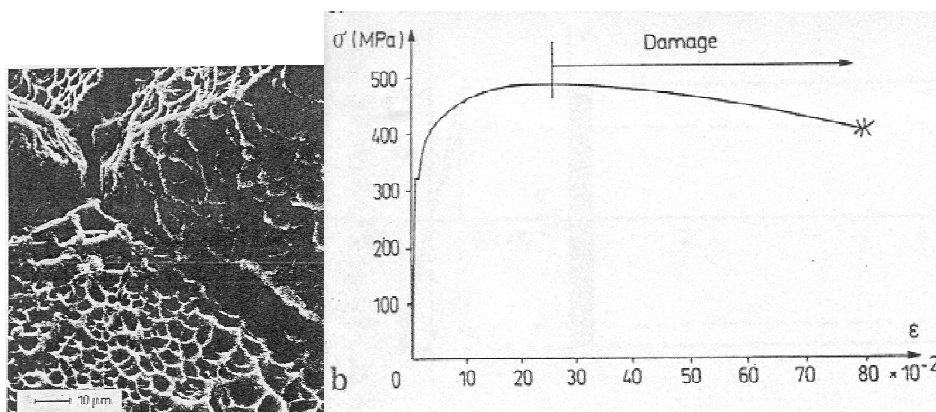


Figura 2.2. Daño dúctil (Lemaitre 1996)

### Daño por creep

Cuando un material se carga a temperaturas elevadas, por ejemplo, por arriba de  $1/3$  de la temperatura de fusión, las deformaciones plásticas involucran viscosidad, es decir que el material puede deformarse a tensiones constantes. Cuando la deformación es suficientemente grande aparecen decohesiones intergranulares que producen daño y un aumento de la velocidad de deformación a lo largo del período de creep terciario. Como en el caso del daño dúctil, los gradientes de daño por creep son similares a los gradientes de deformación viscoplástica. Ver Figura 2.3.

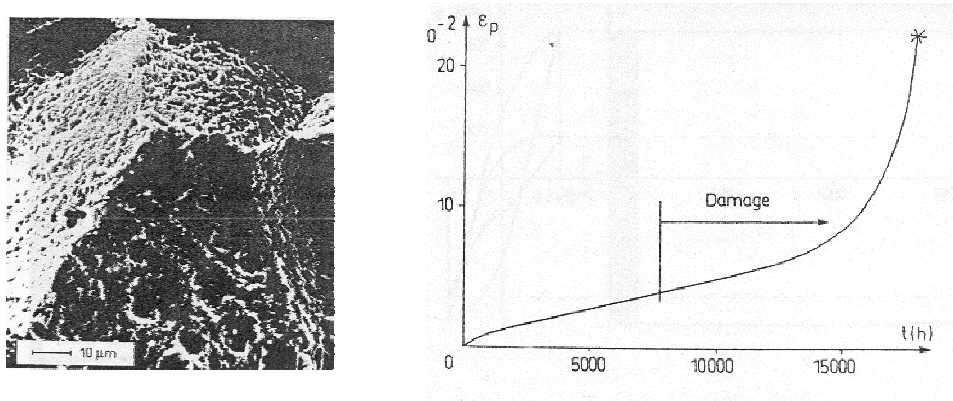


Figura 2.3 Daño por creep (Lemaitre 1996)

### Daño por fatiga de bajos ciclos

Cuando un material es sometido a cargas cíclicas para valores altos de la tensión o de la deformación, después de un período de incubación que precede las fases de nucleación y propagación de microfisuras, se desarrolla daño junto con la deformación plástica. El grado de localización es mayor que para el caso de daño dúctil. Debido a los altos valores de tensión, la fatiga de bajos ciclos está caracterizada por valores bajos del número de ciclos de ruptura.

Si el material se carga en deformación, el daño induce una caída en la amplitud de la tensión para dos ciclos de deformación correspondientes a un ciclo estabilizado y un ciclo cercano a la ruptura.

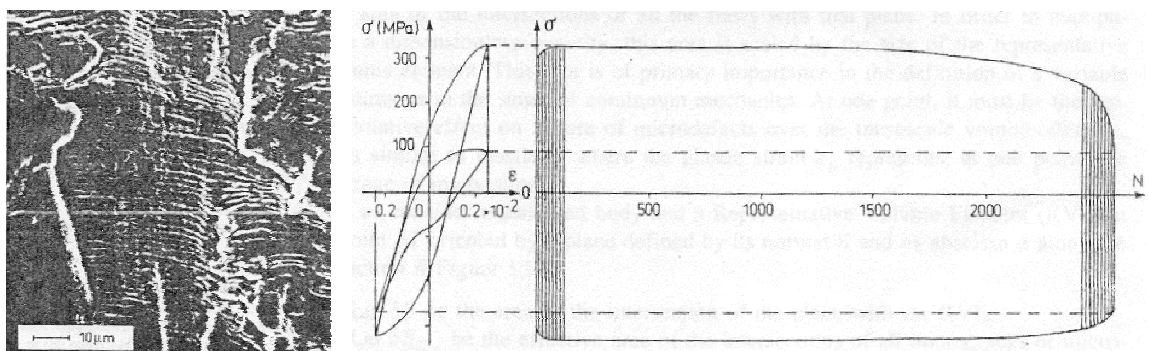


Figura 2.4. Fatiga de bajos ciclos (Lemaitre 1996).

Para los metales el daño puede ser intergranular o microfisuración transgranular siguiendo detención de bandas de deslizamiento. Ver Figura 2.4.



### Fatiga de altos ciclos

Cuando se carga un material con valores bajos de tensión, las deformaciones plásticas en la mesoescala permanecen pequeñas y son prácticamente despreciables. Pueden ser altas en la microescala donde la microfisuración transgranular ocurre sólo en algunos planos, más frecuentemente en la superficie del espécimen, por el mecanismo de intrusión-extrusión. El número de ciclos para producir la falla puede ser muy alto (Mayor de 100000)

Como consecuencia, la localización del daño es mayor y la caída de tensión en la mesoescala para un ensayo de deformaciones cíclicas ocurre mucho después que en el caso de fatiga de bajos ciclos. Ver Figura 2.5.

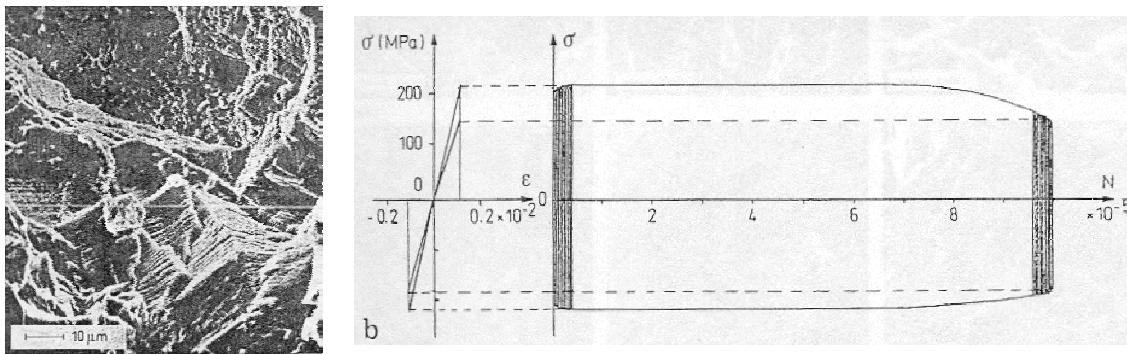


Figura 2.5. Fatiga de altos ciclos (Lemaitre 1996).

Debe notarse que en el caso del daño frágil o daño por fatiga de altos ciclos, la curva tensión-deformación obtenida de un ensayo de tracción o compresión en la mesoescala no representa generalmente el comportamiento real de deformaciones y daño porque la localización espacial induce microplastificaciones y zonas de daño mucho más chicas que tales especímenes. Sin embargo, se los usa porque es difícil de hacer ensayos mecánicos en la microescala. Lo que hay que tener en cuenta es que en esos casos los resultados son promedios de cantidades no uniformes en el mesovolumen.

#### 2.2.5. Otras características de daño

##### Anisotropía

Se admite actualmente, que los defectos que causan la degradación del material, pueden estar orientados por la microestructura (anisotropía inicial), o por la carga (anisotropía inducida por el daño). En la mayoría de los casos, los defectos que se generan en ese proceso de daño están orientados respecto a la historia de tensiones aplicada y traen como consecuencia un deterioro progresivo de la rigidez elástica del material con ciertas direcciones preferentes. El material, inicialmente isótropo, se torna gradualmente anisótropo. Este fenómeno es lo que se conoce como anisotropía inducida por el daño, daño direccionado o simplemente daño anisótropo.

##### Unilateralidad

Si bien el proceso de daño es irreversible, éste puede estar activo o no, dependiendo de las condiciones de carga. En muchos materiales, la reducción de la rigidez en

tracción es debida al desarrollo de microfisuras y se ha confirmado experimentalmente que la reversión de la carga puede cerrar dichas fisuras, con la consiguiente recuperación de rigidez. Este efecto se describe a través de la desaparición del daño al pasar de tracción a compresión y se denomina normalmente daño activo/pasivo o efecto unilateral del daño.

## 2.3 Interpretación mecánica del daño

### 2.3.1. Variable de daño unidimensional (Kachanov 1958)

De la sección anterior, el daño se puede interpretar en la microescala como la creación de microsuperficies de discontinuidades: rotura de ligaduras atómicas y agrandamiento plástico de microcavidades. En la mesoescala, el número de ligaduras rotas o la distribución de microcavidades pueden ser aproximados en cualquier plano por el área de las intersecciones de todos los defectos con ese plano. Para trabajar con medidas adimensionales dicha área puede ser escalada a la medida del elemento representativo de volumen. Esta medida es fundamental en la definición de una variable continua en el sentido de la mecánica del continuo. En un punto debe ser representativa sobre la mesoescala del elemento de volumen del efecto de los microdefectos en la falla.

Considérese un elemento representativo de volumen de un cuerpo dañado en un punto  $M$  sobre un plano de normal  $n$ , ubicado en la abscisa  $x$  a lo largo de la dirección  $n$ .

Supóngase que  $\delta S$  es el área de la intersección del plano con el elemento representativo de volumen y  $\delta S_{Dx}$  el área efectiva de la intersección de todas las microfisuras o microcavidades que caen en  $\delta S$ . Ver Figura 2.6.

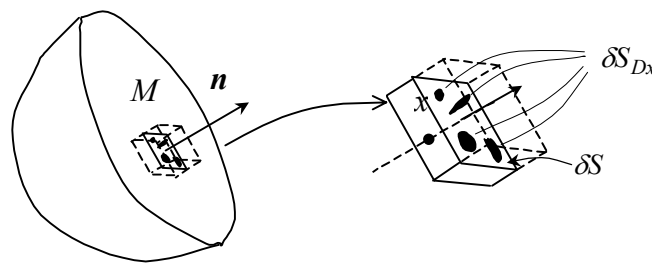


Figura 2.6. Interpretación del daño

El valor del daño en el punto  $M$  en la dirección  $n$  y en la abscisa  $x$  estaría dado por:

$$D(M, n, x) = \frac{\delta S_{Dx}}{\delta S} \quad (2.1)$$

Para definir una variable continua sobre el volumen representativo que describa el deterioro hasta la falla en dos partes, se debe mirar todos los planos que varían con  $x$  y considerar el que está más dañado:

$$D(M, \mathbf{n}) = \text{Max}_x [D(M, \mathbf{n}, x)] = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (2.2)$$

De esta definición surge que el valor de la variable escalar  $D$  está acotado entre 0 y 1:

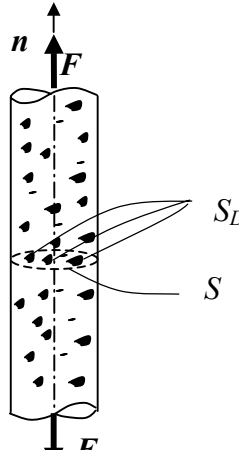
$$0 \leq D \leq 1$$

$D=0$  Para el material no dañado

$D=1$  Para el material totalmente dañado (elemento representativo de volumen separado en dos partes)

De hecho, generalmente la falla ocurre para  $D = D_c < 1$  por un proceso de inestabilidad o por decohesión atómica. De manera que se puede definir un criterio para la iniciación de la fractura como  $D = D_c$ .

Si se considera un caso unidimensional de daño homogéneo se llega a la definición más simple del daño como densidad superficial de microdefectos (Ver Figura 2.7):

$$D = \frac{S_D}{S} \quad (2.3)$$


El diagrama muestra un elemento cilíndrico unidimensional sometido a una fuerza  $F$  aplicada en sus extremos, con una normal  $n$  que apunta hacia arriba. El elemento contiene una distribución de microdefectos representados por pequeños círculos negros. Se define la superficie total  $S$  y la superficie de los microdefectos  $S_D$ .

Figura 2.7. Daño en un elemento unidimensional

### 2.3.2. Concepto de tensión efectiva

Si el volumen de la Figura 2.7 es cargado con una fuerza  $F = nF$ , la tensión se define normalmente como:

$$\sigma = \frac{F}{S} \quad (2.4)$$

y es lo que se denomina tensión nominal

Si todos los defectos están abiertos de tal manera que no hay fuerzas actuando en la superficie de las microfisuras o microcavidades representadas por  $S_D$ , se puede definir

lo que se denomina tensión efectiva referida a la superficie que realmente resiste la tensión  $S - S_D$ :

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S - S_D} \quad (2.5)$$

Si se introduce la variable de daño  $D = \frac{S_D}{S}$ , la ecuación (2.5) se puede escribir como:

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{S \left(1 - \frac{S_D}{S}\right)} = \frac{F}{S(1 - D)} = \frac{\sigma}{1 - D} \quad (2.6)$$

Esta definición da la tensión efectiva en el material traccionado. En compresión, si algunos de los defectos se cierran, aunque el daño permanece inalterado, la superficie que efectivamente resiste la carga es mayor que  $S - S_D$ . En particular, si todos los defectos están completamente cerrados la tensión efectiva es igual a la tensión nominal.

Sólo la micromecánica puede dar un significado preciso a este concepto de tensión efectiva que será tenido en cuenta globalmente en la mesoescala a través de la identificación de la variable de daño por medio de su acoplamiento con la elasticidad o plasticidad.

### 2.3.3. Ejemplo de derivación micromecánica del daño (Lemaitre 1996)

Considérese un elemento de mesovolumen tridimensional que contiene una fisura circular cargada en modo I por una fuerza  $F$  perpendicular al plano de la fisura, como el de la Figura 2.8.

El daño total definido por la teoría de daño continuo es el daño en el plano de la fisura:

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} \quad (2.7)$$

Esto es:

$$D = \frac{\pi a^2}{l^2} k \quad (2.8)$$

Donde  $k$  es un factor de corrección debido a la concentración de tensiones en la vecindad de la cabeza de la fisura, para definir el área dañada efectiva.

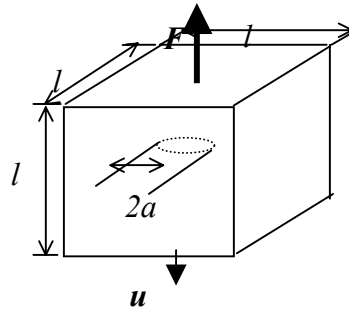


Figura 2.8. Fisura en un elemento de meso-volumen

- *Velocidad de liberación de energía de deformación  $G$*

$$G = -\frac{1}{2} \frac{\partial W}{\partial A} \Big|_{F=\text{const}} = -\frac{1}{2} \frac{F^2}{R_a^2} \frac{dR_a}{2\pi a da} \quad (2.9)$$

$W$ : Energía de deformación

$A$ : área de la fisura

$R_a$ : Rigidez del mesoelemento dañado

- *Factor de intensidad de tensiones de una fisura circular en un cuerpo infinito cargado en modo I : $K$ .*

$$K = \frac{2}{\pi} \sigma_\infty \sqrt{\pi a} = \frac{2}{\pi} \frac{F}{l^2} \sqrt{\pi a} \quad (2.10)$$

Para el caso de deformación plana generalizada:

$$G = \frac{K^2}{E} (1 - \nu^2) \quad (2.11)$$

$\nu$ : Coeficiente de Poisson

$$-\frac{l^4}{16} \frac{dR_a}{R_a^2} = \frac{1 - \nu^2}{E} a^2 da \quad (2.12)$$

Esta expresión puede ser integrada desde  $a=0 \rightarrow R_a = R_o$  al estado actual:

$$R_a = \left[ \frac{1}{R_o} + \frac{16(1 - \nu^2)a^3}{3El^4} \right]^{-1} \quad (2.13)$$

Para  $a \ll l$

$$R_a = R_o \left[ 1 - \frac{16(1-\nu^2)a^3}{3El^4} R_o \right] \tag{2.14}$$

Esto da la siguiente expresión para  $D$ :

$$D = 1 - \frac{R_a}{R_o} = \frac{16(1-\nu^2)a^3}{3l^3} = \frac{\pi a^2}{l^2} \underbrace{\frac{16(1-\nu^2)}{3\pi}}_k \frac{a}{l} \tag{2.15}$$

De donde:

$$k = \frac{16(1-\nu^2)}{3\pi} \frac{a}{l} \approx 1.55 \frac{a}{l} \tag{2.16}$$

De donde surge que, para este caso particular y para  $a/l \ll 1$ , el valor del daño es siempre menor que la densidad de fisuras.

### 2.3.4. Otra forma basada en el concepto de tensión efectiva

Una forma de evitar el análisis micromecánico para cada tipo de defectos y cada tipo de mecanismo de daño es plantear el principio en la mesoescala.

En la termodinámica, el método del estado local supone que el estado termodinámico en un punto está completamente definido por los valores en el tiempo de un conjunto de variables de estado continuas dependientes del punto considerado. Este postulado, aplicado en la microescala, impone que las ecuaciones constitutivas para la deformación de un elemento de microvolumen no son modificadas por el microvolumen adyacente que contiene una microfisura. Extrapolando esto a la mesoescala, esto significa que las ecuaciones constitutivas de deformación escritas en la superficie  $\delta S - \delta S_D$  no son modificadas por el daño o que las tensiones reales en el material son las tensiones efectivas. Resulta entonces el siguiente principio:

*“Cualquier ecuación constitutiva para un material dañado puede ser deducida en la misma forma que para el material virgen salvo que en la tensión nominal debe ser reemplazada por la tensión efectiva”.*

<u>Material no dañado</u>		<u>Material dañado</u>
$D = 0$		$0 < D < 1$
$\varepsilon = F(\sigma, \dots)$		$\varepsilon = F\left(\frac{\sigma}{1-D}, \dots\right)$



La misma derivación

Este postulado conduce al principio de la deformación equivalente que es un principio porque sólo ha sido demostrado para algunos casos particulares a través de técnicas de homogeneización. Se aplica tanto a elasticidad como a plasticidad.

Ejemplo: Elasticidad

Este es un acoplamiento de estado directo a través del concepto de tensión efectiva:

<u>Material no dañado</u>		<u>Material dañado</u>
$D = 0$		$0 < D < 1$
$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_o}$		$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_o(1-D)}$

El módulo de elasticidad del material dañado se define como:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon_e} = E_o(1-D) \quad (2.17)$$

## 2.4 Medición del daño (Lemaitre 1996)

### 2.4.1. Medición directa

En base a la definición del daño como  $D = \frac{\delta S_D}{\delta S}$ , la medición directa del daño consiste en la evaluación del área total de fisuras  $\delta S_D$  que cae en una superficie  $\delta S$  en la mesoescala. Suponiendo el factor de corrección  $k=1$ , esto puede hacerse observando microfotografías. Pero se trata de un método destructivo y bastante complejo.

### 2.4.2. Variación del Módulo de Elasticidad

Esta es una medida indirecta basada en la influencia del daño en la elasticidad a través del acoplamiento de estado:

$$\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_o(1-D)} \quad (2.18)$$

Se trata de un método destructivo que requiere el maquinado de especímenes para realizar ensayos mecánicos. Supone distribución homogénea del daño en la sección de medición.

Si  $E = E_o(1-D)$  se considera como el módulo de elasticidad efectivo del material dañado, los valores de daño pueden ser derivados de las mediciones de  $E$  si se supone conocido  $E_o$ :

$$D = 1 - \frac{E}{E_o} \quad (2.19)$$

Este método es muy útil pero requiere una medición muy precisa de las deformaciones. En general se utilizan extensómetros y  $E$  se mide durante la descarga. Ver Figura 2.9.

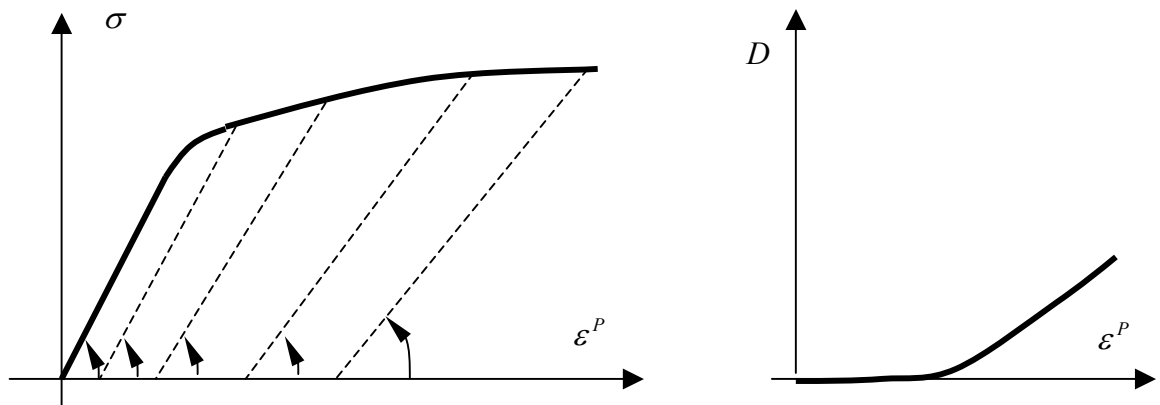


Figura 2.9 Medición del daño dúctil

Esta técnica puede utilizarse para medir distintos tipos de daño mientras el daño esté uniformemente distribuido en el volumen en el cual se mide la deformación lo cual constituye la mayor limitación del método. Si el daño está demasiado localizado como en el caso de fatiga de altos ciclos se debe utilizar otro método.

Se deben tomar además otras precauciones relacionadas con la no linealidad de las ramas de descarga. Al comienzo y al final de las mismas aparecen ciertas no linealidades debidas a efectos viscosos y de endurecimiento e incluso debido a los dispositivos experimentales. Es preferible ignorarlas y medir  $E$  en el rango intermedio.

Para el caso de fatiga dúctil de bajos ciclos en metales, el procedimiento puede ser ligeramente perturbado por un decrecimiento temprano de  $E$  para niveles bajos de deformación o durante los primeros ciclos. Esto es debido a la microplasticidad relacionada con movimientos reversibles de las dislocaciones y al desarrollo de texturas pero no al daño. Este fenómeno se satura rápidamente por lo que se puede considerar que hasta que no se alcanza el umbral de daño,  $D$  vale 0.

En el caso de polímeros o compuestos, para evitar efectos viscosos o viscoelasticidad, la velocidad de deformación durante la descarga debe ser la misma para la medición de  $E$  y de  $E_0$ .

En el caso del hormigón es necesario chequear que exista una distribución uniforme de fisuras, ya que el método no es válido si se desarrolla una sola fisura grande.

#### 2.4.3. Propagación de ondas de ultrasonido

Otra técnica para evaluar el daño está basada en la variación del módulo de elasticidad y consiste en la medición de la velocidad de propagación de ondas de ultrasonido.

Para frecuencias mayores de 200 kHz, la velocidad de propagación longitudinales  $v_L$  y transversal  $v_T$  en un medio isótropo cilíndrico están dadas por:



$$v_L^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1-\nu}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad v_T^2 = \frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\nu)} \quad (2.20)$$

Donde E es el módulo de elasticidad,  $\rho$  es la densidad y  $\nu$  es el coeficiente de Poisson.

El daño se puede calcular entonces como:

$$D = 1 - \frac{E}{E_o} = 1 - \frac{\rho}{\rho_o} \frac{v_L^2}{v_{oL}^2} \quad (2.21)$$

Si el daño consiste fundamentalmente en microfisuras o si considera una pequeña cavitación  $\rho/\rho_o \approx 1$  y

$$D \approx 1 - \frac{v_L^2}{v_{oL}^2} \quad (2.22)$$

Este método es destructivo ya que para medir la velocidad  $v_L$  o el tiempo que una onda tarda en atravesar cierto espesor, se necesita limitar el espesor mediante dos superficies. Si la distribución espacial del daño no es uniforme, el espesor debe ser de un orden de magnitud coherente con el elemento representativo de volumen y, por lo tanto, requiere que el cuerpo a analizar sea cortado en partes.

Actualmente las limitaciones de este método están relacionadas con el tamaño a ser analizado que, en el caso de metales, es demasiado pequeño en relación al tamaño de los transductores de ultrasonido y la precisión en la medida del tiempo.

El método puede ser mejorado para trabajar in situ sin realizar ninguna destrucción, trabajando con ondas superficiales de Rayleigh y atenuación de la señal de ultrasonido.

#### 2.4.4. Variación del microendurecimiento.

Este método está basado en la influencia que tiene el daño en el criterio de fluencia a través del acoplamiento cinético.

Supóngase que el estado unidimensional equivalente se escribe como:

$$\left| \frac{\sigma}{1-D} - X \right| - R - \sigma_y = 0 \quad (2.23)$$

El ensayo consiste en insertar en el material una indentación de diamante con dureza conocida, definida por la tensión media.

$$H = \sigma = F / S \quad (2.24)$$

Se elige la carga de manera de tener un área indentada proyectada S del mismo orden de magnitud que el elemento representativo de volumen.

Análisis teóricos y muchos resultados experimentales prueban la existencia de una relación lineal entre H y el umbral de fluencia  $\sigma_s$ .

$$H = k' \sigma_s \quad (2.25)$$

$\sigma_s$  es el umbral actual de fluencia:

$$\sigma_s = (\sigma_y + R + X)(1 - D) \quad (2.26)$$

Entonces

$$H = k'(\sigma_y + R + X)(1 - D) \quad (2.27)$$

De hecho, este ensayo aumenta el endurecimiento del material en una cantidad que corresponde a una deformación plástica  $\varepsilon_p^H$  del orden de 5% a 8%. H está siempre referido a  $\varepsilon_p + \varepsilon_p^H$  donde  $\varepsilon_p$  es la deformación plástica actual.

$H^* = k'(\sigma_y + R + X)$  sería el microendurecimiento del material que existiría sin ningún daño para  $\varepsilon_p + \varepsilon_p^H$ . Entonces:

$$D = 1 - \frac{H}{H^*} \quad (2.28)$$

H se mide y  $H^*$  debe ser evaluado como se describe a continuación.

Para fatiga de altos ciclos el daño ocurre cuando las tensiones permanecen debajo de la tensión de fluencia, entonces  $\varepsilon_p = 0$  y

$$H^*(\varepsilon_p^H) = k'\sigma_s(\varepsilon_p^H) \quad (2.29)$$

$H^*$  debe ser medido en una parte no dañada del material.

Para fatiga de bajos ciclos se puede considerar que el endurecimiento está saturado, de manera que  $R = R_\infty$  y  $X = X_\infty$ .

$$H^*(\varepsilon_p + \varepsilon_p^H) = k'(\sigma_y + R_\infty + X_\infty) = cte \quad (2.30)$$

$H^*$  se obtiene de la parte totalmente endurecida pero no dañada del material.

Para el caso de daño dúctil el daño y el endurecimiento ocurren simultáneamente y  $H^*$  debe ser obtenido mediante algún procedimiento de extrapolación.

#### 2.4.5. Variación de la densidad

En el caso de daño dúctil puro, los defectos son cavidades que pueden suponerse aproximadamente esféricas: esto significa que el volumen aumenta con el daño. La correspondiente disminución de la densidad se puede medir con aparatos basados en el principio de Arquímedes.

Si se considera una cavidad esférica de radio r en un volumen representativo esférico de radio R y masa m:

$$\rho_o = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi R^3} \quad \rho = \frac{m}{\frac{4}{3}\pi(R^3 + r^3)} \quad (2.31)$$

$$D = \frac{\delta S_D}{\delta S} = \frac{\pi r^2}{\pi (R^3 + r^3)^{2/3}} = \left( \frac{r^3}{R^3 + r^3} \right)^{2/3} = \left( 1 - \frac{\rho}{\rho_o} \right)^{2/3} \quad (2.32)$$

#### 2.4.6. Variación de la resistencia eléctrica

La intensidad de corriente eléctrica efectiva se puede definir como:

$$\bar{i} = \frac{i}{1-D} \quad (2.33)$$

Si se considera la misma intensidad de corriente para el elemento dañado y no dañado se puede obtener aproximadamente el daño como:

$$D \approx 1 - \frac{V_o}{V} \quad (2.34)$$

lo cual se conoce como método de la caída de potencial

#### 2.4.7. Variación de la respuesta plástica cíclica

Se puede utilizar la influencia del daño en la plasticidad para medir el daño por fatiga de bajos ciclos. La ley unidimensional de plasticidad en la estabilización puede ser escrita como una relación de potencias entre la amplitud de tensión  $\Delta\sigma$  y la amplitud de deformación plástica  $\Delta\varepsilon_p$ .

$$\Delta\varepsilon_p = \left( \frac{\Delta\sigma}{K_p} \right)^M \quad (2.35)$$

para un material no dañado y

$$\Delta\varepsilon_p = \left( \frac{\Delta\sigma}{K_p(1-D)} \right)^M \quad (2.36)$$

Para un material dañado.

Si se considera un ensayo con amplitud de deformación plástica constante,  $\Delta\sigma^*$  es la amplitud de tensión en la estabilización, al final del ablandamiento cíclico o el período de endurecimiento y antes del comienzo del proceso de daño.

$$\Delta\varepsilon_p = \left( \frac{\Delta\sigma^*}{K_p} \right)^M = \left( \frac{\Delta\sigma}{K_p(1-D)} \right)^M \quad (2.37)$$

De donde :

$$D = 1 - \frac{\Delta\sigma}{\Delta\sigma^*} \quad (2.38)$$

### 2.4.8. Fluencia lenta terciaria

El creep terciario ocurre en metales cargados a temperaturas por sobre 1/3 de la temperatura de fusión. Para identificar el creep terciario durante un ensayo de creep es conveniente utilizar el principio de equivalencia de deformación aplicado, en este caso a la ley de Norton para creep secundario:

$$\dot{\varepsilon}_p^* = \left( \frac{\sigma}{K_v} \right)^N \quad (2.39)$$

Donde  $K_v$  y  $N$  son propiedades del material dependientes de la temperatura

Suponiendo que el daño comienza al final del proceso de creep secundario, durante el creep terciario se puede escribir

$$\dot{\varepsilon}_p = \left( \frac{\sigma}{(1-D)K_v} \right)^N \quad (2.40)$$

De donde se deriva:

$$D = 1 - \left( \frac{\dot{\varepsilon}_p^*}{\dot{\varepsilon}_p} \right)^{1/N} \quad (2.41)$$

Este es un método que da buenos resultados, concordantes con aquellos obtenidos de la medición de la variación del módulo de elasticidad.

### 2.4.9. Medición del daño en materiales compuestos

Aunque en la bibliografía se puede encontrar abundancia en el desarrollo de nuevas tecnologías de materiales compuestos, hay deficiencia en lo que hace a un análisis consistente de los mecanismos de daño y la evolución del daño en materiales compuestos.

Se han propuesto muchas teorías con investigación experimental muy limitada. Esta investigación está fundamentalmente restringida al daño como resultado de la fractura o fatiga. Estas investigaciones no presentan a la evolución del daño como una función del daño físico medido a lo largo de la historia de carga. Existen algunos trabajos más recientes que proveen un examen y explicación de la evolución microestructural del daño. Sin embargo, este trabajo no ha sido extendido hasta una teoría constitutiva para la cuantificación y evolución del daño físico. Recientemente se han introducido nuevos procedimientos experimentales para cuantificar el daño debido a microfisuras y microvacíos a través de tomografías de difracción de rayos X. Sin embargo, deben ser todavía refinados para diferenciar entre diferentes tipos de daño como vacíos y fisuras (radiales, despegue, etc.). Se necesitan desarrollar ensayos adicionales para cuantificar los parámetros de daño y para evaluar las teorías de daño propuestas.

Todos los métodos descriptos en los puntos anteriores están basados en un enfoque continuo en los que el daño.



# 3. Fundamentos de los modelos de daño

## 3.1. Introducción

La Mecánica del Daño Continuo es una herramienta atractiva para describir el deterioro progresivo de las propiedades mecánicas de los materiales que fue ampliamente desarrollada y aplicada a numerosas situaciones durante las últimas dos décadas. Desde la introducción del concepto de daño por Kachanov en 1958 (Kachanov, 1958), los modelos que involucran la degradación elástica se han tornado cada día más populares. En la actualidad, se los utiliza para describir el comportamiento constitutivo de materiales "frágiles" como el hormigón, cerámicos, rocas, etc.

Un caso interesante de aplicación es el relacionado con materiales cuyas propiedades elásticas evolucionan con el daño. Esta es una situación típica para el hormigón y para muchos materiales compuestos frágiles. Como primera aproximación, se puede considerar que el comportamiento no lineal de estos materiales y sus cambios internos pueden asociarse con el proceso de daño. El modelo debe tener en cuenta tres aspectos muy importantes que aparecen en la mayoría de estos materiales:

- La anisotropía inicial.
- La naturaleza direccionada del daño, aún en materiales inicialmente isótropos.
- El carácter unilateral del daño que está relacionado con el hecho de que el daño, si bien es irreversible, puede estar activo o inactivo dependiendo de las condiciones de carga.

En particular para los materiales compuestos, especialmente los compuestos laminares, el daño es de naturaleza sumamente compleja. Se presentan mecanismos de daño progresivo y daño frágil. No hay uno, sino varios mecanismos de daño. Son altamente anisótropos y desarrollan un comportamiento fuertemente unilateral, que depende del estado de las fisuras, es decir, si están abiertas o cerradas.

La primera y probablemente la mayor dificultad que se presenta en estos casos, es derivar, a una determinada escala, un modelo de daño apropiado, esto es, un modelo de daño compatible con toda la información proveniente de la micro, meso y macroescala.

Con el objetivo de lograr una simulación más precisa del comportamiento de los materiales, ante los diferentes estados de carga que sufrirán durante su vida útil, los especialistas se han visto obligados a desarrollar modelos matemáticos de elevada

complejidad, cuya implementación exige, en algunos casos, un gran esfuerzo y costo computacional. En otros casos, los modelos fallan porque no cumplen con las leyes de la termodinámica.

La variedad de propuestas es turbadora porque:

- La relación entre los distintos modelos es difícil de establecer, salvo en el caso particular de daño isótropo.
- Es difícil comparar la anisotropía inducida por daño que predicen los modelos con resultados experimentales, y elegir, en consecuencia, la variable de daño más adecuada para caracterizar la anisotropía inducida por el daño.
- Cuanto más fenómenos se pretenden describir con un modelo fenomenológico, mayor es la cantidad de parámetros que requieren los modelos y que deben determinarse experimentalmente. Una caracterización completa de la anisotropía inducida por daño del material requiere facilidades experimentales para realizar ensayos tridimensionales y medios de análisis que están, hasta donde se conoce, sólo en proceso de desarrollo.

A partir de los trabajos propuestos por Kachanov en el año 1958 (Kachanov, 1958), las investigaciones en esta área se han expandido ampliamente (Murakami and Ohno, 1980), (Simo and Ju, 1987 a), (Chaboche, 1995), (Cordebois et al, 1979), (Ju, 1989), (Krajcinovic and Fonseka, 1981), (La Borderie et al, 1990) y ya existen numerosas aplicaciones en el campo de la ingeniería práctica, en especial, en el campo de los materiales compuestos (Chaboche et al, 1995), (Voyiadjis et al 2000) y geomateriales (Mazars and Pijaudier-Cabot, 1989), etc

Se han desarrollado además muchos modelos que tienen en cuenta, los efectos de apertura/cerrado de fisuras (Cordebois et al, 1979), (Krajcinovic et al, 1981), (Ortiz, 1985), (Mazars, 1985), (Simo and Ju, 1987a), (Mazars and Pijaudier Cabot, 1989), (Ju, 1989), (La Borderie et al, 1990), (Chaboche, 1992, 1993, 1995).

## **3.2. Clasificación de los modelos de daño**

Se presentan en este punto, algunas de las posibles clasificaciones de la gran cantidad de modelos de daño existentes dentro de la Mecánica de Daño Continuo de acuerdo a diferentes criterios.

### **3.2.1. Escala**

Como se vio en algunos ejemplos simples, las ecuaciones constitutivas del material dañado pueden formularse utilizando enfoques micromecánicos y/o fenomenológicos.

La micromecánica consiste en derivar el comportamiento del material en la mesoescala a partir del estudio de mecanismos específicos en la microescala. Los mecanismos deben estar bien definidos de observaciones físicas y geometría y cinemática precisas. Su modelado mecánico se realiza con ecuaciones constitutivas elementales para la deformación, crecimiento de fisuras y fractura conocidas en la meso

o en la macroescala. El interés actualmente está centrado en la interacción entre los diferentes mecanismos de daño y en la técnica de homogeneización utilizada como puente entre la micro y la mesoescala.

El proceso de modelado micromecánico lleva a una correspondencia uno a uno entre un campo discontinuo en una microescala inhomogénea y un campo efectivo continuo en una mesoescala homogénea. La homogeneización (promedio) del campo de defectos microestructural dentro de un volumen representativo para pasar a un mesocampo del continuo efectivo corresponde a una modelación micromecánica (Sumarac and Krajcinovic 1987), (Yang et al, 1999). A pesar de la claridad y buena identificación con el fenómeno físico, puede llegar a ser impracticable o imposible la identificación de la distribución estocástica de defectos dentro del volumen representativo, especialmente durante la aparición y el crecimiento de fisuras. Lamentablemente, este tipo de formulación micromecánica conduce, en general, a ecuaciones demasiado complicadas para usos de rutina y aproximación numérica de la solución de problemas de ingeniería.

En contraste con los modelos micromecánicos, los modelos fenomenológicos, no consideran los microdetalles del material sino que modelan el daño indirectamente, introduciendo variables internas. Se basan en desarrollar un marco que asegure la invarianza y el cumplimiento de las leyes de la termodinámica. Este tipo de enfoque requiere resultados de ensayos tridimensionales con distintos caminos de carga para obtener los parámetros correspondientes. A pesar de la investigación desarrollada en las últimas tres décadas con relación a los modelos de daño, hay temas todavía abiertos. La mayoría de los modelos fenomenológicos de daño se obtienen a partir de la termodinámica de los procesos irreversibles (Chaboche, 1992,1993, 1995), (Voyiadjis and Deliktas, 2000), (Lemaitre et al, 2000). Pero es necesario definir primero las variables internas del problema y, además, la termodinámica no es suficiente, en general, para definir la evolución de dichas variables.

### 3.2.2. Modelos locales y no locales

Los materiales, cuando son sometidos a cargas, exhiben defectos que, en muchos casos, conducen a la formación de distribuciones específicas de flujo plástico, daño y fractura. Observaciones experimentales indican que los mecanismos de falla de materiales heterogéneos pueden ocurrir en zonas localizadas de daño y plasticidad donde se produce una fuerte interacción y coalescencia entre fisuras que da lugar a una fuerte disminución de rigidez y caída de la capacidad portante del material. Debido a la localización del daño, la longitud de la escala de distribución del daño disminuye. Como el daño se localiza sobre una región muy estrecha del continuo, la longitud característica que gobierna las variaciones del daño es muy inferior a la escala en la que las variables de deformación y tensión pueden ser consideradas como cantidades que permiten describir la respuesta del continuo. Esto lleva al caso donde la longitud de onda de la distribución del daño es predicha como mucho menor que el tamaño de las heterogeneidades del material. Este problema no puede ser resuelto dentro del contexto los enfoques locales clásicos donde se define que la longitud característica del problema físico considerado es mucho mayor que la del material.

La deficiencia de la mecánica del continuo clásica para capturar estos efectos de escala, debido a la localización, lleva a la propuesta de otras estrategias alternativas de



solución del problema como el continuo micro-polar, el continuo de Cosserat y enfoques no locales.

Físicamente la introducción de términos no locales puede ser interpretada como una manera de tener en cuenta la subestructura heterogénea del material que lleva a mecanismos de largo rango característicos del material como el movimiento por dislocación en plasticidad o interacción entre microfisuras en materiales del tipo de hormigón. Los continuos clásicos son incapaces de describir esta interacción a nivel de punto material.

En el caso de los enfoques no locales, el procedimiento normalmente consiste en introducir términos no locales, ya sea mediante una ecuación integral o mediante una ecuación en gradientes. La integración de los modelos no locales basados en integración conduce a ecuaciones que no son fácilmente linealizables lo que los hace computacionalmente ineficientes. Los modelos no locales basados en gradientes representan una alternativa a los métodos integrales. En estos métodos las ecuaciones de elementos finitos siguen siendo locales en lo que hace a los elementos finitos y la linealización es fácil de efectuar. Los problemas de localización debidos a plasticidad y daño pueden ser tratados mediante teorías en gradientes en la macroescala.

### 3.2.3 Variable de daño

La capacidad predictiva de los modelos de daño, depende fuertemente de la particular elección de la variable de daño que sirve como una aproximación macroscópica para describir el proceso micromecánico de microdefectos subyacente.

En la literatura actual hay muchas maneras de describir fenomenológicamente el daño o derivar micromecánicamente las variables de daño. En particular, las variables de daño escalar han sido ampliamente utilizadas para modelos de daño isótropo o descripciones unidimensionales fenomenológicas del daño. Se han desarrollado numerosos modelos de daño anisótropo para materiales cuasi-frágiles que utilizan vectores de daño (Krajcinovic and Fonseka, 1981), tensores de daño de segundo orden (Dragon and Mroz, 1979), (Cordebois and Sidoroff, 1979), (Murakami and Ohno, 1980), (Krajcinovic, 1985), Mazars and Pijaudier Cabot, 1989), (Valanis, 1991), (Chaboche, 1995), (Voyiadjis and Park, 1997), (Carol et al, 2001a, 2001b), (Voyiadjis and Deliktas, 2000), (Lemaitre et al, 2000) y tensores de daño de cuarto orden (Krajcinovic, 1985), (Ortiz, 1985), (Simo and Ju, 1987a).

Los modelos de daño escalar utilizan una única variable escalar de daño. Son muy atractivos por su simplicidad pero su aplicación es limitada en algunos aspectos. La variable de daño escalar, definida por primera vez por Kachanov (Kachanov, 1958) conduce a la conservación del coeficiente de Poisson y es incapaz de representar el daño direccionado.

El daño escalar es un caso particular de daño isótropo. El daño isótropo se refiere a que el tensor de cuarto orden de daño es isótropo. Adicionalmente, el daño isótropo no implica que el tensor constitutivo del material virgen sea isótropo. El daño isótropo lo que hace, en definitiva es preservar las características direccionales del tensor elástico inicial.

Una forma de describir el daño isótropo es utilizando dos variables escalares. Esto permite describir un daño isótropo, es decir que conserva las propiedades de anisotropía

del material. Generalmente una de las variables está asociada a la parte de la energía que contiene la deformación volumétrica y la otra está asociada a la energía de distorsión.

Se puede trabajar también con varias variables escalares asociadas a direcciones materiales predefinidas. Esto se aplica sobre todo en compuestos, donde las microfisuras resultan dirigidas por la estructura y la orientación de los distintos componentes. En general, se utilizan tres variables de daño correspondientes a las direcciones principales de ortotropía del material.

La representación vectorial es atractiva porque las orientaciones de las microfisuras y las áreas pueden ser capturadas directamente y la representación vectorial es una extensión directa del modelo escalar de Kachanov. Sin embargo, los modelos basados en vectores de daño, hasta cierto punto, presentan indiferencia a la forma de las microfisuras y problemas de operaciones tensoriales relacionadas con la transformación de tensiones.

La representación del daño a través de tensores de segundo orden es quizás la forma más utilizada para describir la anisotropía inducida por daño en materiales inicialmente isotrópicos. Corresponde a la complejidad mínima para una teoría anisótropa. La validez de un tensor de segundo orden puede ser demostrada desde el punto de vista geométrico de la reducción de la sección resistente o sección neta. Resulta atractiva porque permite capturar las áreas y orientaciones de las microfisuras. Sin embargo, es incapaz de capturar la anisotropía general.

A través de un enfoque micromecánico se puede demostrar que para describir anisotropía general es necesario trabajar con tensores de cuarto orden o hasta con tensores de octavo orden. En la práctica, una representación del daño con tensores de octavo orden es quizás demasiado complicada. Una representación con tensores de cuarto orden, por otro lado, puede ser manejada razonablemente. Utilizada por primera vez por Chaboche, esta variable de daño de cuarto orden se introduce naturalmente a través del concepto de tensión efectiva y equivalencia de deformaciones. En este caso, la variable de daño (tensorial de cuarto orden) juega directamente el papel de un tensor de efecto de daño. Algunas teorías desarrolladas posteriormente utilizan directamente el tensor de rigidez elástica o el de flexibilidad, ambos tensores de cuarto orden, como variables de estado asociadas al daño.

### 3.2.4 Interpretación del daño

Los modelos de daño están basados en distintas hipótesis para definir la transformación producida por el daño. Una forma de interpretar el daño continuo, muy utilizada por diferentes autores, consiste en la definición de un espacio ficticio no dañado que puede ser obtenido del espacio de tensiones y deformaciones reales a través de una transformación. Normalmente, la tensión en el espacio ficticio no dañado se denomina tensión efectiva. Existen distintas hipótesis para definir las transformaciones entre el espacio dañado real y el espacio ficticio no dañado

*a) Concepto de tensión efectiva y principio de equivalencia de deformaciones (Kachanov, 1958)(Simo and Ju 1987a)(Luccioni et al, 1996):*

Físicamente el daño es el resultado de la iniciación, crecimiento e interconexión de microfisuras y microporos. Dentro del contexto la Mecánica del Continuo se puede modelar este proceso introduciendo una variable interna que puede ser una cantidad

escalar o tensorial. Para mayor generalidad en lo que sigue se utiliza un tensor de cuarto orden  $\mathbf{M} = M_{ijkl}$  que caracteriza el estado de daño y transforma el tensor de tensiones nominal  $\sigma_{ij}$  en el tensor de tensiones efectivo  $\bar{\sigma}_{ij}$ :

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.1)$$

y en el caso más simple:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{1-d} \sigma_{ij} \quad (3.2)$$

Donde  $d \in [0, d_c]$  con  $d_c \in [0, 1]$  es la variable de daño. El factor  $(1-d)$  es un factor de reducción asociado con la reducción de área efectiva o cantidad de daño (Kachanov 1958).

Adicionalmente Lemaitre (1978) introdujo el siguiente principio de *equivalencia de deformación*:

*La deformación asociada con un estado dañado, bajo la tensión aplicada, es equivalente a la deformación asociada con el estado no dañado bajo la tensión efectiva.*

La Figura 3.1 ilustra el principio de equivalencia de deformación.

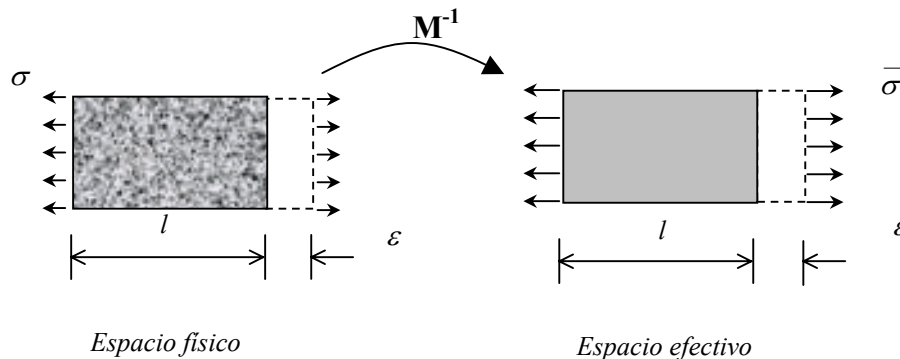


Figura 3.1 Concepto de tensión efectiva y principio de equivalencia de deformaciones

El concepto de tensión efectiva y la hipótesis de equivalencia de deformación están naturalmente asociados con ecuaciones constitutivas basadas en deformación. Estas hipótesis pueden ser interpretadas microscópicamente en términos de arreglo de elementos en paralelo que fallan durante el proceso de degradación.

A pesar de que el principio de equivalencia de deformación ha sido ampliamente utilizado, este enfoque tiene el gran inconveniente teórico de que da lugar a tensores de rigidez y flexibilidad no simétricos, lo cual conduce a la no conservación de la energía durante la descarga y recarga.

b) *Concepto de deformación efectiva e hipótesis de equivalencia de tensiones*

Alternativamente al concepto de tensión efectiva, se puede definir la deformación efectiva como:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = M_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.3)$$

y en el caso más simple:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = (1 - d) \varepsilon_{kl} \quad (3.4)$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es el tensor de deformaciones y  $\bar{\varepsilon}_{ij}$  es el tensor de deformaciones efectivas. Por analogía con la hipótesis de equivalencia de deformaciones e invocando técnicas de homogeneización similares, Simo y Ju (1987a) proponen la siguiente *hipótesis de equivalencia de tensiones*:

*La tensión asociada con un estado dañado bajo la deformación aplicada es equivalente a la tensión asociada con el estado no dañado bajo la deformación efectiva.*

La Figura 3.2 ilustra el principio de equivalencia de tensión.

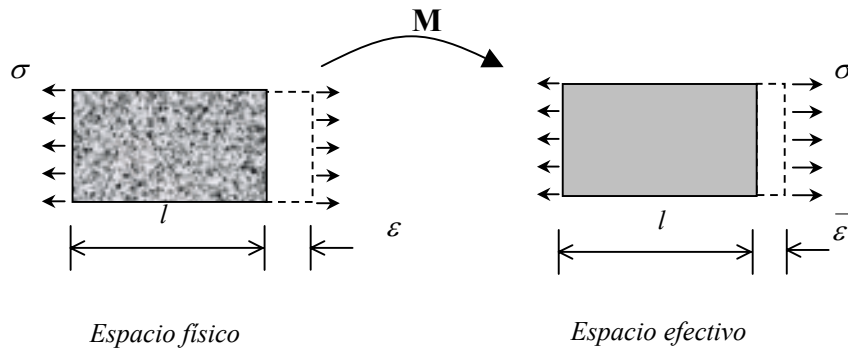


Figura 3.2 Concepto de deformación efectiva y principio de equivalencia de tensiones

El concepto de deformación efectiva y la hipótesis de equivalencia de tensiones están naturalmente asociados con ecuaciones constitutivas basadas en tensión. Estas hipótesis pueden ser interpretadas microscópicamente en términos de arreglo de elementos en serie que fallan durante el proceso de degradación.

El principio de equivalencia de tensiones tiene el mismo inconveniente teórico que el principio de equivalencia de deformación, en el sentido de que da lugar a tensores de rigidez y flexibilidad no simétricos.

c) *Principio de equivalencia de energía* (Krajcinovic et al, 1981) (Dragon and Mroz, 1979) (Carol et al 2001):

La energía de deformación asociada con un estado dañado bajo la tensión aplicada es equivalente a la energía de deformación asociada con el estado ficticio no dañado bajo la tensión efectiva.

En este enfoque ni la tensión efectiva, ni la deformación efectiva coinciden con sus valores nominales. Suponiendo que las relaciones entre cantidades nominales y

efectivas son lineales, deben estar dadas por el mismo tensor de cuarto orden en la siguiente forma:

$$\sigma_{ij} = \bar{M}_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad \bar{\varepsilon}_{ij} = \bar{M}_{klij} \varepsilon_{kl} \quad (3.5)$$

o a la inversa

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \varepsilon_{ij} = M_{klij} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (3.6)$$

La densidad de energía elástica nominal y efectiva debe ser coincidente:

$$\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \bar{M}_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} M_{ijrs} \bar{\varepsilon}_{rs} = \bar{\sigma}_{ij} \bar{\varepsilon}_{ij} \quad (3.7)$$

Lo cual exige que los tensores  $M_{ijkl}$  y  $\bar{M}_{ijkl}$  sean inverso uno de otro

Combinando las relaciones entre tensiones y deformaciones efectivas y nominales se pueden obtener los tensores de rigidez y flexibilidad secantes que resultan:

$$C_{ijkl} = \bar{M}_{ijpq} C_{pqrs}^o \bar{M}_{klrs} \quad E_{ijkl} = M_{pqij} E_{pqrs}^o M_{rskl} \quad (3.8)$$

Donde  $C_{ijkl}^o$  y  $E_{ijkl}^o$  representan los tensores de rigidez y de flexibilidad no dañados respectivamente.

En contraste, con las hipótesis anteriores, la hipótesis de equivalencia de energía induce simetría en los tensores de rigidez y flexibilidad secante.

*d) Relaciones de tipo cinemático (Voyajdis et al 2000 ) (Luccioni and Oller 2002)*

Este enfoque está basado en la formulación de la teoría de grandes deformaciones. Aunque físicamente no hay ninguna relación entre estos dos fenómenos, matemáticamente puede establecerse una comparación al nivel de formulaciones. La unificación de la formulación trae una considerable ventaja a la hora de la implementación en códigos de ordenador ya existentes que están orientados al estudio del problema de grandes deformaciones.

El daño puede interpretarse matemáticamente como una transformación cinemática entre dos espacios (ver Figura 3.3). Para ello se acepta que existe un espacio ficticio no dañado, que se obtiene a partir del espacio real dañado quitando el daño (ver Figura 3.3). En el espacio ficticio no dañado el material se comporta como si fuera virgen.

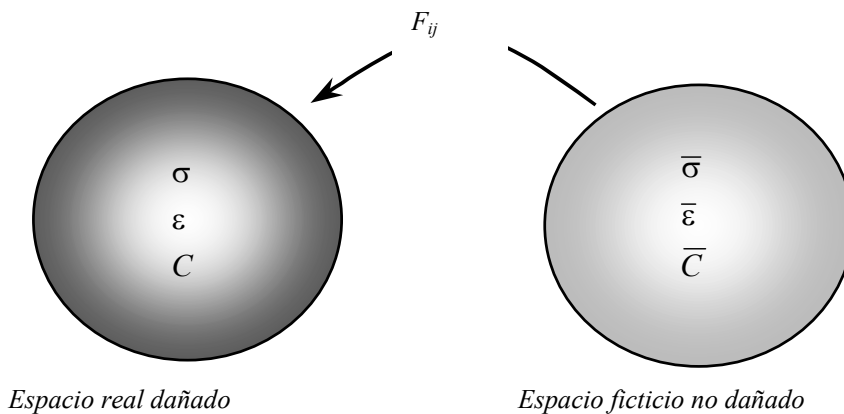


Figura 3.3. Correspondencia entre espacios “Ficticio no dañado” y “Real dañado”

Se admite que hay una relación biunívoca entre los dos espacios que permite transformar una variable del espacio ficticio no dañado al otro espacio real dañado. Dicha relación se basa en un cambio que puede expresarse en forma análoga a una transformación cinemática, lo que da lugar a las expresiones,

$$\sigma_{ij} = F_{ik} F_{jl}^T \bar{\sigma}_{kl} = M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{ij} = F_{ik}^{-T} F_{jl}^{-1} \bar{\varepsilon}_{kl} = M_{ijkl}^{-1} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (3.10)$$

Donde puede observarse que la transformación del campo de deformaciones resulta del concepto conjugado de tensiones a través de la ley constitutiva del material.

La transformación inversa de espacios se expresa a través de las siguientes relaciones,

$$\bar{\sigma}_{ij} = F_{ki}^{-1} F_{lj}^{-T} \sigma_{kl} = F_{ik}^{-T} F_{jl}^{-1} \sigma_{kl} = M_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (3.11)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = F_{ki}^T F_{lj} \varepsilon_{kl} = F_{ik}^T F_{jl} \varepsilon_{kl} = M_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (3.12)$$

En el espacio ficticio no dañado se tiene una ecuación constitutiva isótropa correspondiente al material virgen,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (3.13)$$

Donde  $\bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}^o$  es el tensor constitutivo elástico del material virgen.

Reemplazando en la ecuación (3.3) las ecuaciones inversas, resulta la ecuación constitutiva en el espacio real,

$$\begin{aligned} F_{ri}^{-1} F_{sj}^{-T} \sigma_{rs} &= \bar{C}_{ijkl} F_{tk}^T F_{ul} \varepsilon_{tu} \\ \sigma_{rs} &= \left( F_{ir} F_{js}^T \bar{C}_{ijkl} F_{tk}^T F_{ul} \right) \varepsilon_{tu} = C_{rstu} \varepsilon_{tu} \end{aligned} \quad (3.14)$$

Donde el tensor constitutivo secante en el espacio dañado se expresa como,

$$C_{ijrs} = M_{ijkl} \bar{C}_{klmn} M_{mnr} = F_{ik} F_{jl}^T \bar{C}_{klmn} F_{mr} F_{ns}^T \quad (3.15)$$

La energía de deformación resulta,

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} M_{ijrs}^{-1} \bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} I_{klrs} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\varepsilon}_{kl} = \bar{W} \quad (3.16)$$

donde queda claro, como se esperaba, que la energía es un invariante ante los cambios de espacio.

El tensor  $F_{ij}$ , al igual que el tensor gradiente de deformaciones, es un tensor bipuntual que vincula los dos espacios antes definidos.

Si bien se pueden lograr resultados satisfactorios con cualquiera de estas teorías, en el caso de plasticidad acoplada con daño, cuando la degradación del material está asociada a las deformaciones plásticas, la generalización del principio de tensión efectiva del daño escalar y el principio de equivalencia de deformaciones, no conducen a la existencia de un potencial elástico. Una posible solución, utilizada por muchos autores, es reemplazar el principio de equivalencia de deformaciones por una equivalencia de energía. De esta forma, se asegura la existencia de un potencial elástico,

pero se pierde la interpretación física del daño. El daño ya no resulta relacionado con la densidad superficial de defectos, sino que es una variable definida por su acoplamiento con la elasticidad.

### 3.3. Bases termodinámicas (Lemaitre 2000, Maugin 1992)

#### 3.3.1. Introducción

Una forma de derivar las ecuaciones constitutivas de daño es a través del *método del estado local*. Este método postula que el estado termodinámico de un medio material en un punto e instante determinado está completamente definido por un cierto número de variables en ese instante. Los fenómenos físicos pueden ser descriptos con precisión dependiendo de la naturaleza y número de variables de estado elegidas para ello. El proceso definido de esta forma será termodinámicamente admisible si, en cualquier instante de la evolución, se satisface la desigualdad de Clausius-Duhem. Las variables de estado, también llamadas variables termodinámicas o variables independientes son las variables observables y las variables internas.

El formalismo de la mecánica del continuo y la termodinámica desarrollado requiere la existencia de un cierto número de variables de estado, estas son las variables observables:

#### *Deformación y temperatura.*

Para fenómenos disipativos, el estado actual depende también de la historia pasada que es representada, en el método del estado local, por los valores en cada instante de las denominadas variables internas.

La plasticidad y la viscoplasticidad requieren la introducción de deformaciones plásticas o viscoplásticas. Para pequeñas deformaciones la deformación plástica es la deformación permanente que se obtiene al descargar elásticamente lo que lleva a una descomposición aditiva:  $\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$ . Las dos variables internas involucradas serían la deformación elástica y la plástica.

Otros fenómenos como endurecimiento, daño, fractura, requieren la introducción de otras variables de naturaleza menos obvia. Estas representan el estado interno de la materia (densidad de dislocaciones, microestructura cristalina, configuración de microfisuras) y no hay forma de medirlas por observación directa. En general se las designa  $V_k$ .

Una vez definidas las variables de estado, se postula la existencia de un potencial termodinámico a partir del cual se pueden derivar las leyes de estado. La elección de una función escalar, cóncava con respecto a la temperatura y convexa respecto a las otras variables permite satisfacer a priori las condiciones de estabilidad termodinámica impuestas por las desigualdades derivadas del segundo principio de la termodinámica. En lo que sigue se elige la energía libre específica como potencial pero se puede trabajar de manera análoga con otros potenciales.

Se supone que:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon, \Theta, \varepsilon^e, \varepsilon^p, V_k) \quad (3.17)$$

En plasticidad o viscoplasticidad sólo aparecen las deformaciones en forma aditiva  $\varepsilon^e = \varepsilon - \varepsilon^p$ , por lo que se puede escribir  $\Psi = \Psi(\varepsilon^e, \Theta, V_k)$  y la desigualdad de Clausius Duhem escrita en términos de la energía libre resulta:

$$\dot{\Xi} = -\dot{\Psi} - \eta\dot{\theta} + \sigma_{ij}D_{ij} - \frac{1}{\theta}q_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (3.18)$$

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p - \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\theta} + \eta \right) \dot{\theta} - \frac{\partial\Psi}{\partial V_i} \dot{V}_i - \frac{1}{\theta}q_i \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (3.19)$$

Donde  $D_{ij}$  es el tensor tasa de deformación,  $\theta$  es una medida de la temperatura,  $\eta$  es la entropía,  $q_i$  es el flujo de calor y  $x_i$  las coordenadas espaciales.

Como esta desigualdad se debe cumplir para cualquier incremento de temperatura o deformación, deben ser:

$$\begin{cases} a) \sigma_{ij} = \frac{\partial\Psi}{\partial\varepsilon_{ij}^e} \\ b) \eta = -\frac{\partial\Psi}{\partial\theta} \end{cases} \quad (3.20)$$

y de forma análoga se definen las fuerzas termodinámicas asociadas con las variables internas como:

$$A_k = -\frac{\partial\Psi}{\partial V_k} \quad (3.21)$$

Estas relaciones constituyen las leyes de estado. La entropía, la tensión y las variables  $A_k$  constituyen las variables asociadas. El vector formado por estas variables es el gradiente de la función de energía libre en el espacio de las variables termodinámicas y es normal a la superficie  $\Psi = cte$ .

La desigualdad de Clausius Duhem puede ser reducida para expresar que la disipación debe ser necesariamente no negativa:

$$\sigma_{ij}\dot{\varepsilon}_{ij}^p + A_k\dot{V}_k - q_i/\theta \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (3.22)$$

y es el producto de variables de fuerza  $\left( \sigma_{ij}, A_k, \frac{\partial\theta}{\partial x_i} \right)$  por los respectivos flujos  $(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{V}_k, -q_i/\theta)$

Para describir el proceso de disipación, más precisamente las reglas de evolución de las variables internas, se postula la existencia de un pseudo potencial o potencial de disipación, expresado como función escalar convexa continua de las variables de flujo, mientras que las variables de estado aparecen como parámetros:



$$\varphi\left(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{V}_k, -q_i/\theta\right) \tag{3.23}$$

Este potencial es una función no negativa, con valor cero en el origen, de las variables de flujo  $(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{V}_k, -q_i/\theta)$ . Las leyes complementarias se expresan entonces por medio de la propiedad de normalidad:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{\varepsilon}_{ij}^p} ; A_k = \frac{\partial \varphi}{\partial \dot{V}_k} ; \frac{\partial \theta}{\partial x_i} = -\frac{\partial \varphi}{\partial (q_i/\theta)} \tag{3.24}$$

La fuerzas termodinámicas son las componentes del vector **grad** $\varphi$  normal a la superficie  $\varphi = cte$  en el espacio de las variables de flujo.

Sin embargo, las leyes complementarias se expresan más fácilmente en forma de leyes de evolución de las variables de flujo, en términos de las variables duales. La transformada de Legendre-Fenchel permite definir el correspondiente potencial.

$$\varphi^*\left(\sigma_{ij}, A_k, \frac{\partial \theta}{\partial x_i}\right) = \underset{(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{V}_k, -q_i/\theta)}{Sup} \left\{ \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p + A_k \dot{V}_k - \frac{\partial \theta}{\partial x_i} q_i/\theta - \varphi(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{V}_k, -q_i/\theta) \right\} \tag{3.25}$$

La Figura 3.4 ilustra el concepto de la transformada de Lechendre Fenchel para el caso de una única variable interna.

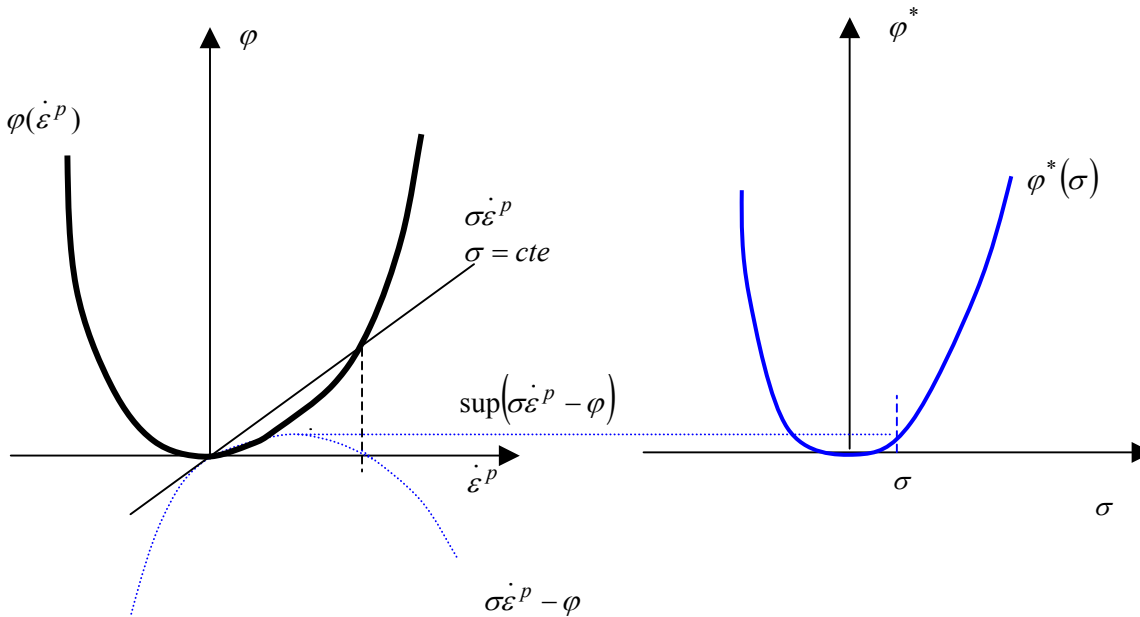


Figura 3.4 Transformada de Lechendre-Fenchel

Se puede probar que, si la función  $\varphi^*$  es diferenciable, la propiedad de normalidad se preserva para las variables  $(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{V}_k, -q_i/\theta)$  y las leyes complementarias de evolución pueden ser escritas como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \frac{\partial \varphi^*}{\partial \sigma_{ij}} ; \dot{V}_k = \frac{\partial \varphi^*}{\partial A_k} ; (q_i/\theta) = - \frac{\partial \varphi^*}{\partial \left( \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \right)} \quad (3.26)$$

Las funciones  $\varphi$  y  $\varphi^*$  deben ser funciones convexas, no negativas con valor cero en el origen para que se satisfaga automáticamente el Segundo Principio de la Termodinámica. La regla de normalidad es suficiente para asegurar el cumplimiento de este principio pero no una condición necesaria.

El problema completo de la modelación consiste en determinar las expresiones analíticas del potencial termodinámico  $\Psi$  y de los potenciales de disipación  $\varphi$  y  $\varphi^*$  y su identificación con los ensayos característicos. De hecho, los potenciales  $\varphi$  y  $\varphi^*$  son casi imposibles de medir ya que representan la energía disipada usualmente como calor. Las variables de flujo y las variables duales son relativamente más fáciles de medir y es en sus valores que la modelación e identificación se basa.

### 3.3.2. Derivación de las ecuaciones de estado y las reglas de evolución de las variables internas para los modelos de daño

La elección de las variables termodinámicas depende del particular modelo de daño.

Para pequeñas deformaciones y desplazamientos, las variables de estado en la mesoescala se dividen en:

Observables:  $\varepsilon_{ij}^e$  y  $\theta$

Internas:  $\varepsilon_{ij}^p$ ,  $\beta_i$  (conjunto de variables internas plásticas, relacionadas con el endurecimiento plástico),  $M_{ijkl}$  (variable elegida para representar el daño en su forma general de tensor de cuarto orden),  $\alpha_i$  (conjunto de variables internas de daño asociadas al endurecimiento)

Se elige como potencial a la densidad de energía libre de Helmholtz por unidad de volumen que se escribe en este caso como:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, \theta, \varepsilon_{ij}^p, \beta_i, M_{ijkl}, \alpha_i) \quad (3.27)$$

que debe ser una función escalar continua, cóncava con la temperatura y convexa con las otras variables y que contiene al origen.

Suponiendo que la densidad se mantiene constante, que es una aproximación para el caso de daño dúctil, el segundo principio de la termodinámica se escribe en este caso como:

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \right) \dot{\varepsilon}_{ij}^e - \left( \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} + \eta \right) \dot{\theta} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} \dot{\beta}_i - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i - \frac{\partial \Psi}{\partial M_{ijkl}} \dot{M}_{ijkl} - \frac{1}{\theta} q_i \frac{\partial \theta}{\partial x_i} \geq 0 \quad (3.28)$$

de donde se obtienen las leyes de estado:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad \text{y también} \quad \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \quad (3.29)$$

$$\eta = - \frac{\partial \Psi}{\partial \theta}$$

y las variables asociadas o fuerzas termodinámicas se definen como:

$$p_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial \beta_i} \quad ; \quad q_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \quad ; \quad Y_{ijkl} = - \frac{\partial \Psi}{\partial M_{ijkl}} \quad (3.30)$$

Para elasticidad lineal isótropa, pequeñas deformaciones, acoplamiento entre daño y deformaciones elásticas, procesos isotérmicos, en ausencia de deformaciones permanentes, la densidad de energía libre de Helmholtz puede escribirse como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}(M_{rstu}) \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \alpha_i K_{ij} \alpha_j \quad (3.31)$$

Donde  $C_{ijkl}(M_{rstu})$  es el tensor elástico degradado debido al daño y  $K_{ij}$  un tensor de endurecimiento.

Las variables asociadas a las variables de daño o fuerzas termodinámicas resultan:

$$q_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = - K_{ij} \alpha_j \quad ; \quad Y_{ijkl} = - \frac{\partial \Psi}{\partial M_{ijkl}} = - \frac{1}{2} \varepsilon_{rs} \frac{\partial C_{rstu}}{\partial M_{ijkl}} \varepsilon_{tu} \quad (3.32)$$

La disipación se escribe como:

$$Y_{ijkl} \dot{M}_{ijkl} + q_i \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad (3.34)$$

La disipación resulta la suma de productos de variables de flujo multiplicadas por sus correspondientes variables duales.

Se postula que las leyes de evolución cinética pueden ser derivadas de un potencial de disipación, una función escalar, continua y convexa  $G$  de las variables duales y con las variables de estado como parámetros. Las leyes de evolución del daño y de las variables de daño se derivan de este pseudo potencial a través de multiplicadores escalares que son siempre positivos:

$$\dot{M}_{ijkl} = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial Y_{ijkl}} \quad \dot{\alpha}_i = \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial q_i} \quad \dot{\lambda} \geq 0 \begin{cases} \dot{\lambda} = 0 & \text{cuando } F < 0 \\ \dot{\lambda} > 0 & \text{cuando } F = 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

Donde  $F$  es también una función escalar, continua y convexa de las variables duales y con las variables de estado como parámetros

La elección de las funciones  $F$  y  $G$ , junto con la variable de daño, constituyen las claves para representar adecuadamente la evolución del daño.

# 4. Modelos de daño

## escalar

### 4.1. Introducción

Los modelos de daño más simples son los modelos de daño escalar, donde la degradación de rigidez se describe a través de una sola variable escalar que gobierna el problema y que afecta por igual a todas las componentes del tensor de rigidez elástico.

La mayoría de los modelos de daño escalar existentes en la bibliografía se basan en la hipótesis de que el daño está vinculado a la historia de deformación. Entonces el concepto de tensión equivalente:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{1-d} \quad (4.1)$$

junto con la hipótesis de equivalencia de deformaciones se derivan de la forma de la energía libre.

$d$ : es la variable de daño escalar que vale  $d=0$  para el material virgen y  $d=d_c$   $d_c \in (0,1]$  cuando está totalmente degradado, esto es, cuando ha alcanzado el límite de ruptura local.

### 4.2. Bases Termodinámicas

La densidad de energía libre de Helmholtz por unidad de volumen para un proceso de degradación escalar, viene dada por la siguiente expresión:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, d, \alpha_k) = (1-d)\Psi^o(\varepsilon_{ij}) + \Psi^d(\alpha_k) \quad (4.2)$$

Donde  $\Psi^o(\varepsilon_{ij})$  es la densidad de energía libre del material virgen y  $\Psi^d(\alpha_k)$  la parte de la energía libre relacionada con el endurecimiento en daño.

$$\Psi^o(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad (4.3)$$

Si se satisfacen las ecuaciones de Coleman, se asegura el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem para un dado estado termodinámico:

$$\left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial d} \dot{d} - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \dot{\alpha}_i \geq 0 \quad (4.4)$$

resulta la expresión secante:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} = (1-d) \bar{\sigma}_{ij} \quad (4.5)$$

y la disipación:

$$y \dot{d} + q_k \dot{\alpha}_k \geq 0 \quad (4.6)$$

Donde las fuerzas termodinámicas o variables duales asociadas a la variable de daño y a las variables de endurecimiento son las siguientes:

$$y = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} = \Psi^o \quad (4.7)$$

$$q_i = - \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} \quad (4.8)$$

La ecuación secante muestra que para el caso de daño escalar todas las componentes del tensor de tensiones se degradan por igual, lo cual significa que el coeficiente de Poisson se mantiene constante.

La fuerza termodinámica asociada a la variable de daño es la energía libre del material no dañado  $\Psi^o$ . De manera que la regla de evolución del daño debe ser escrita en términos de la energía libre no dañada.

### 4.3. Modelo de Simo y Ju (1987 a y b)

#### 4.3.1 Fundamentos termodinámicos

Este modelo parte de considerar la energía libre como :

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, d) = (1-d) \Psi^o(\varepsilon_{ij}) \quad (4.9)$$

Donde  $\Psi^o$  es una función convexa en el espacio de deformaciones. En particular para el caso lineal se tiene:

$$\Psi^o(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad (4.10)$$

Las relaciones de Coleman llevan a :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad C_{ijkl}^o = \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \quad (4.11)$$

y la disipación:

$$\dot{\Xi}^d = \Psi^o(\varepsilon_{ij}) \dot{d} \geq 0 \quad (4.12)$$

La Figura 4.1 ilustra esquemáticamente la disipación en un ensayo de tracción uniaxial para un modelo de daño escalar.

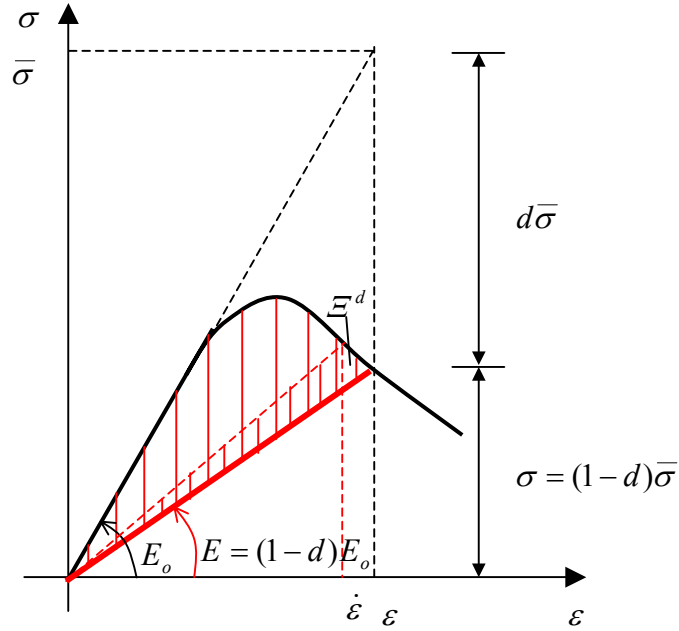


Figura 4.1. Disipación en un modelo de daño escalar

#### 4.3.2 Función umbral de daño

En este modelo se define una deformación equivalente  $\bar{\tau}$  como una norma no dañada del tensor de deformaciones. En realidad, esta deformación equivalente es una función no negativa y continua de la variable termodinámica asociada a las variables de daño  $\Psi^o$ :

$$\bar{\tau} := \sqrt{2\Psi^o(\varepsilon_{ij})} \quad (4.13)$$

El daño se caracteriza a través de un criterio de daño formulado en el espacio de esta deformación equivalente de la siguiente manera:

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) := \bar{\tau}_t - r_t \leq 0 \quad (4.14)$$

El símbolo  $t$  indica el tiempo actual y  $r_t$  es el umbral de daño en el tiempo actual. Si  $r_o$  indica el umbral de daño inicial, antes de que se aplique ninguna carga, una propiedad del material, debe ser  $r_t \geq r_o$ .

La condición de daño establece que el daño se inicia cuando la norma energética del tensor de deformaciones  $\bar{\epsilon}$  excede el umbral de daño inicial  $r_0$ .

Las Figuras 4.2 y 4.4. ilustran la forma de la superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales y en el espacio de tensiones principales para el modelo de Simo and Ju (1987a).

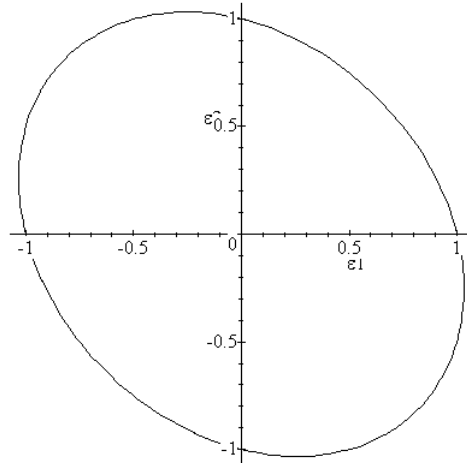


Figura 4.2. Superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales  $\epsilon_3 = 0$  (Simo and Ju 1987a).

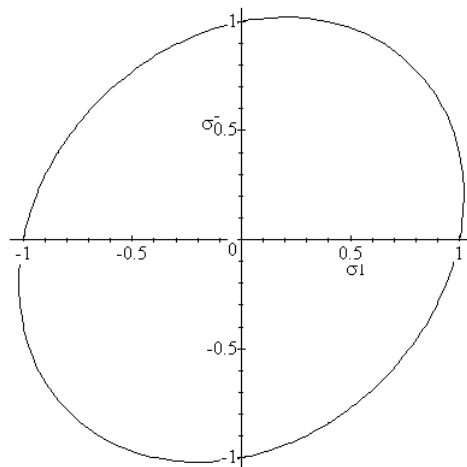


Figura 4.3. Superficie umbral de daño en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$  (Simo and Ju 1987a).

### 4.3.3. Regla de evolución del daño

La regla de evolución de la variable de daño se define como:

$$\dot{d}_t = \dot{\mu} H(\bar{\tau}_t, d_t) \quad (4.15)$$

$$\dot{r} = \dot{\mu} \quad (4.16)$$

Donde  $\dot{\mu} \geq 0$  es el factor de consistencia de daño que define las condiciones de carga/descarga de acuerdo a las relaciones de Kuhn-Tucker:

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad g(\bar{\tau}_t, r_t) \leq 0 \quad \dot{\mu} g(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \quad (4.17)$$

Estas condiciones son estándar para problemas con restricciones unilaterales. Si  $g(\bar{\tau}_t, r_t) \leq 0$ , el criterio de daño no se satisface y por la tercera condición resulta  $\dot{\mu} = 0$ , o sea  $\dot{d} = 0$  y el daño no evoluciona. Si, por el contrario,  $\dot{\mu} \geq 0$ , se produce mayor daño (carga) y la tercera condición implica:  $g(\bar{\tau}_t, r_t) = 0$ . En ese caso, el valor de  $\dot{\mu}$  queda determinado por la condición de consistencia de daño:

$$g(\bar{\tau}_t, r_t) = \dot{g}(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \Rightarrow \dot{\mu} = \dot{\bar{\tau}}_t \quad (4.18)$$

De manera que :

$$r_t = \max \left\{ r_o, \max_{s \in (0, t)} \bar{\tau}_s \right\} \quad (4.19)$$

### 4.3.4. Forma alternativa de escribir la evolución explícita de la variable de daño

(Simo and Ju 1987 a, Oller 2001)

Si  $H(\bar{\tau}_t, d_t)$  es independiente de  $d_c$ , la fomulación anterior puede ser reescrita como:

Sea  $G$  una función monotónica creciente tal que  $H(\bar{\tau}_t) = \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}}$ , entonces el siguiente criterio de daño es equivalente al anteriormente presentado:

$$\bar{g}(\bar{\tau}_t, r_t) := G(\bar{\tau}_t) - G(r_t) \leq 0 \quad (4.20)$$

La regla de flujo y las condiciones de Kuhn Tucker resultan entonces:

$$\dot{d}_t = \dot{\mu} \frac{\partial \bar{g}(\bar{\tau}_t, r_t)}{\partial \bar{\tau}} \quad ; \quad \dot{r} = \dot{\mu} \quad (4.21)$$

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad \bar{g}(\bar{\tau}_t, r_t) \leq 0 \quad \dot{\mu} \bar{g}(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \quad (4.22)$$

Se puede demostrar que estas condiciones son simplemente las condiciones del principio de la máxima disipación por daño. Para una dada historia de deformaciones, el valor del daño es aquél que hace máxima la disipación por daño.

Al igual que en la teoría de plasticidad, la magnitud del factor de consistencia de daño se obtiene de la condición de consistencia de daño:



$$\bar{g}(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \Rightarrow G(\bar{\tau}_t) = G(r_t) \Rightarrow \bar{\tau}_t = r_t \Rightarrow \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}_t} = \frac{\partial G(r_t)}{\partial r_t} \quad (4.23)$$

$$\dot{\bar{g}}(\bar{\tau}_t, r_t) = 0 \Rightarrow \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}_t} \dot{\bar{\tau}}_t - \frac{\partial G(r_t)}{\partial r_t} \dot{r}_t = 0 \Rightarrow \dot{\bar{\tau}}_t = \dot{r}_t \quad (4.24)$$

Comparando las siguientes expresiones se obtiene el factor de consistencia de daño:

$$\left. \begin{aligned} \dot{G}(\bar{\tau}_t) &= \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}_t} \dot{\bar{\tau}}_t \\ \dot{d} &= \dot{\mu} \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}_t} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \dot{d} = \dot{G}(\bar{\tau}_t) \Rightarrow \dot{\mu} = \dot{\bar{\tau}}_t \quad (4.25)$$

$$\dot{\mu} = \dot{\bar{\tau}}_t = \dot{r}_t = \frac{\partial \bar{\tau}_t}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (4.26)$$

Integrando en el tiempo la variación temporal de la variable de daño se puede obtener una forma explícita para calcular el daño:

$$d = \int_t \dot{d} dt = \int_t \dot{G}(\bar{\tau}_t) dt = G(\bar{\tau}_t) \quad (4.27)$$

La disipación resulta:

$$\Xi^d = \Psi^o \dot{d} = \Psi^o \dot{G}(\bar{\tau}_t) = \Psi^o \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}_t} \frac{\partial \bar{\tau}_t}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (4.28)$$

#### 4.3.5. Tensor de rigidez tangente

Para obtener el tensor de rigidez tangente se diferencia la ecuación secante:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{d} \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} = \\ &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{G}(\bar{\tau}_t) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} = \\ &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}} \dot{\bar{\tau}} \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} = \\ &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - H(\bar{\tau}_t) \dot{\bar{\tau}} \bar{\sigma}_{ij} \end{aligned} \quad (4.29)$$

Donde:

$$H(\bar{\tau}_t) = \frac{\partial G(\bar{\tau}_t)}{\partial \bar{\tau}}, \quad \bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (4.30)$$

Si se deriva la expresión de la deformación equivalente, se obtiene:

$$\dot{\bar{\tau}}_t = \frac{\partial \bar{\tau}_t}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{\partial \sqrt{2\Psi^o}}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = \left( \frac{1}{\sqrt{2\Psi^o}} \right) \frac{\partial \Psi^o(\varepsilon_{kl})}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} = \left( \frac{1}{\bar{\tau}_t} \right) \bar{\sigma}_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \quad (4.31)$$

Sustituido en la expresión tangente resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - H(\bar{\tau}_t, d) \left( \frac{1}{\bar{\tau}_t} \right) \bar{\sigma}_{kl} \dot{\varepsilon}_{kl} \bar{\sigma}_{ij}^o \\ \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \end{aligned} \quad (4.32)$$

Donde  $C_{ijkl}^t$  es el módulo tangente dañado que puede escribirse como:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^t &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} - H(\bar{\tau}_t) \left( \frac{1}{\bar{\tau}_t} \right) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \\ C_{ijkl}^t &= (1-d) C_{ijkl}^o - H(\bar{\tau}_t) \left( \frac{1}{\bar{\tau}_t} \right) \bar{\sigma}_{ij} \bar{\sigma}_{kl} \end{aligned} \quad (4.33)$$

y resulta simétrico. La simetría del tensor tangente es debida a la particular definición de la deformación equivalente  $\bar{\tau}$ .

#### 4.3.6. Función de endurecimiento o ablandamiento

La función escalar  $G(\chi)$  que define la evolución de la variable de daño, debe ser monótona y acotada entre 0 y 1. La forma de esta función depende de la forma de la curva endurecimiento o ablandamiento. En Oller (2001) se pueden ver varias alternativas para definir esta función. Se presenta a modo ilustrativo la forma exponencial propuesta por Oliver (1990) (ver Figura 4.4)

$$G(\bar{\tau}) = 1 - \frac{\tau_o}{\bar{\tau}} e^{A \left( 1 - \frac{\bar{\tau}}{\tau_o} \right)} \quad (4.34)$$

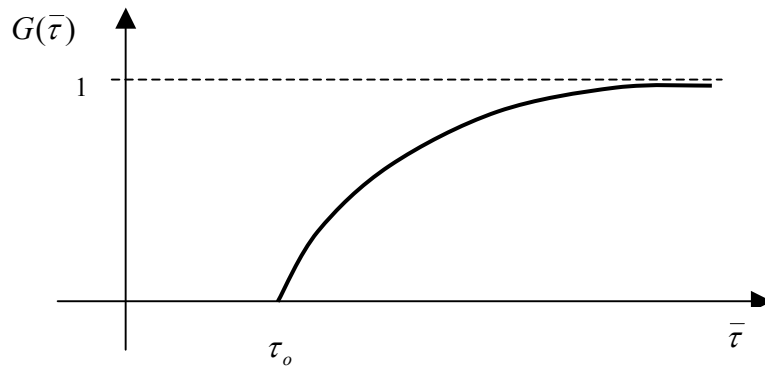


Figura 4.4. Función de endurecimiento exponencial

Donde el valor de  $\tau_o$  se obtiene del cumplimiento del criterio de daño para el primer umbral de degradación:  $G(\tau_o) = G(r_{\max})$ .

$$\tau_o = \sqrt{2\Psi^o} = \sqrt{\frac{\sigma_{\max}^2}{E_o}} = \frac{\sigma_{\max}}{\sqrt{E_o}} \quad (4.35)$$

El parámetro A se deduce particularizando la expresión de la disipación e igualando a la energía disipada por unidad de volumen para un proceso de tracción uniaxial.

$$\int_{t=0}^{\infty} \Xi dt = \int_{t=0}^{\infty} \Psi^o \dot{d} dt = \int_{\tau_o}^{\infty} \frac{1}{2} \bar{\tau}^2 \frac{\partial G(\bar{\tau})}{\partial \bar{\tau}} d\bar{\tau} = \int_{\tau_o}^{\infty} \frac{1}{2} \bar{\tau}^2 dG(\bar{\tau}) = \left[ \frac{1}{2} \bar{\tau}^2 G(\bar{\tau}) \right]_{\tau_o}^{\infty} - \int_{\tau_o}^{\infty} \bar{\tau} G(\bar{\tau}) d\bar{\tau} = \quad (4.36)$$

$$\left[ \frac{1}{2} \bar{\tau}^2 G(\bar{\tau}) \right]_{\tau_o}^{\infty} - \int_{\tau_o}^{\infty} \left( \bar{\tau} - \tau_o e^{A\left(1-\frac{\bar{\tau}}{\tau_o}\right)} \right) d\bar{\tau} = \tau_o^2 \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{A} \right) = g_f \Rightarrow A = \frac{1}{\frac{g_f}{\tau_o^2} - \frac{1}{2}}$$

Donde  $g_f$  es la máxima energía disipada por unidad de volumen.

#### 4.3.7. Función umbral de daño de Mazars (1982)

Lemaitre y Mazars proponen la siguiente expresión para la deformación equivalente:

$$\bar{\tau}_t := \sqrt{\varepsilon_{ij} \varepsilon_{ij}} \quad (4.37)$$

Las Figuras 4.5 y 4.6. ilustran la forma de la superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales y en el espacio de tensiones principales correspondientes.

Esta definición alternativa conduce a un tensor de rigidez tangente no simétrico:

$$C_{ijkl}^t = (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} - H(\bar{\tau}_t) \left( \frac{1}{\bar{\tau}_t} \right) \bar{\sigma}_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (4.38)$$

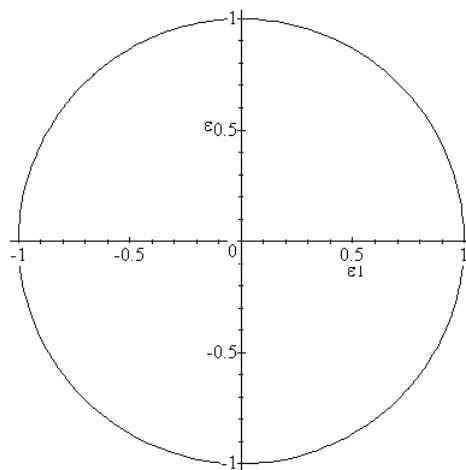


Figura 4.5. Superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales  $\varepsilon_3 = 0$  (Lemaitre y Mazars)

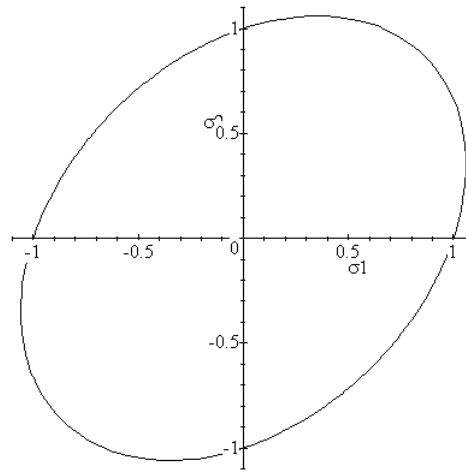


Figura 4.6. Superficie umbral de daño en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$   
 $\nu = 0.2$  (Lemaitre y Mazars 1982)

#### 4.3.8. Función umbral de daño para materiales con umbrales de daño distintos en tracción y compresión.

Las funciones umbrales de daño propuestas por Simo y Ju (1987a) o por Lemaitre y Mazars (1982) son apropiadas para materiales del tipo de los metales con comportamientos similares en tracción y compresión. No es el caso de los geomateriales que presentan umbrales de daño distintos en tracción y compresión o prácticamente no se dañan bajo tensiones de compresión. En ese caso la función de umbral de daño debe diferenciar esos estados como lo hace la función utilizada por Oliver et al (1990)

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{\sigma}_{ij}) = [1 + \bar{r}(n-1)]\sqrt{2\Psi^o}$$

$$\bar{r} = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\bar{\sigma}_i|} \quad \langle \bar{\sigma}_i \rangle = \frac{1}{2}(\bar{\sigma}_i + |\bar{\sigma}_i|) \quad (4.39)$$

$n$  es la relación entre los umbrales de daño en compresión y tracción uniaxial respectivamente.

Las Figura 4.7 a y b ilustran la forma de la superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones y tensiones principales respectivamente.

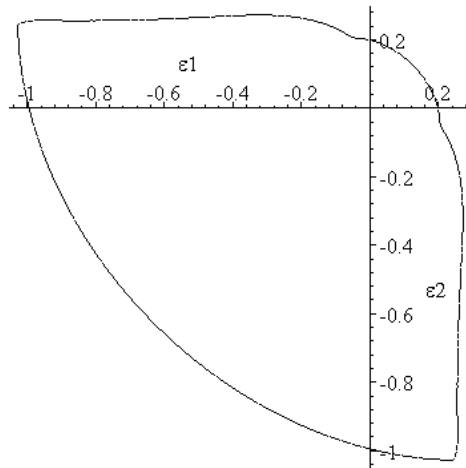


Figura 4.7.a Superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales  $\varepsilon_3 = 0$  ( $n=5$ ,  $\nu = 0.2$ ).

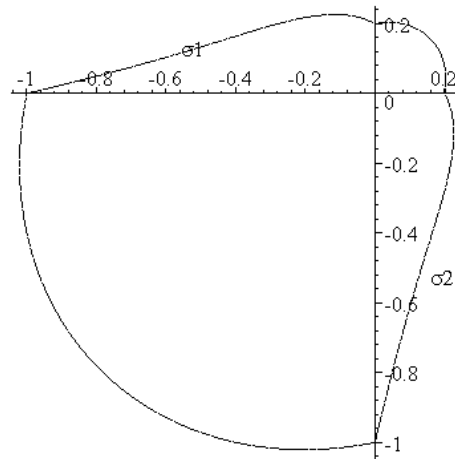


Figura 4.7b Superficie umbral de daño en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$  ( $n=5$ )

Barbat et al (1997) y Hanganu et al (2002) utilizan una forma alternativa para esta superficie de daño:

$$\bar{\tau} = \bar{\tau}(\bar{\sigma}_{ij}) = [1 + \bar{r}(n-1)] \sqrt{\sum_{i=1}^3 \bar{\sigma}_i^2} \quad (4.40)$$

$\bar{\sigma}_i$  son las tensiones efectivas principales

Esta función tiene la propiedad de ser una función homogénea de primer orden en las componentes del tensor de tensiones efectivas.

Las Figuras 4.8.a y b ilustran la forma de la superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales y en el espacio de tensiones principales respectivamente.

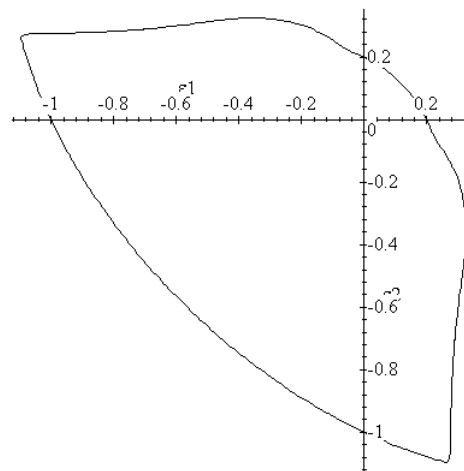


Figura 4.8.a Superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales  $\varepsilon_3 = 0$  ( $n=5$ ,  $\nu = 0.2$ )

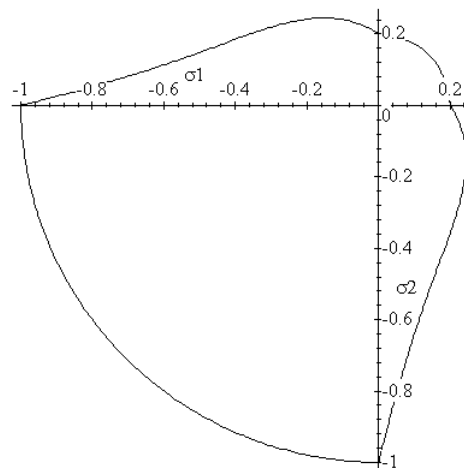


Figura 4.8.b Superficie umbral de daño en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$  ( $n=5$ ).

#### 4.4. Forma alternativa de tratar el daño escalar (Luccioni 1993, Luccioni et al 1996)

Esta forma difiere de las anteriormente presentadas en que en lugar de llegar a una ecuación de evolución explícita para la variable de daño, se debe hacer una integración de la ecuación de daño. Si bien esto complica el algoritmo de solución, esta forma

permite un tratamiento más general del problema, similar al que se utiliza en la teoría de plasticidad. Resulta directa la definición de superficies de carga convexas para materiales con umbrales de daño distintos en compresión y tracción uniaxial y hace más fácil la solución del problema de daño y plasticidad acoplados.

#### 4.4.1. Criterio de daño

Si bien de acuerdo a la desigualdad de Clausius Duhem la variable apropiada para escribir el criterio de daño es la energía libre del material no dañado  $\Psi^o$ , en el caso de daño escalar, donde no es necesario definir un flujo de daño porque se trata de una variable escalar, es equivalente trabajar con una función del tensor de deformaciones o de tensiones.

Se define en este caso el criterio de daño en el espacio de tensiones mediante una función escalar de las componentes del tensor de tensiones, totalmente análoga a la función de fluencia de la teoría de plasticidad:

$$g(\sigma_{ij}, d) = \tau(\sigma_{ij}) - q(d) \leq 0 \quad (4.41)$$

En donde  $\tau(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente que puede calcularse utilizando las funciones de fluencia conocidas (Tresca, Von Mises, Mohr Coulomb, Drucker Prager, etc.) o cualquiera de los criterios antes presentados.

A modo de ejemplo se muestra en las Figuras 4.9 y 4.10 la forma que toma la superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales y en el espacio de tensiones principales cuando se utiliza el criterio de Von Mises para definir la tensión equivalente.

$q(d)$  es el umbral de daño cuya evolución puede obtenerse a partir de las curvas uniaxiales. En el caso de materiales con propiedades de daño distintas en tracción y en compresión se obtiene dicha evolución utilizando las curvas uniaxiales de tracción  $q_t(d)$  y compresión  $q_c(d)$ :

$$q(d) = r q_t(d) + (1 - r) q_c(d) \quad (4.42)$$

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (4.43)$$

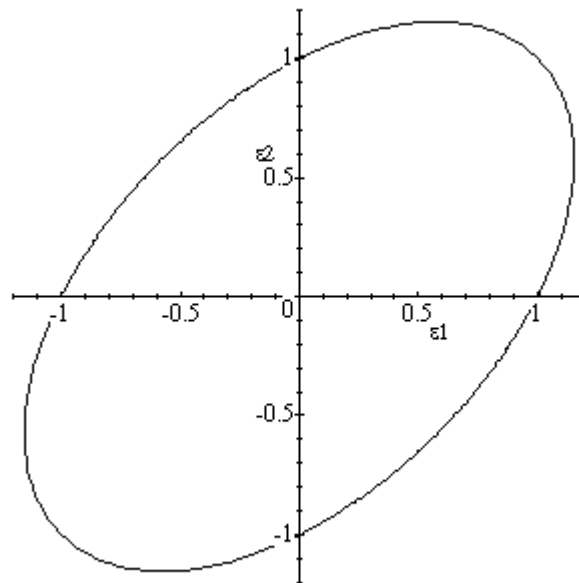


Figura 4.9. Superficie umbral de daño en el espacio de deformaciones principales  $\epsilon_3 = 0$

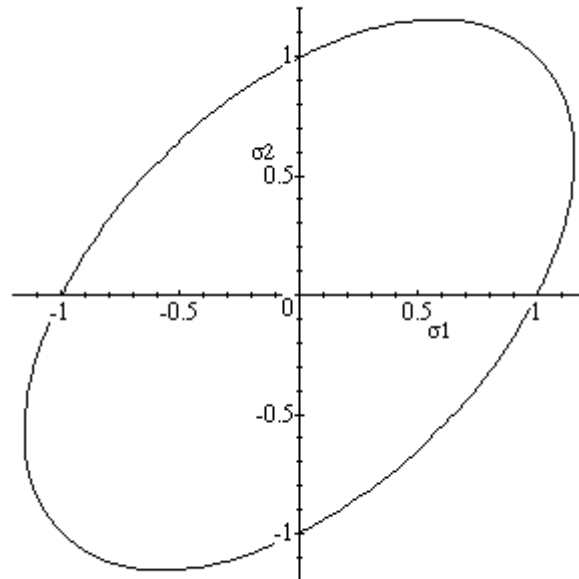


Figura 4.10. Superficie umbral de daño en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$

Para la obtención de  $q_t(d)$  y  $q_c(d)$  es necesario disponer de ensayos de tracción y compresión uniaxial con ramas de descarga.



#### 4.4.2. Condiciones de carga/descarga

Las condiciones de carga/descarga son totalmente análogas a las de los modelos anteriores:

$$\dot{d} \geq 0 \quad ; \quad g \leq 0 \quad , \quad \dot{d}g = 0 \quad (4.44)$$

#### 4.4.3. Evolución del daño

Tratándose de una variable escalar no hace falta definir una regla de flujo para definir la evolución de la variable de daño. La misma puede obtenerse directamente de la condición de consistencia de daño:

$$\dot{g} = 0 \Rightarrow \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{\partial r}{\partial d} \dot{d} = 0 \quad (4.45)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1-d)\dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \dot{d}\bar{\sigma}_{ij} \quad (4.46)$$

$$\dot{d} = \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}}(1-d)\dot{\bar{\sigma}}_{ij}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}}\bar{\sigma}_{ij}} \quad (4.47)$$

#### 4.4.4. Ecuación constitutiva tangente

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d)\dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \dot{d}\bar{\sigma}_{ij} = (1-d)C_{ijkl}^o \dot{\epsilon}_{kl} - \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}}(1-d)\dot{\bar{\sigma}}_{mn}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}}\bar{\sigma}_{mn}} \bar{\sigma}_{ij} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnlk} \dot{\bar{\sigma}}_{kl}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}} \bar{\sigma}_{mn}} = \left( C_{ijkl} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnlk}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}} \bar{\sigma}_{mn}} \right) \dot{\epsilon}_{kl} = C_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4.48) \\ C_{ijkl}^t &= C_{ijkl} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnlk}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{mn}} \bar{\sigma}_{mn}} \end{aligned}$$

Es claro que en este caso no se asegura la simetría del tensor tangente.

#### 4.4.5. Disipación

La disipación resulta:

$$\dot{\Xi}^d = \Psi^o \dot{d} = \Psi^o \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} (1-d) \dot{\sigma}_{ij}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} \bar{\sigma}_{ij}} \quad (4.49)$$

#### 4.4.6. Comparación entre criterios de daño basados en energía de deformación y criterios de daño basados en tensión (Lemaitre 1996)

La densidad de energía libre no dañada  $\Psi^o$  es la variable termodinámica asociada al daño y, por lo tanto, la variable principal que gobierna el fenómeno de daño. Resulta interesante comparar un criterio de daño basado en esta variable con uno basado en una tensión equivalente como Von Mises en la teoría de la plasticidad clásica como el presentado en el punto anterior.

Si se descompone el tensor de tensiones en su parte hidrostática y desviadora:

$$\sigma_{ij} = (\sigma_{kk} / 3) \delta_{ij} + S_{ij} \quad (4.50)$$

Y el tensor de deformaciones en su parte volúmetrica y desviadora:

$$\varepsilon_{ij} = (\varepsilon_{kk} / 3) \delta_{ij} + e_{ij} \quad (4.51)$$

La densidad de energía libre puede escribirse como:

$$(1-d)\Psi^o = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int S_{ij} de_{ij} + \frac{1}{3} \int \sigma_{kk} d\varepsilon_{kk} \quad (4.52)$$

Donde  $E_o$  y  $\nu^o$  son el módulo de elasticidad y el coeficiente de Poisson del material virgen.

Para un material elástico isótropo:

$$e_{ij} = \frac{1+\nu^o}{E^o} \frac{S_{ij}}{1-d} \quad \varepsilon_{kk} = \frac{1-2\nu^o}{E^o} \frac{\sigma_{kk}}{1-d} \quad (4.53)$$

De donde resulta:

$$y = \Psi^o = \frac{1}{2E^o(1-d)^2} \left[ (1+\nu^o) S_{ij} S_{ij} + \frac{(1-2\nu^o)}{3} \sigma_{kk}^2 \right] \quad (4.54)$$

Si se introduce la tensión equivalente de Von Mises:

$$\sigma_{eq} = \left( \frac{3}{2} S_{ij} S_{ij} \right)^{1/2} \quad \text{y} \quad \sigma_m = \sigma_{kk} / 3 \quad (4.55)$$

$$y = \Psi^o = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E^o(1-d)^2} \left[ \frac{2}{3}(1+\nu^o) + 3(1-2\nu^o) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \right] \quad (4.56)$$

$$y = \frac{\sigma_{eq}^2}{2E^o(1-d)^2} R_v \quad R_v = \frac{2}{3}(1+\nu^o) + 3(1-2\nu^o) \left( \frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} \right)^2 \quad (4.57)$$

$\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}}$  es lo que se denomina relación de triaxialidad y juega un papel muy importante

en la ruptura de materiales, ya que la ductilidad en la fractura decrece a medida que este parámetro crece.

El umbral de daño equivalente se define como la densidad de energía libre no dañada para la cual comienza el daño en un ensayo de tracción uniaxial.

Para tracción uniaxial  $\sigma_{eq} = \sigma^*$ ,  $\frac{\sigma_m}{\sigma_{eq}} = 1$ ,  $R_v = 1$ ,  $y^* = \frac{\sigma^{*2}}{2E^o(1-d)^2}$

Por lo que el criterio de daño queda escrito como:

$$\sigma_{eq} R_v^{1/2} - \sigma^* = 0 \quad (4.58)$$

Este criterio difiere del criterio de Von Mises en la función de triaxialidad  $R_v$ , lo que está de acuerdo con la naturaleza física del daño y de la plasticidad. La plasticidad es fundamentalmente debida a deslizamientos que no dependen de la presión hidrostática y el daño, en cambio, está causado por rotura de ligaduras que sí dependen de la presión hidrostática o de la relación de triaxialidad. Este fenómeno depende del coeficiente de Poisson que gobierna el cambio de volumen elástico. En la mayoría de los casos el factor de triaxialidad crece cuando el módulo de Poisson decrece.

La Figura 4.9 muestra la forma que toma el criterio de daño basado en fuerzas termodinámicas en el espacio de tensiones para distintos valores del coeficiente de Poisson. Para el caso  $\nu^o = 0.5$  (incompresibilidad) coincide con el criterio de Von Mises formulado en el espacio de tensiones.

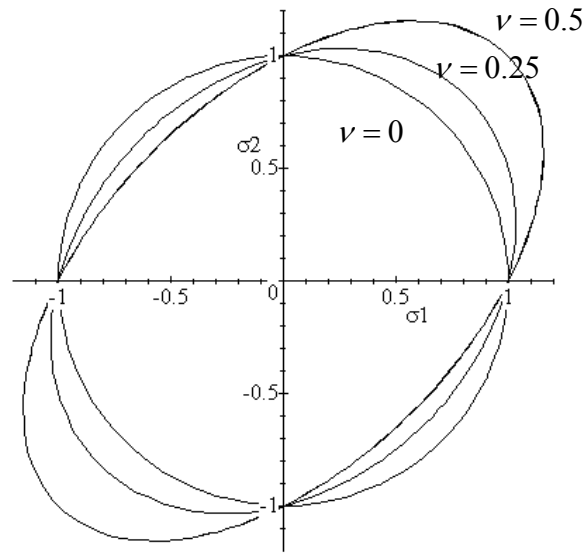


Figura 4.9. Criterio de daño basado en fuerzas termodinámicas representado en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$  para distintos valores del coeficiente de Poisson

## 4.5. Tratamiento numérico

### 4.5.1. Introducción

Las ecuaciones de equilibrio mecánico se obtienen siguiendo el principio de trabajos virtuales y la primera ley de la termodinámica,

$$\int_V (\dot{\mathbf{u}} \cdot m \cdot \ddot{\mathbf{u}} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla^s \dot{\mathbf{u}}) dV - \int_V m \mathbf{b} \dot{\mathbf{u}} dV - \oint_S \mathbf{t} \dot{\mathbf{u}} dS = 0 \quad (4.59)$$

Donde  $\mathbf{u}, \dot{\mathbf{u}}, \ddot{\mathbf{u}}$  son el campo de desplazamiento y sus derivadas temporales,  $m$  es la densidad,  $\mathbf{t}$  son las fuerzas de superficie distribuidas sobre la superficie externa  $S$  y  $\mathbf{b}$  representa las fuerzas volumétricas distribuidas en el volumen  $V$ . Aproximando el campo de desplazamientos con la técnica de elementos finitos estándar:  $\mathbf{u}(x_i) \cong \mathbf{N}^u(x_i) \cdot \mathbf{U}$  se obtienen las siguientes ecuaciones de equilibrio discretas,

$$\mathbf{M}_u \cdot \ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{f}_u^{\text{int}} - \mathbf{f}_u^{\text{ext}} = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

donde  $\mathbf{N}^u(x_i)$  son las funciones de forma de desplazamientos,  $\mathbf{U}$  es el vector de desplazamientos nodales,  $\mathbf{M}_u$  es la matriz de masa,  $\mathbf{f}_u^{\text{int}} = (f_k^{\text{int}})_u = \int_V \sigma_{ij} \nabla_i^S N_{jk}^u dV$  es el

vector de fuerzas mecánicas internas,  $f_u^{\text{ext}}$  es el vector de fuerzas nodales debidas a las cargas externas.

La solución de este sistema se realiza mediante un esquema temporal implícito. En cada paso del tiempo se deben evaluar las tensiones en cada uno de los puntos de integración para poder calcular el vector de fuerzas internas. La evaluación de las tensiones requiere la integración de la ecuación constitutiva.

A continuación se presentan formas alternativas para integrar los modelos de daño escalar presentados.

#### 4.5.2. Integración de la ecuación constitutiva

##### *Modelo de daño escalar explícito (Simo and Ju 1987b)*

Este tipo de modelos permite evaluar la variable de daño en forma explícita sin necesidad de recurrir a un procedimiento iterativo. A continuación se esquematiza el algoritmo de integración.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Predictor elástico  $d^n = d^{n-1} \quad r^n = r^{n-1}$

4) Evaluación de la fuerza termodinámica conjugada de la variable de daño:

$$y^n = (\Psi^o)^n = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{ij}^n$$

5) Evaluación de la deformación equivalente:  $\bar{\tau}^n = \bar{\tau}(y^n)$

6) Verificación del criterio de daño

$$\text{Si } g(\bar{\tau}^n, r^n) \leq 0 \quad \text{comportamiento elástico} \rightarrow 10)$$

7) Evolución del daño. Evaluación de la variable de daño:  $d^n = G(\bar{\tau}^n)$

8) Actualización del umbral de daño:  $r^n = \bar{\tau}^n$

9) Evaluación del tensor constitutivo tangente

$$C_{ijkl}^t = (1 - d^n) C_{ijkl}^o - H(\bar{\tau}^n, d^n) C_{ijpq}^o \varepsilon_{pq}^n \left( \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varepsilon_{kl}} \right)^n$$

10) Actualización del tensor de tensiones

$$\sigma_{ij}^n = (1 - d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

11) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

**Modelo de daño escalar implícito (Luccioni 1993)**

Este tipo de modelo de daño escalar requiere la integración de las ecuaciones constitutivas mediante un proceso de tipo iterativo. Se presentan a continuación dos formas alternativas de realizar la integración.

**a) Retorno mapeado**

Se linealiza la función de daño entre dos iteraciones consecutivas y a partir de allí se obtiene una forma de actualizar iterativamente las variables del problema. Si  $k-1$  y  $k$  son dos iteraciones consecutivas en el proceso de iteración de la ecuación constitutiva, la función de daño en la iteración  $k$  puede escribirse como:

$$\begin{aligned} g_k^n &= g_{k-1}^n + \left( \frac{\partial g}{\partial d} \right)_{k-1}^n (\Delta d)_k = 0 \\ g_{k-1}^n - \left[ \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{k-1}^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n + \left( \frac{\partial r}{\partial d} \right)_{k-1}^n \right] (\Delta d)_k &= 0 \end{aligned} \quad (4.61)$$

De esta última ecuación se puede obtener el incremento de la variable de daño:

$$(\Delta d)_k = \frac{g_{k-1}^n}{\left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{k-1}^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n + \left( \frac{\partial r}{\partial d} \right)_{k-1}^n} \quad (4.62)$$

$$d_k = d_{k-1} + \Delta d_k$$

Se puede actualizar entonces la variable de daño y el tensor de tensiones. Este proceso se repite en forma iterativa hasta lograr convergencia o sea hasta que se cumpla la condición de daño. A continuación se esquematiza el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva en cada punto de integración.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij}^n &= \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n) \\ \varepsilon_{ij}^n &= \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n \end{aligned}$$

3) Inicialización de variables para el predictor elástico  $k = 0$

$$\begin{aligned} d_o^n &= d^{n-1} \\ (\sigma_{ij})_o^n &= (1 - d_o^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n \end{aligned}$$

4) Verificación de la condición de daño

$$\text{Si } g((\sigma_{ij})_k^n, d_k^n) = \tau[(\sigma_{ij})_k^n] - q(d_k^n) < 0 \quad \text{comportamiento elástico} \rightarrow 10)$$

5) Evolución del daño  $k=k+1$

6) . Evaluación del incremento de la variable de daño:

$$(\Delta d)_k^n = \frac{g_{k-1}^n}{\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}}\right)_{k-1}^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n + \left(\frac{\partial q}{\partial d}\right)_{k-1}^n}$$

7) Actualización de la variable de daño:

$$d_k^n = d_{k-1}^n + \Delta d_k^n$$

8) Actualización del tensor de tensiones

$$(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d_k^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

9) Fin del proceso de linealización  $\rightarrow 4)$

10) Fin del proceso iterativo:

$$d^n = d_k^n \quad (\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n$$

11) Evaluación del tensor constitutivo tangente

$$(C_{ijkl}^t)^n = (1 - d^n) C_{ijkl}^o - (\bar{\sigma}_{ij})^n \frac{\left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}}\right)^n (1 - d^n) C_{rskl}^o}{\left(\frac{\partial q}{\partial d}\right)^n + \left(\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}}\right)^n (\bar{\sigma}_{rs})^n}$$

12) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

### b) Euler backward

La función de daño en el tiempo  $n$  se puede escribir como:

$$g(\sigma_{ij}^n, d^n) = \tau(\sigma_{ij}^n) - q(d^n) = 0 \quad (4.63)$$

Donde la variable de daño y la tensión vienen dadas por:

$$\begin{aligned} d^n &= d^{n-1} + \Delta d^n \\ \sigma_{ij}^n &= (1 - d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n = (1 - d^{n-1} - \Delta d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n \end{aligned} \quad (4.64)$$

De manera que la condición de daño (4.63) se puede interpretar como una ecuación no lineal en  $\Delta d^n$

$$g(\sigma_{ij}^n, d^n) = h(\Delta d^n) \quad (4.65)$$

a partir de la cual se puede calcular  $\Delta d^n$  en forma iterativa, por ejemplo, mediante el método de Newton Raphson.

$$\Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n - \left\{ \left( \frac{dh}{d(\Delta d)} \right)_{k-1}^n \right\}^{-1} h(\Delta d_{k-1}^n) \quad (4.66)$$

A continuación se esquematiza el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva en cada punto de integración.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Inicialización de variables para el predictor elástico  $k = 0$

$$d_o^n = d^{n-1}$$

$$(\sigma_{ij})_o^n = (1 - d_o^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

4) Verificación de la condición de daño

$$\text{Si } g((\sigma_{ij})_k^n, d_k^n) = \tau[(\sigma_{ij})_k^n] - q(d_k^n) < 0 \quad \text{comportamiento elástico} \rightarrow 10)$$

5) Evolución del daño  $k=k+1$

6) Evaluación del incremento de la variable de daño:

$$\Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n - \left\{ \left( \frac{dh}{d(\Delta d)} \right)_{k-1}^n \right\}^{-1} g((\sigma_{ij})_{k-1}^n, d_{k-1}^n)$$

7) Actualización de la variable de daño:  $d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n$

8) Actualización del tensor de tensiones:  $(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d_k^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$

9) Vuelva a 4)

10) Fin del proceso iterativo:  $d^n = d_k^n \quad (\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n$

11) Evaluación del tensor constitutivo tangente

$$(C_{ijkl}^t)^n = (1 - d^n) C_{ijkl}^o - (\bar{\sigma}_{ij})^n \frac{\left( \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} \right)^n (1 - d^n) C_{rskl}^o}{\left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^n + \left( \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} \right)^n (\bar{\sigma}_{rs})^n}$$

12) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.





# 5. Modelos de daño

## direccionado

### 5.1. Introducción (Ju 1990)

En el caso de microfisuras o microvacíos distribuidos aleatoriamente en todas las direcciones, el daño isótropo es una opción apropiada. El daño escalar es un caso muy particular de daño isótropo en el que se mantiene constante el coeficiente de Poisson. Esto es demasiado restrictivo e incorrecto en la mayoría de los procesos de daño isótropo.

El daño isótropo establece esencialmente que el tensor de daño es isótropo de manera que preserva las propiedades direccionales del tensor de rigidez del material virgen. Entonces si el material virgen es isótropo, al dañarse sigue siendo isótropo.

Suponer que el daño es isótropo es realista en muchos casos, especialmente bajo condiciones de carga proporcional, cuando las direcciones principales de tensión se mantienen constantes. Esta hipótesis permite predecir las condiciones de iniciación de la fisuración con una precisión normalmente aceptable en aplicaciones de ingeniería cuando la predicción de la vida útil con una incertidumbre de 10 a 50% es todavía útil.

No obstante, todos los materiales, bajo condiciones de carga especiales, y la mayoría de los materiales frágiles, desarrollan lo que se denomina daño direccionado o simplemente daño anisótropo en la bibliografía. Esto significa que los defectos se orientan siguiendo la historia de tensiones y ya no se puede trabajar más con una variable de daño escalar.

A continuación se presentan algunas ideas básicas que dan lugar a distintos modelos de daño direccionado (Lemaitre 1996) y luego, para completar el capítulo se presentan dos formulaciones distintas para el mismo problema.

#### 5.1.1. Concepto de la máxima tensión principal: Vector de daño

Una forma simple de modelar el daño direccionado es considerar que el daño sólo ocurre en el plano normal a las máximas tensiones principales. El daño puede ser entonces caracterizado por su intensidad  $D$  y por el vector unitario que da la orientación de la máxima tensión principal  $\vec{n}_p$ .

El daño queda definido entonces por un vector  $D_i = Dn_{pi}$  y la tensión efectiva en las direcciones principales de tensión se escribe como:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{1-D} & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} \quad \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3 \quad (5.1)$$

### 5.1.2. Definición geométrica del tensor de daño de segundo orden

Para un tipo de anisotropía más compleja o para utilizar en caso de carga no proporcional, se puede extender la definición de daño basada en superficie dada en el primer capítulo para una dimensión.

Si  $\delta S$  representa el área superficial en la configuración actual con una superficie dañada  $\delta S_D$ , entonces,  $\delta S - \delta S_D = \delta S(1-D)$  representa el área no dañada de la configuración con deformación equivalente. Esta idea puede ser desarrollada para el caso de daño direccionado.

Considérese un elemento representativo de volumen de un material dañado descargado en su configuración actual y un área seccional definida por su orientación  $n_i$ , su superficie  $\delta S$  y su forma. Considérese una configuración no dañada con deformación equivalente en el mismo sistema de coordenadas. El elemento representativo de volumen ha cambiado y, particularmente el área seccional se ha transformado en un área con orientación  $\bar{n}_i$  diferente debida a la anisotropía del daño y de área menor  $\bar{\delta S}$ . Por ahora supóngase que la forma no cambia, más adelante se verá que esta hipótesis corresponde al caso de daño ortótropo. Ver Figura 5.1.

Por analogía con el caso unidimensional, el tensor de segundo orden que transforma el vector  $\delta S n_i$  en  $\bar{\delta S} \bar{n}_i$  caracteriza el daño y se denota como  $(\delta_{ij} - D_{ij})$ :

$$(\delta_{ij} - D_{ij}) n_j \delta S = \bar{n}_i \bar{\delta S} \quad (5.2)$$

$D_{ij}$  es el tensor de daño de segundo orden. Es simétrico y tiene tres valores principales  $D_1, D_2, D_3$  en las coordenadas principales  $X_1, X_2, X_3$  que corresponden a la reducción de áreas de un tetraedro dibujado en las coordenadas  $X_1, X_2, X_3$ .

$$\begin{aligned} (1 - D_1) \delta A_1 &= \bar{\delta A}_1 \\ (1 - D_2) \delta A_2 &= \bar{\delta A}_2 \\ (1 - D_3) \delta A_3 &= \bar{\delta A}_3 \end{aligned} \quad (5.3)$$

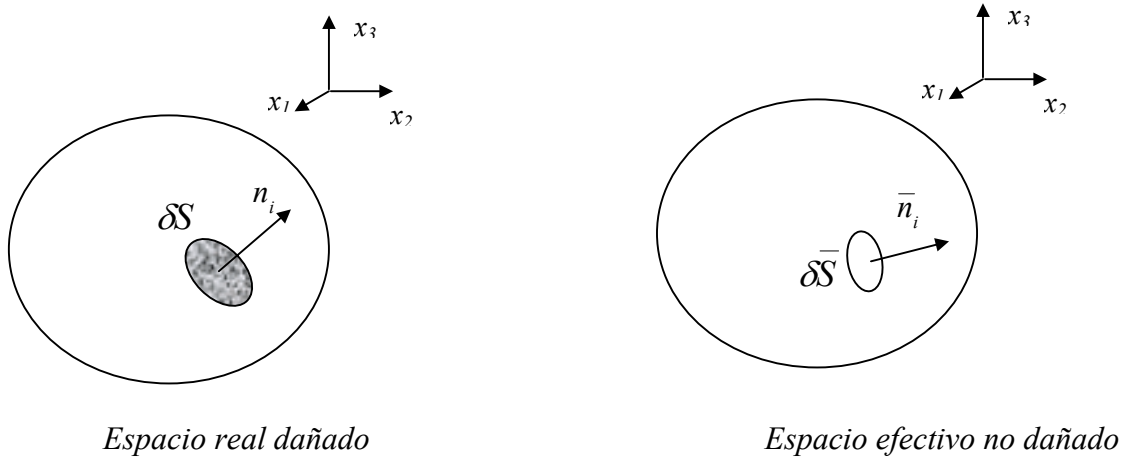


Figura 5.1. Daño direccionado en tres dimensiones

La simetría respecto a tres planos hace que el daño sea ortótropo pero, no obstante, cubre un gran campo de aplicaciones.

Para definir la tensión efectiva se escribe el vector tensión en las dos configuraciones:

$$\begin{aligned}\sigma_{ij} n_j \delta S &= \bar{\sigma}_{ij} \bar{n}_j \delta \bar{S} \\ \sigma_{ij} n_j &= \bar{\sigma}_{ij} (\delta_{jk} - D_{jk}) n_k \quad \forall \vec{n}\end{aligned}\quad (5.4)$$

De donde la tensión efectiva puede definirse como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \sigma_{ik} (\delta_{jk} - D_{jk})^{-1} \quad (5.5)$$

Pero esto lleva a un tensor de tensiones no simétrico. Como para las ecuaciones constitutivas de elasticidad y plasticidad sólo interesa la parte simétrica, se define el tensor de tensiones efectivas como la parte simétrica:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{2} \left[ \sigma_{ik} (\delta_{jk} - D_{jk})^{-1} + (\delta_{ki} - D_{ki})^{-1} \sigma_{kj} \right] \quad (5.6)$$

Cuando las direcciones principales de tensión y de daño coinciden, esta expresión puede escribirse como:

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \frac{\sigma_1}{1-D_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_2}{1-D_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\sigma_3}{1-D_3} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

La densidad de energía libre se escribe en este caso como:

$$\Psi = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - D_{ij}) C_{imkl}^o \varepsilon_{jm} \varepsilon_{kl} \quad (5.8)$$

De donde:

$$Y_{ij} = -\frac{\partial \Psi}{\partial D_{ij}} = \frac{1}{2} C_{imkl}^o \varepsilon_{jm} \varepsilon_{kl} \quad (5.9)$$

### 5.1.3. Definición termodinámica de un tensor de daño de cuarto orden

Otra forma de definir la variable de daño es utilizar el concepto de tensión efectiva asociado con el principio de equivalencia de deformaciones para elasticidad lineal:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad (5.10)$$

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.11)$$

Donde  $C_{ijkl}$  es el tensor de elasticidad modificado por el daño. Suponiendo que tiene inversa, se puede escribir:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^o C_{klrs}^{-1} \sigma_{rs} \quad (5.12)$$

Y por analogía con el caso unidimensional se puede escribir:

$$\begin{aligned} (I_{ijkl} - D_{ijkl})^{-1} &= C_{ijrs}^o C_{rskl}^{-1} \\ D_{ijkl} &= I_{ijkl} - C_{ijrs}^o C_{rskl}^{-1} \end{aligned} \quad (5.13)$$

Donde los  $D_{ijkl}$  son las componentes del tensor de daño de cuarto orden y los  $I_{ijkl}$  son las componentes del tensor identidad de cuarto orden.

La variable asociada al tensor de daño es también, en este caso, un tensor de cuarto orden y se obtiene de la expresión de la energía libre como sigue:

$$\Psi = \frac{1}{2} C_{ijkl}^o \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} (I_{ijrs} - D_{ijrs}) C_{rskl}^o \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (5.14)$$

$$Y_{ijkl} = -\frac{\partial \Psi}{\partial D_{ijkl}} = \frac{1}{2} C_{klrs}^o \varepsilon_{ij} \varepsilon_{rs} \quad (5.15)$$

Esta teoría corresponde al caso general de anisotropía.

### 5.1.4. Definición energética de una variable doble escalar.

Para los materiales como los compuestos, en los que los mecanismos de daño pueden ser distintos en tracción y en compresión, es interesante desarrollar una teoría definiendo dos variables escalares independientes que caracterizan el daño que influye en la energía elástica de corte y en la energía elástica hidrostática:

- $D_s$  actúa en las tensiones desviadoras
- $D_n$  actúa en las presiones hidrostáticas

Si el material no está sujeto a daño en ciertas direcciones materiales, el daño puede ser isótropo o anisótropo.

La densidad de energía libre complementaria en ausencia de daño se puede escribir como:

$$\bar{\Psi}^o = \frac{1}{2} \left( C_{ijkl}^o \right)^{-1} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad (5.16)$$

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij} \sigma_m + S_{ij} \quad \sigma_m = \frac{\sigma_{kk}}{3} \quad (5.17)$$

$$\bar{\Psi}^o = \underbrace{\frac{1}{2} \left( C_{ijkl}^o \right)^{-1} S_{ij} S_{kl}}_{\text{Parte desviadora}} + \underbrace{\frac{1}{2} \left( C_{ijkl}^o \right)^{-1} \sigma_m^2 \delta_{ij} \delta_{kl}}_{\text{Parte hidrostática}} \quad (5.18)$$

Cuando se produce el daño en todas las direcciones

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2} \frac{\left( C_{ijkl}^o \right)^{-1}}{1 - D_s} S_{ij} S_{kl} + \frac{1}{2} \frac{\left( C_{ijkl}^o \right)^{-1}}{1 - D_n} \sigma_m^2 \delta_{ij} \delta_{kl} \quad (5.19)$$

A partir de aquí se puede determinar las leyes elásticas:

$$e_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial S_{ij}} \quad (5.20)$$

$$\varepsilon_v / 3 = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \sigma_m}$$

La dos variables termodinámicas asociadas con las variables de daño  $D_s$  y  $D_n$  resultan:

$$Y_s = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial D_s} \quad (5.21)$$

$$Y_n = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial D_n}$$

La disipación por daño puede escribirse entonces:

$$\dot{\mathcal{E}}^d = Y_s \dot{D}_s + Y_n \dot{D}_n \quad (5.22)$$

Con esta teoría es posible considerar daño en materiales anisótropos para los que  $D_n \neq 0$  en ciertas direcciones materiales y  $D_n = 0$  en otras direcciones no dañables.

## 5.2. Formulación de la degradación elástica anisótropa (Carol et al 2001a, 2001b)

### 5.2.1. Marco teórico de la degradación elástica y el daño.

Este modelo utiliza una formulación de degradación elástica y daño en pequeñas deformaciones similar a la de la elastoplasticidad clásica.

Los tensores de tensiones y de deformaciones están relacionados mediante las expresiones secantes:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} = E_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.23)$$

Donde  $E_{ijkl}$  es el tensor de flexibilidad.

De manera análoga al concepto de umbral de fluencia, se introduce una función  $F(\sigma_{ij}, p)$  donde  $p$  denota un conjunto de variables internas que definen la configuración actual del dominio elástico. Una vez que se alcanza la superficie de carga  $F=0$ , se produce un aumento de la degradación,  $\dot{C}_{ijkl} \neq 0$  y hay un incremento de las deformaciones debido al daño. La velocidad de degradación se define como el exceso de deformación por arriba del valor que corresponde al incremento de tensión para la rigidez secante actual. Con estas definiciones se puede escribir el siguiente conjunto de ecuaciones que describen la degradación elástica progresiva:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d) \quad (5.24)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^d = \dot{\lambda} m_{ij} \quad (\text{opcionalmente } m_{ij} = \frac{\partial Q}{\partial \sigma_{ij}}) \quad (5.25)$$

$$\dot{F} = n_{ij} \dot{\sigma}_{ij} - H \dot{\lambda} = 0 \quad ; \quad n_{ij} = \left. \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} \right|_{\lambda} \quad ; \quad H = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{\sigma} \quad (5.26)$$

$m_{ij}$  define la dirección de la deformación de degradación que puede ser opcionalmente expresado como el gradiente de un potencial  $Q$  y  $\dot{\lambda}$  es un multiplicador inelástico análogo al multiplicador plástico de la elastoplasticidad. La ecuación (5.26) representa la condición de consistencia y  $H$  el módulo de endurecimiento/ablandamiento.

Las ecuaciones (5.24) a (5.26) son válidas solamente para el caso de carga:  $F=0, \dot{F}=0, \dot{\lambda} > 0$ . El caso alternativo es descarga con  $\dot{F} < 0, \dot{\lambda} = 0$  en el que sólo las ecuaciones (5.24) y (5.25) son válidas y conducen a  $\dot{\varepsilon}_{kl}^d = 0$  y  $\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}$ . Suponiendo que se está sobre la superficie de carga  $F=0$ , los dos casos se distinguen con las condiciones complementarias.

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad ; \quad \dot{F} \leq 0 \quad ; \quad \dot{\lambda} \dot{F} = 0 \quad (5.27)$$

Combinando estas ecuaciones se puede obtener el multiplicador plástico y la rigidez tangente:

$$\dot{\lambda} = \frac{1}{H} n_{ij} C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} \quad \bar{H} = H + n_{ij} C_{ijkl} m_{kl} \quad (5.28)$$

$$\dot{\sigma}_{ijkl} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad C_{ijkl}^t = C_{ijkl} - \frac{1}{H} C_{ijrs} m_{rs} n_{pq} C_{pqkl} \quad (5.29)$$

### Regla de degradación de la flexibilidad

Estas ecuaciones son similares a las de la teoría de la plasticidad pero, en contraste con aquellas, no son suficientes para definir un modelo de daño ya que no se ha especificado ninguna ley de evolución para la rigidez secante o la flexibilidad. Con ese fin se puede diferenciar la ecuación secante:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl} + \dot{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} \left( \dot{\varepsilon}_{kl} + C_{klrs}^{-1} \dot{C}_{rspq} \varepsilon_{pq} \right) = C_{ijkl} \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^d \right) \quad (5.30)$$

$$\Rightarrow \dot{\varepsilon}_{kl}^d = -C_{klrs}^{-1} \dot{C}_{rspq} \varepsilon_{pq} = \dot{E}_{klrs} C_{rspq} \varepsilon_{pq} = \dot{E}_{klrs} \sigma_{rs}$$

que relaciona la flexibilidad secante con la velocidad de deformación de degradación. Cuando se conoce la primera se puede obtener la segunda pero no a la inversa. Es necesario definir una regla de evolución para la flexibilidad (o rigidez) secante para poder obtener la velocidad de deformación de degradación

$$\dot{E}_{ijkl} = \dot{\lambda} M_{ijkl} \quad \text{y} \quad m_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.31)$$

Para que C y E permanezcan simétricos el tensor M debe ser simétrico

### Fuerzas termodinámicas conjugadas y asociatividad

La energía libre elástica por unidad de volumen se escribe entonces como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} E_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.32)$$

Para condiciones isotérmicas, la disipación resulta:

$$\dot{\Xi}^d = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\Psi} \quad (5.33)$$

De donde :

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad \text{y} \quad (5.34)$$

$$\dot{\Xi}^d = -\frac{\partial \Psi}{\partial C_{ijkl}} \dot{C}_{ijkl} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial E_{ijkl}} \dot{E}_{ijkl} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \dot{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{E}_{ijkl} \sigma_{kl} \geq 0$$

De donde se puede definir la variable termodinámica conjugada del tensor de flexibilidad:



$$-Y_{ijkl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \sigma_{kl} \quad \text{tal que} \quad \Xi^d = -Y_{ijkl} \dot{E}_{ijkl} \quad (5.35)$$

Con  $-Y_{ijkl}$  se puede definir el gradiente en el espacio de la flexibilidad y relacionarlo con el gradiente en el espacio de tensiones:

$$N_{ijkl} = \frac{\partial F}{\partial(-Y_{ijkl})} \quad n_{ij} = N_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (5.36)$$

Cuando  $M$  y  $N$  son paralelos, la asociatividad en el espacio de la flexibilidad implica asociatividad en el espacio de tensiones pero no a la inversa.

Las fuerzas termodinámicas  $-Y$  constituyen el espacio en el que se debe definir la superficie de carga  $F(-Y, p) = 0$  y la regla de flujo o regla de daño para lograr una formulación de daño totalmente consistente.

#### Formulación de la degradación elástica

Hasta ahora el daño ha sido caracterizado por el tensor de flexibilidad o de rigidez mismo (21 componentes independientes). Alternativamente, en muchos casos resulta conveniente trabajar con un conjunto de variables más reducido, que aún así caracterizan totalmente el daño, y para las cuales se pueden escribir reglas de evolución más simples. Estas variables son las variables de daño  $\mathcal{D}_*$  cuyo número y naturaleza (escalar, vectorial, tensorial) no necesitan ser especificados para el desarrollo general de la teoría. De acuerdo a este concepto, se puede escribir:

$$E_{ijkl} = E_{ijkl}(E_{ijkl}^o, \mathcal{D}_*) \quad ; \quad \dot{E}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \dot{\mathcal{D}}_* \quad (5.37)$$

Donde  $E_{ijkl}^o$  es el tensor de flexibilidad inicial.

Se puede formular una regla de evolución de las variables  $\mathcal{D}_*$  y encontrar su relación con la ley de evolución de la flexibilidad como sigue:

$$\dot{\mathcal{D}}_* = \dot{\lambda} \mathcal{M}_* \quad \text{y} \quad M_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \mathcal{M}_* \quad (5.38)$$

La fuerza termodinámica asociada a las variables de daño  $\mathcal{D}_*$  es  $-\mathcal{Y}_*$  tal que:

$$-\mathcal{Y}_* = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathcal{D}_*} = -Y_{ijkl} \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \mathcal{D}_*} \quad \Xi^d = -\mathcal{Y}_* \dot{\mathcal{D}}_* \quad (5.39)$$

Se puede definir el gradiente de  $F$  en el espacio de daño y vincularlo con  $N$  de la siguiente manera:

$$\mathcal{N}_* = \frac{\partial F}{\partial(-\mathcal{Y}_*)} \quad ; \quad N_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial(\mathcal{D}_*)} \mathcal{N}_* \quad (5.40)$$

La asociatividad en el espacio de daño se da cuando  $\mathcal{N}_*$  es proporcional a  $\mathcal{M}_*$  y eso implica asociatividad a nivel de flexibilidad y tensión.



Reemplazando en la expresión del tensor de rigidez secante dada por la hipótesis de equivalencia de energía:

$$C_{ijkl} = \bar{\alpha}_{ijpq} C_{pqrs}^o \bar{\alpha}_{klrs} \quad (5.49)$$

y teniendo en cuenta la simetría, resulta:

$$C_{ijkl} = \bar{w}_{ip} \bar{w}_{jq} \bar{w}_{kr} \bar{w}_{ls} C_{pqrs}^o \quad (5.50)$$

Para el caso particular de materiales inicialmente isótropos, resulta:

$$C_{ijkl} = \Lambda^o \bar{\phi}_{ij} \bar{\phi}_{kl} + G^o (\bar{\phi}_{ik} \bar{\phi}_{jl} + \bar{\phi}_{il} \bar{\phi}_{jk}) \quad (5.51)$$

Donde  $\Lambda^o$  y  $G^o$  son las constantes de Lamé del material virgen.

En las direcciones principales de daño los tensores de rigidez y de flexibilidad secantes pueden ser escritos matricialmente como:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \bar{\phi}_{(1)}^2 (\Lambda^o + 2G^o) & \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} G^o & \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} G^o \\ \bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(1)} G^o & \bar{\phi}_{(2)}^2 (\Lambda^o + 2G^o) & \bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} G^o \\ \bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} G^o & \bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(2)} G^o & \bar{\phi}_{(3)}^2 (\Lambda^o + 2G^o) \\ & \bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} G^o & \\ & & \bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} G^o \\ & & & \bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} G^o \end{bmatrix} \quad (5.52)$$

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\bar{\phi}_{(1)}^2 E^o} & \frac{-\nu^o}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E^o} & \frac{-\nu^o}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E^o} \\ \frac{-\nu^o}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E^o} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(2)}^2 E^o} & \frac{-\nu^o}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E^o} \\ \frac{-\nu^o}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(3)} E^o} & \frac{-\nu^o}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E^o} & \frac{1}{\bar{\phi}_{(3)}^2 E^o} \\ & \frac{2(1+\nu^o)}{\bar{\phi}_{(1)} \bar{\phi}_{(2)} E^o} & \\ & & \frac{2(1+\nu^o)}{\bar{\phi}_{(2)} \bar{\phi}_{(3)} E^o} \\ & & & \frac{2(1+\nu^o)}{\bar{\phi}_{(3)} \bar{\phi}_{(1)} E^o} \end{bmatrix} \quad (5.53)$$

Donde  $E^o$  y  $\nu^o$  son el módulo elástico y el coeficiente Poisson del material virgen.

La formulación dual de tipo producto, en términos de deformación y flexibilidad, conduce a las siguientes expresiones:

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = w_{ik} \bar{\varepsilon}_{kl} w_{lj} \quad \bar{\sigma}_{ij} = w_{ik} \sigma_{kl} w_{lj} \quad (5.54)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = \alpha_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad \bar{\sigma}_{ij} = \alpha_{ijkl} \sigma_{kl} \quad \alpha_{ijkl} = \frac{1}{2} (w_{ik} w_{jl} + w_{il} w_{jk}) \quad (5.55)$$

El tensor  $\alpha_{ijkl}$  referido a las direcciones principales de daño y escrito en forma matricial, resulta:

$$\alpha = \begin{bmatrix} \phi_{(1)} & & & & & \\ & \phi_{(2)} & & & & \\ & & \phi_{(3)} & & & \\ & & & \sqrt{\phi_{(1)}\phi_{(2)}} & & \\ & & & & \sqrt{\phi_{(2)}\phi_{(3)}} & \\ & & & & & \sqrt{\phi_{(3)}\phi_{(1)}} \end{bmatrix} \quad (5.56)$$

El tensor de flexibilidad secante se escribe como:

$$E_{ijkl} = w_{ip}w_{jq}w_{kr}w_{ls}E_{pqrs}^o \quad (5.57)$$

Para el caso particular de materiales inicialmente isótropos, resulta:

$$E_{ijkl} = \frac{-\nu^o}{E^o} \phi_{ij}\phi_{kl} + \frac{1+\nu^o}{2E^o} (\phi_{ik}\phi_{jl} + \phi_{il}\phi_{jk}) \quad (5.58)$$

o escrito en forma matricial:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} \phi_{(1)}^2 \frac{1}{E^o} & \phi_{(1)}\phi_{(2)} \frac{-\nu^o}{E^o} & \phi_{(1)}\phi_{(3)} \frac{-\nu^o}{E^o} & & & \\ \phi_{(2)}\phi_{(1)} \frac{-\nu^o}{E^o} & \phi_{(2)}^2 \frac{1}{E^o} & \phi_{(2)}\phi_{(3)} \frac{-\nu^o}{E^o} & & & \\ \phi_{(3)}\phi_{(1)} \frac{-\nu^o}{E^o} & \phi_{(3)}\phi_{(2)} \frac{-\nu^o}{E^o} & \phi_{(3)}^2 \frac{1}{E^o} & & & \\ & & & \phi_{(1)}\phi_{(2)} \frac{2(1+\nu^o)}{E^o} & & \\ & & & & \phi_{(2)}\phi_{(3)} \frac{2(1+\nu^o)}{E^o} & \\ & & & & & \phi_{(3)}\phi_{(1)} \frac{2(1+\nu^o)}{E^o} \end{bmatrix} \quad (5.59)$$

Las expresiones obtenidas para el tensor de rigidez secante y el tensor de flexibilidad secante contienen 5 parámetros independientes (2 constantes elásticas y 3 valores principales de daño), mientras que la ortotropía elástica general involucra 9 parámetros independientes. Esto significa que esta formulación de daño anisótropo "básica" representa sólo una forma restrictiva de anisotropía.

### 5.2.3. Tasa de daño pseudo-logarítmica y fuerzas conjugadas

Si se deriva la expresión del tensor de flexibilidad secante se obtiene:

$$\dot{E}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \phi_{pq}} \dot{\phi}_{pq} \quad (5.60)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \phi_{pq}} &= \frac{-\nu^o}{2E^o} \left[ (\delta_{ip} \delta_{jq} + \delta_{iq} \delta_{jp}) \phi_{kl} + \phi_{ij} (\delta_{kp} \delta_{lq} + \delta_{kq} \delta_{lp}) \right] + \\
&+ \frac{1+\nu^o}{4E^o} \left[ (\delta_{ip} \delta_{kq} + \delta_{iq} \delta_{kp}) \phi_{jl} + \phi_{ik} (\delta_{jp} \delta_{lq} + \delta_{jq} \delta_{lp}) \right] + \\
&+ (\delta_{ip} \delta_{lq} + \delta_{iq} \delta_{lp}) \phi_{jk} + \phi_{il} (\delta_{jp} \delta_{kq} + \delta_{jq} \delta_{kp}) \quad (5.61)
\end{aligned}$$

La disipación puede escribirse como:

$$\begin{aligned}
\Xi^d &= (-\Upsilon_{pq}^\phi) \dot{\phi}_{pq} \\
-\Upsilon_{pq}^\phi &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial \phi_{pq}} \sigma_{kl} = -\frac{\nu^o}{E^o} (\sigma_{kl} \phi_{kl}) \sigma_{pq} + \frac{1+\nu^o}{E^o} \sigma_{pk} \phi_{kl} \sigma_{lq} \quad (5.62)
\end{aligned}$$

Esta fuerza termodinámica no tiene un significado físico claro, lo que hace difícil proponer e interpretar funciones de carga y reglas de daño. Sin embargo, se puede ver que  $\sigma_{kl} \phi_{kl} = \bar{\sigma}_{kk}$  lo que motiva la búsqueda de una expresión para la fuerza termodinámica en términos de cantidades efectivas exclusivamente.

Esto es posible y se logra si se cambia la variable de daño involucrada en la expresión de la disipación  $\Xi^d = (-\Upsilon_{pq}^\phi) \dot{\phi}_{pq}$  de  $\phi_{pq}$  por la tasa del tensor de daño pseudo-logarítmico:

$$\dot{L}_{rs} = 2 \bar{w}_{rp} \dot{\phi}_{pq} \bar{w}_{qs} \quad \bullet \quad \dot{\phi}_{pq} = \frac{1}{2} w_{pr} \dot{L}_{rs} w_{sq} \quad (5.63)$$

Si los ejes principales de daño permanecen constantes, este nuevo tensor coincide con el logaritmo del cuadrado del tensor de integridad inverso  $\mathbf{L} = \ln \phi^2$ . En el caso en que los ejes principales de daño rotan, no hay una relación explícita entre ambos tensores. Sin embargo, esto no representa una dificultad práctica ya que el daño pseudo-logarítmico sólo se utiliza en forma de tasa debido a la forma conveniente que presenta la fuerza conjugada. Una vez que se obtiene  $\dot{L}_{ij}$  se puede evaluar  $\dot{\phi}_{ij}$  y luego integrarlo numéricamente.

Con esta nueva variable la derivada del tensor de flexibilidad resulta:

$$\dot{E}_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{rs}} \dot{L}_{rs} \quad (5.64)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{rs}} &= \frac{-\nu^o}{4E^o} \left[ (w_{ir} w_{js} + w_{is} w_{jr}) \phi_{kl} + \phi_{ij} (w_{kr} w_{ls} + w_{ks} w_{lr}) \right] + \\
&+ \frac{1+\nu^o}{8E^o} \left[ (w_{ir} w_{ks} + w_{is} w_{kr}) \phi_{jl} + \phi_{ik} (w_{jr} w_{ls} + w_{js} w_{lr}) + (w_{ir} w_{ls} + w_{is} w_{lr}) \phi_{jk} + \phi_{il} (w_{jr} w_{ks} + w_{js} w_{kr}) \right] \quad (5.65)
\end{aligned}$$

Reemplazando esta derivada en la expresión de la disipación se pueden obtener las fuerzas termodinámicas asociadas a la tasa pseudo-logarítmica de daño:

$$\begin{aligned}\bar{\mathcal{E}}^d &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{E}_{ijkl} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{mn}} \dot{L}_{mn} \sigma_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{mn}} \sigma_{kl} \dot{L}_{mn} = (-\mathcal{Y}_{mn}) \dot{L}_{mn} \\ -\mathcal{Y}_{mn} &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{mn}} \sigma_{kl} = \frac{-\nu^o}{2E^o} \bar{\sigma}_{kk} \bar{\sigma}_{mn} + \frac{1+\nu^o}{2E^o} \bar{\sigma}_{mk} \bar{\sigma}_{kn} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{mk} \bar{\varepsilon}_{kn}\end{aligned}\quad (5.66)$$

Debido a la coaxialidad de  $\bar{\sigma}_{ij}$  y  $\bar{\varepsilon}_{ij}$ , la fuerza conjugada es otro tensor de segundo orden simétrico con las mismas direcciones principales y valores principales iguales a:

$$-\mathcal{Y}_{(i)} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{(i)} \bar{\varepsilon}_{(i)} \quad i=1,3 \quad (5.67)$$

Esta fuerza conjugada tiene la propiedad de que su primer invariante es igual al valor actual de la energía elástica o la energía libre en el problema tratado:

$$-\mathcal{Y}_{pp} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{pk} \bar{\varepsilon}_{kp} = u = \Psi \quad (5.68)$$

#### 5.2.4. Función de carga y regla de daño pseudo-logarítmica

La función de carga se define en términos de la fuerza conjugada  $-\mathcal{Y}_{ij}$  y la historia previa:

$$F = f(-\mathcal{Y}_{ij}) - r(hist) = 0 \quad (5.69)$$

Los gradientes resultan:

$$\mathcal{N}_{rs} = \frac{\partial f}{\partial (-\mathcal{Y}_{rs})} \quad ; \quad N_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{rs}} \mathcal{N}_{rs} \quad ; \quad n_{ij} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{rs}} \mathcal{N}_{rs} \sigma_{kl} \quad (5.70)$$

$$\mathcal{M}_{rs} = \frac{\partial g}{\partial (-\mathcal{Y}_{rs})} \quad ; \quad M_{ijkl} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{rs}} \mathcal{M}_{rs} \quad ; \quad m_{ij} = \frac{\partial E_{ijkl}}{\partial L_{rs}} \mathcal{M}_{rs} \sigma_{kl} \quad (5.71)$$

Si el modelo es asociado  $\mathcal{M}_{rs} = \mathcal{N}_{rs}$ ,  $M_{ijkl} = N_{ijkl}$  y  $m_{ij} = n_{ij}$ .

El parámetro de endurecimiento se puede escribir como:

$$H = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{\sigma} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} - \mathcal{N}_{pq} \left. \frac{\partial (-\mathcal{Y}_{pq})}{\partial L_{rs}} \right|_{\sigma} \mathcal{M}_{rs} \quad (5.72)$$

$$\bar{H} = H + n_{pq} C_{pqrs} m_{rs} = - \left. \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right|_{\varepsilon} = \frac{\partial r}{\partial \lambda} - \mathcal{N}_{pq} \left. \frac{\partial (-\mathcal{Y}_{pq})}{\partial L_{rs}} \right|_{\varepsilon} \mathcal{M}_{rs} \quad (5.73)$$

Para formular la función de resistencia  $r$ , la historia previa resulta naturalmente representada por el estado de daño actual. Entonces se puede reemplazar

$$\frac{\partial r}{\partial \lambda} = \left( \frac{\partial r}{\partial L_{rs}} \right) \mathcal{M}_{rs}$$

De esta forma, definida  $f$ , se tienen todos los elementos para calcular el multiplicador de daño y la rigidez tangente, quedando completa la formulación.

La forma más simple de definir  $f$  es hacerlo en términos de los invariantes de  $-\mathcal{Y}_{ij}$ . Esto no contradice la naturaleza anisótropa del daño porque en el espacio de  $-\mathcal{Y}_{ij}$  sólo están involucradas las tensiones y deformaciones efectivas. Si estas son reemplazadas en términos de sus correspondientes valores nominales, aparece el tensor de daño y la función de carga expresada en el espacio de tensiones o deformaciones nominales resulta anisótropa.

Se puede considerar entonces el espacio de los valores principales de la fuerza conjugada  $-\mathcal{Y}_{(1)}, -\mathcal{Y}_{(2)}, -\mathcal{Y}_{(3)}$  como el de la figura. En ese espacio se pueden representar conceptos como los de eje hidrostático, plano desviador, superficie de carga  $F=0$  y regla de daño, análogos a los usuales en el espacio de tensiones principales en el contexto de la teoría de la plasticidad clásica. Ver Figura 5.2.

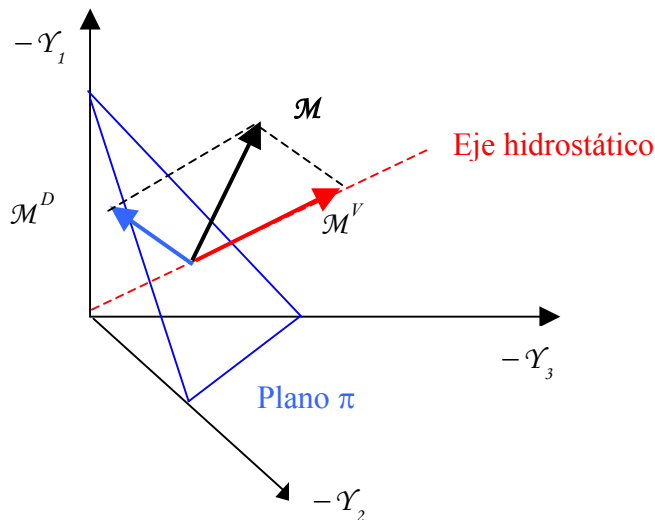


Figura 5.2. Espacio de los valores principales de la fuerza conjugada  $-\mathcal{Y}_{(1)}, -\mathcal{Y}_{(2)}, -\mathcal{Y}_{(3)}$ .

La elección de una evolución del daño pseudo-logarítmica y el espacio definido por su fuerza conjugada tiene una serie de ventajas interesantes. Se puede demostrar que la parte volumétrica de la regla de flujo pseudo-logarítmica, representada en el espacio de las fuerzas conjugadas principales por su componente paralela al eje hidrostático, sólo causa incrementos de daño isótropo. Por el otro lado, la parte desviadora de la regla de flujo pseudo-logarítmica (componentes en el plano desviador) causa sólo incrementos de degradación anisótropa. De esta forma, se tiene una separación de efectos clara que puede ser muy útil en el desarrollo de modelos específicos. Por ejemplo, es trivial verificar que el modelo de daño escalar asociado a (1-d) se recupera con una superficie de carga paralela al plano  $\pi$ .

La condición de que la disipación debe ser siempre positiva, lleva a que la superficie de carga debe ser convexa en el espacio  $-\mathcal{Y}_{ij}$  y debe incluir su origen. Se pueden derivar condiciones adicionales para la regla pseudo-logarítmica a partir de su propia definición como una medida del daño. El tensor de integridad inverso  $\phi$  ha sido definido como un

tensor que evoluciona entre  $\delta_{ij}$  e  $\infty$  con el proceso de daño. Si  $s_i$  denota las componentes de un vector unitario genérico, la proyección  $s_i \phi_{ij} s_j$  puede ser interpretada como la medida geométrica del daño en un plano de normal  $s_i$ . Debido a la naturaleza irreversible del daño, resulta razonable suponer que el daño en un dado plano debe siempre crecer o permanecer constante, pero nunca decrecer. Esto significa que para cualquier orientación  $s_i$ , se debe cumplir que:

$$s_i \dot{\phi}_{ij} s_j \geq 0 \quad (5.74)$$

Esto implica que  $\dot{\phi}_{ij}$  debe ser definido positivo, es decir que sus valores propios deben ser positivos o nulos.

Reemplazando en esta condición  $\dot{\phi}_{ij}$  en términos de  $\dot{L}_{ij}$ , se obtiene:

$$\frac{1}{2} s'_p \dot{L}_{pq} s'_q = \frac{\dot{\lambda}}{2} s'_p \mathcal{M}_{pq} s'_q \geq 0 \quad ; \quad s'_p = w_{pi} s_i \quad (5.75)$$

En donde la raíz cuadrada del tensor de integridad  $w_{pi}$  es no negativa y entonces  $s'_p$  es también cualquier dirección arbitraria. Como el multiplicador inelástico  $\dot{\lambda}$  debe ser no negativo, esto implica que regla de daño pseudo-logarítmica  $\mathcal{M}_{pq}$  debe ser también definida positiva. Es decir que sus valores principales deben satisfacer la condición  $\mathcal{M}_{(1)} \geq 0$ ,  $\mathcal{M}_{(2)} \geq 0$  y  $\mathcal{M}_{(3)} \geq 0$ . En términos de la representación geométrica en el espacio de las fuerzas conjugadas principales, esto implica que el vector que representa la regla de daño debe ser parte del octante positivo-positivo-positivo lo cual resulta una severa restricción en relación a las reglas de flujo tradicionales en el espacio de tensiones. Por ejemplo, modelos asociados con superficies similares a Von Mises o Drucker Prager no son admisibles.

### 5.2.5. Ejemplo: Modelo Pseudo Rankine generalizado

En este caso la superficie de carga está definida por la ecuación :

$$f(-\mathcal{Y}_{ij}) = \left[ \left( -\mathcal{Y}_{(1)} \right)^{b+1} + \left( -\mathcal{Y}_{(2)} \right)^{b+1} + \left( -\mathcal{Y}_{(3)} \right)^{b+1} \right]^{\frac{1}{b+1}} \quad (5.76)$$

En esta expresión b es un parámetro no negativo.

Para  $b = 0$  la superficie  $F = 0$  es idéntica a una parte del plano  $\pi$ .

$$f = -\mathcal{Y}_{(1)} - \mathcal{Y}_{(2)} - \mathcal{Y}_{(3)} = r \quad (5.77)$$

que corresponde al caso de daño isótropo. El otro caso límite opuesto se da para  $b \rightarrow \infty$  en el que la superficie se aproxima a un criterio pseudo-Rankine que en la región  $-\mathcal{Y}_{(1)} \geq -\mathcal{Y}_{(2)} \geq -\mathcal{Y}_{(3)} \geq 0$  está dado por:

$$f = -\mathcal{Y}_{(1)} = r \quad (5.78)$$



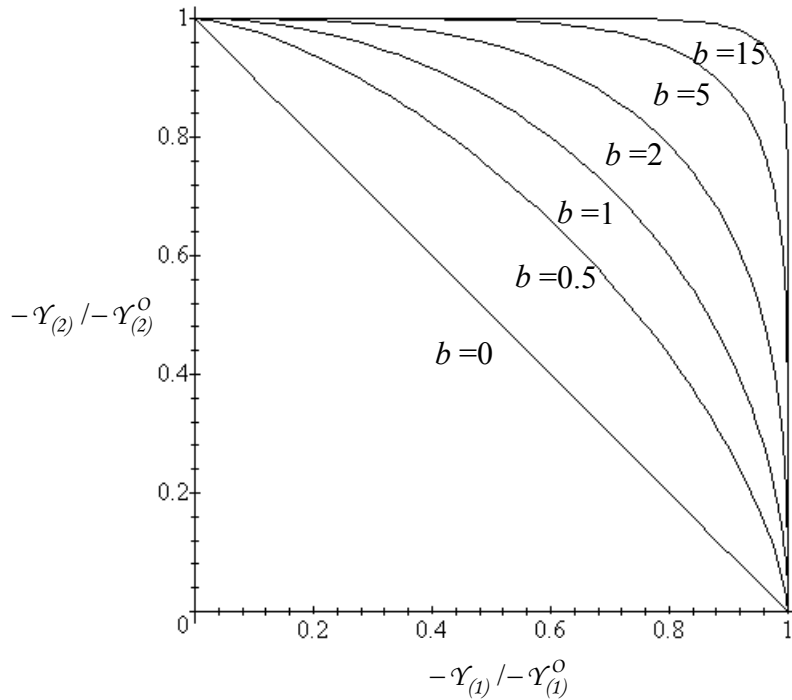


Figura 5.3 Representación de la superficie de carga en el espacio de las fuerzas conjugadas principales  $-\mathcal{Y}_{(3)} = 0$

Para valores intermedios de  $b$  se obtiene una transición continua de superficies entre los dos casos extremos. Por ejemplo, para  $b=1$  se obtiene una esfera. La Figura 5.3 ilustra la forma de la superficie de carga en el plano  $-\mathcal{Y}_{(3)} = 0$ . Debe notarse que en todos los casos la superficie de carga es suave, no presenta aristas.

### 5.2.6. Evolución del umbral de daño o función de resistencia

Como la historia está representada por las variables de daño, resulta natural suponer que  $r$  depende de dichas variables. La medida más simple del daño en el contexto del modelo presentado es el primer invariante del tensor pseudo-logarítmico de daño, o sea  $L = L_{kk} / 3$ . Se puede demostrar que:

$$L = \frac{1}{3} \left[ \ln \phi_{(1)}^2 + \ln \phi_{(2)}^2 + \ln \phi_{(3)}^2 \right] = \frac{2}{3} \ln \left[ \phi_{(1)} \phi_{(2)} \phi_{(3)} \right] \quad (5.79)$$

Pensando sólo en ablandamiento debido a daño por tracción, la función propuesta para  $r(L)$  es una caída exponencial dependiente de dos parámetros:

$$r(hist) = r_o e^{-3kL} \quad (5.80)$$

donde  $r_o = \sigma_{pico}^2 / 2E^o$  es la energía elástica correspondiente al pico de tensión para un ensayo de tracción uniaxial y  $k$  se define en términos de la energía de fractura en modo I por unidad de volumen  $g_f$  como sigue:

$$k = \frac{r_o}{3g_f} \text{ para } b = 0$$

$$k = \frac{r_o}{g_f} \text{ para } b > 0$$
(5.81)

### 5.2.7. Comentarios Finales

Este modelo tiene la ventaja de que las fuerzas termodinámicas asociadas al daño tienen un significado físico claro. El modelo de daño completo tiene sólo 5 parámetros, las dos constantes elásticas isótropas  $E^o$  y  $\nu^o$ , la tensión pico en tracción uniaxial  $\sigma_{pico}$  y la energía de fractura  $g_f$  y el parámetro de forma  $b$  ligado al grado de anisotropía. El modelo permite pasar gradualmente de daño isótropo a daño anisótropo de acuerdo al valor de ese parámetro. A diferencia de la mayoría de los modelos de daño anisótropo, este modelo permite obtener soluciones cerradas para ciertos casos de carga simple como tracción uniaxial (que permite interpretar los dos parámetros adicionales en función de la resistencia a tracción y la energía de fractura), corte puro, distorsión pura y tracción uniaxial previa carga y descarga en tracción uniaxial en la dirección perpendicular.

## 5.3. Modelo de Daño Direccional

(Luccioni y Oller 2002)

### 5.3.1 Introducción

En este modelo se presenta el problema desde una óptica ya conocida basada en la formulación de la teoría de grandes deformaciones (Voyiadjis et al 2000). Aunque físicamente no hay ninguna relación entre estos dos fenómenos, matemáticamente puede establecerse una comparación al nivel de formulaciones. La unificación de la formulación trae una considerable ventaja a la hora de la implementación en códigos de ordenador ya existentes que están orientados al estudio del problema de grandes deformaciones.

### 5.3.2. Interpretación del daño

El daño puede interpretarse matemáticamente como una transformación cinemática entre dos espacios (ver Figura 5.4). Para ello se acepta que existe un espacio ficticio no dañado, que se obtiene a partir del espacio real dañado quitando el daño (ver Figura 5.4). En el espacio ficticio no dañado el material se comporta como si fuera virgen.

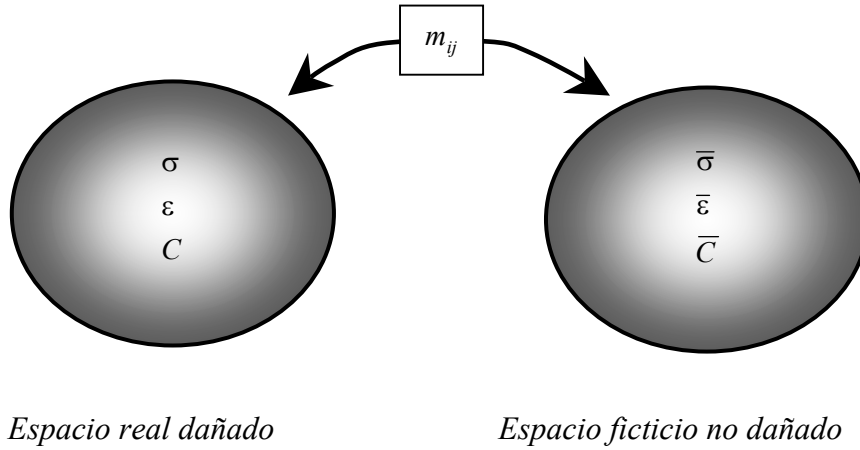


Figura 5.4 Correspondencia entre espacios “Ficticio no dañado” y “Real dañado”

Se admite que hay una relación biunívoca entre los dos espacios que permite transformar una variable del espacio ficticio no dañado al otro espacio real dañado. Dicha relación se basa en un cambio que puede expresarse en forma análoga a una transformación cinemática, lo que da lugar a las expresiones,

$$\sigma_{ij} = m_{ik} m_{jl}^T \bar{\sigma}_{kl} = M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} \quad (5.82)$$

$$\varepsilon_{ij} = m_{ik}^{-T} m_{jl}^{-1} \bar{\varepsilon}_{kl} = M_{ijkl}^{-1} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad (5.83)$$

Donde puede observarse que la transformación del campo de deformaciones resulta del concepto conjugado de tensiones a través de la ley constitutiva del material.

La transformación inversa de espacios se expresa a través de las siguientes relaciones,

$$\bar{\sigma}_{ij} = m_{ki}^{-1} m_{lj}^{-T} \sigma_{kl} = m_{ik}^{-T} m_{jl}^{-1} \sigma_{kl} = M_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \quad (5.84)$$

$$\bar{\varepsilon}_{ij} = m_{ki}^T m_{lj} \varepsilon_{kl} = m_{ik} m_{jl}^T \varepsilon_{kl} = M_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.85)$$

En el espacio ficticio no dañado se tiene una ecuación constitutiva isótropa correspondiente al material virgen,

$$\bar{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} \quad \bar{C}_{ijkl} = C_{ijkl}^o \quad (5.86)$$

tal que reemplazando en ella las transformaciones inversas (ecuaciones (5.84)(5.85)), resulta la ecuación constitutiva en el espacio real,

$$\begin{aligned} \sigma_{ij} &= M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} = M_{ijkl} \bar{C}_{klrs} \bar{\varepsilon}_{rs} \\ \sigma_{ij} &= M_{ijkl} \bar{C}_{klrs} M_{rstu} \varepsilon_{tu} \\ \sigma_{ij} &= C_{ijtu} \varepsilon_{tu} \end{aligned} \quad (5.87)$$

Donde el tensor constitutivo secante en el espacio dañado se expresa como,

$$C_{ijrs} = M_{ijkl} \bar{C}_{klmn} M_{mnrst} = m_{ik} m_{jl}^T \bar{C}_{klmn} m_{mr} m_{ns}^T \quad (5.88)$$

Si el tensor  $m_{ij}$  es simétrico, resulta un tensor constitutivo  $C_{ijrs}$  simétrico pero, en general, no isótropo.

La energía de deformación resulta,

$$W = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} M_{ijkl} \bar{\sigma}_{kl} M_{ijrs}^{-1} \bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} I_{klrs} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\varepsilon}_{rs} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{kl} \bar{\varepsilon}_{kl} = \bar{W} \quad (5.89)$$

donde queda claro, como se esperaba, que la energía es un invariante ante los cambios de espacio.

El tensor  $m = m_{ij} = \partial x_i / \partial \bar{x}_j$ , al igual que el tensor gradiente de deformaciones, es un tensor bi-puntual que vincula los dos espacios antes definidos. En el caso de daño direccionado la transformación de coordenadas no tiene una interpretación física directa como el gradiente de deformaciones, por lo que es necesario obtener el tensor  $m$  a partir del concepto de reducción del área efectiva. Esto permite utilizar la relación cinemática entre elementos de área correspondientes a los dos espacios definidos, para encontrar el tensor de transformación  $m = m_{ij}$ . Ver Figura 5.5.

$$\frac{\partial A_i}{\partial \bar{A}_j} = m_{ij}^{-1} |m| \quad (5.90)$$

Donde  $dA_i$  es la proyección del elemento de área efectiva del sólido dañado,  $dA_j$  sobre el plano normal al eje  $x_j$  y  $\bar{dA}_i$  es la proyección del elemento de área efectiva del sólido ficticio no dañado,  $\bar{dA}_j$  sobre el plano normal al eje  $\bar{x}_j$ . De aquí resulta la definición del tensor de transformación de espacio como una relación de áreas efectivas,

$$m_{ij} = \left| \frac{\partial A_i}{\partial \bar{A}_j} \right|^{1/2} \left( \frac{\partial A_i}{\partial \bar{A}_j} \right)^{-1} \quad (5.91)$$

#### *Particularización de la formulación al caso de daño escalar*

A continuación, se particulariza esta formulación a un caso simple de daño escalar para ilustrar el concepto físico que introduce la definición expresada mediante la ecuación (5.90). Así, para este caso particular, la relación de áreas efectivas queda expresada por,

$$\frac{\partial A_i}{\partial \bar{A}_j} = \delta_{ij} (1-d) \quad (5.92)$$

Debe observarse que la expresión (5.92) corresponde a una relación de áreas efectivas y, en ese sentido, coincide con la interpretación de Kachanov (1958) en la que se supone que el área efectiva se reduce debido al daño en un factor  $(1-d)$ .

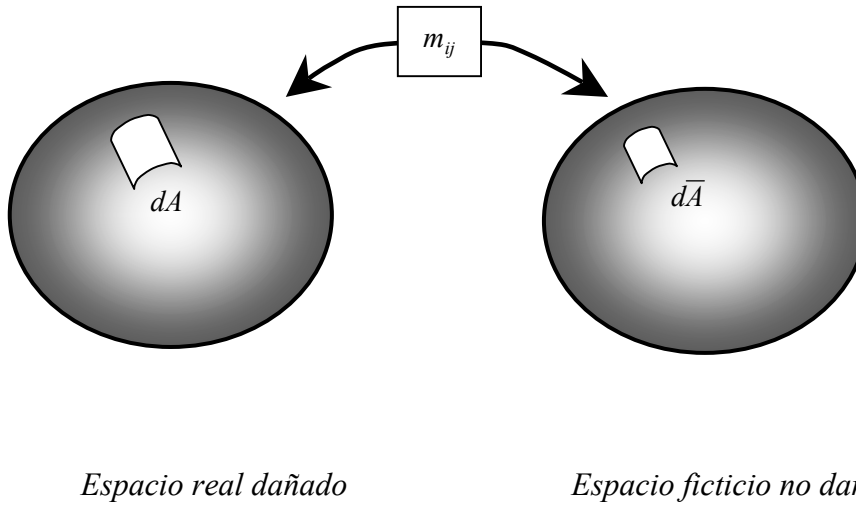


Figura 5.5 Correspondencia de áreas efectivas entre espacios “Ficticio no dañado” y “Real dañado”

Sustituyendo la relación de áreas (5.92) en la expresión (5.91), resultan las siguientes expresiones para los tensores de transformación  $m_{ij}$  y  $M_{ijkl}$ ,

$$m_{ij} = (1-d)^{1/2} \delta_{ij} \quad M_{ijkl} = m_{ik} m_{jl}^T = \delta_{ik} \delta_{jl} (1-d) \quad (5.93)$$

tal que reemplazados en las ecuaciones (5.87) puede escribirse la siguiente ley constitutiva,

$$\sigma_{ij} = (1-d) \bar{\sigma}_{ij} \quad (5.94)$$

$$\sigma_{ij} = (1-d) \bar{C}_{ijkl} \bar{\varepsilon}_{kl} = (1-d)^2 \bar{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (5.95)$$

donde  $C_{ijkl} = (1-d)^2 \bar{C}_{ijkl}$  es tensor constitutivo secante degradado.

Si bien la ecuación (5.94) es idéntica a la correspondiente de la teoría de daño escalar de Kachanov, no ocurre lo mismo con la ecuación (5.95) y el correspondiente tensor constitutivo secante degradado. Esto se debe a que el tensor elástico degradado utilizado por Kachanov se obtiene a partir del concepto de equivalencia de deformaciones y no de energía como ocurre en esta formulación particular de daño escalar.

#### Extensión al caso de daño direccionado

Teniendo en cuenta que  $dA_i$  representa la proyección del elemento de área efectiva sobre un plano normal al eje  $x_i$  (ver Figura 5.6) definida por,

$$dA_i = e_{ijk} dx_j \delta x_k \quad (5.96)$$

la ecuación (5.92) puede extenderse al caso de daño direccionado de la siguiente manera,

$$\frac{\frac{\partial \hat{A}_i}{\hat{A}_i}}{\frac{\partial A_j}{\hat{A}_j}} = (\delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jk} d_k)^{-1/2} [(1-d_1)(1-d_2)(1-d_3)]^{1/2}$$

$$\frac{\partial \hat{A}_1}{\partial \hat{A}_1} = [(1-d_2)(1-d_3)]^{1/2} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \hat{A}_2} = [(1-d_1)(1-d_3)]^{1/2} \quad (5.97)$$

$$\frac{\partial \hat{A}_3}{\partial \hat{A}_3} = [(1-d_1)(1-d_2)]^{1/2} \quad ; \quad \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial \hat{A}_2} = \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \hat{A}_1} = \frac{\partial \hat{A}_1}{\partial \hat{A}_3} = \frac{\partial \hat{A}_3}{\partial \hat{A}_1} = \frac{\partial \hat{A}_2}{\partial \hat{A}_3} = \frac{\partial \hat{A}_3}{\partial \hat{A}_2} = 0$$

donde el símbolo  $\hat{\wedge}$  se utiliza para indicar que el sistema de referencia coincide con las direcciones principales de daño y  $d_k$  son los valores principales del tensor de degradación  $d_{ij}$  que, referido a las direcciones principales de daño, resulta un tensor diagonal,

$$\hat{d}_{ij} = \delta_{ik} \delta_{jk} d_k \quad (5.98)$$

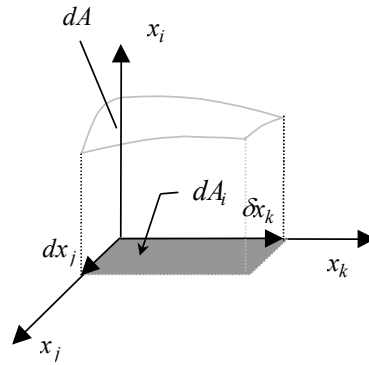


Figura 5.6 Area efectiva elemental

La ecuación (5.97) responde a la interpretación física de que el área efectiva de un elemento, con normal en una dada dirección del espacio, se reduce por efecto del daño en las dos direcciones ortogonales correspondientes al plano tangente.

Reemplazando la expresión (5.97) en la ecuación (5.91) se obtienen las definiciones de los tensores de transformación de espacios para este caso particular,

$$\hat{m}_{ij} = \left| \frac{\partial \hat{A}_r}{\partial A_s} \right|^{1/2} \left( \frac{\partial \hat{A}_i}{\partial A_j} \right)^{-1} = (\delta_{ij} - \delta_{ik} \delta_{jk} d_k)^{1/2} \quad (5.99)$$

$$m_{ij} = a_{ik} a_{jl} \hat{m}_{kl} = a_{ik} a_{jl} (\delta_{kl} - \delta_{km} \delta_{lm} d_m)^{1/2} \quad ; \quad a_{ij} = \cos(x_i, \hat{x}_j) \quad (5.100)$$

De la ecuación (5.100) es evidente que el tensor  $m_{ij}$  es simétrico, lo cual, como ya se señaló, asegura la simetría del tensor elástico secante.

Resulta, además, el siguiente tensor de daño direccionado,

$$\hat{M}_{ijkl} = \hat{m}_{ik} \hat{m}_{jl}^T = (\delta_{ik} - \delta_{im} \delta_{km} d_m)^{1/2} (\delta_{jl} - \delta_{jn} \delta_{ln} d_n)^{1/2} \quad (5.101)$$

$$M_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kr} a_{ls} \hat{M}_{mnrst} = a_{im} a_{kr} a_{jn} a_{ls} \hat{m}_{mr} \hat{m}_{ns}^T \quad (5.102)$$

### 5.3.3. Bases termodinámicas y definición del modelo de daño direccionado

Se presenta una descripción dual de los principios fundamentales: una forma basada en el campo primario, donde la variable libre del problema es la deformación y una alternativa basada en el campo complementario donde la variable libre es la tensión. Esta última definición en el campo complementario facilita la formulación de la regla de flujo donde están contenidas las direcciones preferentes del daño.

La elección de las variables termodinámicas se realiza teniendo en cuenta la interpretación del daño presentada en el apartado anterior.

#### *Bases termodinámicas en el campo primario*

A continuación, se definen en forma resumida las bases en que se fundamenta este modelo,

La energía libre por unidad de volumen se define como,

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, \chi_i) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}(m_{rs}) \varepsilon_{kl} + \frac{1}{2} \alpha_i K_{ij} \alpha_j \quad (5.103)$$

Donde  $\varepsilon_{ij}$  es la variable libre del problema,  $\chi_i = \{m_{ij}, \alpha_i\}$  representa el conjunto de variables internas necesarias para controlar el comportamiento del sólido sometido a daño direccionado, compuesta de la variable interna de daño o tensor de transformación entre el espacio dañado y el virgen  $m_{ij}$  y de la variable interna de endurecimiento  $\alpha_j$ ,  $K_{ij}$  es el tensor de endurecimiento y  $C_{ijkl}(m_{rs})$  el tensor constitutivo degradado según la evolución de la variable interna de daño  $m_{ij}$ .

Siguiendo la formulación de la segunda ley de la termodinámica y considerando la energía libre antes formulada, se llega a la siguiente expresión de la disipación mecánica,

$$\dot{\Xi}_m = -\dot{\Psi} + \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} = \left( \sigma_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \right) \dot{\varepsilon}_{ij} - \frac{\partial \Psi}{\partial \chi_i} \dot{\chi}_i \geq 0 \quad (5.104)$$

de donde se deducen las denominadas ecuaciones constitutivas del sólido en cuestión, luego de establecer las condiciones de Coleman necesarias para que exista una disipación no negativa,

$$\left. \begin{array}{l} \text{Ec. constitutiva : } \sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \text{Variable interna conjugada : } Y_i = -\frac{\partial \Psi}{\partial \chi_i} \end{array} \right\} \Rightarrow \Xi_m = Y_i \dot{\chi}_i \geq 0 \quad \text{Disipación} \quad (5.105)$$

tal que las variables internas conjugadas pueden agruparse de la siguiente forma,

$$\mathbf{Y} = Y_i = \left\{ \begin{array}{c} -\frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{m}} \\ -\frac{\partial \Psi}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{y}^m \\ \mathbf{q}^\alpha \end{array} \right\} = \bar{\boldsymbol{\chi}} \quad (5.106)$$

Donde  $y^m$  es la variable interna conjugada de la variable interna de daño  $m$  y  $\mathbf{q}$  representa las variables conjugadas de las variables de internas de endurecimiento,

$$\mathbf{q}^\alpha = q_i^\alpha = -\frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_i} = -K_{ij}(m_{rs}) \alpha_j \quad (5.107)$$

#### Bases termodinámicas en el campo complementario

La energía libre complementaria por unidad de volumen se puede obtener como una función conjugada de la energía libre primal (ecuación (5.103)), a través de transformación de Legendre-Fenchel ,

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}(\sigma_{ij}, \bar{\chi}_i) &= \max_{\varepsilon} \{ \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} - \Psi(\varepsilon_{ij}, \chi_i) \} \\ \bar{\Psi}(\sigma_{ij}, \bar{\chi}_i) &= \frac{1}{2} \sigma_{ij} C_{ijkl}^{-1}(y_{rs}^m) \sigma_{kl} - \frac{1}{2} q_i^\alpha \bar{K}_{ij} q_j^\alpha \end{aligned} \quad (5.108)$$

Donde  $\sigma_{ij}$  es la nueva variable libre del problema,  $\bar{\chi}_i = \{y_{ij}^m, q_i^\alpha\}$  representa el conjunto de variables internas necesarias para controlar el comportamiento del sólido sometido a daño direccionado, compuesta por la variable interna de daño complementaria  $y_{ij}^m$  y de la variable interna de endurecimiento complementaria  $q_j^\alpha$ ,  $\bar{K}_{ij} = K_{ij}^{-1}$  es el tensor de endurecimiento complementario y  $C_{ijkl}(y_{rs}^m)$  el tensor constitutivo degradado según la evolución de la variable interna de daño complementaria.

Nuevamente, siguiendo la formulación de la segunda ley de la termodinámica y considerando la energía libre complementaria antes formulada, se llega a la siguiente expresión de la disipación mecánica,

$$\bar{\Xi}_m = \dot{\bar{\Psi}} - \dot{\sigma}_{ij} \varepsilon_{ij} = \left( \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \sigma_{ij}} - \varepsilon_{ij} \right) \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\chi}_i} \dot{\bar{\chi}}_i \geq 0 \quad (5.109)$$

Luego de establecer la condición de Coleman, para garantizar disipación positiva, resultan las siguientes leyes constitutivas, (ver Lubliner 1990),



$$\left. \begin{array}{l} \text{Ec. constitutiva : } \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \sigma_{ij}} \\ \text{Variable interna : } \bar{Y}_i = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \bar{\chi}_i} \end{array} \right\} \Rightarrow \bar{\Xi}_m = \bar{Y}_i \dot{\bar{\chi}}_i \geq 0 \quad \text{Disipación} \quad (5.110)$$

tal que las variables internas conjugadas  $m = m_{ij}$  y las de endurecimiento  $\alpha = \alpha_i$  que aquí intervienen, pueden agruparse de la siguiente forma,

$$\bar{\mathbf{Y}} = \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{y}^m} \\ \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \mathbf{q}^\alpha} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{m} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{array} \right\} = \boldsymbol{\chi} \quad (5.111)$$

#### 5.3.4. Regla de flujo

Se acepta que la ecuación de la disipación (5.105)  $\bar{\Xi}_m = Y_i \dot{\chi}_i \geq 0$  puede ser escrita mediante una función convexa del tipo  $D(\dot{\chi}) \geq 0$  que depende sólo de las variables  $\dot{\chi}$  y de las variables de estado termodinámicas en un tiempo dado. Se puede definir entonces el denominado pseudopotencial de disipación como la siguiente función convexa,

$$\varphi(\dot{\chi}) = \int_0^t D(t, \dot{\chi}) \frac{dt}{t} \quad (5.112)$$

A través de la transformada de Legendre-Fenchel es posible encontrar el pseudopotencial complementario,

$$\bar{\varphi}(\mathbf{Y}) = \max_{\dot{\chi}} \{ \mathbf{Y} \cdot \dot{\chi} - \varphi(\dot{\chi}) \} \quad (5.113)$$

que es la función indicadora de un espacio convexo  $L$  en el espacio complementario y permite definir la evolución de la variable  $\dot{\chi}$ , mediante la siguiente regla de normalidad,

$$\begin{aligned} \dot{\chi} &= \lambda \frac{\partial \bar{\varphi}(\mathbf{Y})}{\partial \mathbf{Y}} \quad \text{con } \lambda \geq 0 \quad \text{para } \mathbf{Y} \in \partial L \\ \dot{\chi} &= 0 \quad \text{para } \mathbf{Y} \in L \end{aligned} \quad (5.114)$$

donde  $F = 0$  y  $G = 0$  son las ecuaciones de superficies convexas cerradas en el espacio complementario.

Particularizando la regla de flujo expresada en Ec.(5.114), al modelo que se presenta en este trabajo se tiene,

$$\dot{m}_{ij} \begin{cases} = 0 & \text{para } F(\mathbf{Y}) < 0 \\ = \lambda \frac{\partial G(\mathbf{Y})}{\partial y_{ij}^m} & \text{para } F(\mathbf{Y}) = 0 \end{cases} \quad \dot{\alpha}_i \begin{cases} = 0 & \text{para } F(\mathbf{Y}) < 0 \\ = \lambda \frac{\partial G(\mathbf{Y})}{\partial q_i^\alpha} & \text{para } F(\mathbf{Y}) = 0 \end{cases} \quad (5.115)$$

tal que  $F$  y  $G$  representan las funciones umbral de daño y de potencial de daño respectivamente.

### 5.3.5. Función umbral de daño

Se proponen las siguientes ecuaciones para  $F$  y  $G$

$$F = \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{y}_{ij} \tilde{y}_{ij}} - 1 = 0 \quad ; \quad G = \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{y}_{ij} \tilde{y}_{ij}} - 1 = 0 \quad (5.116)$$

donde las fuerzas termodinámicas mapeadas se definen como,

$$\tilde{y}_{ij} = \tilde{A}_{ijkl} \bar{y}_{kl} = \tilde{A}_{ijkl} \bar{A}_{klrs} y_{rs}^m \quad (5.117)$$

siendo  $\tilde{A}_{ijkl}$  un tensor diagonal de transformación que contiene el control del endurecimiento en direcciones ortogonales. Para el caso en que el endurecimiento en una dirección esté totalmente desacoplado del endurecimiento en las otras direcciones, el tensor  $\tilde{A}_{ijkl}$ , referido a las direcciones principales de daño, puede escribirse como,

$$\tilde{A}_{ijkl} = B_{ik} C_{jl} \quad ; \quad B_{ik} = \frac{E_o}{\sqrt{2}} \delta_{is} \delta_{ks} m_s^5 \quad ; \quad C_{jl} = \delta_{jr} \delta_{lr} [\sigma(m_r)]^{-2} \quad (5.118)$$

Donde  $E_o$  es el módulo de elasticidad del material en estado virgen,  $m_s$  los valores principales del tensor de daño  $m_{ij}$  y  $\sigma(m_r)$  es la tensión de comparación que puede obtenerse de curvas de respuesta uniaxiales.

$\bar{A}_{ijkl}$  es un tensor que permite preservar la convexidad de la superficie de daño en el espacio de tensiones y fuerzas termodinámicas. Expresado en las direcciones principales de tensión, es diagonal y tiene la siguiente forma,

$$\bar{A}_{ijkl} = (n^2 - 1) \delta_{im} \delta_{jm} \delta_{km} \delta_{lm} r_m + \delta_{im} \delta_{jn} \delta_{km} \delta_{ln} \delta_{mn} \quad (5.119)$$

$$r_m = \begin{cases} \langle \sigma_m \rangle & \text{si } \sigma_m > 0 \\ |\sigma_m| & \text{si } \sigma_m < 0 \end{cases} \quad , \quad \text{no suma sobre "m"}$$

Donde el factor  $n$  representa la relación entre las resistencias correspondientes de los umbrales de daño en compresión y tracción uniaxial.

#### *Convexidad de la superficie de daño.*

Con el objetivo de mostrar distintos aspectos de la superficie de daño, definida en el espacio de tensiones, se expresa la ecuación (5.116) en términos de las componentes de tensión para problemas uniaxiales de tracción y compresión, resultando las siguientes expresiones,

$$\frac{\sigma_1^2}{(\sigma(m_1))^2} - 1 = 0 \quad ; \text{ Compresión uniaxial} \quad (5.120)$$

$$\frac{n^2 \sigma_1^2}{(\sigma(m_1))^2} - 1 = 0 ; \text{ Tracción uniaxial} \quad (5.121)$$

$m_1$  es la única componente distinta de la unidad de la diagonal del tensor  $m_{ij}$ , que permite la transformación entre el espacio dañado y el virgen. La tensión  $\sigma_1$  representa la única componente activa del tensor de tensiones  $\sigma$ , por lo tanto es a la vez tensión principal mayor  $\sigma_1 > 0$ , ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) en el caso de tracción y menor  $\sigma_1 < 0$ , ( $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$ ) en el caso de compresión.

El tensor  $\bar{A}_{ijkl}$  representa la identidad de 4to orden para  $n=1$  y la superficie de daño, tiene la forma mostrada en la Figura 5.7a) en el espacio de tensiones principales. Esta misma superficie, se representa en el cuadrante negativo del espacio de las fuerzas termodinámicas principales, siguiendo la ecuación (5.116) (ver Figura 5.7b). La superficie de daño definida por  $F(y_{ij}^m) = 0$ , en este último espacio, es convexa cumpliendo la hipótesis termodinámica de partida.

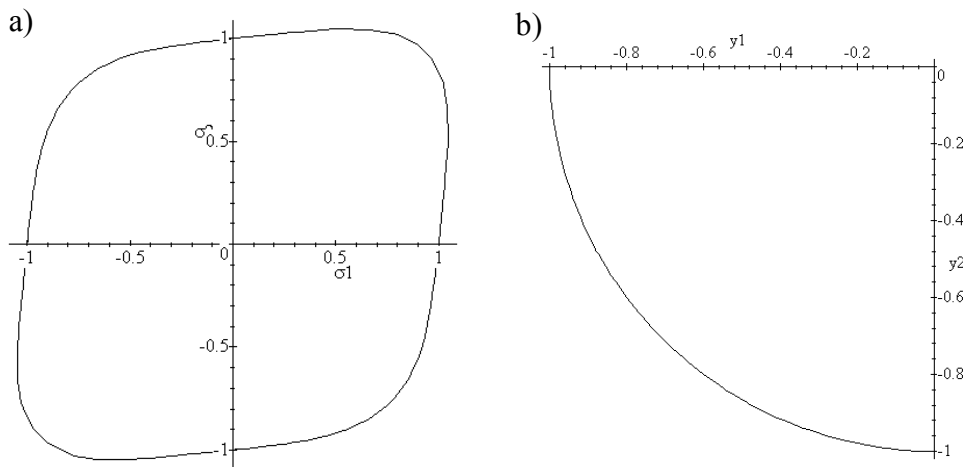
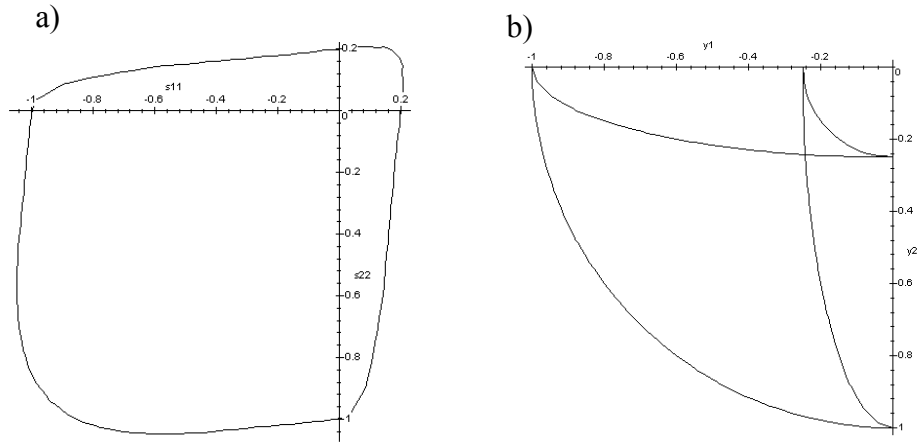


Figura 5.7 Superficie umbral de daño para  $n=1$ , representada en: a) el plano de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$ ; b) en el plano de fuerzas termodinámicas principales.

Para  $n \neq 1$  el tensor  $\bar{A}_{ijkl}$ , definido para asegurar la convexidad de la superficie de daño en el espacio de fuerzas termodinámicas, ya no coincide con el tensor identidad. En la figura siguiente se muestra la superficie de daño para  $n=5$ , en el espacio de tensiones principales (Figura 5.8a) y en el espacio de las fuerzas termodinámicas principales (Figura 5.8b), respectivamente

En la Figura 5.8b), las cuatro curvas dibujadas corresponden a distintas combinaciones en los signos de las tensiones principales. Es claro, nuevamente, que para  $n \neq 1$ , resulta  $F(y_{ij}^m) = 0$  convexa.

Figura 5.8 Superficie umbral de daño para  $n = 5$ , representada en: a) el plano de



tensiones principales  $\sigma_3 = 0$ ; b) en el plano de fuerzas termodinámicas principales.

### 5.3.6. Evolución del daño

El factor de consistencia  $\dot{\lambda}$  que define la evolución del daño, se obtiene de la condición de consistencia de daño. Esto es,

$$\dot{F} = \frac{\partial F}{\partial y_{ij}^m} \left[ \frac{\partial y_{ij}^m}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial y_{ij}^m}{\partial m_{kl}} \dot{m}_{kl} \right] = 0 \quad (5.122)$$

Sustituyendo en esta última expresión la regla de normalidad, ecuación (5.115), se obtiene el factor de consistencia buscado,

$$\frac{\partial F}{\partial y_{ij}^m} \left[ \frac{\partial y_{ij}^m}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} + \frac{\partial y_{ij}^m}{\partial m_{kl}} \dot{\lambda} \frac{\partial G}{\partial y_{kl}^m} \right] = 0 \quad \Rightarrow \quad \dot{\lambda} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y_{ij}^m} \frac{\partial y_{ij}^m}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial F}{\partial y_{rs}^m} \frac{\partial y_{rs}^m}{\partial m_{pq}} \frac{\partial G}{\partial y_{pq}^m}} \quad (5.123)$$

### 5.3.7. Tensor de rigidez tangente

Derivando la relación constitutiva secante se obtiene:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij} &= \dot{C}_{ijrs} \varepsilon_{rs} + C_{ijrs} \dot{\varepsilon}_{rs} \\
\dot{C}_{ijrs} &= \dot{M}_{ijmn} \bar{C}_{mnpq} M_{pqrs} + M_{ijmn} \bar{C}_{mnpq} \dot{M}_{pqrs} = \\
&= \dot{m}_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pr} m_{qs}^t + m_{im} \dot{m}_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pr} m_{qs}^t + \\
&\quad + m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} \dot{m}_{pr} m_{qs}^t + m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pr} \dot{m}_{qs}^t \\
&= \lambda \left( \frac{\partial G}{\partial y_{im}^m} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pr} m_{qs}^t + m_{im} \frac{\partial G}{\partial y_{nj}^m} \bar{C}_{mnpq} m_{pr} m_{qs}^t \right) + \\
&\quad + \lambda \left( m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} \frac{\partial G}{\partial y_{pr}^m} m_{qs}^t + m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pr} \frac{\partial G}{\partial y_{sq}^m} \right)
\end{aligned}$$

Y reemplazando el parámetro de consistencia de daño:

$$\begin{aligned}
\dot{\sigma}_{ij} &= C_{ijrs} \dot{\varepsilon}_{rs} + \\
&\quad - \frac{\frac{\partial F}{\partial y_{tu}^m} \frac{\partial y_{tu}^m}{\partial \varepsilon_{rs}}}{\frac{\partial F}{\partial m_{tu}} \frac{\partial G}{\partial y_{tu}^m}} \dot{\varepsilon}_{rs} \left[ \frac{\partial G}{\partial y_{im}^m} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pk} m_{ql}^t + m_{im} \frac{\partial G}{\partial y_{nj}^m} \bar{C}_{mnpq} m_{pk} m_{ql}^t + \right. \\
&\quad \left. m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} \frac{\partial G}{\partial y_{pk}^m} m_{ql}^t + m_{ik} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} m_{pk} \frac{\partial G}{\partial y_{lq}^m} \right] \varepsilon_{kl} \\
&= C_{ijrs}^T \dot{\varepsilon}_{rs}
\end{aligned}$$

$$C_{ijrs}^T = C_{ijrs} - \frac{\left[ \left( \frac{\partial G}{\partial y_{im}^m} m_{jn}^t + m_{im} \frac{\partial G}{\partial y_{nj}^m} \right) \bar{\sigma}_{mn} + m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} \left( \frac{\partial G}{\partial y_{pk}^m} m_{ql}^t + m_{pk} \frac{\partial G}{\partial y_{lq}^m} \right) \varepsilon_{kl} \right] \frac{\partial F}{\partial y_{tu}^m} \frac{\partial y_{tu}^m}{\partial \varepsilon_{rs}}}{\frac{\partial F}{\partial m_{tu}} \frac{\partial G}{\partial y_{tu}^m}}$$

(5.124)

### 5.3.8. Regla de endurecimiento y evolución del umbral de daño.

En este apartado se introduce la definición de la evolución del daño a partir de los resultados de un ensayo uniaxial y también la modificación de la forma que sufre la superficie de daño debido al daño direccionado. Para simplificar la interpretación de los resultados, se trabaja con el caso de una superficie umbral con  $n=1$ .

*Función de endurecimiento*

Para definir el endurecimiento hace falta conocer la función  $\sigma(m_1)$  que interviene en el tensor de mapeo  $C_{ji}$  de ecuación (5.118). La misma puede obtenerse a partir de un ensayo uniaxial. Supóngase el caso particular de una función de endurecimiento  $\sigma(\varepsilon)$  bilineal con pendiente de endurecimiento  $H$  como el de la Figura 5.9.

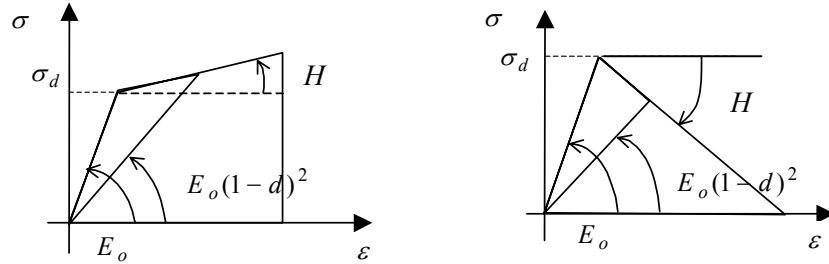


Figura 5.9 Curva de endurecimiento uniaxial lineal positivo y negativo

Partiendo de la siguiente igualdad, que representa la ley constitutiva de daño uniaxial,

$$\sigma = (1-d)^2 E_o \varepsilon = m^4 E_o \varepsilon = \begin{cases} = E_o \varepsilon & \text{si } \varepsilon \leq \sigma_d/E_o \\ = \sigma_d + H(\varepsilon - \sigma_d/E_o) & \text{si } \varepsilon > \sigma_d/E_o \end{cases} \quad (5.125)$$

y de la función de endurecimiento bilineal, se obtiene la tensión,

$$\sigma(m) = \frac{m^4 E_o \sigma_d}{m^4 E_o - H(1-m^4)} \quad (5.126)$$

En un caso más general, para una función  $\sigma(\varepsilon)$  cualquiera, la expresión de  $\sigma(m)$  puede obtenerse numéricamente.

*Evolución de la superficie umbral de daño*

Una vez deducida la función de endurecimiento, se aborda a continuación la evolución de la superficie umbral de daño. En particular, interesa estudiar qué ocurre cuando el material endurece o ablanda en la dirección de carga, y su influencia en el umbral de daño en la dirección perpendicular a ésta.

Se considera un material cargado en la dirección principal mayor  $x_1$  hasta que el endurecimiento haga llegar la tensión a 1.2 veces el umbral de daño inicial y se supone que eso corresponde a  $m_1 = 0.8$ . Puede observarse que, para ese estado de carga, de acuerdo a la ec.(5.115), no hay daño en las otras dos direcciones.

Si se adopta la definición dada por las ecuaciones de la superficie de daño (5.116) a (5.119) para  $n=1$ , se obtiene el gráfico de la Figura 5.10 para la superficie inicial (interna) y degradada (externa).

Puede verse que el endurecimiento en una dirección no afecta al umbral de daño en la dirección perpendicular. Esto se debe a la particular definición del tensor de mapeo  $\tilde{A}_{ijkl}$  de ec.(5.118). En realidad, en los materiales existe un cierto grado de acoplamiento en el endurecimiento entre las distintas direcciones. Este efecto, que es un dato del

material, se puede tener en cuenta cambiando la definición de  $C_{ij}$  de ecuación (5.118) por la siguiente,

$$C_{ij} = \delta_{ir} \delta_{jr} \left\{ \sigma \left[ (1-\beta)m_r + \beta I_r \det m_{kl} \right] \right\}^{-2} \quad (5.127)$$

Donde  $0 \leq \beta \leq 1$  define el grado de acoplamiento, cuando es  $\beta = 0$  no hay acoplamiento e  $I_r$  representa un vector columna cuyos elementos son iguales a 1.

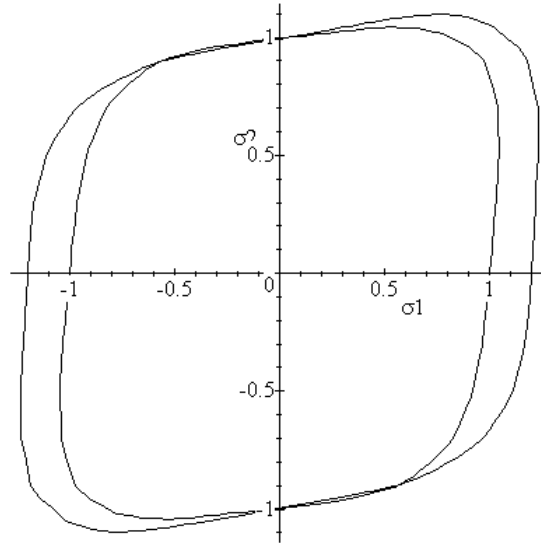


Figura 5.10: Función umbral de daño previo al daño (superficie interna), y posterior al daño, (superficie externa).

### 5.3.9. Consideración de la anisotropía inicial

Para tener en cuenta la anisotropía inicial se introduce una nueva transformación de espacios (ver Figura 5.11) (Oller et al 1995, Luccioni 1993). Se supone que existe un tercer espacio llamado espacio isótropo ficticio no dañado tal que la ley de daño referida a ese espacio es similar a la de un material inicialmente isótropo. Se pueden escribir entonces las siguientes relaciones,

$$\bar{\sigma}_{ij} = w_{ik} w_{jl}^T \hat{\sigma}_{kl} = W_{ijkl} \hat{\sigma}_{kl} \quad (5.128)$$

$$\sigma_{ij} = m_{ik} m_{jl}^T \bar{\sigma}_{kl} = \hat{m}_{ir} \hat{m}_{js}^T \hat{\sigma}_{rs} = \hat{M}_{ijrs} \hat{\sigma}_{rs} \quad (5.129)$$

$$\varepsilon_{ij} = \hat{M}_{ijrs}^{-1} \hat{\varepsilon}_{rs}$$

Donde  $\hat{\sigma}_{ij}$  y  $\hat{\varepsilon}_{ij}$  son los tensores de tensión y deformación en el espacio isótropo ficticio no dañado y  $\hat{m}_{ij}$  es un tensor de transformación de segundo orden definido como,

$$\hat{m}_{ir} = m_{ik} w_{kr} \quad ; \quad \hat{M}_{ijrs} = \hat{m}_{ir} \hat{m}_{js}^T = m_{ik} w_{kr} m_{jl}^T w_{ls}^T \quad (4-130)$$

$w_{kr}$  es un tensor de transformación constante que contiene información relacionada con la anisotropía inicial. Referido a los ejes principales de anisotropía, este tensor puede ser expresado como sigue,

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} (\sigma_{d1}/\sigma_d)^2 & 0 & 0 \\ 0 & (\sigma_{d2}/\sigma_d)^2 & 0 \\ 0 & 0 & (\sigma_{d3}/\sigma_d)^2 \end{bmatrix} \quad (5.131)$$

Donde  $\sigma_{di}$  es el umbral de daño en compresión uniaxial en la dirección  $i$  y  $\sigma_d$  es el umbral de daño de referencia.

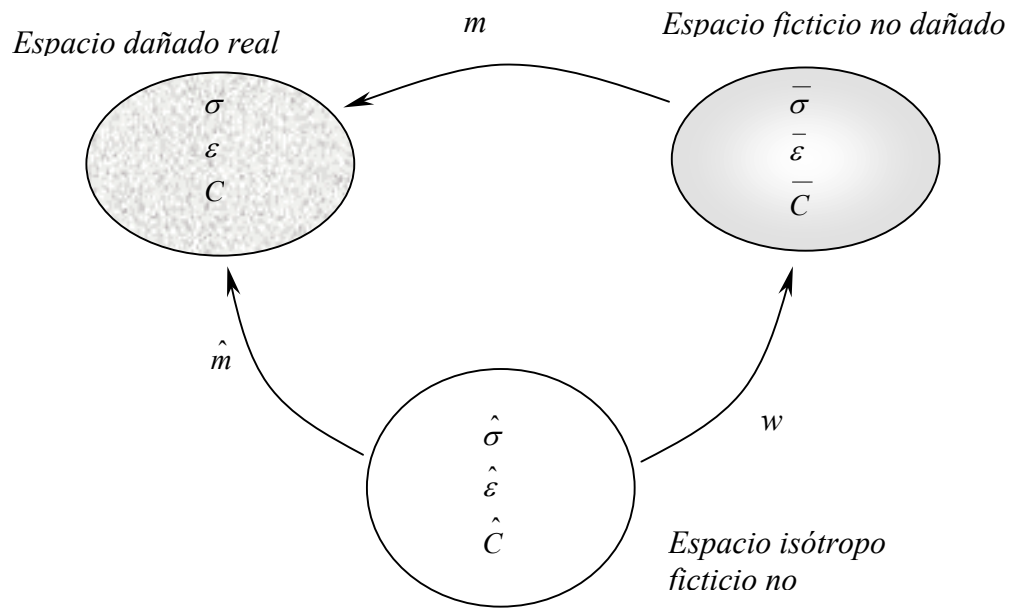


Figura 5.11: Correspondencia entre el *espacio dañado real*, el *espacio ficticio no dañado*, y el *espacio isotrópico ficticio no dañado*.

El tensor secante puede escribirse también como,

$$C_{ijrs} = \hat{M}_{ijkl} \hat{C}_{klmn} \hat{M}_{mnr} = \hat{m}_{ik} \hat{m}_{jl}^T \hat{C}_{klmn} \hat{m}_{mr} \hat{m}_{ns}^T \quad (5.132)$$

Donde,

$$\hat{C}_{klmn} = W_{ijkl}^{-1} \bar{C}_{ijrs} W_{mnr}^{-1} = w_{ik}^{-T} w_{jl}^{-1} \bar{C}_{ijrs} w_{mr}^{-T} w_{ns}^{-1} \quad (5.133)$$

En este caso se elige como variable interna al tensor  $\hat{m}_{ij}$  y las fuerzas termodinámicas conjugadas resultan:

$$\hat{y}_{ij} = -\frac{\partial \Psi}{\partial \hat{m}_{ij}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \frac{\partial C_{klpq}}{\partial \hat{m}_{ij}} \varepsilon_{pq} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{kl} \frac{\partial (\hat{m}_{kr} \hat{m}_{ls}^t \bar{C}_{rsmn} \hat{m}_{mp} \hat{m}_{nq}^t)}{\partial \hat{m}_{ij}} \varepsilon_{pq} \quad (5.134)$$



La función umbral de daño se expresa entonces como  $\hat{F}(\hat{\mathbf{y}})$ ,

$$\hat{F} = \sqrt{\frac{1}{2} \tilde{y}_{ij} \tilde{y}_{ij}} - 1 = 0 \quad (5.135)$$

Donde las fuerzas termodinámicas mapeadas  $\tilde{y}_{ij}$  se definen como,

$$\tilde{y}_{ij} = \tilde{A}_{ijkl} \bar{y}_{kl} = \tilde{A}_{ijkl} \bar{A}_{klrs} \hat{y}_{rs} \quad (5.136)$$

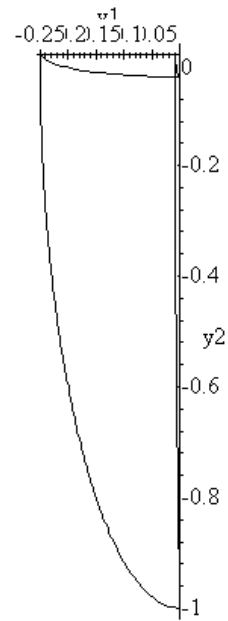
En Figura 5.12 se presenta la superficie umbral de daño en el espacio de fuerzas termodinámicas y en el espacio de fuerzas termodinámicas isotropo ficticio para para  $n=5$  y  $(\sigma_{d1}/\sigma_d)^2 = 0.25$  ;  $(\sigma_{d2}/\sigma_d)^2 = (\sigma_{d3}/\sigma_d)^2 = 1$ . Las cuatro curvas dibujadas en cada caso corresponden a diferentes combinaciones de signos de las tensiones principales. Es claro que  $F(\hat{\mathbf{y}}^m) = 0$  resulta convexa para  $n \neq 1$ .

En Figura 5.13 se representa la misma superficie de daño en los espacios de tensiones real e isotropo ficticio. Esta figura muestra claramente el papel que juega la transformación introducida en ecuación (48) cuando  $m_{ij} = \delta_{ij}$  (umbral de daño inicial).

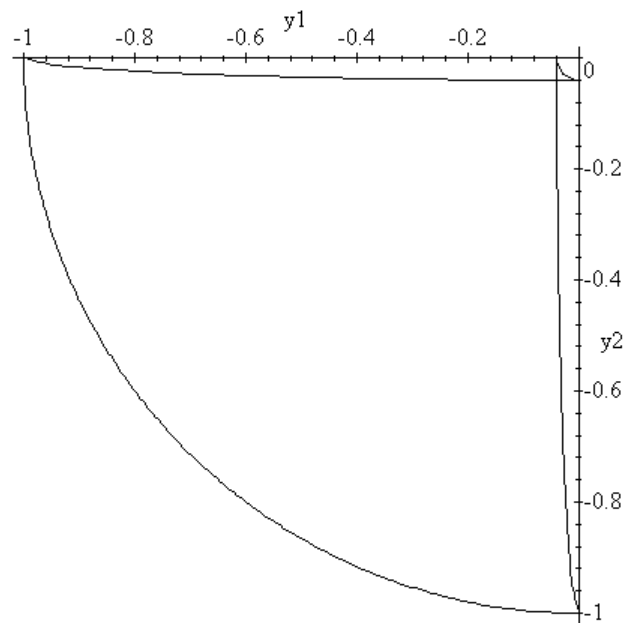
La regla de evolución para el tensor de daño de segundo orden resulta en este caso,

$$\dot{m}_{ij} = \dot{\hat{m}}_{ik} w_{jk}^{-1} \begin{cases} = \lambda \frac{\partial \hat{G}(\hat{\mathbf{y}})}{\partial \hat{y}_{ik}} w_{jk}^{-1} & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) = 0 \\ = 0 & \text{if } \hat{F}(\hat{\mathbf{y}}) < 0 \end{cases} \quad (5.137)$$

La ecuación (5.137) muestra que la direccionalidad en el daño es causada no sólo por la carga sino también por la anisotropía inicial.



a)



(b)

Figura 5.12. a) Superficie umbral de daño en el espacio de las fuerzas termodinámicas ( $n=5$ ), b) Superficie umbral de daño en el espacio de fuerzas termodinámicas isotrópico ficticio ( $n=5$ ).

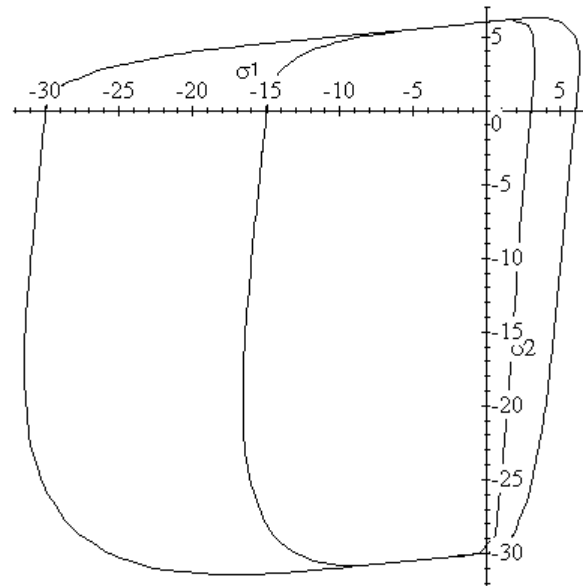


Figura 5.13 Superficie umbral inicial de daño en el espacio de tensiones principales (interna) y en el espacio de tensiones principales isótropo ficticio (externa) (n=5)

### 5.3.10. Implementación numérica

Se utiliza un algoritmo de tipo retorno mapeado para la integración de las ecuaciones constitutivas de daño. Se linealiza el umbral de daño entre dos iteraciones consecutivas y a partir de allí se obtiene una forma de actualizar iterativamente las variables del problema. Si  $k-1$  y  $k$  son dos iteraciones consecutivas en el proceso de iteración de la ecuación constitutiva, la función de daño en la iteración  $k$  puede escribirse como:

$$F_k = F_{k-1} + \left( \frac{\partial F}{\partial m_{ij}} \right)_{k-1} (\Delta m_{ij})_k = 0 \quad (5.138)$$

$$F_k = F_{k-1} + \left( \frac{\partial F}{\partial m_{ij}} \right)_{k-1} \Delta \lambda \left( \frac{\partial G}{\partial y_{ij}^m} \right)_{k-1} = 0 \quad (5.139)$$

De esta última ecuación se puede obtener el factor de consistencia de daño como:

$$\Delta \lambda = - \frac{F_{k-1}}{\left( \frac{\partial F}{\partial m_{ij}} \right)_{k-1} \left( \frac{\partial G}{\partial y_{ij}^m} \right)_{k-1}} \quad (5.140)$$

Con el factor de consistencia de daño se puede actualizar el tensor de daño y el tensor de tensiones.

$$(m_{ij})_k = (m_{ij})_{k-1} + \Delta\lambda \left( \frac{\partial G}{\partial y_{ij}^m} \right)_{k-1} \quad (5.141)$$

$$(\sigma_{ij})_k = (m_{ir})_k (m_{js}^t)_k \bar{C}_{rstu} (m_{tp})_k (m_{uq}^t)_k \varepsilon_{pq} \quad (5.142)$$

Este proceso se repite en forma iterativa hasta lograr convergencia o sea hasta que se cumpla la condición de daño. A continuación se esquematiza el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva en cada punto de integración, para el caso particular de materiales inicialmente isótropos.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Inicialización de variables para el predictor elástico  $k=0$

$$(m_{ij})_o^n = (m_{ij})^{n-1}$$

$$(\sigma_{ij})_o^n = (m_{ir})_o^n (m_{js}^t)_o^n \bar{C}_{rstu} (m_{tp})_o^n (m_{uq}^t)_o^n \varepsilon_{pq}^n$$

4) Obtención de las direcciones principales de daño a partir de "tensor de daño de segundo orden"  $m_{ij}$

$$(a_{ij})_k^n = \cos(x_i, \hat{x}_j)$$

5) Rotación de los tensores de tensión y de deformación a las direcciones principales de daño

$$(\hat{\sigma}_{ij})_k^n = (a_{pi}^{-1})_k^n (a_{qj}^{-1})_k^n (\sigma_{pq})_k^n \quad ; \quad (\hat{\varepsilon}_{ij})_k^n = (a_{pi}^{-1})_k^n (a_{qj}^{-1})_k^n (\varepsilon_{pq})_k^n$$

6) Evaluación de las fuerzas termodinámicas:  $(y_{ij}^m)_k^n$ ;  $(\bar{y}_{ij})_k^n$ ;  $(\tilde{y}_{ij})_k^n$  en las direcciones principales de daño

7) Verificación del umbral de daño

$$\text{Si } F \left[ (\tilde{y}_{ij})_k^n \right] < 0 \quad \text{comportamiento elástico} \rightarrow 15)$$

8) Evolución del daño  $k=k+1$

9) Evaluación del parámetro de consistencia de daño  $\Delta\lambda_k$ :

$$\text{De } F_k = 0 \Rightarrow \Delta\lambda_k = - \frac{F_{k-1}}{\left( \frac{\partial F}{\partial m_{ij}} \right)_{k-1} \left( \frac{\partial G}{\partial y_{ij}^m} \right)_{k-1}^n}$$

- 10) Obtención del incremento del tensor de segundo orden de daño en las direcciones principales de daño

$$\left(\Delta \hat{m}_{ij}\right)_k^n = \Delta \lambda_k \left( \frac{\partial G}{\partial y_{ij}^m} \right)_{k-1}^n$$

- 11) Rotación del incremento del tensor de segundo orden de daño a las direcciones globales de referencia:

$$\left(\Delta m_{ij}\right)_k^n = a_{ir} a_{js} \left(\Delta \hat{m}_{rs}\right)_k^n$$

- 12) Actualización del tensor de segundo orden de daño:

$$\left(m_{ij}\right)_k^n = \left(m_{ij}\right)_{k-1}^n + \left(\Delta m_{ij}\right)_k^n$$

- 13) Actualización del tensor de tensiones

$$\left(\sigma_{ij}\right)_k^n = \left(m_{ir}\right)_k^n \left(m_{js}^t\right)_k^n \bar{C}_{rstu} \left(m_{tp}\right)_k^n \left(m_{uq}^t\right)_k^n \varepsilon_{pq}^n$$

- 14) Fin del proceso de linealización → 4)

- 15) Definición de los tensores de tensión, de daño y de rigidez secante correspondientes al incremento de carga:  $\left(\sigma_{ij}\right)^n = \left(\sigma_{ij}\right)_k^n$  ;  $\left(m_{ij}\right)^n = \left(m_{ij}\right)_k^n$  ;  $\left(C_{ijpq}\right)^n = \left(m_{ir}\right)_k^n \left(m_{js}^t\right)_k^n \bar{C}_{rstu} \left(m_{tp}\right)_k^n \left(m_{uq}^t\right)_k^n$

- 16) Evaluación del tensor constitutivo tangente

$$\left(C_{ijrs}^T\right)^n = \left[ C_{ijrs} \right. \\ \left. \frac{\left[ \left( \frac{\partial G}{\partial y_{im}^m} m_{jn}^t + m_{im} \frac{\partial G}{\partial y_{nj}^m} \right) \bar{\sigma}_{mn} + m_{im} m_{jn}^t \bar{C}_{mnpq} \left( \frac{\partial G}{\partial y_{pk}^m} m_{ql}^t + m_{pk} \frac{\partial G}{\partial y_{lq}^m} \right) \varepsilon_{kl} \right] \frac{\partial F}{\partial y_{tu}^m} \frac{\partial y_{tu}^m}{\partial \varepsilon_{rs}}}{\frac{\partial F}{\partial m_{tu}} \frac{\partial G}{\partial y_{tu}^m}} \right]^n$$

- 17) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

### 5.3.11. Ejemplos de verificación

#### a) Carga y descarga en dos direcciones ortogonales

Un problema de interés práctico es la influencia en la respuesta uniaxial de una carga y descarga uniaxial previa en la dirección ortogonal. A continuación, se muestran los resultados obtenidos para un material inicialmente isótropo, cuando se lo carga en una dirección, se descarga y luego se vuelve a cargar en la dirección perpendicular a la primera carga como se indica en la Figura 5.15. En este ejemplo las direcciones

principales de daño coinciden con las direcciones principales de tensión y el tensor de daño  $m_{ij}$ , referido a las direcciones principales, resulta diagonal.

El material a estudiar tiene las siguientes propiedades: módulo elástico inicial  $E_o=35000$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu=0.2$ , endurecimiento lineal  $H=5000$  MPa, umbral inicial de daño en compresión  $\sigma_{co}=30$  MPa, relación entre umbrales de daño en compresión y tracción uniaxial  $n=10$ , acoplamiento direccional  $\beta = 0$ .

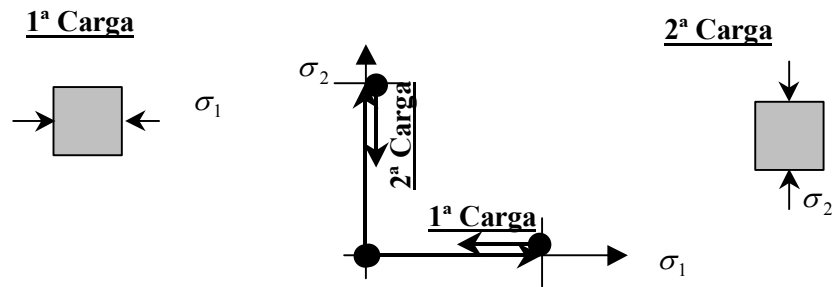


Figura 5.14: Historia de carga en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$

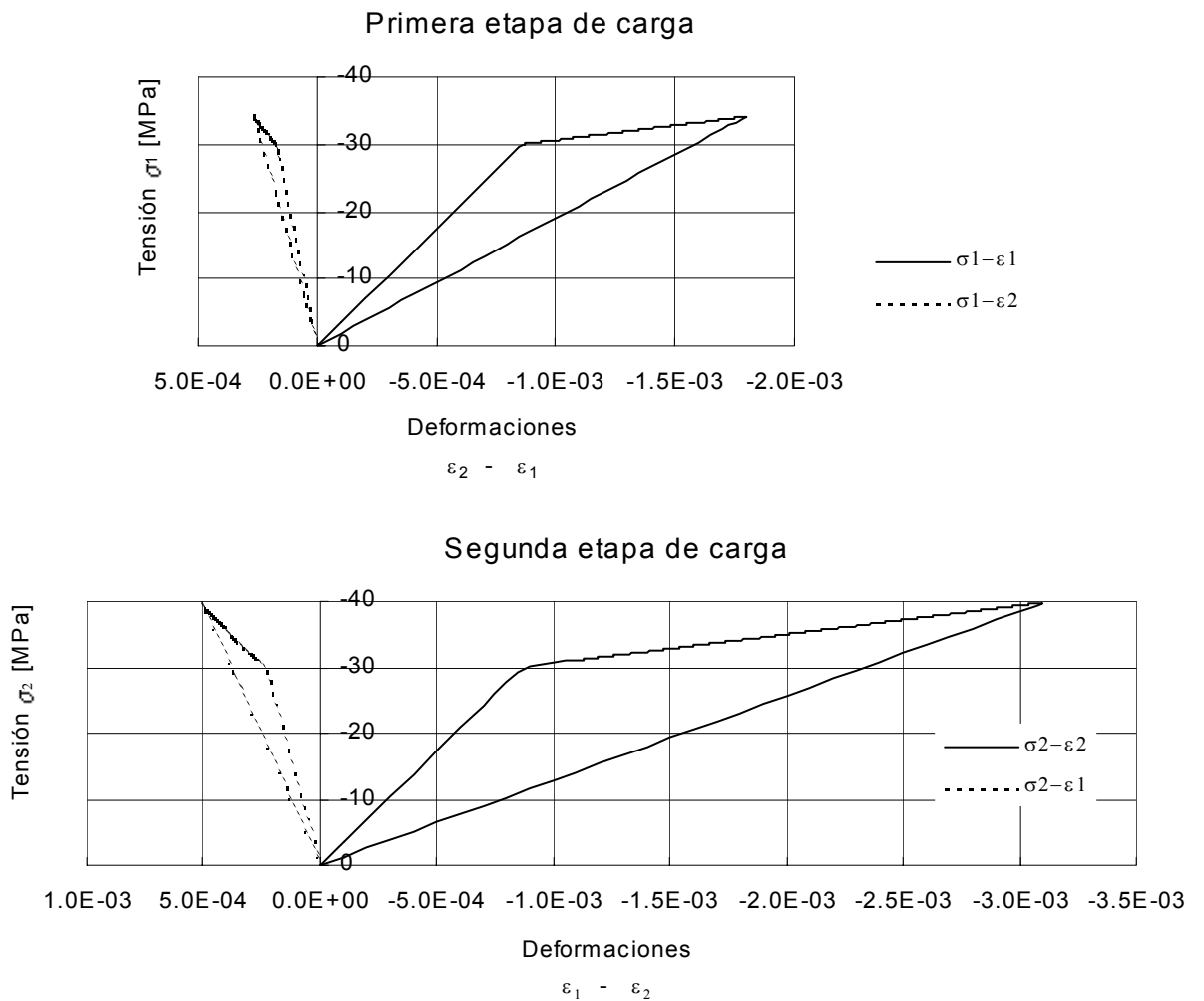


Figura 5.15: Curvas tensión-deformación correspondientes a la primera y segunda etapa de carga respectivamente

En la Figuras 5.15 se presentan las curvas tensión-deformación correspondientes. Puede observarse que el material pierde rigidez en la dirección de la carga pero no en la dirección perpendicular.

En la Figura 5.16 se presentan las curvas umbrales de daño en las distintas etapas del ensayo en el espacio de tensiones principales. Se observa nuevamente que se produce un endurecimiento direccionado del material, en la dirección de carga y no en la dirección ortogonal, lo cual es coincidente con  $\beta = 0$ .

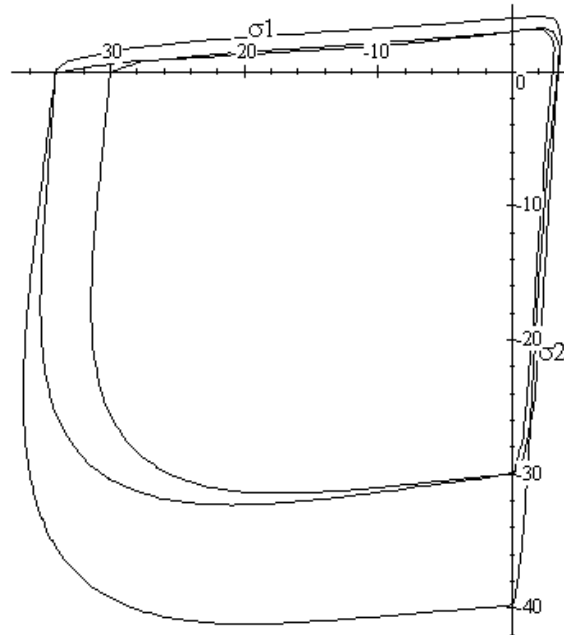


Figura 5.16 Curvas umbrales de daño: inicial (interna), después de la primera etapa de carga (intermedia) y final (externa), en el espacio de tensiones principales

#### b) Rotación de las direcciones principales de tensión

Para analizar el comportamiento del modelo de daño direccionado propuesto bajo condiciones de carga generales se realiza, a continuación, el ensayo numérico propuesto por Willam que ha sido utilizado por otros investigadores para probar modelos de daño y fisuración.

El ensayo consiste en dos etapas de carga. En la primera etapa de carga se aplica una tensión uniaxial en la dirección  $x$  hasta alcanzar el umbral de daño. En la segunda etapa se aplican incrementos de deformación  $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_{xy}$  en las proporciones 1,1.5,1, manteniendo las componentes de tensión  $\sigma_{zz} = \tau_{zx} = \tau_{zy} = 0$ . La historia de deformación se muestra en la Figura 5.17. La segunda etapa de carga corresponde a una extensión en las direcciones  $x$  e  $y$  acompañada de una rotación de las direcciones principales de deformación.

Las propiedades del material son las siguientes: módulo elástico inicial:  $E_o=107$  kPa, coeficiente de Poisson:  $\nu=0.2$ , umbral inicial de daño en tracción:  $\sigma_{co}=104$  kPa, energía

de Fractura:  $G_f=15$  kPa m, relación entre umbrales de daño en compresión y tracción uniaxial:  $n=1$ , acoplamiento direccional:  $\alpha=0.5$ . El comportamiento del material en tracción uniaxial está caracterizado por un ablandamiento exponencial como el de la Figura 5.18.

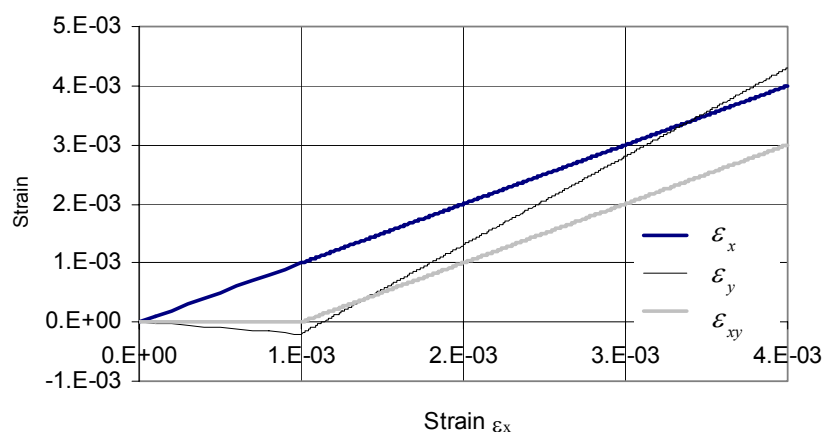


Figura 5.17. Historia de deformaciones prescrita

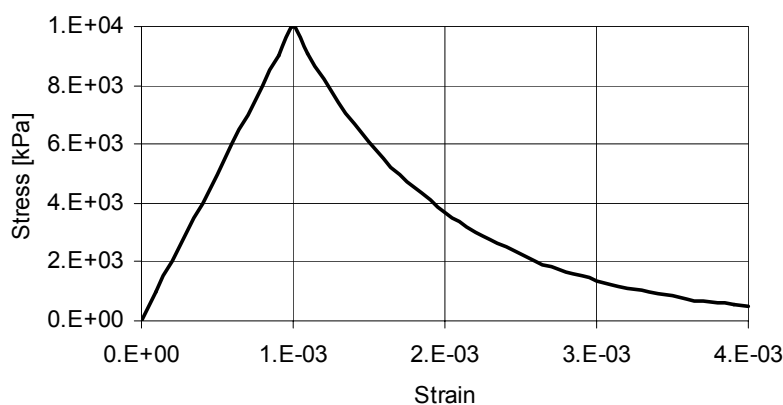


Figura 5.18. Respuesta en tracción uniaxial

En las Figuras 5.19 y 5.20 se muestra la variación de las componentes de tensión que se obtiene con un modelo de daño escalar explícito y con el modelo de daño direccional presentado para la historia de deformación indicada en la Figura 5.17. Es clara la diferencia entre la respuesta del modelo de daño escalar y el modelo de daño direccional. La anisotropía inducida por el daño es importante cuando la falla se produce por extensión multiaxial, como en los problemas de corte-tracción.



Las curvas obtenidas con este último modelo tienen el mismo aspecto que las obtenidas por Carol et al (2001a, 2001b), evidenciando inversión en el signo de las tensiones tangenciales y sustancial aumento de la tensión en la dirección y respecto del modelo de daño escalar.

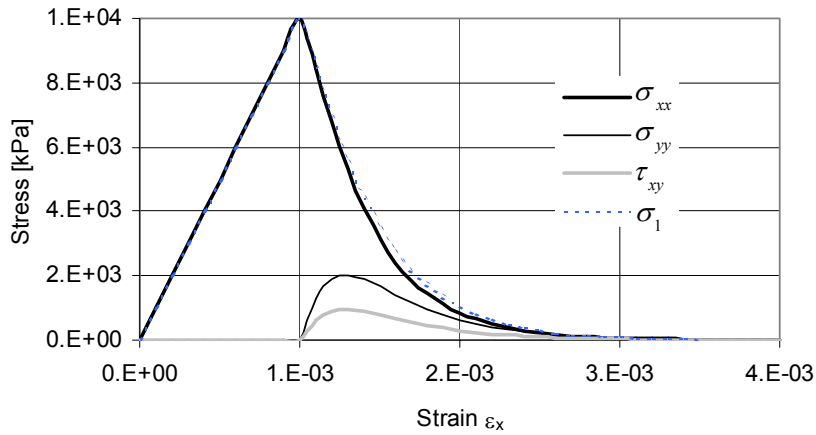


Figura 5.19. Evolución de las componentes de tensión en función de la deformación  $\varepsilon_x$  obtenida con un modelo de daño escalar

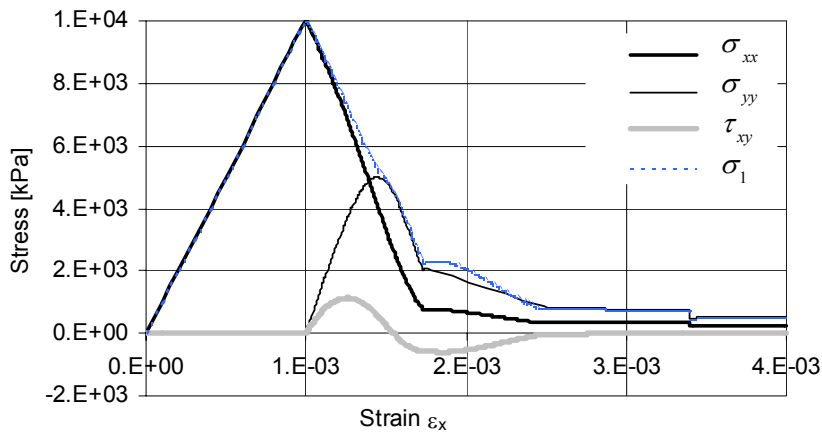


Figura 5.10. Evolución de las componentes de tensión en función de la deformación  $\varepsilon_x$  obtenida con el modelo de daño direccionado propuesto.

En la Figura 5.21 se muestra una comparación con los resultados obtenidos por Carol et al (2001a, 2001b) para el mismo ensayo, donde es claro que los resultados son similares.

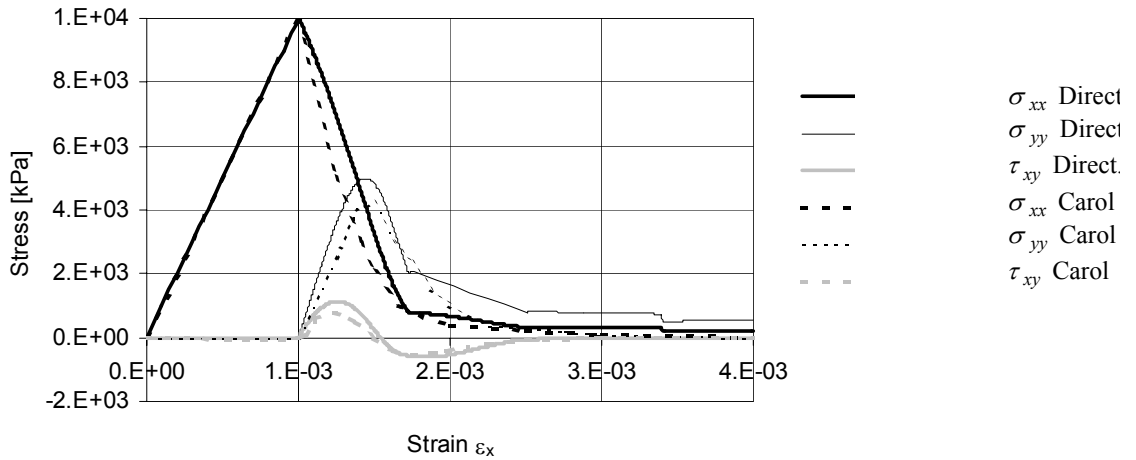


Figura 5.21 Comparación con los resultados obtenidos por Carol et al (2001a, 2001b)

En la Figura 5.22 se muestra la evolución de los ángulos entre el eje y la dirección de máxima tensión, deformación principal y daño principales obtenidas con el modelo de daño direccionado y su comparación con los correspondientes a un modelo de daño escalar. Es claro que, en contraste con lo que ocurre con el modelo de daño escalar que es isótropo, el modelo de daño direccionado conduce a direcciones principales de tensión no coincidentes con las direcciones principales de deformación.

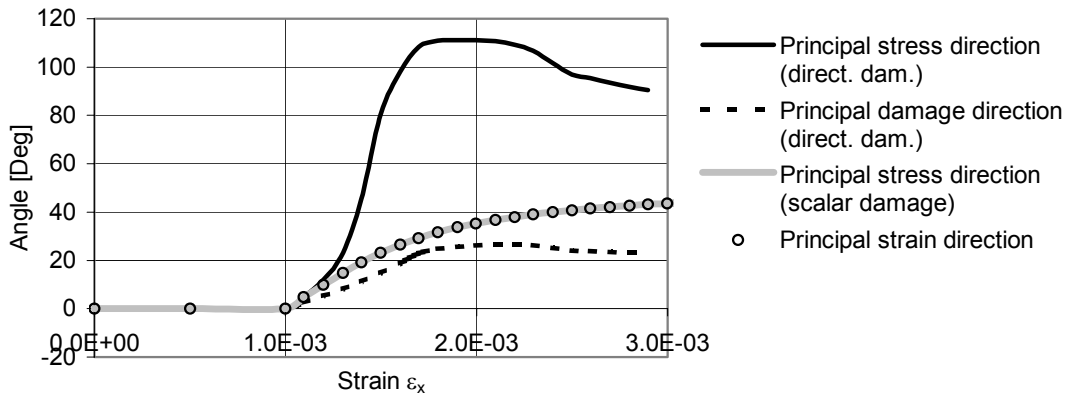


Figura 5.22 Evolución del ángulo entre el eje x y las direcciones principales de tensión, deformación y daño

La Figura 5.23 muestra la evolución de las componentes del tensor de daño de segundo orden  $m_{ij}$  y su comparación con el valor diagonal  $\sqrt{1-d}$  correspondiente al caso de daño escalar.

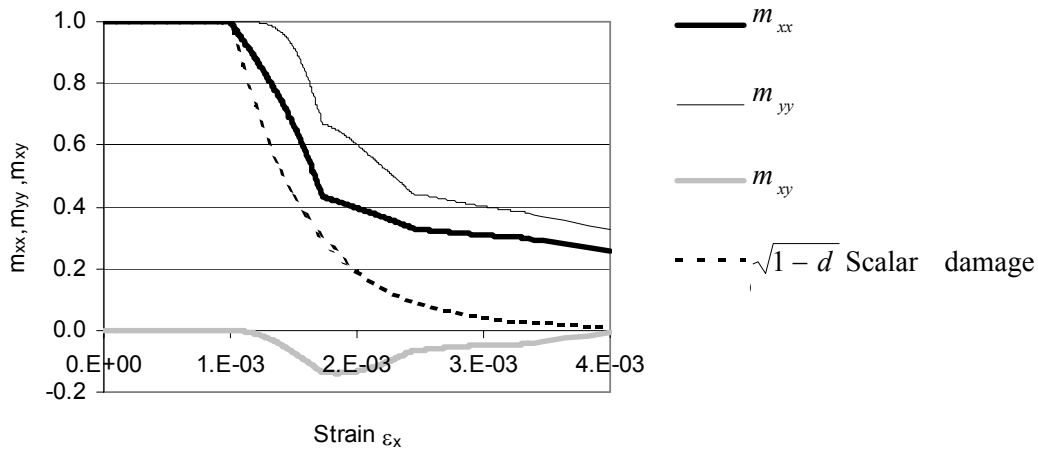


Figura 5.23 Evolución de las componentes del tensor de daño de segundo orden

### 5.3.12. Ejemplo de aplicación. Tracción combinada con corte en hormigón

Se presentan en este punto los resultados de la reproducción numérica de los ensayos de Van Mier et al (1991) que sometieron especímenes de hormigón como el de la Figura 5.24 a tracción, corte por tracción, corte por compresión y tracción combinada con corte. La Figura 5.25 ilustra la malla de elementos finitos utilizada. Para el material se utilizó un módulo de elasticidad inicial  $E_o=30000$  Mpa, coeficiente de Poisson  $\nu=0.2$ , umbral inicial de daño en compresión uniaxial  $\sigma_{co}=30$  Mpa, relación entre umbrales de daño en compresión uniaxial y tracción uniaxial  $n = \sigma_{co} / \sigma_{to} = 12.1$ , energía de fractura

$G_f = 0.1\text{kN/m}$ , acoplamiento direccional  $\beta = 0.4$  y ablandamiento exponencial.

La Figura 5.26 representa la fuerza de tracción  $P$  versus el desplazamiento relativo  $\delta$  para el ensayo de tracción uniaxial. Se presentan los resultados experimentales y los obtenidos con un modelo de daño escalar y con el modelo de daño direccionado. Es claro que los resultados obtenidos con ambos modelos son similares a los resultados experimentales.

En la Figura 5.27 se presentan los resultados correspondientes a los ensayos de corte. No se dispone de resultados experimentales para los ensayos de corte por tracción y los correspondientes a corte por compresión no llegan hasta la rotura total. Como en el caso de tracción, los resultados de los dos modelos de daño son similares a los experimentales.

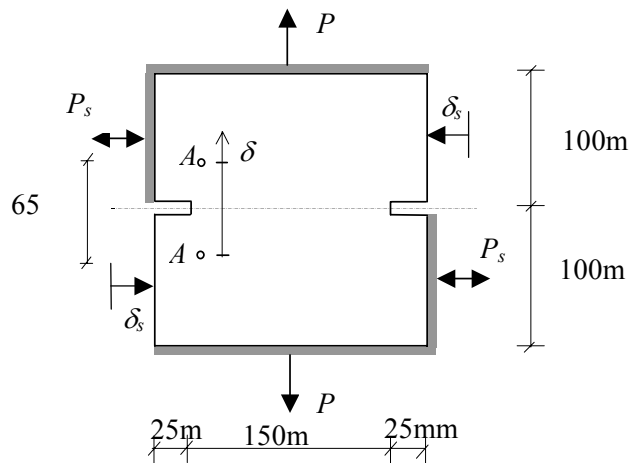


Figura 5.25. Especímenes ensayados por Van Maier et al

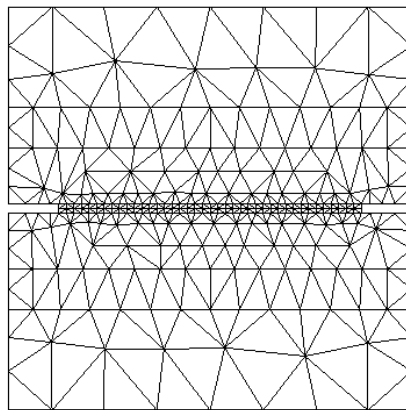


Figura 5.25 Malla de elementos finitos

Finalmente, se estudia la influencia de la fisuración previa por tracción en la resistencia al corte. Los especímenes son sometidos primero a tracción con control de desplazamientos hasta una determinada apertura de fisuras, y luego descargados hasta  $P=0$ . Seguidamente se les aplica una carga de corte en tracción manteniendo  $P=0$ . Esto permite que las fisuras puedan abrirse durante el corte.

La Figura 5.28 muestra la resistencia al corte como función de la apertura de fisura alcanzada en el ensayo de tracción previo, obtenida en los ensayos y con ambos modelos de daño comparados. Es claro que el modelo de daño escalar conduce a una caída abrupta de la resistencia al corte, proporcional a la caída de la resistencia a tracción alcanzada en el ensayo previo, mientras que el modelo de daño direccionado sigue aproximadamente la tendencia de los resultados experimentales.

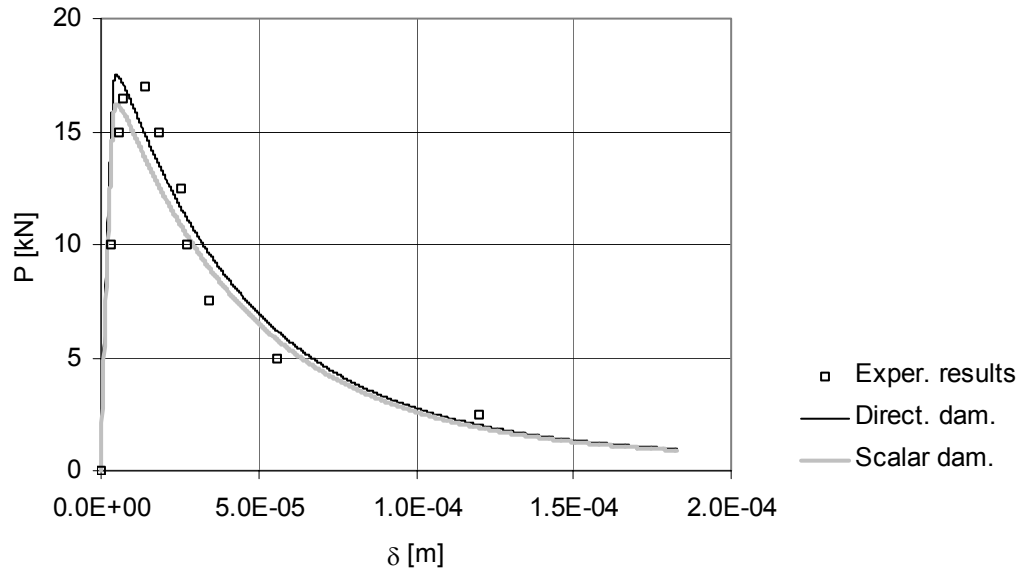


Figura 5.26. Ensayo de tracción uniaxial

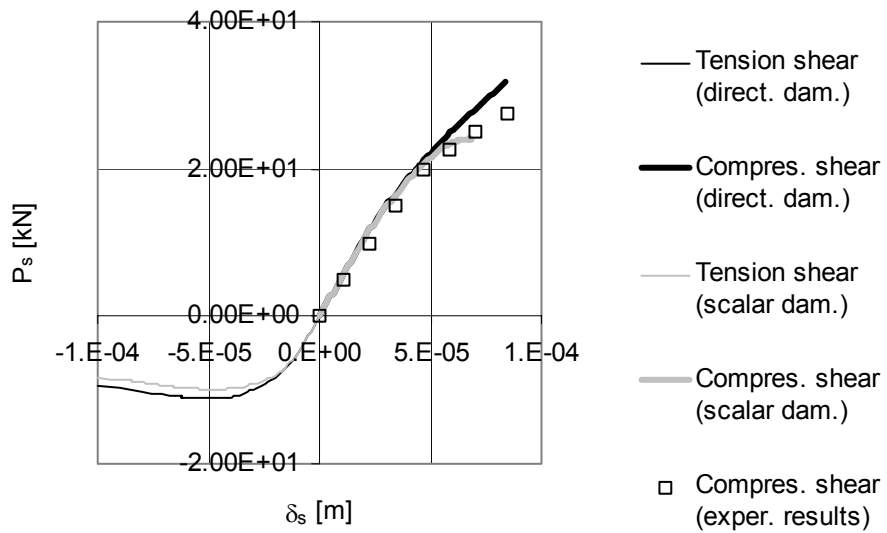


Figura 5.27 Ensayo de corte

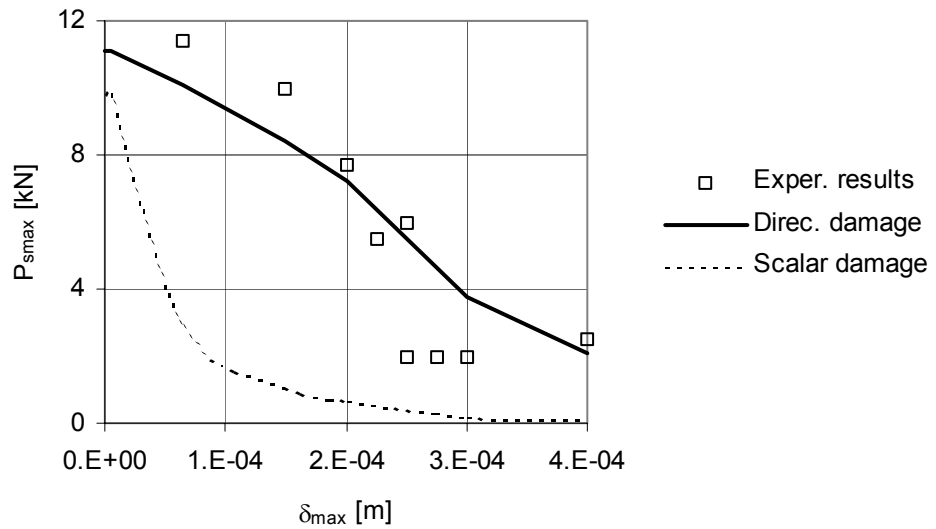


Figura 5.28 Efecto de la fisuración previa en la resistencia al corte

### 5.3.13. Comentarios finales

El modelo de daño direccionado está basado en la existencia de un espacio ficticio no dañado cuyas variables están relacionadas con las correspondientes al espacio dañado real a través de una transformación cinemática. Esto permite la utilización de programas computacionales originalmente desarrollados para simular deformaciones finitas y hace directa la extensión a materiales inicialmente anisótropos y daño anisótropo en grandes deformaciones.

La transformación de espacios definida está basada en una interpretación física del daño como una reducción del área efectiva, extendida al caso de daño direccionado. Esta interpretación física del daño permite definir el daño direccionado a través de un tensor de segundo orden de daño simétrico y conduce a un tensor de rigidez secante simétrico. El tensor de daño resulta similar a las simetrizaciones propuestas por otros autores (Carol et al 2001a, 2001b, Voyiadjis 2000).

Las ecuaciones básicas del modelo que definen el umbral de daño y su evolución fueron derivadas de la termodinámica de los procesos irreversibles.

La integración de las ecuaciones constitutivas resultante puede realizarse con un algoritmo de tipo retorno mapeado.

Los ejemplos de aplicación presentados muestran la capacidad del modelo para predecir daño direccionado, no sólo en problemas de carga proporcional sino también en problemas que involucren una marcada rotación de las direcciones principales de deformación. Los resultados obtenidos son similares a los presentados por otros autores a partir de modelos basados en hipótesis diferentes.



# 6. Modelos de daño

## unilateral

### 6.1. Introducción

El carácter unilateral del daño está relacionado con el hecho de que el daño, si bien es irreversible, puede estar activo o inactivo dependiendo de las condiciones de carga. En muchos materiales la reducción de la rigidez en tracción es debida al desarrollo de microfisuras y se ha confirmado experimentalmente que la reversión de la carga puede cerrar dichas fisuras, con la consiguiente recuperación de rigidez.

El comportamiento mecánico que puede ser descrito con un modelo de daño unilateral se ha esquematizado en la Figura 6.1.

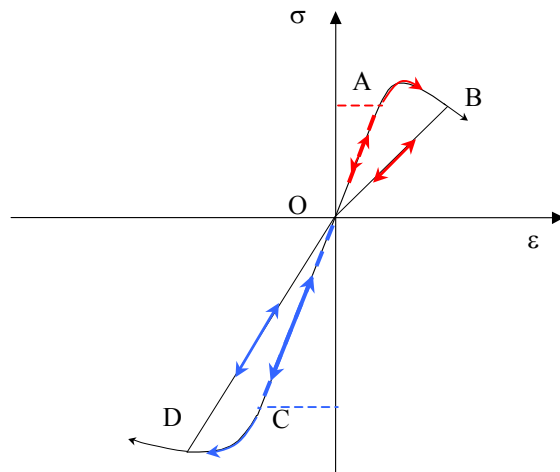


Figura 6.1. Esquema del comportamiento elástico en tracción-compresión con daño y una condición unilateral

- Las zonas OA, BO, OC, D0 corresponden a un comportamiento elástico, antes o después de ocurrido el daño.
- Las zonas AB y CD corresponden a la evolución del daño.
- La descarga después del proceso de daño es lineal elástica con una rigidez reducida.
- La condición unilateral aparece durante la descarga cuando  $\varepsilon = 0$  (o  $\sigma = 0$ )



- Cuando se carga en tracción, se descarga y se carga en compresión, se recupera la rigidez inicial, correspondiendo esto a la presencia de daño inactivo.

## **6.2. Condiciones que deben cumplir los modelos de daño unilateral**

### **6.2.1. Capacidad para simular simultáneamente daño unilateral anisótropo**

Chaboche (1992, 1993) revisó la capacidad de varias teorías, basadas en escalares, vectores, tensores de segundo y cuarto orden para modelar anisotropía y recuperación de rigidez en materiales frágiles inicialmente isotrópicos como el hormigón y concluyó que la mayoría de estos desarrollos eran incapaces de describir simultáneamente el carácter anisótropo del daño que está relacionado con la direccionalidad de la historia de carga pasada y el carácter unilateral de daño, correspondiente al posible cerrado de fisuras bajo cargas de compresión.

Un modelo de daño unilateral para materiales frágiles del tipo del hormigón debe tener capacidad para describir:

La diferencia en el proceso de daño bajo cargas de tracción y de compresión.

El cambio de rigidez elástica cuando las tensiones principales (o deformaciones) cambian de signo (condición de daño unilateral).

Es conveniente además que los modelos satisfagan dos condiciones adicionales: simetría de la matriz de flexibilidad y continuidad de la respuesta cuando se producen condiciones unilaterales.

### **6.2.2. Conservación de la energía (Carol 1996, Cormery 2002)**

Por otro lado, Carol (1996) remarcó que, debido a la naturaleza no disipativa del fenómeno de apertura y cerrado de microfisuras para un dado estado de daño, la formulación de la recuperación debía, de acuerdo a la hiperelasticidad, derivarse de un potencial bien definido de manera que la energía se conserve en ciclos cerrados de carga. Propuso una forma, basada en el cálculo de la disipación espuria para verificar el cumplimiento de esta condición y demostró que la mayoría de los modelos de daño unilateral encontrados en la bibliografía, basados en operadores de proyección, se comportan bien en el caso de daño escalar pero exhiben disipación espuria cuando son utilizados para simular daño anisótropo.

La conservación de la energía debe ser analizada para un dado estado de microfisuración e historias de carga que producen la apertura o cerrado de estas microfisuras sin producir fisuración adicional (daño adicional). Bajo estas condiciones, para carga no proporcional, se obtiene, en general, una respuesta no lineal debido al carácter unilateral del daño. Sin embargo, como el daño no se propaga, la energía debe conservarse en ciclos cerrados de carga. Carol (1996) propone la siguiente forma para calcular la disipación espuria para un ciclo de carga en modelos de daño unilateral:

$$\dot{\mathcal{E}}^{sp} = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} \Big|_{d=cte} - \dot{\Psi} \Big|_{d=cte} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \dot{C}_{ijkl}^{ac} \Big|_{(d=cte)} \varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \dot{E}_{ijkl}^{ac} \Big|_{(d=cte)} \sigma_{kl} \quad (6.1)$$

De esta manera la verificación de que  $\Psi$  es un potencial bien definido se reduce a verificar que  $\dot{\mathcal{E}}^{sp} \equiv 0$

A continuación se presentan algunos modelos de daño unilateral existentes en la bibliografía y se analizan estos aspectos.

### 6.3. Modelo de daño unilateral con variables escalares (Mazars and Pijaudier Cabot 1989)

Este modelo supone que el material es elástico frágil. Utiliza dos variables de daño  $D_t$  y  $D_c$  para tensiones de tracción y de compresión respectivamente. Para tener en cuenta la condición unilateral en las tensiones, se introduce una descomposición del tensor de tensiones en una parte positiva  $\sigma_{ij}^+$  y una parte negativa  $\sigma_{ij}^-$ , tales que  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^+ + \sigma_{ij}^-$ , definidas como sigue en las direcciones principales de tensión:

$$[\sigma^+] = \begin{bmatrix} \langle \sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad [\sigma^-] = - \begin{bmatrix} \langle -\sigma_1 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle -\sigma_2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle -\sigma_3 \rangle \end{bmatrix} \quad (6.2)$$

La energía libre complementaria se escribe como:

$$\bar{\Psi} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{E^o(1-D_t)} \left[ (1+\nu^o) \sigma_{ij}^+ \sigma_{ij}^+ - \nu^o \langle Tr(\sigma) \rangle^2 \right] + \frac{1}{E^o(1-D_c)} \left[ (1+\nu^o) \sigma_{ij}^- \sigma_{ij}^- - \nu^o \langle -Tr(\sigma) \rangle^2 \right] \right\} \quad (6.3)$$

De donde se obtiene la ley constitutiva secante como:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{1}{E^o(1-D_t)} \left[ (1+\nu^o) \sigma_{ij}^+ - \nu^o \langle Tr(\sigma) \rangle \delta_{ij} \right] + \frac{1}{E^o(1-D_c)} \left[ (1+\nu^o) \sigma_{ij}^- - \nu^o \langle -Tr(\sigma) \rangle \delta_{ij} \right] \quad (6.4)$$

Las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño están dadas por:

$$Y_t = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial D_t} \quad Y_c = \frac{\partial \bar{\Psi}}{\partial D_c} \quad (6.5)$$

De manera que la disipación debida al daño se escribe como:

$$\dot{\mathcal{E}}^d = Y_t \dot{D}_t + Y_c \dot{D}_c \quad (6.6)$$

La superficie de carga se expresa como un criterio doble:

$$\begin{aligned} g_t(\varepsilon_{ij}, D_t) &= Y_t - K_t(D_t) \leq 0 \\ g_c(\varepsilon_{ij}, D_c) &= Y_c - K_c(D_c) \leq 0 \end{aligned} \quad (6.7)$$

La figura 6.2. ilustra la forma de la superficie de carga en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$ . En la misma  $K'_t = 2E^o(1 - D_t)K_t$  y  $K'_c = 2E^o(1 - D_c)K_c$ .

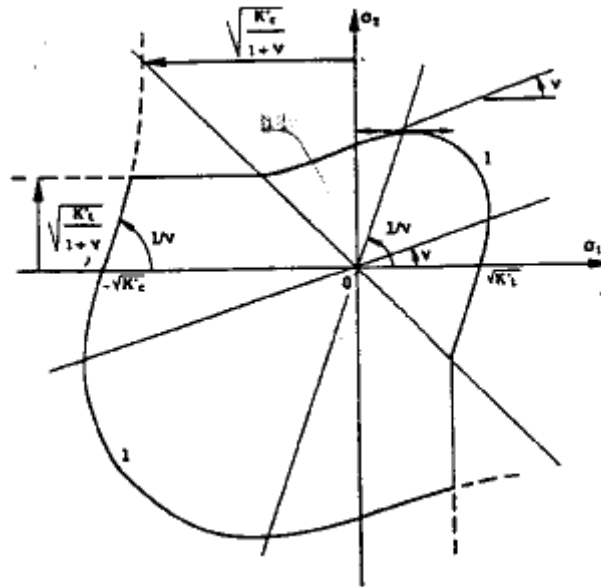


Figura 6.2. Superficie de carga para el modelo de daño unilateral con dos variables escalares en el espacio de tensiones principales  $\sigma_3 = 0$ .

Este modelo de daño no puede reproducir anisotropía inducida por daño. Sin embargo, es simple, conduce a un tensor de flexibilidad secante simétrico y garantiza la continuidad de la respuesta de deformación para cualquier historia de tensión. Tratándose de un modelo de daño isótropo no da lugar a la generación de energía espuria (Carol 1996).

El modelo de Oliver et al (Faría et al 1998) descrito en el capítulo 7 es también un modelo de desactivación del daño con dos variables escalares, basado en una descomposición espectral del tensor de tensiones, pero derivado a partir de la energía libre en lugar de la energía libre complementaria.

## 6.4. Modelo de Daño Anisótropo (Ju 1989)

Este modelo utiliza como variable interna un tensor de daño de cuarto orden. La particular elección realizada por Simo y Ju (1987a) es considerar al tensor de rigidez mismo como variable interna.

La densidad de energía libre se escribe entonces como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (6.8)$$

La expresión secante y las fuerzas termodinámicas conjugadas resultan:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad Y_{ijkl} = \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ijkl}} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl} \quad (6.9)$$

El efecto unilateral de apertura y cerrado de microfisuras se introduce a través de una descomposición espectral del tensor de deformaciones:

$$\varepsilon_{kl} = \sum_{i=1}^3 \varepsilon_i n_k^i n_l^i \quad (6.10)$$

Donde  $\varepsilon_i$  es la  $i$ -ésima deformación principal y  $n_k^i$ , en este caso, representa un vector en la dirección principal de deformación  $i$ .

Se definen los operadores de proyección espectral siguientes:

$$Q_{kl} = \sum_{i=1}^3 n_k^i n_l^i \quad Q_{kl}^+ = \sum_{i=1}^3 H(\varepsilon_i) n_k^i n_l^i \quad (6.11)$$

Donde  $H$  es la función escalón tal que:  $H(\varepsilon_i) = 1$  para  $\varepsilon_i > 0$  y  $H(\varepsilon_i) = 0$  para  $\varepsilon_i < 0$ .

El tensor de proyección positiva de cuarto orden se define como:

$$P_{ijkl}^+ = Q_{ia}^+ Q_{jb}^+ Q_{ka} Q_{lb} \quad (6.12)$$

De manera que:

$$\varepsilon_{ij}^+ = P_{ijkl}^+ \varepsilon_{kl} \quad (6.13)$$

Con esta notación, se define la pérdida del tensor de rigidez total como:

$$C_{ijkl}^d = C_{ijkl}^o - C_{ijkl} \quad (6.14)$$

Y la pérdida de rigidez activa y el tensor de rigidez activo como:

$$C_{ijkl}^{dact} = P_{ijrs}^+ C_{rspq}^d P_{pqkl}^+ \quad C_{ijkl}^{act} = C_{ijkl}^o - C_{ijkl}^{dact} \quad (6.15)$$

La relación tensión-deformación secante se expresa entonces como:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}^{act} \varepsilon_{kl} \quad (6.16)$$

$$C_{ijkl}^{act} = C_{ijkl}^o - P_{ijrs}^+ (C_{rspq}^o - C_{rspq}) P_{pqkl}^+ \quad (6.17)$$

La superficie de carga de daño está definida por la función :

$$g = G(Y_{ijkl}) - r \leq 0 \quad (6.18)$$

Donde  $r$  depende de la historia de carga. El proceso de daño está caracterizado por las siguientes ecuaciones de evolución irreversibles:

$$\dot{C}_{ijkl} = -\dot{\mu} \frac{\partial g}{\partial Y_{ijkl}} \quad (6.19)$$

Y las condiciones de carga/descarga están dadas por

$$\dot{\mu} \geq 0 \quad g \leq 0 \quad \dot{\mu}g = 0 \quad (6.20)$$

Para una dada historia de deformación el tensor de rigidez dañado hace máxima la disipación.

Para incluir adecuadamente el tensor  $Y_{ijkl}$  en la función de daño  $G$  se define una medida característica del daño  $\xi$  tal que:

$$\frac{\partial \xi}{\partial Y_{ijkl}} = P_{ijrs}^+ C_{rspq}^o P_{pqkl}^+ \quad (6.21)$$

Lo que lleva a

$$\xi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^+ C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^+ \quad (6.22)$$

Entonces la ecuación (6.18) se reescribe como:

$$g = \bar{G}(\xi) - r \leq 0 \quad (6.23)$$

Llamando  $H = \partial \bar{G} / \partial \xi$  y  $\dot{r} = \dot{\mu}H$ , se observa que  $\dot{r} = \dot{\xi}H$  en el caso de carga en daño y, entonces se obtiene  $\dot{\mu} = \dot{\xi}$  y la ecuación de evolución del tensor de rigidez secante resulta:

$$\dot{C}_{ijkl} = -\dot{\xi} H P_{ijrs}^+ C_{rspq}^o P_{pqkl}^+ \quad (6.24)$$

Se puede verificar que la disipación resulta siempre no negativa:

$$\Xi^d = -Tr\left(Y_{ijkl} \dot{C}_{klrs}\right) = \frac{1}{2} \dot{\xi} H \varepsilon_{rs}^+ C_{rspq}^o \varepsilon_{pq}^+ \geq 0 \quad (6.25)$$

Esta teoría es capaz de reproducir anisotropía inducida por daño en el caso en que los signos de las deformaciones principales son distintos. Sin embargo, en el caso en que todas las deformaciones principales son positivas, el tensor de proyección positiva de cuarto orden  $P_{ijkl}^+$  se reduce al tensor identidad de cuarto orden y la isotropía inicial del tensor secante se preserva. Esto hace que la anisotropía inducida por el modelo sea insuficiente.

Se puede verificar que el tensor de rigidez secante activo  $C_{ijkl}^{act}$  resulta siempre simétrico. Sin embargo, se observa una discontinuidad en la respuesta en tensiones cuando, por ejemplo,  $\varepsilon_2 > 0$  y  $\varepsilon_1$  cambia de signo.

La superficie de carga es continua y convexa en el espacio de deformaciones como se ilustra en la Figura 6.3. En dicha figura  $K^\pm = \left[ (1 + \nu^o)(1 - 2\nu^o) / E^o (1 - \nu^o) \right] r^\pm$  y  $G(\xi) = \xi$ .

Se puede introducir un segundo criterio de daño para cargas de compresión:

$$g^- = G^-(\xi^-) - r^- \leq 0 \tag{6.26}$$

De manera de poder escribir la evolución del daño como:

$$\dot{C}_{ijkl} = -\dot{\xi}^+ H^+ P_{ijrs}^+ C_{rspq}^o P_{pqkl}^+ - \dot{\xi}^- H^- P_{ijrs}^- C_{rspq}^o P_{pqkl}^- \tag{6.27}$$

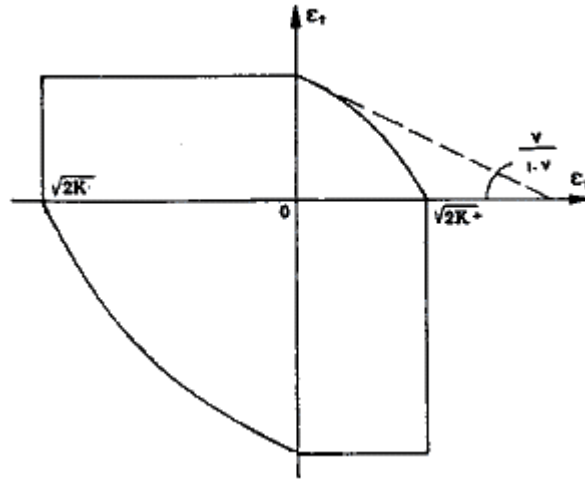


Figura 6.3. Superficie de carga en el espacio de deformaciones principales  $\varepsilon_3 = 0$  para el modelo de daño unilateral de Ju (1989)

Se puede probar que si se particulariza este modelo para el caso daño isótropo, la disipación espuria es nula. Sin embargo, en el caso general de daño anisótropo puede generar disipación espuria bajo ciertos caminos de tensión o deformación con rotación de las direcciones principales (Carol et al 1996).

## 6.5. Modelo de daño anisótropo y unilateral

(Chaboche 1995)

Chaboche propuso una condición unilateral para daño activo/pasivo. Si se combina esta condición con la ecuación de evolución del daño anisótropo, se obtiene una herramienta poderosa para describir anisotropía inducida por el daño en materiales inicialmente isótropos bajo historias de carga no proporcionales complejas.

### 6.5.1. Conceptos básicos

Supóngase que se conoce el comportamiento dañado actual para condiciones de daño totalmente activas, definido por el tensor de rigidez dañado:  $C_{ijkl}$  o el cambio respecto al tensor de rigidez original  $C_{ijkl}^d = C_{ijkl}^o - C_{ijkl}$

Considérese un vector unitario  $n_i$  en una dirección principal de daño. El daño se considera activo en esa dirección si la deformación normal  $\varepsilon_n = n_i \varepsilon_{ij} n_j$  asociada con esa

dirección es positiva. Si la deformación  $\varepsilon_n$  es negativa, el cambio  $C_{iiii}^d$  debe desaparecer.

Extendiendo este razonamiento a tres direcciones ortogonales correspondientes a las direcciones principales de daño, el tensor de rigidez activo se puede escribir como:

$$C_{klmn}^{ac} = C_{klmn} + \eta \sum_{i=1}^3 H[-Tr(P_{rstu}^i \varepsilon_{tu})] P_{klpq}^i (C_{pqvw}^o - C_{pqvw}) P_{vwmn}^i \quad (6.28)$$

Donde  $P_{klmn}^i = n_k^i n_l^i n_m^i n_n^i$ ,  $H$  es la función escalón y  $\eta$  es un coeficiente fenomenológico del material. Es fácil de verificar que en el caso en que  $\eta = 1$ , si se escribe el tensor de rigidez activo en las direcciones principales de daño, los términos son iguales al del tensor de rigidez secante  $C_{ijkl}^{act} = C_{ijkl}$ , salvo aquellos correspondientes a deformaciones normales negativas en los que el coeficiente es reemplazado por el del tensor de rigidez inicial  $C_{iiii}^{act} = C_{iiii}^o$ .

Una propiedad importante de la condición de unilateralidad así definida es que sólo afecta a los términos de la diagonal del tensor de rigidez. El hecho de que los términos fuera de la diagonal no resulten alterados bajo la condición unilateral de daño activo/pasivo es la clave para preservar la continuidad de las respuestas en tensión o deformación bajo cualquier historia de carga. El coeficiente material  $\eta$  que varía entre 0 y 1, permite describir el daño residual para condiciones de carga en compresión.

### 6.5.2. Direcciones principales de daño

En los desarrollos anteriores las direcciones  $n_j^i$ , llamadas “direcciones principales de daño” no están determinadas.

Si el modelo está escrito en el espacio de deformaciones principales, los  $n_j^i$  son coincidentes con las direcciones principales de deformación.

Otra forma natural de definir las direcciones  $n_j^i$  es usar las direcciones principales del tensor de daño de segundo orden.

En el caso de utilizar un tensor de daño de cuarto orden como en el modelo desarrollado por Chaboche, la definición no es tan simple desde el punto de vista matemático. Utilizando un razonamiento fenomenológico, se define como  $n_j^1$  la dirección que hace mínimo el módulo de Young efectivo en tracción uniaxial. La segunda dirección  $n_j^2$  se define como aquella que hace mínimo el mismo módulo en un plano ortogonal.

### 6.5.3. Comportamiento elástico activo

Se considera que el daño puede ser expresado a través de un tensor de cuarto orden  $D_{ijkl}$  simétrico. Este tensor describe el comportamiento del material bajo condiciones de carga totalmente activas.

En el caso en que todas las deformaciones principales sean positivas, el tensor elástico secante se expresa como:

$$C_{ijkl} = \frac{1}{2} \left[ (I_{ijrs} - D_{ijrs}) C_{rskl}^o + C_{ijrs}^o (I_{rskl} - D_{rskl}) \right] \quad (6.29)$$

La energía libre se escribe como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}^{act} \varepsilon_{kl} \quad (6.30)$$

De donde resulta:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}^{act} \varepsilon_{kl} \quad (6.31)$$

Y la fuerza conjugada asociada al tensor de daño  $D_{ijkl}$

$$Y_{ijkl} = -\frac{\partial \Psi}{\partial D_{ijkl}} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{pq} \frac{\partial C_{pqrs}^{act}}{\partial D_{ijkl}} \varepsilon_{rs} \quad (6.32)$$

#### 6.5.4. Superficie de carga

Se define el siguiente criterio de daño:

$$g(Y_{ijkl}, \varepsilon_{ij}, \delta) = y - r(\delta) = Tr(Q_{ijkl} Y_{klrs}) - r(\delta) \leq 0 \quad (6.33)$$

$Q_{ijkl}$  es un operador de cuarto orden que puede depender del estado de deformación actual y que, como se verá más adelante, indica la dirección de crecimiento del daño,  $\delta$  representa una medida escalar del daño y  $r(\delta)$  es el umbral de daño actual asociado a la misma.

Suponiendo la regla de normalidad para las ecuaciones de evolución del daño:

$$\dot{D}_{ijkl} = \dot{\mu} \frac{\partial g}{\partial Y_{ijkl}} = \dot{\mu} Q_{ijkl} \quad \dot{\delta} = -\dot{\mu} \frac{\partial g}{\partial r} = \dot{\mu} \Rightarrow \dot{D}_{ijkl} = \dot{\delta} Q_{ijkl} \quad (6.34)$$

Debe notarse que las relaciones de Kuhn Tucker son tenidas en cuenta mediante el hecho de que  $r$  es el máximo valor alcanzado en la historia pasada por  $y = Tr(Q_{ijkl} Y_{klrs})$ , esto significa que  $\dot{\delta} = 0$  si  $g < 0$  y, en caso contrario, se tiene  $\dot{\delta} > 0$ .

La disipación resulta:

$$\Xi^d = -\frac{\partial \Psi}{\partial D_{ijkl}} \dot{D}_{ijkl} = Tr(Y_{ijkl} \dot{D}_{klrs}) = Tr(Q_{ijkl} Y_{klrs}) \dot{\delta} = y \dot{\delta} \geq 0 \quad (6.35)$$



### 6.5.5. Dirección de crecimiento del daño

De acuerdo a la ecuación (6.34), la dirección de crecimiento del daño está dada por el tensor  $Q_{ijkl}$  que se define como:

$$Q_{ijkl}(\varepsilon_{rs}) = (1 - \xi)I_{ijkl} + \frac{\xi}{\varepsilon_{eq}^2} \Gamma_{ijkl}(\varepsilon_{rs}) \quad (6.36)$$

Donde  $\varepsilon_{eq}$  es una norma del tensor de deformaciones, por ejemplo su segundo invariante  $\varepsilon_{eq} = (\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij})^{1/2}$ . El parámetro  $\xi$  se utiliza para describir tanto una situación de anisotropía completa  $\xi = 1$  como el caso límite de daño isotropo  $\xi = 0$ . El tensor de cuarto orden  $\Gamma_{ijkl}$  se define en el espacio de deformaciones principales como:

$$\Gamma_{mnpq}(\varepsilon_{rs}) = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left\{ \left[ \Gamma_{mnpq}^* N_{rs}^{ij} \right] N_{pq}^{ij} \right\} H(\varepsilon^j) - c N_{mn}^{ij} N_{pq}^{ij} H(-\varepsilon^j) \left\{ H(\varepsilon^i) \varepsilon^i \varepsilon^j \right\} \quad (6.37)$$

$$N_{rs}^{ij} = n_r^i n_s^j \quad \Gamma_{ijkl}^* = \begin{bmatrix} a & b & b & 0 & 0 & 0 \\ b & a & b & 0 & 0 & 0 \\ b & b & a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2(a-b) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2(a-b) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2(a-b) \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

La forma de este tensor de constantes materiales se elige de manera de poder representar la evolución de dos estados de microfisuración de materiales frágiles (Ver Figura 6.4):

- Isotropía transversal plana, donde las microfisuras crecen aleatoriamente en planos perpendiculares a la máxima deformación positiva. Este caso es representativo de tracción uniaxial.
- Isotropía transversal cilíndrica, representativa de la compresión uniaxial, donde las fisuras están distribuidas aleatoriamente con sus normales perpendiculares a la dirección de la deformación de compresión.

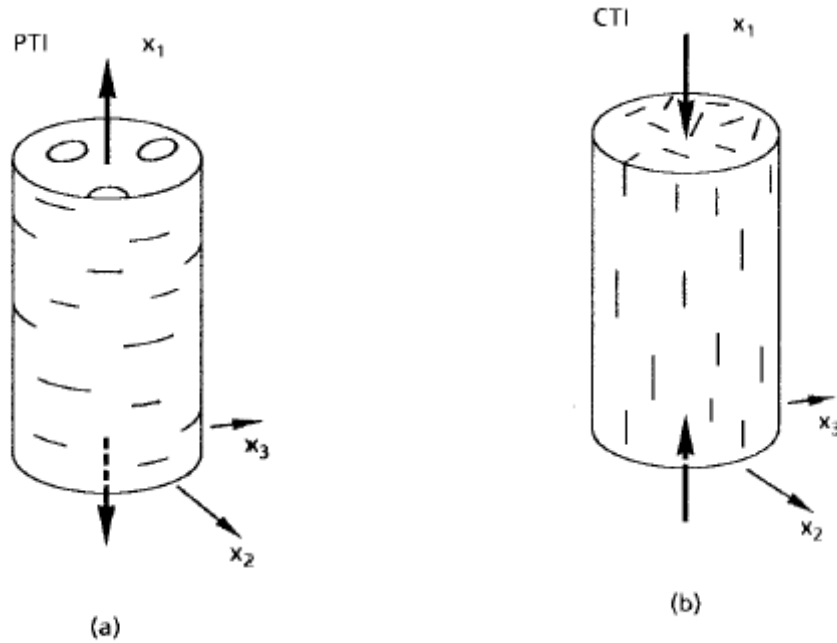


Figura 6.4 Dos disposiciones de fisuras. a) Isotropía transversal plana producida por  $\sigma_1 > 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$  b) Isotropía transversal cilíndrica  $\sigma_1 < 0, \sigma_2 = \sigma_3 = 0$

Para este modelo no se puede asegurar que la disipación espuria sea nula bajo cualquier historia de tensión. La disipación espuria correspondiente vale:

$$\Xi^{sp} = \eta \varepsilon_{ij} \sum_{\alpha=1}^3 H(\varepsilon^\alpha) P_{ijkl}^\alpha (C_{klrs} - C_{klrs}^0) \dot{P}_{rspq}^\alpha \varepsilon_{pq} \quad (6.39)$$

Como se verá más adelante, sólo se puede asegurar que la disipación espuria es nula cuando el cambio de rigidez  $(C_{klrs}^0 - C_{klrs})$  es ortótropo pero no en condiciones generales de anisotropía como las que podrían surgir de las ecuaciones de evolución del daño de este modelo para historias de carga no proporcionales.

## 6.6. Modelo de daño escalar unilateral

(Martín 2001)

### 6.6.1. Bases termodinámicas

Este modelo surge de una generalización del modelo de daño escalar explícito al que se incorpora la condición de daño unilateral propuesta por Chaboche (1995), extendida para considerar daño en compresión.

Para pequeñas deformaciones y problemas térmicamente estables, la energía libre se escribe como una función cuadrática:

$$\Psi = \frac{1}{2} \left[ \varepsilon_{ij} C_{ijkl}^{act} \varepsilon_{kl} \right] \quad (6.40)$$

donde  $C_{ijkl}^s(\beta) = f(\beta) C_{ijkl}^o$  es el tensor constitutivo secante afectado por la evolución de las variables internas de daño. Se propone para el mismo la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{act} = & (1 - d^- - d^+) C_{ijkl}^0 + \\ & + \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu})] P_{ijmn}^\alpha (d^- C_{mnpq}^0) P_{pqkl}^\alpha + \\ & + \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu})] P_{ijmn}^\alpha (d^+ C_{mnpq}^0) P_{pqkl}^\alpha \end{aligned} \quad (6.41)$$

Donde  $d^+$  es la variable interna de daño en tracción y  $d^-$  es la variable interna de daño en compresión, que pueden variar entre 0 para el material virgen, no dañado, hasta 1 para el material completamente dañado, en tracción y compresión respectivamente. Tomando  $d^- = 0$  se obtiene la forma propuesta por Chaboche para el tensor secante.

$C_{ijkl}^o$  es el tensor constitutivo del material virgen,  $\xi$  tiene en cuenta la influencia del daño en compresión en un proceso de tracción y  $\eta$  tiene en cuenta la influencia del daño en tracción en un proceso de compresión. Ambos son parámetros materiales que deben ser ajustados a partir de resultados experimentales de ensayos con reversión de deformaciones y cumplen las siguientes relaciones:  $0 \leq \xi \leq 1$  y  $0 \leq \eta \leq 1$

Los casos más simples corresponden a:

$\xi = \eta = 1$  en el que las dos formas de activación del daño están desacopladas.

$\xi = \eta = 0$  en el que las dos formas de activación de daño están totalmente acopladas y se recupera la forma del daño escalar:

$$C_{ijkl}^{act} = (1 - d^- - d^+) C_{ijkl}^o = (1 - d) C_{ijkl}^o \quad \text{con} \quad d = d^+ + d^- \quad (6.42)$$

$P_{ijkl}^\alpha$  es el operador proyección en la dirección del autovector  $n_i^\alpha$  del tensor de deformaciones  $\varepsilon_{ij}$  y  $H(x)$  es la función escalón.

De la expresión (6.41) se puede deducir que, en un proceso en el que todas las deformaciones principales son positivas,  $H[-tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu})] = 0$  y  $H[tr(P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu})] = 1$  y el tensor secante resulta :

$$C_{ijkl}^{act} = [1 - d^- (1 - \xi) - d^+] C_{ijkl}^o \quad (6.43)$$

donde se ve claramente el significado del parámetro  $\xi$ . Si se considera que el daño en compresión no afecta el comportamiento en tracción:  $\xi = 1$  y

$$C_{ijkl}^{act} = (1 - d^+) C_{ijkl}^o \quad (6.44)$$

Un análisis similar puede realizarse para el caso en que todas las deformaciones principales sean de compresión.

Si se satisfacen las ecuaciones conocidas como relaciones de Coleman, se asegura el cumplimiento de la desigualdad de Clausius-Duhem para un dado estado termodinámico:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl}^{act} \varepsilon_{kl} \quad (6.45)$$

La disipación mecánica puede escribirse como sigue:

$$\Xi = -\frac{\partial \Psi}{\partial d^+} \dot{d}^+ - \frac{\partial \Psi}{\partial d^-} \dot{d}^- \quad (6.46)$$

$$\begin{aligned} \Xi = & \Psi^o \dot{d}^+ - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ -tr \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha C_{mnpq}^o P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \dot{d}^+ + \\ & + \Psi^o \dot{d}^- - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ tr \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha C_{mnpq}^o P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \dot{d}^- \end{aligned} \quad (6.47)$$

$$\Xi = y^+ \dot{d}^+ + y^- \dot{d}^- \quad (6.48)$$

$$\begin{aligned} y^+ = & \Psi^o - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ -tr \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha C_{mnpq}^o P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \\ y^- = & \Psi^o - \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ tr \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{rs} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha C_{mnpq}^o P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \end{aligned} \quad (6.49)$$

Donde  $y^+$  e  $y^-$  son las variables conjugadas de las variables de daño  $d^+$  y  $d^-$  respectivamente. De acuerdo a la termodinámica, las reglas de evolución del daño y las funciones umbrales de daño debieran escribirse en el espacio de las fuerzas termodinámicas asociadas al daño. Sin embargo, a los efectos de formular dichas reglas cuando  $\xi \neq 1$  y  $\eta \neq 1$  y en el caso en que no se cumple  $\xi = \eta = 0$  que corresponde a daño isótropo sin desactivación, conviene hacer un cambio de variables:

$$D^+ = d^+ + (1 - \xi)d^- \quad D^- = d^- + (1 - \eta)d^+ \quad (6.50)$$

Estas nuevas variables tienen la particularidad de que cuando todas las deformaciones principales son positivas, en particular, por ejemplo, para un proceso de extensión uniaxial  $C_{ijkl}^{act} = (1 - D^+) C_{ijkl}^o$  y cuando todas las deformaciones principales son negativas, en particular, por ejemplo, para un proceso de acortamiento uniaxial  $C_{ijkl}^{act} = (1 - D^-) C_{ijkl}^o$

Además:

$$d^+ = \frac{D^+ - (1 - \xi)D^-}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \quad d^- = \frac{D^- - (1 - \eta)D^+}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \quad (6.51)$$

El módulo secante se escribe entonces como:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{act} = & C_{ijkl}^o - \frac{D^- - (1 - \eta)D^+}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \left\{ 1 - \xi \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ tr \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha \left( C_{mnpq}^o \right) P_{pqkl}^\alpha \right\} \\ & - \frac{D^+ - (1 - \xi)D^-}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \left\{ 1 - \eta \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ -tr \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha \left( C_{mnpq}^o \right) P_{pqkl}^\alpha \right\} \end{aligned} \quad (6.52)$$

Y la disipación se escribe como:

$$\dot{\Xi} = Y^+ \dot{D}^+ + Y^- \dot{D}^- \quad (6.53)$$

$$Y^+ = \frac{1}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \left\{ \Psi^o - \frac{\eta}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ -\text{tr} \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha \left( C_{mnpq}^o \right) P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \right\} \\ - \frac{1 - \eta}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \left\{ \Psi^o - \frac{\xi}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ \text{tr} \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha \left( C_{mnpq}^o \right) P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \right\} \quad (6.54)$$

$$Y^- = \frac{1}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \left\{ \Psi^o - \frac{\xi}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ \text{tr} \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha \left( C_{mnpq}^o \right) P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \right\} \\ - \frac{1 - \xi}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)} \left\{ \Psi^o - \frac{\eta}{2} \varepsilon_{ij} \left\{ \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ -\text{tr} \left( P_{rstu}^\alpha \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^\alpha \left( C_{mnpq}^o \right) P_{pqkl}^\alpha \right\} \varepsilon_{kl} \right\} \quad (6.55)$$

Cuando  $\xi = \eta = 1$ ,  $D^+ = d^+$  y  $D^- = d^-$

### 6.6.2. Función de carga

El umbral de daño se describe mediante una función de daño  $G^d$  como sigue:

$$\bar{g}^+(\bar{\tau}^+, r^+) := G^+(\bar{\tau}^+) - G^+(r^+) \leq 0 \quad (6.56)$$

$$\bar{g}^-(\bar{\tau}^-, r^-) := G^-(\bar{\tau}^-) - G^-(r^-) \leq 0 \quad (6.57)$$

$$\bar{\tau}^+ = f(Y^+) \quad \bar{\tau}^- = f(Y^-) \quad (6.58)$$

Para definir las funciones indicadas en las ecuaciones (6.58) se pueden utilizar cualquiera de las formas vistas en los modelos de daño escalar explícito.

### 6.6.3. Evolución del daño

La evolución de las variables de daño se escribe como:

$$D^+ = G^+(\bar{\tau}^+) \quad D^- = G^-(\bar{\tau}^-) \quad (6.59)$$

Y los umbrales de daño se actualizan como:

$$r^+ = \max \left\{ r_o^+, \max_{s \in (0,t)} \bar{\tau}_s^+ \right\} \quad r^- = \max \left\{ r_o^-, \max_{s \in (0,t)} \bar{\tau}_s^- \right\} \quad (6.60)$$

### 6.6.4. Disipación Espuria

La condición de disipación espuria señalada por Carol (1996) puede ser analizada para un dado estado de microfisuración e historias de carga que producen la apertura o cerrado de estas microfisuras sin producir fisuración adicional. En el modelo de daño unilateral propuesto esto corresponde a historias de tensión o deformación que no alcanzan la superficie de carga en daño descrita por la ecuación (6.56) y (6.57). Bajo estas condiciones, para carga no proporcional, se obtiene, en general, una respuesta no lineal debido al carácter unilateral del daño. Sin embargo, como el daño no se propaga,

la energía debe conservarse en ciclos cerrados de carga. Para calcular la disipación espuria  $\Xi^{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \dot{C}_{ijkl}^{act} \Big|_{(d=cte)} \varepsilon_{kl}$  hace falta encontrar  $\dot{C}_{ijkl}^{act} \Big|_{(d=cte)}$

Para el modelo propuesto resulta:

$$\begin{aligned} \dot{C}_{ijkl}^{act} \Big|_{(d=cte)} &= 2\xi \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ \text{tr} \left( P_{rstu}^{\alpha} \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^{\alpha} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{\alpha} + \\ &+ 2\eta \sum_{\alpha=1}^3 H \left[ -\text{tr} \left( P_{rstu}^{\alpha} \varepsilon_{tu} \right) \right] P_{ijmn}^{\alpha} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{\alpha} \end{aligned} \quad (6.61)$$

Se analizan las siguientes situaciones:

a).-  $\varepsilon^{(1)} > 0; \varepsilon^{(2)} \leq 0; \varepsilon^{(3)} \leq 0$

$$\Xi^{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\xi P_{ijmn}^{(1)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\eta P_{ijmn}^{(2)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\eta P_{ijmn}^{(3)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \varepsilon_{kl}$$

b).-  $\varepsilon^{(1)} > 0; \varepsilon^{(2)} > 0; \varepsilon^{(3)} \leq 0$

$$\Xi^{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\xi P_{ijmn}^{(1)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\xi P_{ijmn}^{(2)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\eta P_{ijmn}^{(3)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \varepsilon_{kl}$$

c).-  $\varepsilon^{(1)} > 0; \varepsilon^{(2)} > 0; \varepsilon^{(3)} > 0$

$$\Xi^{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\xi P_{ijmn}^{(1)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\xi P_{ijmn}^{(2)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\xi P_{ijmn}^{(3)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \varepsilon_{kl}$$

d).-  $\varepsilon^{(1)} \leq 0; \varepsilon^{(2)} \leq 0; \varepsilon^{(3)} \leq 0$

$$\Xi^{sp} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\eta P_{ijmn}^{(1)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(1)} + 2\eta P_{ijmn}^{(2)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(2)} + 2\eta P_{ijmn}^{(3)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \dot{P}_{pqkl}^{(3)} \right] \varepsilon_{kl}$$

En el caso de isotropía inicial, el tensor de rigidez elástico no dañado, es:

$$C_{mnpq}^o = \lambda^o \delta_{mn} \delta_{pq} + \mu^o \left( \delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np} \right) \quad (6.62)$$

donde  $\lambda^o$  y  $\mu^o$  son las constantes de Lamé.

Teniendo en cuenta que

$$\text{tr} \left( P_{ijkl}^s \varepsilon_{kl} \right) = P_{iikl}^s \varepsilon_{kl} = \varepsilon^s \quad (6.63)$$

$$\dot{n}_k^{\alpha} n_l^{\alpha} \varepsilon_{kl} = 0, \quad n_k^{\alpha} n_l^{\alpha} \varepsilon_{kl} = \varepsilon^{\alpha} \quad \text{y} \quad \dot{n}_k n_k = 0$$

Se analiza el caso a):

$$\begin{aligned} \Xi^{sp} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\xi n_i^{(1)} n_j^{(1)} n_m^{(1)} n_n^{(1)} \left( d^{-} C_{mnpq}^o \right) \left( \dot{n}_p^{(1)} n_q^{(1)} n_k^{(1)} n_l^{(1)} + n_p^{(1)} \dot{n}_q^{(1)} n_k^{(1)} n_l^{(1)} + n_p^{(1)} n_q^{(1)} \dot{n}_k^{(1)} n_l^{(1)} + n_p^{(1)} n_q^{(1)} n_k^{(1)} \dot{n}_l^{(1)} \right) \right] \varepsilon_{kl} + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\eta n_i^{(2)} n_j^{(2)} n_m^{(2)} n_n^{(2)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \left( \dot{n}_p^{(2)} n_q^{(2)} n_k^{(2)} n_l^{(2)} + n_p^{(2)} \dot{n}_q^{(2)} n_k^{(2)} n_l^{(2)} + n_p^{(2)} n_q^{(2)} \dot{n}_k^{(2)} n_l^{(2)} + n_p^{(2)} n_q^{(2)} n_k^{(2)} \dot{n}_l^{(2)} \right) \right] \varepsilon_{kl} + \\ &+ \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} \left[ 2\eta n_i^{(3)} n_j^{(3)} n_m^{(3)} n_n^{(3)} \left( d^{+} C_{mnpq}^o \right) \left( \dot{n}_p^{(3)} n_q^{(3)} n_k^{(3)} n_l^{(3)} + n_p^{(3)} \dot{n}_q^{(3)} n_k^{(3)} n_l^{(3)} + n_p^{(3)} n_q^{(3)} \dot{n}_k^{(3)} n_l^{(3)} + n_p^{(3)} n_q^{(3)} n_k^{(3)} \dot{n}_l^{(3)} \right) \right] \varepsilon_{kl} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Xi^{sp} &= \left[ \xi d^{-} \left[ \varepsilon^{(1)} \right]^2 n_m^{(1)} n_n^{(1)} \left( C_{mnpq}^o \right) \left( \dot{n}_p^{(1)} n_q^{(1)} + n_p^{(1)} \dot{n}_q^{(1)} \right) \right] + \\ &+ \left[ \eta d^{+} \left[ \varepsilon^{(2)} \right]^2 n_m^{(2)} n_n^{(2)} \left( C_{mnpq}^o \right) \left( \dot{n}_p^{(2)} n_q^{(2)} + n_p^{(2)} \dot{n}_q^{(2)} \right) \right] + \\ &+ \left[ \eta d^{+} \left[ \varepsilon^{(3)} \right]^2 n_m^{(3)} n_n^{(3)} \left( C_{mnpq}^o \right) \left( \dot{n}_p^{(3)} n_q^{(3)} + n_p^{(3)} \dot{n}_q^{(3)} \right) \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{d}^{sp} &= \left[ \xi d^- [\varepsilon^{(1)}]^2 n_m^{(1)} n_n^{(1)} (2\lambda \delta_{mn} \dot{n}_p^{(1)} n_p^{(1)} + 2\mu \dot{n}_m^{(1)} n_n^{(1)}) \right] + \\ &+ \left[ \eta d^+ [\varepsilon^{(2)}]^2 n_m^{(2)} n_n^{(2)} (2\lambda \delta_{mn} \dot{n}_p^{(2)} n_p^{(2)} + 2\mu \dot{n}_m^{(2)} n_n^{(2)}) \right] + \\ &+ \left[ \eta d^+ [\varepsilon^{(3)}]^2 n_m^{(3)} n_n^{(3)} (2\lambda \delta_{mn} \dot{n}_p^{(3)} n_p^{(3)} + 2\mu \dot{n}_m^{(3)} n_n^{(3)}) \right] \\ \dot{d}^{sp} &= \left[ \xi d^- [\varepsilon^{(1)}]^2 n_m^{(1)} n_n^{(1)} 2\mu \dot{n}_m^{(1)} n_n^{(1)} \right] + \left[ \eta d^+ [\varepsilon^{(2)}]^2 n_m^{(2)} n_n^{(2)} 2\mu \dot{n}_m^{(2)} n_n^{(2)} \right] + \left[ \eta d^+ [\varepsilon^{(3)}]^2 n_m^{(3)} n_n^{(3)} 2\mu \dot{n}_m^{(3)} n_n^{(3)} \right] \end{aligned}$$

Resulta  $\Xi^{sp} = 0$  y de la misma forma se puede probar que la disipación espuria es nula en los casos b, c y d correspondientes a otros signos de las deformaciones principales. Se puede demostrar que en el caso de ortotropía elástica se llega a idénticas conclusiones.

En modelos de este tipo, la disipación espuria depende de las condiciones de anisotropía del cambio del tensor elástico bajo condiciones totalmente activas  $C_{ijkl}^d = C_{ijkl}^o - C_{ijkl}$  que en el caso descrito es isótropo pero no así en el caso de modelos de daño anisótropo donde no es posible asegurar que la disipación espuria sea nula para historias de deformación con rotación de las direcciones principales de deformación.

### 6.6.5. Simetría del tensor secante y continuidad de los campos de tensiones y deformaciones para condiciones unilaterales.

Entre otras condiciones que debe cumplir un modelo de daño unilateral para materiales inicialmente isótropos, es deseable que:

- El tensor de rigidez secante sea simétrico
- Los campos de tensión (deformación) sean continuos para condiciones unilaterales

Reemplazando en la expresión del tensor de rigidez no dañado (6.62) para el caso isótropo en la expresión del tensor de rigidez secante (6.41) resulta:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{act} &= (1 - d^- - d^+) \left[ \lambda^o \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^o (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] + \\ &+ (\lambda^o + 2\mu^o) \left\{ \xi d^- \sum_{\alpha=1}^3 H(\varepsilon^\alpha) \left( n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha \right) + \eta d^+ \sum_{\alpha=1}^3 H(-\varepsilon^\alpha) \left( n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha \right) \right\} \end{aligned} \quad (6.63)$$

Si se analiza el factor  $(n_i^\alpha n_j^\alpha n_k^\alpha n_l^\alpha)$  para distintas situaciones, se puede ver que el mismo es distinto de cero únicamente cuando:  $i = j = k = l$ .

Por lo tanto se observa que los valores que se encuentran fuera de diagonal principal sólo conservan el primer término que es simétrico. En consecuencia, el tensor de rigidez secante descrito en ec.(6.41) es simétrico.

Para analizar la continuidad del campo de tensiones bajo condiciones unilaterales se analiza la siguiente situaciones:

i.-  $\varepsilon^{(1)} \leq 0; \varepsilon^{(2)} > 0; \varepsilon^{(3)} = 0$  Cuando  $\varepsilon^{(1)} \rightarrow 0$  Resulta:

$$\sigma_{ij} = \left\{ (1 - d^- - d^+) \left[ \lambda^o \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^o (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right] + (\lambda^o + 2\mu^o) \eta d^+ \left( n_i^{(2)} n_j^{(2)} n_k^{(2)} n_l^{(2)} \right) \right\} \varepsilon_{kl}$$

ii.-  $\varepsilon^{(1)} > 0; \varepsilon^{(2)} > 0; \varepsilon^{(3)} = 0$  Cuando  $\varepsilon^{(1)} \rightarrow 0$  Resulta:

$$\sigma_{ij} = \left\{ (1 - d^- - d^+) \left( \lambda^o \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu^o (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \right) + (\lambda^o + 2\mu^o) \eta d^+ (n_i^{(2)} n_j^{(2)} n_k^{(2)} n_l^{(2)}) \right\} \varepsilon_{kl}.$$

Las tensiones calculadas para las situaciones i y ii resultan idénticas, lo que demuestra la continuidad del campo de tensiones cuando  $\varepsilon^{(1)}$  cambia de signo. De la misma forma se puede demostrar que la continuidad del tensor de tensiones se mantiene para cualquier otro cambio de signo de las deformaciones principales.

### 6.6.6. Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Predictor elástico

$$d^{+n} = d^{+(n-1)} \quad r^{+n} = r^{+(n-1)}$$

$$d^{-n} = d^{-(n-1)} \quad r^{-n} = r^{-(n-1)}$$

4) Cambio de variables:  $D^{+n} = d^{+n} + (1 - \xi)d^{-n}$        $D^{-n} = d^{-n} + (1 - \eta)d^{+n}$

5) Evaluación de las fuerza termodinámica conjugadas de las variables de daño:  $Y^{+n}$  y  $Y^{-n}$

6) Evaluación de las deformaciones equivalentes:  $\bar{\tau}^{+n} = \bar{\tau}^+(Y^{+n})$ ,  $\bar{\tau}^{-n} = \bar{\tau}^-(Y^{-n})$

7) Verificación del criterio de daño +

$$\text{Si } g(\bar{\tau}^{+n}, r^{+n}) \leq 0 \quad \rightarrow (9)$$

8) Evolución del daño. Evaluación de la variable de daño:  $D^{+n} = G(\bar{\tau}^{+n})$

9) Verificación del criterio de daño +

$$\text{Si } g(\bar{\tau}^{-n}, r^{-n}) \leq 0 \quad \rightarrow (11)$$

10) Evolución del daño. Evaluación de la variable de daño:  $D^{-n} = G(\bar{\tau}^{-n})$

11) Cambio de variables:  $\Delta d^{+n} = d^{+n} - \frac{D^{+n} - (1 - \xi)D^{-n}}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)}$ ,  $\Delta d^{-n} = d^{-n} - \frac{D^{-n} - (1 - \eta)D^{+n}}{1 - (1 - \xi)(1 - \eta)}$

12) Actualización de los umbrales de daño:  $d^{+n} = d^{+n} + \langle \Delta d^{+n} \rangle$ ;  $d^{-n} = d^{-n} + \langle \Delta d^{-n} \rangle$

13) Actualización de los umbrales de daño:

$$D^{+n} = d^{+n} + (1 - \xi)d^{-n} \quad r^{+n} = \max[\bar{\tau}^{+n}, G^{+1}(D^{+n})]$$

$$D^{-n} = d^{-n} + (1 - \eta)d^{+n} \quad r^{-n} = \max[\bar{\tau}^{-n}, G^{-1}(D^{-n})]$$

14) Cálculo del ensor de rigidez secante activo:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^{actn} &= (1 - d^{-n} - d^{+n}) C_{ijkl}^0 + \\ &+ \xi \sum_{\alpha=1}^3 H[tr(P_{rstu}^{cn} \varepsilon_{tu}^n)] P_{ijmn}^{cn} (d^{-n} C_{mnpq}^0) P_{pqkl}^{cn} + \\ &+ \eta \sum_{\alpha=1}^3 H[-tr(P_{rstu}^{cn} \varepsilon_{tu}^n)] P_{ijmn}^{\alpha} (d^{+n} C_{mnpq}^0) P_{pqkl}^{\alpha} \end{aligned}$$



15) Actualización del tensor de tensiones

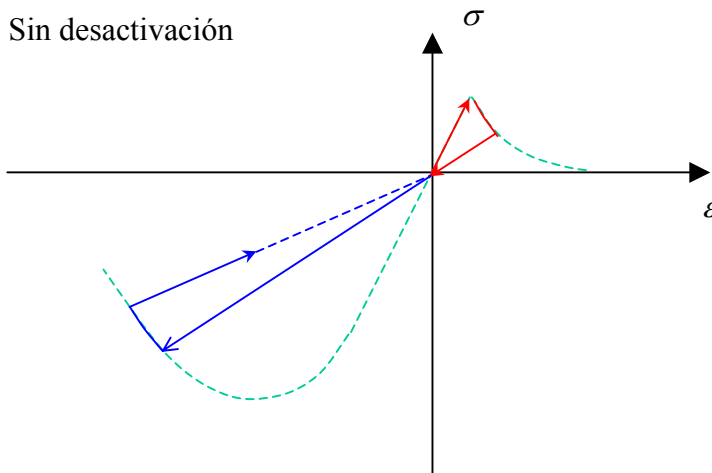
$$\sigma_{ij}^n = C_{ijkl}^{actn} \varepsilon_{kl}^n$$

16) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

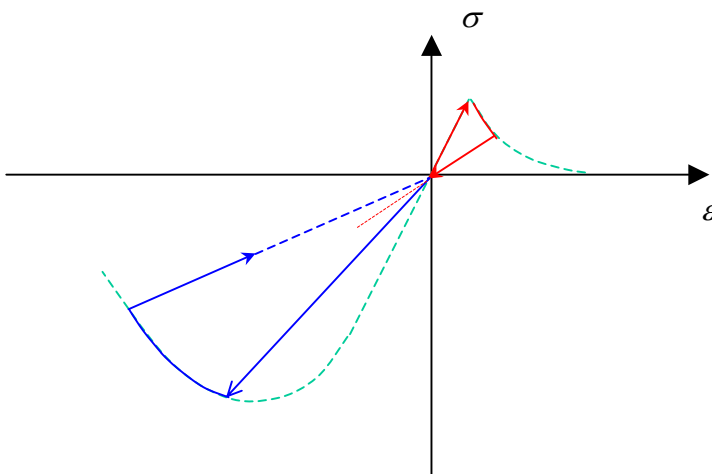
### 6.6.7. Ejemplo ilustrativo

En la Figura 6.5 se presentan las curvas tensión – deformación obtenidas para un material cargado inicialmente en extensión uniaxial hasta producir cierto grado de daño, descargado y cargado luego en contracción más allá del umbral de daño. Se analizan tres casos: a)  $\xi = \eta = 0$  (no tiene en cuenta el carácter unilateral del daño), b)  $\xi = \eta = 0.5$  y c)  $\xi = \eta = 1$ . Se observa que al invertir el sentido de la deformación, en el caso a) no se recupera la rigidez inicial, en el caso b) se recupera, en parte, la rigidez inicial y en el caso c) se recupera la rigidez inicial. También se observa que al incurrir en daño en un sentido, se modifica el umbral de daño en el sentido opuesto. Esa modificación depende también de los valores adoptados para  $\xi$  y  $\eta$ .

a)  $\xi = \eta = 0$  Sin desactivación



b)  $\xi = \eta = 0.5$  Desactivación parcial



c)  $\xi = \eta = 1$  Desactivación total

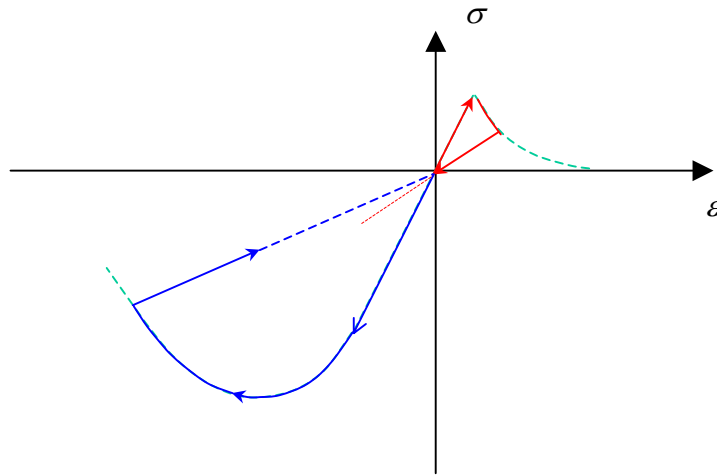


Figura 6.5 Curvas tensión-deformación para historias de carga uniaxiales con reversión del sentido de la carga



# 7. Modelos de daño

## viscoso

### 7.1. Introducción

Las ecuaciones constitutivas dependientes del tiempo son importantes en el análisis dinámico transitorio de estructuras con altas velocidades de deformación, como problemas de impacto o explosiones. Dos hechos motivan la introducción de la dependencia de la velocidad en los modelos constitutivos.

En primer lugar, los estudios experimentales muestran que la resistencia y la respuesta en endurecimiento/ablandamiento de muchos materiales resultan significativamente influenciadas cuando la velocidad de deformación es superior a  $0.1s^{-1}$ . La resistencias a tracción y a compresión aumentan con la velocidad de deformación y el módulo de blandamiento disminuye cuando aumenta la velocidad de deformación. Este efecto no puede ser capturado por relaciones constitutivas independientes del tiempo. Más allá, las variadas respuestas del material difícilmente puedan ser reproducidas mediante un comportamiento viscoelástico. El módulo elástico del hormigón resulta también influenciado por la velocidad de carga, pero el efecto más importante se produce en la zona no lineal de la respuesta del material, una vez que comienzan a desarrollarse las microfisuras y fisuras.

Por otro lado, el análisis de la falla de estructuras realizado con modelos independientes del tiempo lleva a la aparición de dificultades debido a la no asociatividad de las ecuaciones de evolución pero también debido a la pérdida de la condición de definido positivo del tensor de rigidez tangente denominada blandamiento. El blandamiento es una fuente de grandes problemas como la dependencia de la malla de elementos finitos, efectos de alineamiento con la malla y falla sin disipación de energía. A raíz del blandamiento, que se produce cuando la rigidez material tangente deja de ser definida positiva, la naturaleza de las ecuaciones que gobiernan el problema cambia y el mismo se vuelve mal condicionado.

En el caso de las ecuaciones diferenciales de equilibrio estático, las mismas dejan de ser elípticas. La pérdida de elipticidad corresponde al caso en el que el número de soluciones linealmente independientes es infinito o que estas soluciones no dependen continuamente de los datos.

En problemas dinámicos, las ecuaciones diferenciales de movimiento son inicialmente hiperbólicas y pueden transformarse en parabólicas o elípticas en presencia de blandamiento. Nuevamente el problema de valores iniciales se vuelve mal condicionado y la velocidad de onda se hace imaginaria.

Muchos autores han demostrado que el mal condicionamiento del problema debido al ablandamiento se puede eliminar incluyendo adecuadamente en los modelos constitutivos la dependencia de la velocidad de deformación. De esta manera se asegura que las ecuaciones de movimiento permanezcan hiperbólicas durante el ablandamiento.

En resumen, la introducción de la dependencia de la velocidad de deformación en los modelos de daño, lo mismo que en los modelos elastoplásticos, está motivada experimentalmente pero además resulta una forma elegante de evitar el mal condicionamiento cuando comienza la localización de deformaciones en problemas dinámicos y es por eso que normalmente se denomina “regularización viscosa”.

La dependencia de la velocidad de deformación se ha incorporado con frecuencia en modelos basados en la teoría de la plasticidad, dando lugar a los modelos viscoplásticos. En estos modelos la parte elástica del material no resulta afectada por el daño ni por la fisuración. Pero también se han propuesto numerosos modelos en que los efectos de la velocidad de deformación son introducidos en la fisuración o el daño.

## 7.2. Localización del daño e inestabilidad

El daño, como cualquier otro proceso de ablandamiento, puede inducir localización de deformaciones como es el caso de las bandas de corte plásticas en la plasticidad. Este es el comienzo del proceso de falla debido a la iniciación de mesofisuras que transforman un fenómeno de volumen en una separación de superficies.

Considérese un elemento representativo de volumen cargado mediante una tensión uniforme  $\sigma_{ij}$  que induce una deformación  $\varepsilon_{ij}$  ya sea elástica o plástica y un daño  $D$ . Sea  $u_i$  el desplazamiento. Se busca ahora la condición para la existencia de una discontinuidad en el campo de deformaciones o en la velocidad de deformación  $\dot{\varepsilon}_{ij}$  que es un problema más fácil de resolver.

Se supone que la relación constitutiva del material ha sido escrita de la forma:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (7.1)$$

Donde  $C_{ijkl}^t$  es el tensor de rigidez tangente que es función del estado de tensión o de la deformación elástica y plástica y del daño como un proceso de ablandamiento.

Como se trata de un problema de la mecánica del continuo, los desplazamientos y los vectores tensión son continuos aún a través de la superficie de normal  $n_i$ . Con la notación de discontinuidad de una cantidad  $X$  a través de una superficie:

$$(X^+ - X^-) = \llbracket X \rrbracket \quad (7.2)$$

$$\llbracket \dot{u}_i \rrbracket = 0 \quad (7.3)$$

$$\llbracket \dot{\sigma}_{ij} n_j \rrbracket = 0 \quad (7.4)$$

La condición de compatibilidad de Maxwell requiere que un salto no nulo del gradiente de la velocidad de deformación a través de una superficie de normal  $n_i$ , sea de la forma:

$$\llbracket \dot{\epsilon}_{ij} \rrbracket = \frac{1}{2} \dot{\gamma} (g_i n_j + n_i g_j) \quad (7.5)$$

Donde  $g_i$  es un vector unitario que define la dirección del movimiento (dirección de polarización en el problema de propagación de ondas) y  $\dot{\gamma} \neq 0$  define la magnitud del salto.

$g_i = 0$  no hay discontinuidad

$g_i \neq 0$  condición suficiente para que exista una discontinuidad

Interesa saber para qué propiedades de  $C_{ijkl}^t$  aparece la discontinuidad en el campo de deformaciones.

$$0 = \llbracket \dot{\sigma}_{ij} n_j \rrbracket = \llbracket \dot{\sigma}_{ij} \rrbracket n_j = \llbracket C_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \rrbracket n_j \quad (7.6)$$

Si  $C_{ijkl}^t$  es el tensor tangente de un material continuo se puede suponer que no presenta ninguna discontinuidad a través de la superficie de normal  $n_i$ , o sea  $(C_{ijkl}^t)^+ = (C_{ijkl}^t)^-$ , o sea:

$$\llbracket C_{ijkl}^t \dot{\epsilon}_{kl} \rrbracket n_j = C_{ijkl}^t \llbracket \dot{\epsilon}_{kl} \rrbracket n_j = C_{ijkl}^t \left[ \frac{1}{2} \dot{\gamma} (g_k n_l + g_l n_k) \right] n_j = 0 \quad (7.7)$$

Teniendo en cuenta las simetrías del tensor tangente:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^t &= C_{ijlk}^t & C_{ijkl}^t &= C_{jilk}^t \\ C_{ijkl}^t g_k n_l &= C_{ijkl}^t n_k g_l \end{aligned} \quad (7.8)$$

Resulta:

$$C_{ijkl}^t \left[ \frac{1}{2} \dot{\gamma} (g_k n_l + g_l n_k) \right] n_j = \dot{\gamma} (n_j C_{ijkl}^t n_l) g_k = \dot{\gamma} Q_{ik} g_k = 0 \quad (7.9)$$

$$Q_{ik} = n_j C_{ijkl}^t n_l \quad (7.10)$$

$Q_{ik}$  es un tensor de segundo orden que se denomina tensor acústico. Como  $\dot{\gamma} \neq 0$ , para asegurar la discontinuidad en el campo de velocidades de deformaciones junto con la condición de continuidad en la velocidad de tensión, es decir:  $Q_{ik} g_k = 0$  con  $g_k \neq 0$ , el tensor acústico debe ser singular:

$$\det(Q_{ik}) = \det(n_j C_{ijkl}^t n_l) = 0 \quad (7.11)$$

Esta es una condición suficiente para la existencia de una superficie de discontinuidad de deformaciones que puede ser utilizada para el caso de daño si el tensor tangente depende de las variables de daño.

Si se puede encontrar en un elemento representativo de volumen una orientación  $n_i$  tal que  $\det(Q_{ik}) = \det(n_j C'_{ijkl} n_l) = 0$ , entonces una mesofisura se iniciará en el plano perpendicular a  $n_i$ .

Para solucionar el mal condicionamiento del problema de valores iniciales para modelos con ablandamiento se introduce normalmente una escala de longitud interna. Se han sugerido distintas técnicas para incorporar una longitud interna como el continuo de Cosserat, continuos no locales o la inclusión de efectos viscosos que se presenta en este capítulo.

## 7.3. Modelo de daño escalar explícito dependiente del tiempo

(Simo and Ju 1987a, Ju 1989)

### 7.3.1. Extensión del modelo independiente del tiempo.

Una simple caracterización fenomenológica de la dependencia de la velocidad de deformación observada experimentalmente en muchos materiales puede hacerse a través la regularización viscosa de las ecuaciones de daño independiente del tiempo. Formalmente, la estructura de esta regularización es totalmente análoga a la regularización viscoplástica de Perzyna. El modelo resultante requiere un solo parámetro adicional, el coeficiente de fluidez de daño  $\mu$ . A medida que  $\mu$  se aproxima a cero, el material exhibe una respuesta elástica instantánea, mientras que cuando  $\mu$  tiende a infinito la formulación se reduce a un modelo de daño independiente del tiempo. Este modelo predice disminución en la no linealidad de las curvas tensión-deformación a medida que aumenta la velocidad de deformación. En otras palabras, el crecimiento de microfisuras es retardado para altas velocidades de deformación.

Las ecuaciones dependientes del tiempo que gobiernan el modelo de daño viscoso se obtienen directamente de las correspondientes al modelo de daño independiente del tiempo reemplazando el parámetro de consistencia de daño  $\dot{\mu}$  por  $\mu \bar{\phi}(g)$ .

$$\dot{d}_t = \mu \langle \bar{\phi}(g) \rangle H(\bar{\tau}_t, d_t) \quad (7.12)$$

$$\dot{r}_t = \mu \langle \bar{\phi}(g) \rangle \quad (7.13)$$

Acá  $\mu$  es el coeficiente de fluidez de daño, una constante del material y la función escalar  $\bar{\phi}(g)$  representa la función de flujo de daño viscoso y  $g(\bar{\tau}_t, r_t) = \bar{\tau}_t - r_t$ .

Por simplicidad se supone daño viscoso lineal, es decir  $\bar{\phi}(g) \equiv g$  de manera que las ecuaciones (7.12) y (7.13) se reducen a :

$$\dot{d}_t = \mu \langle g(\bar{\tau}_t, r_t) \rangle H(\bar{\tau}_t, d_t) \quad (7.14)$$

$$\dot{r}_t = \mu \langle g(\bar{\tau}_t, r_t) \rangle \equiv \mu \langle \bar{\tau}_t - r_t \rangle \quad (7.15)$$

La caracterización de daño independiente del tiempo y la respuesta elástica instantánea pueden ser obtenidas como casos particulares de esta formulación.

### 7.3.2. Condición de positividad para unicidad de la solución

Un modelo viscoso del tipo del descrito satisface la condición de positividad de Valanis (1985). Para demostrarlo se diferencia la ecuación secante y se reemplaza la variación temporal de la variable de daño por la dada en la ecuación (7.14).

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{d} \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - \mu \langle g(\bar{\tau}_t, r_t) \rangle H(\bar{\tau}_t, d_t) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} \end{aligned} \quad (7.16)$$

Para un estado definido por  $\{\varepsilon_{ij}, d_t, r_t\}$ , para dos velocidades de tensión  $\dot{\sigma}_{ij}^1, \dot{\sigma}_{ij}^2$  y dos velocidades de deformación  $\dot{\varepsilon}_{ij}^1, \dot{\varepsilon}_{ij}^2$ , de la ecuación (7.16) se deduce que:

$$\begin{aligned} \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} &= (\dot{\sigma}_{ij}^1 - \dot{\sigma}_{ij}^2) (\dot{\varepsilon}_{ij}^1 - \dot{\varepsilon}_{ij}^2) = (1-d) (\dot{\varepsilon}_{ij}^1 - \dot{\varepsilon}_{ij}^2) \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} (\dot{\varepsilon}_{kl}^1 - \dot{\varepsilon}_{kl}^2) \\ \Delta \dot{\sigma}_{ij} \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} &= (1-d) \Delta \dot{\varepsilon}_{ij} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \Delta \dot{\varepsilon}_{kl} > 0 \end{aligned} \quad (7.17)$$

Esta condición se cumple siempre que el tensor elástico del material no dañado:  $C_{ijkl}^o = \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}}$  sea definido positivo. Esto quiere decir que el material definido por este modelo es positivo en el sentido de Valanis (1985), o sea que si tiene solución única en el tiempo  $t$ , también tiene solución única en el tiempo  $t + \Delta t$ .

### 7.3.3. Propagación de ondas infinitesimales (Dubé et al 1996)

En este punto se analiza la localización considerando una pequeña perturbación alrededor de un estado inicial de equilibrio o de movimiento. La ecuación (7.16) se escribe como:

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1-d_o) C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{d} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o \quad (7.18)$$

Donde  $d_o$  y  $\varepsilon_{ij}^o$  hacen referencia al estado inicial de daño y de deformación a partir del cual se considera la perturbación. La derivada de la ecuación de movimiento para ondas infinitesimales se escribe como:

$$\dot{\sigma}_{ij,j} = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (7.19)$$



Donde los  $v_i$  son perturbaciones admisibles.

Si se sustituye la ecuación (7.18) en la ecuación de movimiento se obtiene:

$$(1-d_o)C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl,j} - d_{,j} C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{d}_{,j} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o - \dot{d} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl,j}^o = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (7.20)$$

A diferencia de lo que ocurre en plasticidad, el daño es multiplicativo, es un factor que reduce la rigidez del material. Debido a ello, en esta ecuación aparecen los gradientes espaciales de  $d_o$  y  $\varepsilon_{ij}^o$ . Estos términos complican el análisis de la propagación de la onda. Sin embargo, como los términos en que aparecen esos gradientes no contienen a las derivadas de mayor orden de la perturbación, no cambian la naturaleza de las ecuaciones diferenciales parciales de gobierno. Es por ello que, sin pérdida de generalidad, se puede considerar que el estado inicial es homogéneo de manera que los gradientes mencionados se anulan.

Se considera primero el modelo de daño independiente del tiempo. Se supone que las perturbaciones admisibles tienen la siguiente forma, que represent una onda armónica propagándose en la dirección  $N_i$ :

$$v_i = A_i e^{[-i\zeta(N_m x_m - ct)]} \quad (7.21)$$

Donde  $\zeta$ ,  $c$  y  $A_i$  son el número de onda, la velocidad de fase y la amplitud respectivamente.

Sustituyendo la ecuación (7.21) y las ecuaciones de evolución del daño inviscido en la ecuación (7.20) y omitiendo los términos que son funciones de los gradientes espaciales del estado inicial, se llega a:

$$\begin{aligned} (1-d_o)C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl,j} - \dot{d}_{,j} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^o &= \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} & \dot{d} &= \frac{\partial G}{\partial \bar{\tau}} \frac{\partial \bar{\tau}}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} \\ C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl,j} &= \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \\ \dot{\varepsilon}_{ij} &= \frac{1}{2}(v_{i,j} + v_{j,i}) = -\frac{1}{2}i\zeta(A_i N_j + N_i A_j) e^{[-i\zeta(N_m x_m - ct)]} \\ C_{ijkl}^t \frac{1}{2}i^2 \zeta^2 N_j (A_k N_l + N_k A_l) e^{[-i\zeta(N_m x_m - ct)]} &= \rho A_i i^2 \zeta^2 c^2 e^{[-i\zeta(N_m x_m - ct)]} \\ C_{ijkl}^t N_j A_k N_l - A_i \rho c^2 &= 0 \\ (N_j C_{ijkl}^t N_l - \rho c^2 \delta_{ik}) A_k &= 0 \end{aligned} \quad (7.22)$$

En ablandamiento, por lo menos una de las velocidades de fase es imaginaria, lo cual no es físicamente posible. Las ecuaciones de movimiento son elípticas. Las ondas no se pueden propagar en el material y las ecuaciones que gobiernan el movimiento se vuelven mal condicionadas porque no hay soluciones a las ecuaciones de movimiento.

En el modelo de daño dependiente del tiempo la situación es más simple. En vista de la definición de la ecuación de evolución del daño  $\dot{d}_t = \mu \langle g(\bar{\tau}_t, r_t) \rangle H(\bar{\tau}_t, d_t)$ , la velocidad de daño no es función de la perturbación como en el modelo dependiente del tiempo. La velocidad de daño es una función de la tasa de liberación de energía y de las variables de endurecimiento/ablandamiento en el estado inicial. Si en la ecuación (7.20)

se agrupan los términos en los que aparece la perturbación y se omiten los otros términos que son funciones del estado inicial solamente y no tienen influencia en la naturaleza de las ecuaciones diferenciales parciales, se obtiene:

$$(1-d_o)C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl,j} - d_{,j}^o C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} = \left[ (1-d_o)C_{ijkl}^o \dot{\varepsilon}_{kl} \right]_{,j} = \rho \frac{\partial^2 v_i}{\partial t^2} \quad (7.23)$$

Esta ecuación es idéntica a la de un sólido elástico con una rigidez  $(1-d_o)C_{ijkl}^o$  que es positiva definida en todo el sólido. Es trivial mostrar que la ecuación de la onda es incondicionalmente hiperbólica. En consecuencia, el problema de ondas es estable y bien condicionado independientemente del estado inicial de daño y deformación a partir del cual se considera la perturbación.

### 7.3.4. Implementación numérica

Simo et al (1987b) presenta una familia de un parámetro de algoritmos de integración incondicionalmente estable.

Supóngase que se produce una carga en daño, o sea  $g \equiv \bar{\tau}_{n+1} - r_n > 0$ . Aplicando la regla del punto medio generalizado a las ecuaciones (7.14) y (7.15) se obtiene:

$$\begin{aligned} d_{n+1} &= d_n + \Delta\mu_{n+\alpha} g_{n+\alpha} H_{n+\alpha} \\ r_{n+1} &= r_n + \Delta\mu_{n+\alpha} g_{n+\alpha} = r_n + \Delta\mu_{n+\alpha} (\bar{\tau}_{n+\alpha} - r_{n+\alpha}) \\ (\varepsilon_{ij})_{n+\alpha} &= \alpha (\varepsilon_{ij})_{n+1} + (1-\alpha) (\varepsilon_{ij})_n \\ \tau_{n+\alpha} &= \tau[(\varepsilon_{ij})_{n+\alpha}] \\ r_{n+\alpha} &= \alpha r_{n+1} + (1-\alpha) r_n \\ r_{n+1} &= \frac{[1 - (1-\alpha)\Delta\mu_{n+\alpha}] r_n + \Delta\mu_{n+\alpha} \bar{\tau}_{n+\alpha}}{1 + \Delta\mu_{n+\alpha} \alpha} \end{aligned} \quad (7.24)$$

Este algoritmo es incondicionalmente estable para  $\alpha \geq \frac{1}{2}$  y tiene precisión de segundo orden para  $\alpha = \frac{1}{2}$ . Simo y Ju (1987b) emplean  $\alpha = 1$  que corresponde al método de Euler Backward. A continuación se esquematiza el esquema de integración numérica para este caso.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\begin{aligned} \Delta \varepsilon_{ij}^n &= \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n) \\ \varepsilon_{ij}^n &= \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n \end{aligned}$$

3) Predictor elástico  $d^n = d^{n-1} \quad r^n = r^{n-1}$

4) Evaluación de la fuerza termodinámica conjugada de la variable de daño:

$$y^n = (\Psi^o)^n = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

5) Evaluación de la deformación equivalente:  $\bar{\tau}^n = \bar{\tau}(y^n)$

6) Verificación del criterio de daño

$$\text{Si } g(\bar{\tau}^n, r^n) \leq 0 \quad \text{comportamiento elástico} \rightarrow 9)$$

7) Evolución del daño dependiente del tiempo. Evaluación del nuevo umbral de daño

$$\Delta\mu_n = \mu\Delta t_n$$

$$r^n = \frac{r^{n-1} + \Delta\mu_n \bar{\tau}^n}{1 + \Delta\mu_n}$$

$$\Delta\mu_n g(\bar{\tau}^n - r^n) = \Delta\mu_n (\bar{\tau}^n - r^n) \equiv \Delta r^n = \frac{\Delta\mu_n}{1 + \Delta\mu_n} (\bar{\tau}^n - r^{n-1})$$

8) Actualización de la variable de daño:  $\Delta d^n = \Delta\mu_n (\bar{\tau}^n - r^n) H(\bar{\tau}^n, r^n)$  ;  $d^n = d^{n-1} + \Delta d^n$

9) Actualización del tensor de tensiones

$$\sigma_{ij}^n = (1 - d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

10) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

Es interesante analizar los casos extremos  $\mu \rightarrow 0$  y  $\mu \rightarrow \infty$  del coeficiente de viscosidad y su efecto.

a)  $\mu \rightarrow 0$ :  $\Delta\mu_n \rightarrow 0$ ,  $r^n \rightarrow r^{n-1}$  y  $g^n \rightarrow (\bar{\tau}^n - r_{n-1})$ . Entonces no se desarrolla daño adicional durante el incremento y se tiene una respuesta elástica instantánea.

b)  $\mu \rightarrow \infty$ :  $\Delta\mu_n \rightarrow \infty$ ,  $r^n \rightarrow \bar{\tau}^n$ ,  $g^n \rightarrow 0$  y  $\Delta d^n = \Delta \bar{\tau}^n H^n$ . Esta situación corresponde a la caracterización del daño independiente de tiempo o invíscida.

Como  $0 \leq \mu \leq \infty$  se debe tener  $r^{n-1} \leq r^n \leq \bar{\tau}^n$ , lo que quiere decir que la expansión de la superficie de daño está acotada entre los límites correspondientes a elasticidad instantánea y daño invíscido.

## 7.4. Modelo de daño escalar implícito dependiente del tiempo (Luege 2002)

### 7.4.1. Introducción

Es un modelo de daño escalar dependiente del tiempo para hormigón. El mismo está basado en una extensión de un modelo de daño independiente del tiempo a través de una regla de evolución del daño análoga a la de la deformación viscoplástica de Perzyna. La formulación propuesta permite simular la dependencia de la velocidad de deformación, en particular, la sobre resistencia y modificación en la forma de la curva de

endurecimiento/ablandamiento que presenta el hormigón bajo altas velocidades de deformación. Como casos extremos, el modelo es capaz de reproducir tanto un comportamiento elástico como de daño independiente del tiempo.

La integración de la ecuación constitutiva se realiza mediante un algoritmo tipo full Euler backward. El operador tangente consistente se deduce a partir de un sistema de ecuaciones implícitas dependientes de la deformación específica.

Los ejemplos de aplicación desarrollados muestran que el modelo es capaz de simular el comportamiento del hormigón bajo altas velocidades de deformación.

#### 7.4.2. Bases termodinámicas

Para el caso de problemas térmicamente estables y pequeñas deformaciones, en ausencia de deformaciones plásticas la densidad de energía libre se expresa como:

$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad (7.25)$$

Las relaciones de Coleman, garantizan el cumplimiento del Segundo Principio de la Termodinámica y conducen a la expresión secante:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi(\varepsilon_{ij}, d)}{\partial \varepsilon_{ij}} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad C_{ijkl} = (1-d) C_{ijkl}^o \quad (7.26)$$

La disipación mecánica resulta:

$$\Xi_m^d = \Psi^o \dot{d} \geq 0 \quad (7.27)$$

#### 7.4.3. Criterio de daño

Se define un criterio de daño que marca el umbral del comportamiento elástico. El mismo se expresa como una función escalar de las componentes del tensor de tensiones:

$$g(\sigma_{ij}, d) = \bar{\tau}(\sigma_{ij}) - q(\sigma_{ij}, d) \quad (7.28)$$

donde:

$\bar{\tau}(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente para la cual pueden utilizarse, por ejemplo, las funciones de fluencia de la teoría de plasticidad (Tresca, Von Mises, Mohr-Coulomb, etc).

$q(\sigma_{ij}, d)$  es el umbral de daño que en este caso se define como una función explícita de la variable interna de daño, de la siguiente manera:

$$q(\sigma_{ij}, d) = r(\sigma_{ij}) R^{od} q_t(d) + [1 - r(\sigma_{ij})] q_c(d) \quad (7.29)$$

donde las funciones  $q_t(d)$  y  $q_c(d)$  representan la evolución de la tensión en función de la degradación de la rigidez, en procesos de tracción y compresión uniaxial y pueden deducirse de las curvas  $\sigma_r - \varepsilon_t$  y  $\sigma_c - \varepsilon_c$  experimentales.  $R^{od}$  es la relación entre los umbrales de daño en compresión uniaxial y tracción uniaxial.

El factor  $r(\sigma_{ij})$ , definido como sigue, se introduce para tener en cuenta el tipo de estado tensional:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (7.30)$$

donde  $\sigma_i$  son las tensiones principales y  $\langle x \rangle = \frac{1}{2}(x + |x|)$  es la función rampa.

#### 7.4.4. Regla de evolución de la variable interna de daño $d$

Se define una regla de evolución del daño análoga a la de la deformación viscoplástica propuesta por Perzyna:

$$\dot{d} = \frac{1}{\eta} \left[ \frac{\langle g \rangle}{q} \right]^N \quad (7.31)$$

$\eta$  y  $N$  son parámetros del material que pueden determinarse mediante ensayos experimentales con velocidades de deformación controlada.  $N$  es un parámetro adimensional, mientras que  $\eta = 1/\mu$  es la inversa de la fluidez, tiene dimensiones de tiempo y representa una especie de viscosidad.

De acuerdo a la ecuación (7.31), el daño sólo crece cuando  $g > 0$ , es decir, cuando el estado tensional es tal, que la tensión equivalente  $\tau(\sigma_{ij})$  supera al umbral de degradación  $q(\sigma_{ij}, d)$  y se inicia el proceso de degradación en el material. Como en la teoría de la viscoplasticidad, se admiten valores de tensión fuera de la superficie de daño definida por  $g = 0$ .

La velocidad de degradación depende de la sobretensión existente y de los parámetros materiales  $\eta$  y  $N$ . A modo de ejemplo, para un valor muy elevado de  $\eta$ , la velocidad de daño resulta prácticamente nula, obteniéndose un comportamiento cuasi-elástico. Por el contrario, si la viscosidad  $\eta \rightarrow \infty$ , la velocidad de daño también tiende a infinito o sea que el daño se produce instantáneamente como en los modelos de daño independientes del tiempo.

Esta regla de evolución de daño permite simular, numéricamente, la disminución de la fisuración observada experimentalmente cuando se incrementa la velocidad de deformación. La sobrerresistencia se obtiene retardando el retorno del estado tensional a la superficie de daño mediante un retardo en la evolución del daño.

#### 7.4.5. Tratamiento numérico

##### *Algoritmo de integración de la ecuación constitutiva*

Para la integración de las ecuaciones constitutivas correspondientes al modelo propuesto, se utiliza un algoritmo de tipo Euler Backward basado en un único residuo en tensiones.

La actualización de las variables se puede hacer de la siguiente manera:

$$d_k^n = d_{k-1}^n + \Delta d_k^n$$

$$\Delta d_k^n = \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{g_k^n}{q_k^n} \right\rangle^N = \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{\tau(\sigma_{ij})_k^n - q((\sigma_{ij})_k^n, d_k^n)}{q((\sigma_{ij})_k^n, d_k^n)} \right\rangle^N \quad (7.32)$$

$$(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d_k^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n$$

Este conjunto de ecuaciones puede resumirse en una sola ecuación no lineal del incremento de la variable de daño:

$$R^d(\Delta d, \sigma_{ij}(\Delta d), q(\Delta d)) = \tilde{R}(\Delta d) = \Delta d - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{g}{q} \right\rangle^N = 0 \quad (7.33)$$

Que puede resolverse, por ejemplo, mediante el método de Newton Raphson para actualizar iterativamente el incremento de la variable de daño como sigue:

$$(\Delta d)_k^n = (\Delta d)_{k-1}^n - \left( \frac{d\tilde{R}}{d\Delta d} \right)_{k-1}^{-1} \tilde{R}_{k-1} \quad (7.34)$$

$$\frac{d\tilde{R}}{d\Delta d} = 1 - \frac{\Delta t N}{\eta} \left\langle \frac{g}{q} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{1}{q} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \Delta d} - \frac{g}{q^2} \frac{\partial q}{\partial \Delta d} \right)$$

$$\frac{d\tilde{R}}{d\Delta d} = 1 + \frac{\Delta t N}{\eta q} \left\langle \frac{g}{q} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} \bar{\sigma}_{ij} + \frac{g}{q} \frac{\partial q}{\partial \Delta d} \right) \quad (7.35)$$

A continuación esquematiza el algoritmo.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Predictor elástico k=0

$$\Delta d_o^n = 0 ; d_o^n = d^{n-1} ; q_o^n = q^{n-1} ; (\sigma_{ij})_o^n = (1 - d_o^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{ij}^n$$

4) Evaluación de la función de daño:

$$g_k^n(\sigma_{ij}, d) = \tau((\sigma_{ij})_k^n) - q((\sigma_{ij})_k^n, d_k^n)$$

5) Cálculo del residuo:  $\tilde{R}_k = \Delta d_k^n - \frac{\Delta t}{\eta} \left\langle \frac{g_k^n}{q_k^n} \right\rangle^N$

6) Si  $|\tilde{R}_k| \leq \text{tolerancia}$ , vaya a 12)

7) Comienza proceso iterativo:  $k=k+1$

8) Corrección de la variable de daño:

$$(\delta \Delta d)_k = - \left( \frac{\partial \tilde{R}}{\partial \Delta d} \right)_{k-1}^{-1} \tilde{R}_{k-1}, \quad \Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n + (\delta \Delta d)_k, \quad d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n$$

9) Cálculo de la tensión:  $(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d_k^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}$

10) Actualización del umbral de daño:  $q_k^n = r(\sigma_k^n) R^{od} q_i \left[ (d_k^n)^n \right] + [1 - r(\sigma_k^n)] q_c \left[ (d_k^n)^n \right]$

11) Vuelva a 4)

12) Fin del proceso iterativo:  $(\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n, \quad d^n = d_k^n, \quad q^n = q_k^n$

13) Cálculo del operador tangente consistente  $C_{ijkl}^T$

14) Fin integración de la ecuación constitutiva

#### 7.4.6. Operador tangente consistente

Cuando la resolución de la ecuación de movimiento en el tiempo se realiza mediante un método implícito, se requiere el operador tangente consistente para el cálculo de la matriz Jacobiana:

$$C_{ijkl}^T = \frac{d\sigma_{ij}}{d\varepsilon_{kl}} \quad (7.36)$$

Como el modelo de daño descrito no posee una condición de consistencia que obligue al estado tensional a ubicarse sobre la superficie de daño, el operador tangente no puede ser deducido derivando la expresión secante, sino que debe obtenerse numéricamente en consistencia con el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva. Expresando en forma implícita las ecuaciones que definen el modelo y que dependen de la deformación específica  $\varepsilon_{kl}$ , se tiene:

$$R_{ij}^\sigma [\varepsilon; \sigma(\varepsilon), d(\varepsilon)] = \sigma_{ij}^n - (1 - d^n) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^n = 0 \quad (7.37)$$

$$R^d [\varepsilon; \sigma(\varepsilon), d(\varepsilon)] = d^n - d^{n-1} - \frac{\Delta t}{\eta} \left[ \frac{(G^d)^n}{(f_c)^n} \right]^N = 0 \quad (7.38)$$

Las variables de estado se determinan mediante el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva y son todas funciones de la deformación como lo indican las ecuaciones (7.37) y (7.38), que constituyen una definición implícita de  $\sigma_{ij}(\varepsilon_{kl})$ . De acuerdo al teorema de funciones implícitas, esta definición es localmente única y diferenciable. Se puede utilizar este teorema para determinar el operador tangente consistente (Hartmann et al 1997). Si se diferencian las ecuaciones (7.37) y (7.38), se deduce lo siguiente:

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial d} \frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = - \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \varepsilon_{mn}} \quad (7.39)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{kl}} \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} + \frac{\partial R^d}{\partial d} \frac{dd}{d\varepsilon_{mn}} = 0 \quad (7.40)$$

Despejando  $\frac{dd}{d\varepsilon_{mn}}$  de la Ecuación (7.40) y reemplazando en la Ecuación (7.39), se

puede obtener el operador tangente consistente  $C_{klmn}^T = \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}}$ , y resulta:

$$C_{klmn}^T = \frac{d\sigma_{kl}}{d\varepsilon_{mn}} = \left[ \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial d} \left( \frac{\partial R^d}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} \left[ - \frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \varepsilon_{mn}} \right] \quad (7.41)$$

donde:

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \sigma_{kl}} = \delta_{ik} \delta_{jl} \quad (7.42)$$

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial d} = C_{ijk}^o \varepsilon_{kl} = \bar{\sigma}_{ij} \quad (7.43)$$

$$\frac{\partial R_{ij}^{\sigma}}{\partial \varepsilon_{mn}} = -(1-d) C_{ijmn}^o \quad (7.44)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial \sigma_{ij}} = - \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \frac{1}{q} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{ij}} \quad (7.45)$$

$$\frac{\partial R^d}{\partial d} = 1 + \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{\tau}{q^2} \frac{\partial q}{\partial d} \right) \quad (7.46)$$

Reemplazando las ecuaciones (7.42) a (7.46) en (7.41) se obtiene:

$$C_{klmn}^T = \left\{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \left[ 1 + \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{\tau}{q^2} \frac{\partial q}{\partial d} \right) \right]^{-1} \left[ \frac{\Delta t}{\eta} N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \frac{1}{q} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right] \right\}^{-1} (1-d) C_{ijmn}^o \quad (7.47)$$

Se puede observar que cuando  $\frac{\Delta t}{\eta} \rightarrow 0$ ,  $C_{klmn}^T \rightarrow C_{klmn} = (1-d) C_{klmn}^o$ , es decir, coincide con el operador secante correspondiente a un comportamiento elástico.

Si en cambio  $\frac{\Delta t}{\eta} \rightarrow \infty$ ,  $\frac{\eta}{\Delta t} \rightarrow 0$



$$\begin{aligned}
C_{klmn}^T &= \left\{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \left[ \frac{\eta}{\Delta t} + N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{\tau}{q^2} \frac{\partial q}{\partial d} \right) \right] \right\}^{-1} \left[ N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \frac{1}{q} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right] (1-d) C_{ijmn}^o \\
&\equiv \left\{ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \left[ N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \left( \frac{\tau}{q^2} \frac{\partial q}{\partial d} \right) \right] \right\}^{-1} \left[ N \left\langle \frac{\tau-q}{q} \right\rangle^{N-1} \frac{1}{q} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right] (1-d) C_{ijmn}^o \\
&= \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} (1-d) C_{ijmn}^o
\end{aligned} \tag{7.48}$$

Este módulo es idéntico al módulo tangente del modelo de daño independiente del tiempo que está dado por la ecuación (3.48).

Esto puede demostrarse premultiplicando el tensor tangente del modelo independiente del tiempo  $C_{ijkl}^t$  por el tensor que aparece entre corchetes sin invertir y teniendo en cuenta que cuando  $\frac{\Delta t}{\eta} \rightarrow \infty$ ,  $\tau \rightarrow q$ , esto es:

$$\begin{aligned}
\left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right] C_{klmn}^t &= \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right] \left[ C_{klmn} - \bar{\sigma}_{kl} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} C_{rsmn}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} \bar{\sigma}_{rs}} \right] \\
&= C_{ijmn} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} C_{rsmn}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} \bar{\sigma}_{rs}} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} C_{klmn} - \bar{\sigma}_{ij} \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{kl} \frac{\frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} C_{rsmn}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} \bar{\sigma}_{rs}} \\
&= C_{ijmn} + \frac{\bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} C_{rsmn}}{\frac{\partial q}{\partial d} + \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{rs}} \bar{\sigma}_{rs}} \left[ -1 + 1 + \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{kl} - \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \bar{\sigma}_{kl} \right] = (1-d) C_{ijmn}^o
\end{aligned}$$

De donde:

$$C_{klmn}^t = \left[ \delta_{ik} \delta_{jl} + \bar{\sigma}_{ij} \frac{q}{\tau} \left( \frac{\partial q}{\partial d} \right)^{-1} \frac{\partial \tau}{\partial \sigma_{kl}} \right]^{-1} (1-d) C_{ijmn}^o \tag{7.49}$$

De esto se concluye que cuando  $\frac{\Delta t}{\eta} \rightarrow \infty$  entonces  $C_{ijkl}^T \rightarrow C_{ijkl}^t$

#### 7.4.7. Ejemplos de aplicacion

Con el objeto de analizar el comportamiento del modelo y los algoritmos desarrollados, se realizan a continuación distintos ejemplos numéricos.

a) *Ejemplo cuasi-estático de deformación controlada*

Se analiza el comportamiento a compresión uniaxial de un elemento plano de cuatro nodos y cuatro puntos de integración, como el de la Figura 7.1.

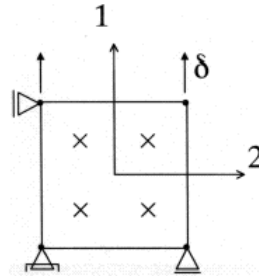


Figura 7.1. Compresión uniaxial cuasi-estática con deformación controlada

Las propiedades mecánicas del hormigón utilizado son las siguientes:

Módulo de Elasticidad:  $E=30\,000\text{ MPa}$

Módulo de Poisson:  $\nu=0.2$

Umbral de daño inicial en tracción uniaxial cuasi-estática:  $f_{ctm}=2.2\text{ MPa}$

En primer lugar, se adoptan  $N=1$  y  $\eta=0.001\text{ s}$  y se obtienen las curvas tensión-deformación específica para distintas velocidades de deformación que se han representado en la Figura 7.2. Se observa que un aumento en la velocidad de deformación implica una disminución en la velocidad de daño y, consecuentemente, un aumento de la resistencia.

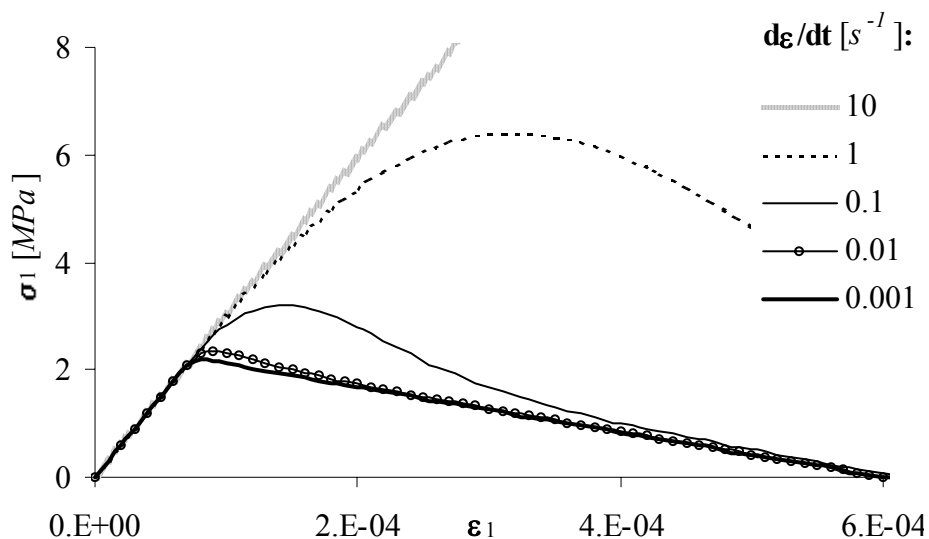


Figura 7.2 Curvas tensión - deformación axial para distintas velocidades de deformación ( $N=1$  y  $\eta=0,001\text{ s}$ )

A fin de realizar una correcta elección de los parámetros  $N$  y  $\eta$ , los cuales determinan la velocidad de daño, es conveniente estudiar el efecto que los mismos tienen en el comportamiento.

Para el caso del hormigón, el Código Europeo da expresiones para el cálculo de la resistencia pico en función de la velocidad de deformación. Las mismas pueden ser utilizadas como referencia para la elección de los valores de los parámetros  $N$  y  $\eta$  en ese material.

En la Figura 7.3 se grafica la relación de resistencias  $f_{ct}/f_{ctm}$  en función de la velocidad de deformación, obtenida con el modelo propuesto para  $\eta=0.001s$  y distintos valores del parámetro  $N$ . En la misma figura se representa, además, la curva correspondiente a las expresiones del CEB-FIP'90. Puede observarse que, para valores de  $N$  mayores que uno, el modelo no supera el triple de la resistencia estática. En particular, para velocidades de deformación del orden de  $1s^{-1}$ , la resistencia resultante es aproximadamente el doble de la resistencia original. La evolución de la resistencia con la velocidad de deformación puede ajustarse a los datos experimentales tomando valores altos del parámetro  $N$ , mayores que 2.

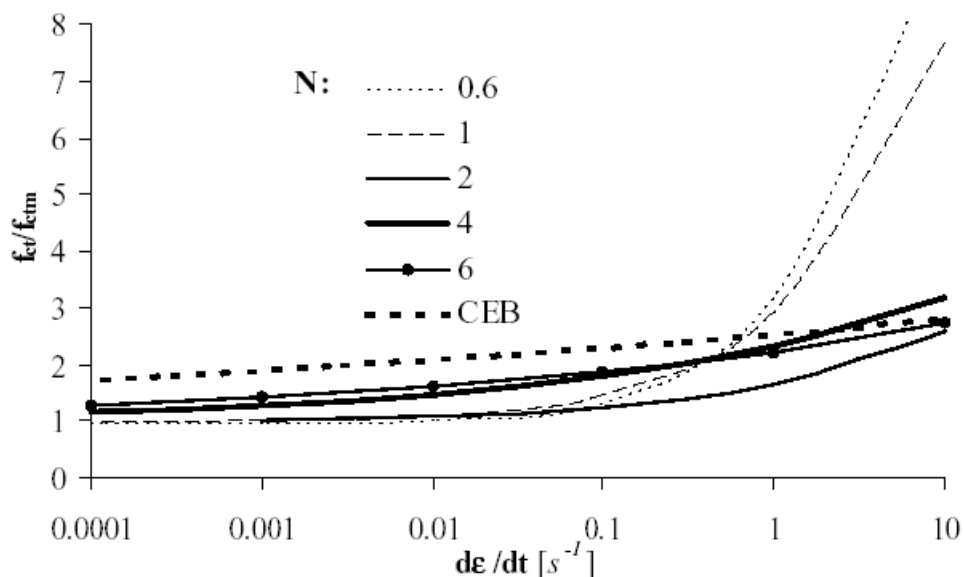


Figura 7.3 Resistencia relativa  $f_{ct}/f_{ctm}$  en función de la velocidad de deformación para  $\eta = 0,001$  s y distintos valores de  $N$

En forma análoga, en la Figura 7.4 se representa la relación de resistencias  $f_{ct}/f_{ctm}$  para distintos valores del parámetro  $\eta$ . Para valores pequeños de  $\eta$  el comportamiento es prácticamente coincidente con el daño independiente del tiempo. A medida que  $\eta$  crece, el comportamiento se aleja del correspondiente al modelo de daño independiente del tiempo y se acerca al elástico. Para valores de  $\eta$  menores que  $0.001s$  y velocidades de deformación menores que  $10s^{-1}$ , la relación de resistencias  $f_{ct}/f_{ctm}$  se mantiene menor que 3. Es importante destacar que los valores de  $\eta$  que mejor ajustan los resultados experimentales son del orden de  $0.0001s$ .

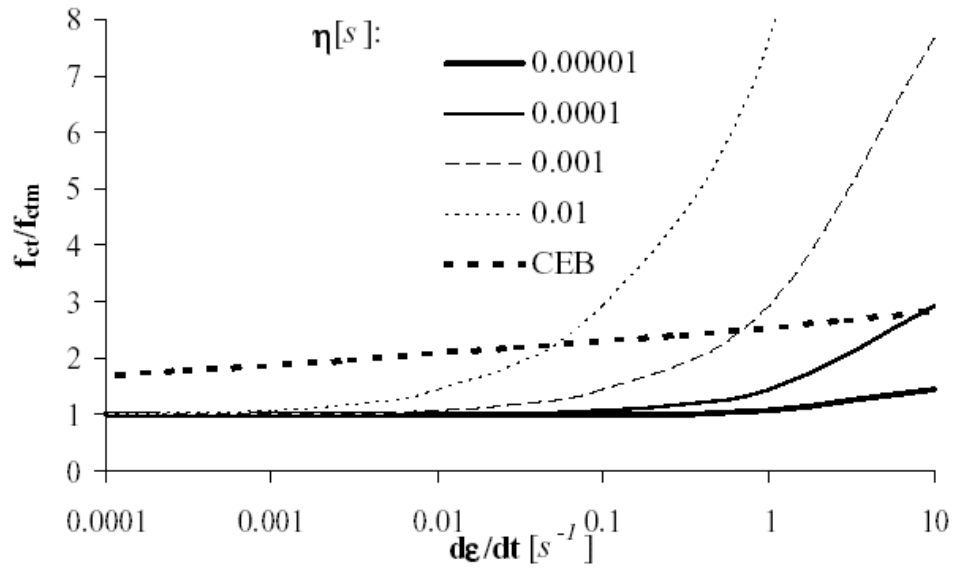


Figura 7.4. Resistencia relativa  $f_{ct}/f_{ctm}$  en función de la velocidad de deformación para distintos valores de  $\eta$  y  $N = 2$

De los ejemplos numéricos realizados se puede concluir que, adoptando adecuadamente los parámetros intervinientes, el modelo es capaz de simular satisfactoriamente la sobrerresistencia del hormigón bajo velocidades de deformación del orden de  $10^{-5}$  a  $10^1$  s $^{-1}$ .

**b) Barra sometida a una carga de tipo impulsiva**

En este ejemplo se analiza el comportamiento de la barra de la Figura 7.5 sometida a fuerzas de tracción, en lo que respecta a la propagación de onda a lo largo de la misma. La barra está fija en un extremo y sometida en el extremo opuesto a una carga dinámica que varía en el tiempo como se indica en la misma figura.

Se analiza el problema con mallas de 5, 10 y 20 elementos de tensión plana, 8 nodos y 2x2 puntos de integración.

El pulso de carga se define con  $P_o = 0.9(A f_{ctm})$ , donde  $A = 1 \text{ cm}^2$  es el área de la barra y  $f_{ctm} = 2.2 \text{ MPa}$  la resistencia a tracción del hormigón en un ensayo cuasi-estático (ver Figura 7.5).

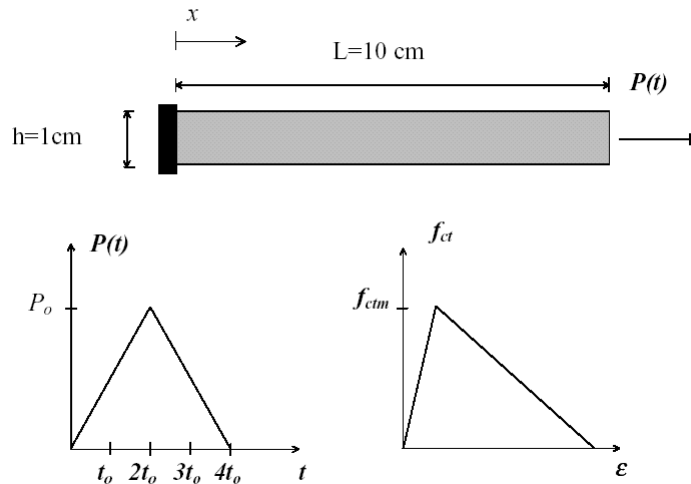


Figura 7.5 Barra sometida a carga impulsiva en un extremo ( $t_0 = 10^{-3}$  s)

La integración en el tiempo de las ecuaciones de campo se realiza mediante un esquema implícito de Newmark con  $\alpha=0.25$  y  $\delta=0.5$ .

Cuando la onda llega al extremo fijo de la barra, rebota duplicando el valor de la acción y el material entra en la etapa de ablandamiento posterior al pico. En la Figura 7.6 se grafica la deformación específica a lo largo de la barra, en  $t=5t_0$ , para las mallas de 5, 10 y 20 elementos. Puede observarse que los resultados obtenidos con las distintas discretizaciones resultan coincidentes y la localización de la deformación ocurre en un ancho de banda independiente del tamaño del elemento, lo cual verifica que la ecuación de onda resulta bien condicionada.

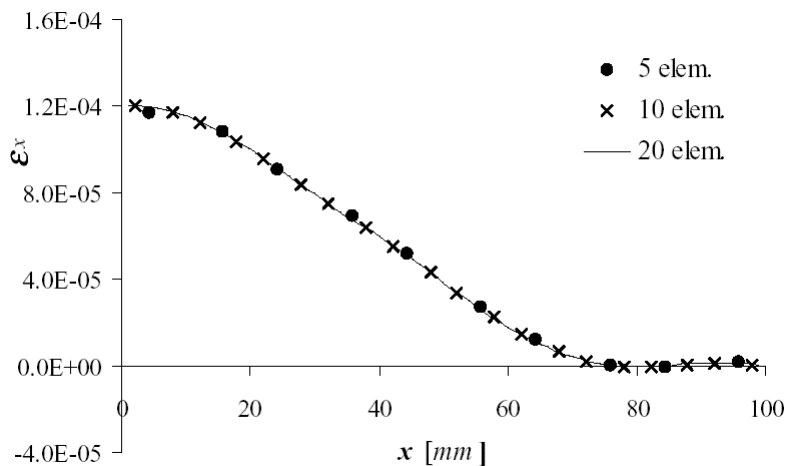


Figura 7.6 Deformación  $\varepsilon_x$  a lo largo de la barra para distintas mallas en el tiempo  $t=5t_0$ , ( $N=2$  y  $\eta=0,001$  s)

Cuando  $t=5t_0$ , la onda rebota en el extremo fijo de la barra y comienza la degradación en el hormigón y, por consiguiente, la evolución de la variable de daño. En la Figura 7.7 se grafica la deformación  $\varepsilon_x$  a lo largo de la barra, en ese instante de tiempo para distintos valores de  $\eta$ . Se observa que para valores de  $\eta$  mayores que  $0.01$ s, la deformación específica es prácticamente coincidente con la correspondiente al

comportamiento elástico. En cambio, cuando  $\eta$  disminuye, el comportamiento se acerca al de un modelo de daño independiente del tiempo. Más aún, la aproximación al modelo de daño independiente del tiempo implica también una disminución de la banda de localización de deformaciones y la consecuente aparición del problema falta de objetividad en la respuesta que caracteriza a los modelos independientes del tiempo.

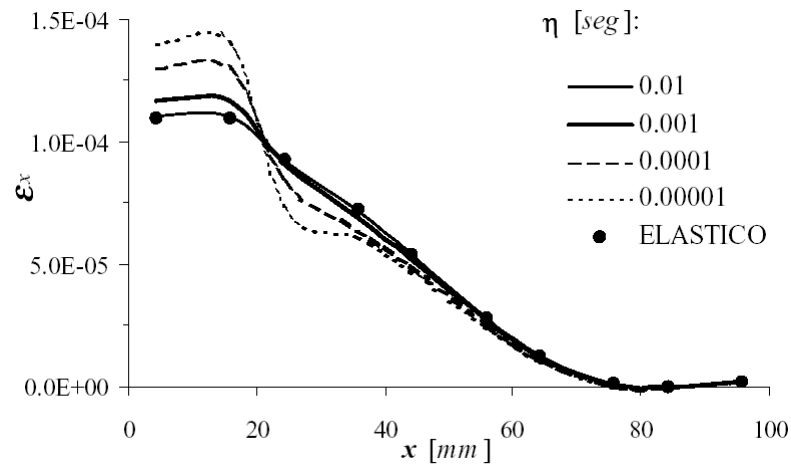


Figura 7.7 Deformación  $\varepsilon_x$  a lo largo de la barra con distintos  $\eta$ , ( $N = 2, 5$  elem.,  $t = 5t_0$ )

La variable interna de daño evoluciona en mayor medida en la zona cercana al extremo fijo de la barra. En la Figura 7.8 puede observarse la evolución de la variable interna de degradación  $d$  en dos intervalos de tiempo consecutivos, como consecuencia del rebote de la onda en dicho extremo.

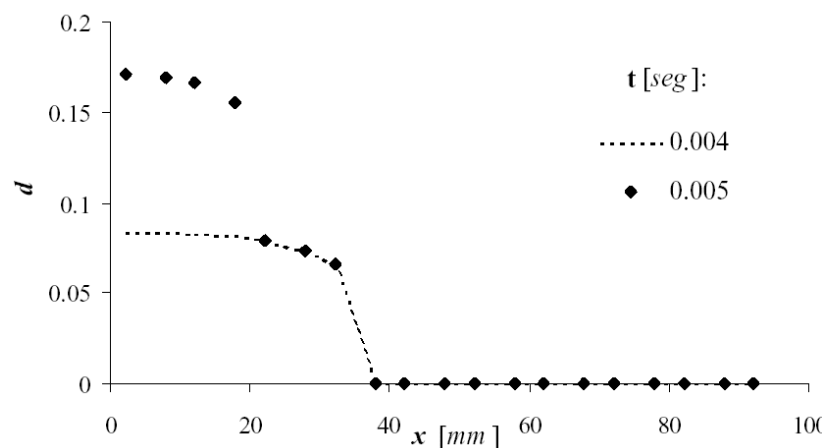


Figura 7.8 Evolución de la variable de daño  $d$  a lo largo de la barra en dos intervalos consecutivos de tiempo ( $N = 2$  y  $\eta = 0, 001$  s)

El análisis de la propagación de onda en una barra empotrada en un extremo y sometida en el otro extremo a la acción de una carga dinámica permite verificar que la

ecuación de movimiento se mantiene bien condicionada. Los resultados no varían al densificar la malla.

# 8. Modelos de daño y plasticidad

## 8.1. Introducción

Existe cierta evidencia experimental de que el daño está ligado a las deformaciones permanentes. Sin embargo, los mecanismos de interacción entre el daño y las deformaciones plásticas son de naturaleza complicada y no pueden ser simulados mediante un único modelo fenomenológico.

El daño está siempre relacionado con alguna deformación irreversible ya sea a micronivel o a mesonivel. Todos los mecanismos de daño crean microdeformaciones plásticas. Por otro lado, el daño influye en las deformaciones plásticas o irreversibles sólo porque el área elemental de resistencia disminuye a medida que decrece el número de ligaduras. El daño no influye directamente en el mecanismo de deslizamiento que causa las deformaciones permanentes. Es decir que no existe un acoplamiento de estado. El acoplamiento indirecto, debido a un aumento de la tensión efectiva, sólo aparece en las ecuaciones constitutivas cinéticas (ecuaciones de evolución de las variables internas) y por ello se denomina “acoplamiento cinético”.

A medida que las deformaciones plásticas crecen desde cero, el daño permanece nulo durante la nucleación de microfisuras. Esto corresponde a la acumulación de microtensiones o dislocaciones en metales que generan las microfisuras. Esto significa que existe un umbral de deformación permanente por debajo del cual no se produce daño.

## 8.2. Forma general de los modelos de daño y plasticidad (Besson et al 2001)

### 8.2.1. Diferentes formas de acoplamiento

Las leyes de daño y los conceptos introducidos hasta ahora se refieren al comportamiento elástico. Cuando se formulan modelos en los que entran en juego a la vez las leyes de elasticidad y las leyes de endurecimiento plástico, surgen distintas posibilidades en relación a si el daño aparece o no en los términos de la energía libre asociados al fenómeno plástico. Se distinguen tres casos:



## a) Teoría sin acoplamiento.

En estas teorías la fuerza termodinámica asociada al daño es la misma que en los modelos antes descritos. En el caso de daño escalar resulta igual a la tasa de liberación de energía elástica. Esta teoría es utilizable cuando existen deformaciones permanentes. Simplemente considera que no hay acoplamiento entre el daño y el endurecimiento plástico.

## b) Hipótesis de elasticidad desacoplada

Considera que la energía libre, para el caso de daño escalar, puede ser escrita como:

$$\Psi = \Psi_e(\varepsilon_{ij}^e, D) + \Psi_p(\alpha_i) + \Psi_d(\beta) \quad (8.1)$$

Donde  $\alpha_i$  designa las variables de endurecimiento plástico y  $\beta$  una medida escalar del daño acumulado.

Las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño resultan:

$$Y = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial D} \quad B = \frac{\partial \Psi_d}{\partial \beta} \quad (8.2)$$

Las leyes de evolución del daño se construyen utilizando estas variables.

Como en el caso anterior, no hay acoplamiento entre endurecimiento plástico y daño. Sin embargo, este enfoque modifica la expresión de la energía disipada por daño que resulta, en este caso:

$$\dot{\mathcal{E}}_d = Y\dot{D} - B\dot{\beta} \quad (8.3)$$

## c) Acoplamiento entre endurecimiento plástico y daño

Independientemente de la consideración o no de la variable interna de daño  $\beta$ , el acoplamiento entre endurecimiento plástico y daño se puede considerar a partir de una expresión para la energía libre del tipo:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi_e(\varepsilon_{ij}^e, D) + \Psi_p(\alpha_i, D) \\ &\quad \text{ó} \\ \Psi &= \Psi_e(\varepsilon_{ij}^e, D) + \Psi_p(\alpha_i, D) + \Psi_d(\beta) \end{aligned} \quad (8.4)$$

En este caso se tiene una nueva expresión para la fuerza termodinámica asociada a la variable de daño  $D$ , que presenta dos términos.

$$Y = -\frac{\partial \Psi}{\partial D} = -\frac{\partial \Psi_e}{\partial D} - \frac{\partial \Psi_p}{\partial D} = Y_e + Y_p \quad (8.5)$$

Si se considera daño escalar con el mismo factor de reducción para  $\Psi_e$  y  $\Psi_p$ , se puede escribir, por ejemplo:

$$\Psi = (1-D) \left[ \Psi_e^o(\varepsilon_{ij}^e) + \Psi_p^o(\alpha_i) \right] \quad \text{con} \quad \Psi_e^o(\varepsilon_{ij}^e) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e \quad (8.6)$$

La fuerza termodinámica asociada a las variables plásticas resulta:

$$A_j = \frac{\partial \Psi_p}{\partial \alpha_j} = (1-D) \frac{\partial \Psi_p^o}{\partial \alpha_j} \quad (8.7)$$

### 8.2.2. Acoplamiento disipativo

En el caso de las leyes de evolución hay también distintas posibilidades, de acuerdo a que se considere que los mecanismos de plasticidad y daño son idénticos o no.

a) Un primer enfoque consiste en considerar un único mecanismo, gobernado por la plasticidad, con un solo potencial de disipación:

$$\varphi^* = F(\sigma_{ij}, A_j, Y; D) = F_p(\sigma_{ij}, A_j; D) + F_d(Y; D) \quad (8.8)$$

Con una regla de normalidad en la que interviene un único multiplicador plástico.

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{ij}} & \dot{\alpha}_j &= -\dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial A_j} = -\dot{\lambda} \frac{\partial F_p}{\partial A_j} \\ \dot{D} &= \dot{\lambda} \frac{\partial F}{\partial Y} = \dot{\lambda} \frac{\partial F_d}{\partial Y} \end{aligned} \quad (8.9)$$

En el caso de mecanismos independientes del tiempo, el multiplicador  $\dot{\lambda}$  se obtiene de la condición de consistencia plástica.

En este enfoque la distinción entre mecanismos de plasticidad y daño no aparece más que en la separación entre  $F_p$  y  $F_d$ . Se puede observar que no puede ocurrir daño si no hay plasticidad, ni se puede dar plasticidad sin daño. Esto constituye una limitación muy fuerte de este enfoque.

b) Un segundo enfoque consiste en considerar un único mecanismo disipativo que puede descomponerse en dos partes:

$$\varphi^* = F(\sigma_{ij}, A_j, Y; D) = F_p(\sigma_{ij}, A_j, Y; D) + F_d(Y; D) \quad (8.10)$$

Pero estas partes no son independientes sino que están implícitamente acopladas a través de la fuerza termodinámica  $Y$ , conjugada del daño, que es a su vez función del tensor de tensiones y del daño. Teniendo en cuenta esto las leyes de evolución se escribe utilizando dos multiplicadores como sigue:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dot{D} &= \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial Y} + \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial Y} \end{aligned} \quad (8.11)$$

Los multiplicadores  $\dot{\lambda}_p$  y  $\dot{\lambda}_d$  se determinan a partir de las condiciones de consistencia plástica y de daño respectivamente:

$$\dot{f}_p = f_p = 0 \quad \dot{f}_d = f_d = 0 \quad (8.12)$$

c) Un tercer enfoque consiste en considerar separadamente los dos mecanismos y los dos criterios asociados. Se tienen entonces dos potenciales de disipación independientes y dos multiplicadores independientes.

$$F_p(\sigma_{ij}, A_j; D) \quad f_p(\sigma_{ij}, A_j; D) \leq 0 \quad (8.13)$$

$$F_d(Y, B; D, \beta) \quad f_d(Y, B; D, \beta) \leq 0 \quad (8.14)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dot{\alpha}_j = -\dot{\lambda}_p \frac{\partial F_p}{\partial A_j} \quad (8.15)$$

$$\dot{D} = \dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial Y} \quad \dot{\beta} = -\dot{\lambda}_d \frac{\partial F_d}{\partial B} \quad (8.16)$$

$D$  y  $\beta$  intervienen como parámetros en los dos potenciales

Los multiplicadores  $\dot{\lambda}_p$  y  $\dot{\lambda}_d$  se determinan a partir de las condiciones de consistencia plástica y de daño respectivamente mediante la ecuación (8.12)

Este tipo de enfoque se utiliza en la mayoría de los modelos de daño. Tiene la ventaja de permitir la construcción de leyes independientes (pero acopladas por medio del concepto de tensión efectiva) entre la plasticidad y el daño. En particular, se puede describir el caso de daño frágil en el que no se producen deformaciones plásticas significativas, por ejemplo como en el hormigón, cerámicos y compuestos cerámicos. Por el contrario pueden ocurrir deformaciones plásticas importantes sin que se produzca daño como en el caso de corte puro en aleaciones metálicas.

Este enfoque permite tener en cuenta en la modelación macroscópica el hecho de que los mecanismos de deformación plástica y de daño son diferentes.

## 8.3. Modelo de daño escalar explícito acoplado con plasticidad (Simo y Ju 1987 a y b)

### 8.3.1. Bases termodinámicas

Para introducir la plasticidad y el daño simultáneamente utilizan la siguiente expresión para la energía libre que corresponde al tipo de acoplamiento descrito como c) en el apartado 8.2.1.:

$$\Psi(\varepsilon_{ij}, \sigma_{ij}^p, q_i, d) = (1-d)\Psi^o(\varepsilon_{ij}) - \varepsilon_{ij}\sigma_{ij}^p + \Psi^p(\sigma_{ij}^p, q_i) \quad (8.17)$$

Donde  $\sigma_{ij}^p$  es la tensión de relajación plástica,  $\Psi^p$  un potencial plástico,  $q_i$  un conjunto de variables internas plásticas y .

$$\Psi^o(\varepsilon_{ij}) = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij} C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl} \quad (8.18)$$

La disipación resulta:

$$\begin{aligned}
\dot{E} &= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{\Psi} = \\
&= \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{d} \Psi^o + \dot{\varepsilon}_{ij} \sigma_{ij}^p + \varepsilon_{ij} \dot{\sigma}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \sigma_{ij}^p} \dot{\sigma}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial q_i} \dot{q}_i \\
&= \left\{ \sigma_{ij} - \left[ (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}^p \right] \right\} \dot{\varepsilon}_{ij} + \dot{d} \Psi^o + \left( \varepsilon_{ij} - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \sigma_{ij}^p} \right) \dot{\sigma}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial q_i} \dot{q}_i \geq 0
\end{aligned} \tag{8.19}$$

De donde surge las ecuaciones secantes:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} &= (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}^p \\
\varepsilon_{ij} &= \frac{\partial \Psi^p}{\partial \sigma_{ij}^p}
\end{aligned} \tag{8.20}$$

Y las expresiones de la disipación:

$$\Psi^o \dot{d} \geq 0 \quad \text{y} \quad - \frac{\partial \Psi^p}{\partial q_i} \dot{q}_i \geq 0 \tag{8.21}$$

La variable termodinámica conjugada de la variable de daño resulta:

$$-y = - \frac{\partial \Psi}{\partial d} = \Psi^o \tag{8.22}$$

### 8.3.2. Reglas de evolución de la plasticidad y el daño.

Este modelo utiliza un acoplamiento disipativo como el descrito en el punto c) del apartado 8.2.2, es decir con dos multiplicadores y dos potenciales independientes para daño y plasticidad.

La evolución del daño se describe con las ecuaciones (3.13) a (3.27) del capítulo 3.

### 8.3.3. Respuesta plástica

De acuerdo al concepto de tensión efectiva, la caracterización de la respuesta plástica debe ser formulada en el espacio de tensiones efectivas. Se define la función de fluencia en dicho espacio como:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, q_i) \leq 0 \tag{8.23}$$

Con la hipótesis de plasticidad asociada, las ecuaciones que caracterizan la respuesta plástica en el espacio de deformaciones son:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{\sigma}}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f\left(\frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}^p, q_i\right)}{\partial \varepsilon_{ij}} \\ \dot{q}_i &= \dot{\lambda} h_i \left(\frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}^p, q_i\right)\end{aligned}\quad (8.24)$$

Donde  $\dot{\lambda}$  es el parámetro de consistencia plástica y  $h_i$  el I tensor de endurecimiento.

Con la notación:

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}^p \quad (8.25)$$

Las condiciones de carga/descarga plástica resultan:

$$f(\bar{\sigma}_{ij}, q_i) \leq 0 \quad \dot{\lambda} \geq 0 \quad \dot{\lambda} f(\bar{\sigma}_{ij}, q_i) = 0 \quad (8.26)$$

La condición de consistencia plástica  $\dot{f} = 0$  conduce a :

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial q_i} \dot{q}_i &= 0 \\ \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\bar{\sigma}}_{ij}^p \\ \dot{\bar{\sigma}}_{ij}^p &= \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial \bar{\sigma}_{kl}}{\partial \varepsilon_{ij}} = \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{kl} \partial \varepsilon_{ij}} \\ \dot{\bar{\sigma}}_{ij} &= \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \left( \dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\lambda} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} \right) \\ \dot{q}_i &= \dot{\lambda} h_i\end{aligned}\quad (8.27)$$

De donde se puede extraer el multiplicador plástico que resulta:

$$\dot{\lambda} = \frac{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i} \quad (8.28)$$

La relación tangente efectiva se expresa como:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \bar{C}_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (8.29)$$

Donde el tensor elastoplástico tangente efectivo se calcula como:

$$\bar{C}_{ijkl}^t = \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} - \frac{\frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{mn} \partial \varepsilon_{kl}}}{\frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{rs}} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{rs} \partial \varepsilon_{mn}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{mn}} - \frac{\partial f}{\partial q_r} h_r} \quad (8.30)$$

Y resulta simétrico si se trabaja con plasticidad asociada.

### 8.3.4. Tensor elastoplástico dañado tangente

El tensor tangente se deduce de la expresión

$$\sigma_{ij} = (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \sigma_{ij}^p = (1-d) \left( \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} - \bar{\sigma}_{ij}^p \right) = (1-d) \bar{\sigma}_{ij} \quad (8.31)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = (1-d) \dot{\bar{\sigma}}_{ij} - \dot{d} \bar{\sigma}_{ij} = (1-d) \bar{C}_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} - \frac{H}{\tau_t} \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{kl}} \dot{\varepsilon}_{kl} \bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl}$$

$$C_{ijkl}^t = (1-d) \bar{C}_{ijkl}^t - \frac{H}{\tau_t} \bar{\sigma}_{ij} \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{kl}} \quad (8.32)$$

Y resulta en general no simétrico salvo en dos casos:

- $\bar{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}}$ , lo cual implica  $\bar{\sigma}_{ij}^p = 0$  o sea en el caso de daño puro o en ausencia de plasticidad.
- Plasticidad asociada y  $H = 0$  o sea en ausencia de daño

### 8.3.5. Tratamiento numérico

Se resuelve el problema en forma desacoplada, primero el problema de daño y luego el plástico en forma iterativa mediante un algoritmo de tipo retorno mapeado. A continuación se esquematiza el algoritmo.

- Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$
- Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:
 
$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$
- Predictor elástico  $d^n = d^{n-1}$   $r^n = r^{n-1}$
- Evaluación de la fuerza termodinámica conjugada de la variable de daño:
 
$$y^n = (\Psi^o)^n = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^n C_{ijkl}^o \varepsilon_{ij}^n$$
- Evaluación de la deformación equivalente:  $\bar{\tau}^n = \bar{\tau}(y^n)$

6) Verificación del criterio de daño

$$\text{Si } g(\bar{\tau}^n, r^n) \leq 0 \quad \text{No hay evolución del daño} \rightarrow 9)$$

7) Evolución del daño. Evaluación de la variable de daño:  $d^n = G(\bar{\tau}^n)$

8) Actualización del umbral de daño:  $r^n = \bar{\tau}^n$

9) Predictor elástico:  $k=0$

$$(\bar{\sigma}_{ij}^p)_o^n = (\bar{\sigma}_{ij}^p)_o^{n-1} \quad (q_i)_o^n = (q_i)_o^{n-1} \quad (\bar{\sigma}_{ij})_o^n = \left( \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)^n - (\bar{\sigma}_{ij}^p)_o^n$$

10) Verificación de la condición de fluencia:

$$f\left((\bar{\sigma}_{ij}^p)_k^n - (q_i)_k^n\right) \leq 0 \quad \text{No hay evolución plástica} \rightarrow 15)$$

11) Evolución plástica  $k=k+1$

12) Cálculo del parámetro de consistencia plástica:  $\Delta\lambda_k = \frac{f_k^n}{\left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \frac{\partial^2 \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij} \partial \varepsilon_{kl}} \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{kl}} - \frac{\partial f}{\partial q_i} h_i \right)_k^n}$

13) Actualización de las variables plásticas y de la tensión efectiva:

$$(\bar{\sigma}_{ij}^p)_k^n = (\bar{\sigma}_{ij}^p)_{k-1}^n + \Delta\lambda_k \left( \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)_{k-1}^n \quad (q_i)_k^n = (q_i)_{k-1}^n + \Delta\lambda_k (h_i)_{k-1}^n$$

$$(\bar{\sigma}_{ij})_k^n = \left( \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}} \right)^n - (\bar{\sigma}_{ij}^p)_k^n$$

14) Vuelva a 10)

15) Fin proceso de corrección plástica

$$(\bar{\sigma}_{ij}^p)_k^n = (\bar{\sigma}_{ij}^p)_k^n \quad (q_i)_k^n = (q_i)_k^n \quad (\bar{\sigma}_{ij})_k^n = (\bar{\sigma}_{ij})_k^n$$

$$(\sigma_{ij})_k^n = (1 - d^n)(\bar{\sigma}_{ij})_k^n$$

16) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

## 8.4. Modelo de daño escalar acoplado con plasticidad (Luccioni et al 1996)

### 8.4.1. Introducción

Este modelo resuelve simultáneamente el problema plástico con el de degradación de rigidez. Las condiciones de consistencia plástica y de daño se satisfacen simultáneamente en cada etapa de carga. De esta forma, utilizando variables de daño relacionadas con la disipación de energía en cada uno de los procesos, se logra una correcta disipación de energía del proceso global.

El modelo es simple y presenta una analogía total con los modelos elastoplásticos utilizados para reproducir el comportamiento de materiales friccionales.

### 8.4.2. Bases termodinámicas

Este modelo está basado en la hipótesis de elasticidad desacoplada según la cual la densidad de energía libre total  $\Psi$  se puede suponer formada por dos partes independientes: una parte elástica  $\Psi^e$  y una parte plástica  $\Psi^p$ , correspondientes a los procesos elástico y plástico respectivamente.

$$\Psi(\varepsilon_{ij}^e, \alpha_i, d) = \Psi^e(\varepsilon_{ij}^e, d) + \Psi^p(\kappa^p) \quad (8.33)$$

Para pequeñas deformaciones y problemas térmicamente estables, la parte elástica de la energía libre se escribe como una función cuadrática:

$$\Psi^e(\varepsilon_{ij}^e, d) = \frac{1}{2m_o} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^s(d) \varepsilon_{kl}^e] \quad (8.34)$$

Donde  $C_{ijkl}^s(d)$  es el tensor constitutivo secante afectado por el daño y  $0 \leq d \leq d_c$  es la variable de daño escalar.

Esta forma de acoplamiento corresponde a la descrita como b) en el punto 8.2.1.

Si se escribe:

$$\Psi^e = (1-d)\Psi^o = (1-d) \frac{1}{2} [\varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e] \quad (8.35)$$

Donde  $\Psi^o$  representa la energía libre elástica del material no dañado, resulta:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1-d) \frac{\partial \Psi^o}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o \varepsilon_{kl}^e \quad C_{ijkl} = (1-d) C_{ijkl}^o \quad (8.36)$$

La disipación mecánica resulta:

$$\Xi_m = \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \frac{\partial \Psi^p}{\partial \kappa^p} \dot{\kappa}^p - \frac{\partial \Psi^e}{\partial d} \dot{d} \geq 0 \quad (8.37)$$



### 8.4.3. Proceso plástico

El proceso plástico se describe a través de una generalización de la teoría de la plasticidad clásica que permite tener en cuenta algunos aspectos del comportamiento de geomateriales.

El límite del comportamiento elástico se describe a través de una función de fluencia:

$$F(\sigma_{ij}; \kappa^p) = f(\sigma_{ij}) - K^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) \leq 0 \quad (8.38)$$

donde  $f(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones que puede tomar la forma de cualquiera de las funciones de fluencia de la plasticidad clásica (Tresca, Von Mises, Mohr Coulomb, Drucker Prager, etc.)

$K(\sigma_{ij}; \alpha_k)$  es el umbral de fluencia y  $\kappa^p$  es la variable de daño plástico o variable de endurecimiento isótropo.

Se definen las siguientes reglas de evolución para las deformaciones plásticas y la variable de daño plástico:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8.39)$$

$$\dot{\kappa}^p = \dot{\lambda} H_k^p(\sigma_{ij}; \kappa^p) = \dot{\lambda} (h_{k^p})_{ij} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8.40)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es el factor de consistencia plástica,  $G$  la función de potencial y  $(h_{k^p})_{ij}$  es un tensor que define la evolución de la variable de endurecimiento plástico.

La variable de endurecimiento plástico  $\kappa^p$  se obtiene normalizando la energía disipada en el proceso plástico a la unidad y varía entre 0 para el material virgen y 1 cuando se ha disipado plásticamente la totalidad de la energía que el material es capaz de disipar de esta forma. Se propone para la misma la siguiente regla de evolución que tiene en cuenta el comportamiento diferenciado en tracción y compresión:

$$\dot{\kappa}^p = \left[ \frac{r}{g_f^{*p}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*p}} \right] \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (8.41)$$

Donde:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad \langle \sigma_i \rangle = \frac{1}{2} [\sigma_i + |\sigma_i|] \quad (8.42)$$

$\sigma_i$ : son las tensiones principales

$$g_f^{*p} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{op}}{f^p(\sigma_{ij})} g_f^p \quad g_c^{*p} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^p(\sigma_{ij})} g_c^p \quad (8.43)$$

$R^{op}$  es la relación entre los umbrales de fluencia en compresión uniaxial y en tracción uniaxial,  $g_f^p$  y  $g_c^p$  son las máximas densidades de energía disipadas por el proceso plástico en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente. En el caso de un proceso termodinámico sin daño, estas energías pueden ser evaluadas como:

$$g_f^p = \frac{G_f}{l_c} \quad \text{y} \quad g_c^p = \frac{G_c}{l_c} \quad (8.44)$$

Donde  $G_f$  y  $G_c$  son las energías de fractura y aplastamiento respectivamente y  $l_c$  es un parámetro externo que depende del tamaño característico de la malla de elementos finitos y se introduce para obtener objetividad de la respuesta del sólido respecto del tamaño de la malla.

Se propone la siguiente regla de evolución para el umbral de fluencia equivalente:

$$K(\sigma_{ij}, \kappa^p) = r R^{op} \sigma_t(\kappa^p) + (1-r) \sigma_c(\kappa^p) \quad (8.45)$$

Donde  $\sigma_t(\kappa^p)$  and  $\sigma_c(\kappa^p)$  representan la evolución de los umbrales de fluencia en ensayos de tracción y compresión uniaxial respectivamente.

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Kuhn-Tucker formuladas para problemas con restricciones unilaterales:

$$\dot{\lambda} \geq 0 \quad F^p \leq 0 \quad \dot{\lambda} F^p = 0 \quad (8.46)$$

#### 8.4.4. Proceso de daño

El umbral de daño se describe a través de una función de daño de la siguiente forma:

$$F^d = f^d(\sigma_{ij}) - K^d(\sigma_{ij}; \kappa^d) \leq 0 \quad (8.47)$$

donde  $f^d(\sigma_{ij})$  es la tensión equivalente definida en el espacio de tensiones  $K^d(\sigma_{ij}, \kappa^d)$  es el umbral de daño equivalente y  $\kappa^d$  es la variable de endurecimiento de daño.

La tensión equivalente  $f^d(\sigma_{ij})$  puede ser evaluada utilizando funciones conocidas de la teoría de la plasticidad (Tresca, Von-Mises, Mohr-Coulomb or Drucker-Prager) o cualquier otra función especialmente desarrollada para daño.

La variable de endurecimiento en daño varía entre 0, para el material virgen, a 1, para el material completamente dañado. Se obtiene normalizando la energía disipada por daño a la unidad.

$$\dot{\kappa}^d = \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right] \Psi^o \dot{d} \quad (8.48)$$

$$\mathbf{g}_f^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i| R^{od}}{f^d} \mathbf{g}_f^d \quad \mathbf{g}_c^{*d} = \frac{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|}{f^d} \mathbf{g}_c^d \quad (8.49)$$

$R^{od}$  es la relación entre los umbrales de daño en compresión uniaxial y tracción uniaxial,  $\mathbf{g}_f^d$  y  $\mathbf{g}_c^d$  son las máximas densidades de energía disipadas por daño en tracción uniaxial y compresión uniaxial respectivamente.

Se propone la siguiente ecuación para el umbral de daño equivalente:

$$K^d(\sigma_{ij}, \kappa^d) = r \sigma_t^d(\kappa^d) + (1-r) \sigma_c^d(\kappa^d) \quad (8.50)$$

donde  $\sigma_t(\kappa^d)$  y  $\sigma_c(\kappa^d)$  representan la evolución de los umbrales de daño en ensayos de compresión y tracción uniaxial respectivamente.

Las condiciones de carga/descarga se derivan de las relaciones de Khun-Tucker y resultan análogas a las correspondientes al proceso plástico:

$$\dot{d} \geq 0 \quad F^d \leq 0 \quad \dot{d} F^d = 0 \quad (8.51)$$

#### 8.4.5. Plasticidad y daño acoplados

La evolución de las deformaciones plásticas y del daño se obtiene de la solución simultánea de las siguientes ecuaciones denominadas condiciones de consistencia de problema:

$$\begin{cases} \dot{F}^p = 0 \\ \dot{F}^d = 0 \end{cases} \quad (8.52)$$

Las ecuaciones (8.52) son dos ecuaciones lineales en  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{d}$  que pueden ser fácilmente resueltas.

La ley constitutiva secante se puede escribir como sigue:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (8.53)$$

La ley constitutiva tangente puede obtenerse derivando la ecuación (8.53) e incorporando los valores de  $\dot{\lambda}$  y  $\dot{d}$  obtenidos de la solución simultánea de las ecuaciones (8.52) y resulta:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (8.54)$$

Donde:

$$C_{ijkl}^t = C_{ijkl}^e - \frac{C_{ijrs}^s \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{rs}} \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnkl}^e}{-\frac{\partial F}{\partial \kappa^p} (h_{\kappa^p})_{tu} \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{tu}} + \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs}^s \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \sigma_{rs}}} \quad (8.55)$$

$$C_{ijkl}^e = C_{ijkl}$$

$$\frac{\bar{\sigma}_{ij} \left[ \frac{\partial F^d}{\partial \sigma_{tu}} \left( -\frac{\partial F^p}{\partial \kappa^p} (h_p)_{mn} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) - \left( \frac{\partial F^d}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{tu}} \right] C_{tukl}}{\left( -\frac{\partial F^p}{\partial \kappa^p} (h_{\kappa^p})_{mn} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} + \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \left( -\frac{\partial F^d}{\partial \kappa^d} h_{\kappa^d} + \frac{\partial F^d}{\partial \sigma_{tu}} \bar{\sigma}_{tu} \right) - \left( \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{mn}} C_{mnrs} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}} \right) \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{tu}} \bar{\sigma}_{tu}}$$
(8.56)

#### 8.4.6. Otra forma de escribir este modelo

Este modelo puede ser escrito en forma de un modelo multidisipativo en el que existen simultáneamente varios mecanismos disipativos que pueden escribirse en forma idéntica a los modelos elastoplásticos clásicos. Para ello es necesario interpretar al daño como un mecanismo disipativo que produce un aumento de deformación por arriba de la correspondiente para el caso elastoplástico sin degradación de rigidez. Derivando la ecuación secante (8.53), se obtiene:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial \Psi^e}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl}^s \varepsilon_{kl}^e = (1-d) C_{ijkl}^o (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (8.57)$$

Que también puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d) C_{ijkl}^o (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p) - \dot{d} C_{ijkl}^o C_{klrs}^{-1} \sigma_{rs} \\ \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d) C_{ijkl}^o (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p - \frac{\dot{d}}{1-d} C_{klrs}^{-1} \sigma_{rs}) \\ \dot{\sigma}_{ij} &= (1-d) C_{ijkl}^o (\dot{\varepsilon}_{kl} - \dot{\varepsilon}_{kl}^p - \dot{\varepsilon}_{kl}^d) = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \end{aligned} \quad (8.58)$$

Donde:

$$\dot{\varepsilon}_{kl}^d = \frac{\dot{d}}{1-d} C_{klrs}^{-1} \sigma_{rs} \quad (8.59)$$

Representa el aumento de la tasa de deformación debido al daño.

Las reglas de evolución de las deformaciones plásticas y del daño y las correspondientes variables internas pueden escribirse como:

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}^p m_{ij}^p & \dot{\kappa}^p &= \dot{\lambda}^p h_{\kappa^p} m_{ij}^p & \text{donde} & m_{ij}^p &= \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dot{\varepsilon}_{ij}^d &= \dot{\lambda}^d m_{ij}^d & \dot{\kappa}^d &= \dot{\lambda}^d h_{\kappa^d} m_{ij}^d & m_{ij}^p &= C_{ijkl}^{-1} \sigma_{kl} \end{aligned} \quad (8.60)$$

Si además se llaman :

$$n_{ij}^p = \frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{ij}} \quad n_{ij}^d = \frac{\partial F^d}{\partial \sigma_{ij}} \quad (8.61)$$

Y

$$-H^p = \frac{\partial F^p}{\partial \kappa^p} \quad -H^d = \frac{\partial F^d}{\partial \kappa^d} \quad (8.62)$$

Las condiciones de consistencia (8.52) pueden ser escrita en forma compacta:

$$\begin{aligned} n_{ij}^p \dot{\sigma}_{ij} - H^p \dot{\kappa}^p &= 0 \\ n_{ij}^d \dot{\sigma}_{ij} - H^d \dot{\kappa}^d &= 0 \end{aligned} \quad (8.63)$$

Reemplazando las ecuaciones (8.58) y (8.60) en la (8.62) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{bmatrix} \bar{H}^p & n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^d \\ n_{ij}^d C_{ijkl} m_{kl}^p & \bar{H}^d \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\lambda}^p \\ \dot{\lambda}^d \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_{ij}^p C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \\ n_{ij}^d C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \end{Bmatrix} \quad (8.64)$$

$$\bar{H}^p = n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^p + H^p h_{k^p kl} m_{kl}^p$$

$$\bar{H}^d = n_{ij}^d C_{ijkl} m_{kl}^d + H^d h_{k^d kl} m_{kl}^d$$

De donde se pueden despejar los multiplicadores que resultan:

$$\begin{aligned} \dot{\lambda}^p &= \frac{(n_{ij}^p C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) \bar{H}^d - (n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^d) (n_{rs}^d C_{rspq} \dot{\epsilon}_{pq})}{\bar{H}^p \bar{H}^d - (n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^d) (n_{rs}^d C_{rspq} m_{pq}^p)} \\ \dot{\lambda}^d &= \frac{\bar{H}^p (n_{ij}^d C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) - (n_{ij}^p C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl}) (n_{rs}^d C_{rspq} m_{pq}^p)}{\bar{H}^p \bar{H}^d - (n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^d) (n_{rs}^d C_{rspq} m_{pq}^p)} \end{aligned} \quad (8.65)$$

Y el módulo tangente de ecuación (8.58) resulta:

$$\begin{aligned} C_{ijkl}^t &= C_{ijkl} - \frac{(C_{ijpq} m_{pq}^p) [\bar{H}^d (n_{rs}^p C_{rskl}) - (n_{rs}^p C_{rstu} m_{tu}^d) (n_{mn}^d C_{mnkl})]}{\bar{H}^p \bar{H}^d - (n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^d) (n_{rs}^d C_{rspq} m_{pq}^p)} \\ &\quad - \frac{(C_{ijpq} m_{pq}^d) [\bar{H}^p (n_{rs}^d C_{rskl}) - (n_{rs}^d C_{rstu} m_{tu}^p) (n_{mn}^p C_{mnkl})]}{\bar{H}^p \bar{H}^d - (n_{ij}^p C_{ijkl} m_{kl}^d) (n_{rs}^d C_{rspq} m_{pq}^p)} \end{aligned} \quad (8.66)$$

#### 8.4.7. Implementación numérica

Para este modelo las ecuaciones plásticas y de daño deben ser integradas simultáneamente. Se presenta a continuación un algoritmo de tipo Euler-Backward. Entre dos configuraciones de equilibrio  $n$  y  $n-1$  las variables del problema se actualizan como sigue:

$$(\epsilon_{ij}^p)_n = (\epsilon_{ij}^p)_{n-1} + \Delta \lambda^n \left( \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \right)_n \quad (8.67)$$

$$d^n = d^{n-1} + \Delta d^n \quad (8.68)$$

$$\left(\kappa^p\right)^n = \left(\kappa^p\right)^{n-1} + \Delta\lambda^n \left(H_k^p\right)^n \quad (8.69)$$

$$\left(\kappa^d\right)^n = \left(\kappa^d\right)^{n-1} + \Delta d^n \left(H_k^d\right)^n \quad (8.70)$$

$$\left(\sigma_{ij}\right)^n = (1-d^n) C_{ijkl}^o \left[ \left(\varepsilon_{kl}\right)^n - \left(\varepsilon_{kl}^p\right)^n \right] \quad (8.71)$$

Reemplazando en las ecuaciones (8.18) y (8.27) correspondientes a las condiciones de fluencia y daño, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$\begin{cases} H^p(\Delta\lambda_n, \Delta d_n) = F^p \left[ (\sigma_{ij})_n; (\alpha_k)_n \right] = 0 \\ H^d(\Delta\lambda_n, \Delta d_n) = F^d \left[ (\sigma_{ij})_n; (k^d)_n \right] = 0 \end{cases} \quad (8.72)$$

Este sistema puede ser resuelto, por ejemplo, mediante el método de Newton Raphson, para encontrar la solución en forma iterativa:

$$\begin{Bmatrix} \Delta\lambda^n \\ \Delta d^n \end{Bmatrix}_k = \begin{Bmatrix} \Delta\lambda^n \\ \Delta d^n \end{Bmatrix}_{k-1} - \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial R^p}{\partial \Delta\lambda}\right)^n & \left(\frac{\partial R^p}{\partial \Delta d}\right)^n \\ \left(\frac{\partial R^d}{\partial \Delta\lambda}\right)^n & \left(\frac{\partial R^d}{\partial \Delta d}\right)^n \end{bmatrix}_{k-1}^{-1} \begin{Bmatrix} R^p(\Delta\lambda^n, \Delta d^n) \\ R^d(\Delta\lambda^n, \Delta d^n) \end{Bmatrix}_{k-1} \quad (8.73)$$

Para obtener el tensor de rigidez tangente consistente se deriva la ecuación secante:

$$\begin{aligned} (d\sigma_{ij})^n &= -d(d^n) C_{ijkl}^o \left[ \left(\varepsilon_{kl}\right)^n - \left(\varepsilon_{kl}^p\right)^{n-1} - \Delta\lambda^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right)^n \right] + \\ &+ \left(C_{ijkl}\right)^n (d\varepsilon_{ij})^n - d\lambda \left(C_{ijkl}\right)^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right)^n + \\ &- \Delta\lambda_n \left(C_{ijkl}\right)^n \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{kl} \partial \sigma_{pq}}\right)^n (d\sigma_{pq})^n \end{aligned} \quad (8.74)$$

La ecuación (8.46) puede ser escrita como:

$$(d\sigma_{ij})^n = \left(C_{ijkl}^{e*}\right)^n (d\varepsilon_{kl})^n - \left(C_{ijkl}^*\right)^n d\lambda^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{kl}}\right)^n \quad (8.75)$$

Donde:

$$\left(C_{ijkl}^{e*}\right)^n = \left[ \delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta\lambda^n \left(C_{ijrs}\right)^n \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}}\right)^n \right]^{-1} \left(C_{pqkl}^e\right)^n \quad (8.76)$$

$$\left(C_{ijkl}^*\right)^n = \left[ \delta_{ip} \delta_{jq} + \Delta\lambda^n \left(C_{ijrs}\right)^n \left(\frac{\partial^2 G}{\partial \sigma_{rs} \partial \sigma_{pq}}\right)^n \right]^{-1} \left(C_{pqkl}\right)^n \quad (8.77)$$

El módulo tangente consistente resulta:

$$\left(\hat{C}_{ijkl}\right)^n = \left(C_{ijkl}^{e*}\right)^n - \frac{\left(C_{ijpq}^*\right)^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{pq}}\right)^n \left(\frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{rs}}\right)^n \left(C_{rskl}^{e*}\right)^n}{-\left(\frac{\partial F^p}{\partial \kappa^p}\right)^n \left[\left(h_p\right)_{tu}\right]^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{tu}}\right)^n + \left(\frac{\partial F^p}{\partial \sigma_{pq}}\right)^n \left(C_{pqrs}^*\right)^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{rs}}\right)^n} \quad (8.78)$$

A continuación se esquematiza el algoritmo de integración de la ecuación constitutiva en cada punto de integración.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} \left( \Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n \right)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Inicialización de variables para el predictor elástico

$$k = 0; \Delta \lambda_o^n = 0; \Delta d_o^n = 0; \left(\sigma_{ij}\right)_{k-1}^n = \left(1 - d^{n-1}\right) C_{ijkl}^o \left[ \left(\varepsilon_{ij}\right)^n - \left(\varepsilon_{ij}^p\right)^{n-1} \right]$$

4) Actualización de las deformaciones plásticas:  $\left(\varepsilon_{ij}^p\right)_k^n = \left(\varepsilon_{ij}\right)^{n-1} + \Delta \lambda_k^n \left(\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}\right)_{k-1}^n$

5) Actualización de la variable de daño:  $d_k^n = d^{n-1} + \Delta d_k^n$

6) Actualización de las tensiones:  $\left(\sigma_{ij}\right)_k^n = \left(1 - d_k^n\right) C_{ijkl}^o \left[ \left(\varepsilon_{kl}\right)^n - \left(\varepsilon_{kl}^p\right)_k^n \right]$

7) Actualización de las variables de endurecimiento:

$$\left(\kappa^p\right)_k^n = \left(\kappa^p\right)^{n-1} + \Delta \lambda_k^n \left[ \left(h_{k^p}\right)_{ij} \frac{\partial G(\sigma_{mn}; \kappa^p)}{\partial \sigma_{ij}} \right]_k^n$$

$$\left(\kappa^d\right)_k^n = \left(\kappa^d\right)^{n-1} + \left[ \frac{r}{g_f^{*d}} + \frac{(1-r)}{g_c^{*d}} \right]_k^n \left(\psi^o\right)^n \Delta d_k^n$$

8) Verificación de la condición de fluencia y de daño

Si  $\left(R^p\right)_k^n \leq 0$  and  $\left(R^d\right)_k^n \leq 0$  vaya a (16)

9) Si  $\left(R^p\right)_k^n \geq 0$   $k=k+1$  vaya a (11)

10)  $\left(\partial R^p / \partial \Delta d\right)_k^n = 0$   $k=k+1$  vaya a (13)

11) Si  $\left(R^d\right)_k^n \geq 0$  vaya a (13)

$$12) \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta \lambda \right)_k^n = 0$$

$$13) \Delta \lambda_k^n = \Delta \lambda_{k-1}^n - \frac{\left\langle R^p(\Delta \lambda_{k-1}^n, \Delta d_{k-1}^n) \right\rangle \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta d \right)_{k-1}^n - \left\langle R^d(\Delta \lambda_{k-1}^n, \Delta d_{k-1}^n) \right\rangle \left( \partial \mathcal{R}^p / \partial \Delta d \right)_{k-1}^n}{\left( \partial \mathcal{R}^p / \partial \Delta \lambda \right)_{k-1}^n \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta d \right)_{k-1}^n - \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta \lambda \right)_{k-1}^n \left( \partial \mathcal{R}^p / \partial \Delta d \right)_{k-1}^n}$$

$$14) \Delta d_k^n = \Delta d_{k-1}^n - \frac{\left\langle R^d(\Delta \lambda_{k-1}^n, \Delta d_{k-1}^n) \right\rangle \left( \partial \mathcal{R}^p / \partial \Delta \lambda \right)_{k-1}^n - \left\langle R^p(\Delta \lambda_{k-1}^n, \Delta d_{k-1}^n) \right\rangle \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta \lambda \right)_{k-1}^n}{\left( \partial \mathcal{R}^p / \partial \Delta \lambda \right)_{k-1}^n \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta d \right)_{k-1}^n - \left( \partial \mathcal{R}^d / \partial \Delta \lambda \right)_{k-1}^n \left( \partial \mathcal{R}^p / \partial \Delta d \right)_{k-1}^n}$$

15) Vaya a (4)

16)

$$d^n = d_k^n ; (\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n ; (\kappa^p)^n = (\kappa^p)_k^n ; (\kappa^d)^n = (\kappa^d)_k^n ; (\varepsilon_{ij}^p)^n = (\varepsilon_{ij}^p)_k^n$$

17) Cálculo del tensor de rigidez tangente  $(C_{ijkl}^t)^n$

18) Fin

#### 8.4.8. Ejemplos de aplicación

##### a) Compresión biaxial de una probeta de hormigón

En este ejemplo se estudia el comportamiento del hormigón bajo compresión biaxial. El hormigón se modela como un material elastoplástico con daño. Las propiedades mecánicas utilizadas para el hormigón se resumen a continuación.

$$E = 30000 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.24$$

$$\sigma_{oc} = 22.9 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{peak} = 32.8 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{ot}} = 10$$

$$\sigma_{ot}$$

$$\kappa_{peak}^p = 0.38$$

$$G_f^p = 0.08 \text{ N/m m}$$

$$G_c^p = 8.0 \text{ N/m m}$$

Criterio de fluencia : Lubliner - Oller (Oller 1988) ( $\alpha = 0.12 ; \gamma = 3.0 ; p = 0.0$ )

Función de portencial : Mohr Coulomb  $\psi = 15^\circ$

$$G_f^d = 0.08 \text{ N/m m}$$

$$G_c^d = 8.0 \text{ N/m m}$$

Criterio de daño : Lubliner - Oller ( $\alpha = 0.12 ; \gamma = 3.0 ; p = 0.0$ )

La malla de elementos finitos y las condiciones de carga se muestran en la Figura 8.1. En la misma figura se presentan las curvas tensión- deformación en el plano y normal al plano. Se puede observar un buen ajuste de los resultados experimentales.



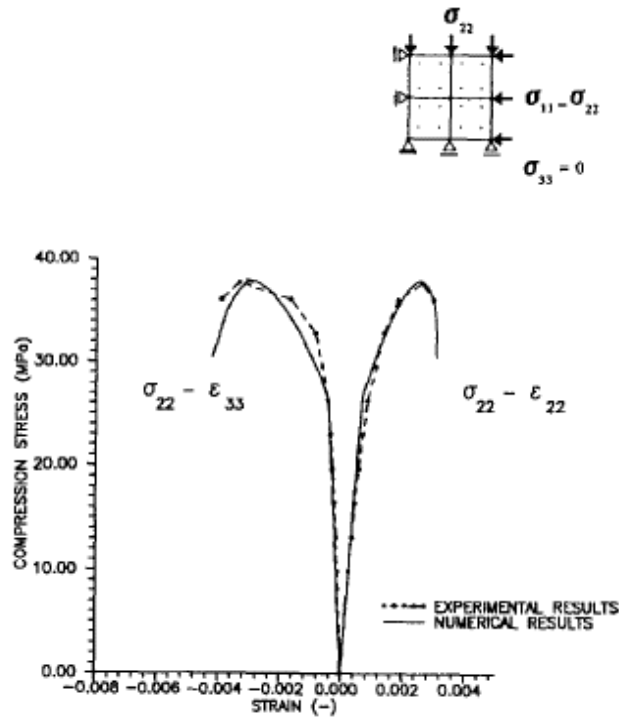


Figura 8.1. Hormigón bajo compresión biaxial

#### b) Compresión uniaxial cíclica

Este ejemplo se utiliza para probar la habilidad del modelo y el algoritmo propuesto para reproducir el comportamiento de un material elastoplástico degradable como el hormigón. La malla de elementos finitos y las condiciones de carga están indicadas en la Figura 8.2. Las propiedades mecánicas utilizadas para el hormigón se resumen a continuación.

En la Figura 8.2. se muestran las curvas tensión-deformación obtenidas y su comparación con los resultados experimentales. Puede verse que el modelo reproduce ajustadamente el comportamiento de hormigón en compresión cíclica. Las ramas de descarga tienen aproximadamente la misma pendiente. Obviamente, el modelo no es capaz de reproducir los lazos de histéresis que aparecen en los resultados experimentales porque se supuso que la descarga era lineal elástica.

$$E = 19324.4 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.24$$

$$\sigma_{oc} = 22.0 \text{ MPa}$$

$$\sigma_{peak} = 26.5 \text{ MPa}$$

$$\frac{\sigma_{oc}}{\sigma_{ot}} = 10$$

$$\sigma_{ot}$$

$$\kappa_{peak}^p = 0.12$$

$$G_f^p = 0.08 \text{ N/m m}$$

$$G_c^p = 30.0 \text{ N/m m}$$

Criterio de Fluencia : Lubliner - Oller (1988)

$$(\alpha = 0.12; \gamma = 3.0; p = 0.0)$$

Flujo asociado

$$\kappa_{peak}^d = 0.12$$

$$G_f^d = 0.08 \text{ N/m m}$$

$$G_c^d = 10.0 \text{ N/m m}$$

Criterio de daño : Lubliner - Oller

$$(\alpha = 0.12; \gamma = 3.0; p = 0.0)$$

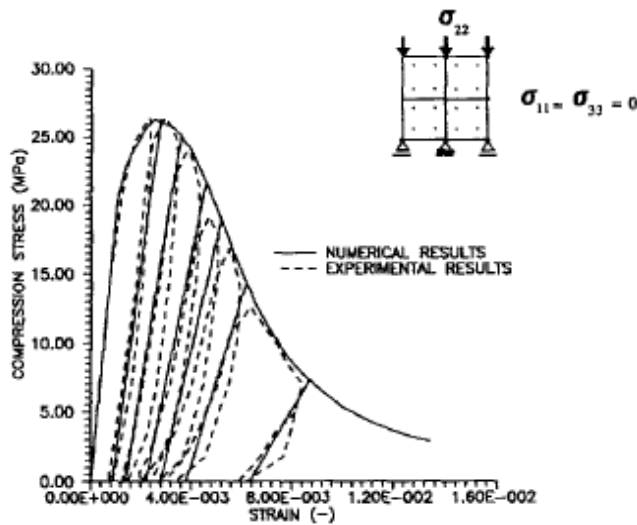


Figura 8.2. Hormigón bajo compresión uniaxial cíclica

## 8.5. Modelo de daño escalar viscoso unilateral y plasticidad (Faria et al 1998)

Este modelo ha sido desarrollado principalmente para el análisis sísmico de presas de gravedad. Tiene en cuenta el comportamiento diferenciado en tracción y compresión, la recuperación de rigidez en la descarga, la dependencia de la velocidad de deformación y

la presencia de deformaciones permanentes cuando se superan ciertos umbrales de tensión.

### 8.5.1. Modelo de daño y plasticidad independiente del tiempo

#### Tensión Efectiva

La tensión efectiva se define como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^o (\varepsilon_{kl} - \varepsilon_{kl}^p) \quad (8.79)$$

Para distinguir claramente las contribuciones de las tensiones de tracción de las de compresión que producen mecanismos de degradación independientes, se descompone el tensor de tensiones efectivas en sus componentes positiva y negativa, definidas como sigue:

$$\bar{\sigma}_{kl}^+ = \sum_{i=1}^3 \langle \bar{\sigma}_i \rangle n_k^i n_l^i \quad (8.80)$$

$$\bar{\sigma}_{kl}^- = \bar{\sigma}_{kl} - \bar{\sigma}_{kl}^+ \quad (8.81)$$

Donde  $\sigma_i$  es la  $i$ -ésima tensión principal y  $n_k^i$  representa un vector en la dirección principal de tensión  $i$ .

#### Energía libre

La densidad de energía libre se escribe como:

$$\begin{aligned} \Psi (\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p, d^+, d^-) &= (1 - d^+) \Psi^{o+} (\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) + (1 - d^-) \Psi^{o-} (\varepsilon_{ij}, \varepsilon_{ij}^p) \\ \Psi^{o+} &= \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij}^+ C_{ijkl}^{o+} \bar{\sigma}_{kl}^- \quad \Psi^{o-} = \frac{1}{2} \bar{\sigma}_{ij}^- C_{ijkl}^{o-} \bar{\sigma}_{kl}^- \end{aligned} \quad (8.82)$$

Donde las variables internas están representadas por la deformación plástica  $\varepsilon_{ij}^p$  y dos variables de daño escalares:  $d^+$  y  $d^-$ . Esta forma corresponde al tipo de acoplamiento definido como c) en el punto 8.2.1. Esta expresión tiene cierta similitud con los potenciales utilizados por Mazars y Pijaudier Cabot (1989) pero, a diferencia de aquellos, la energía libre está definida aquí en términos del tensor de tensiones efectivas en lugar del tensor de tensiones.

Debido a la naturaleza no negativa de  $\Psi^{o+}$  y  $\Psi^{o-}$  y a que las variables de daño están comprendidas entre 0 y 1, resulta:

$$\Psi = (1 - d^+) \Psi^{o+} + (1 - d^-) \Psi^{o-} \geq 0 \quad (8.83)$$

Las fuerzas termodinámicas asociadas a las variables de daño  $d^+$  y  $d^-$  son:

$$-\frac{\partial \Psi}{\partial d^+} = \Psi^{o+} \geq 0 \quad -\frac{\partial \Psi}{\partial d^-} = \Psi^{o-} \geq 0 \quad (8.84)$$

Y se puede probar que son no negativas

**Criterio de daño**

De manera análoga a la deformación equivalente utilizada por Simo y Ju (1987a), se define en este caso una tensión equivalente en tracción y otra en compresión, como sigue:

$$\bar{\tau}^+ = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^+ C_{ijkl}^{-1} \bar{\sigma}_{kl}^+} \quad \bar{\tau}^- = \sqrt{\sqrt{3}(K\bar{\sigma}_{oct}^- + \bar{\tau}_{oct}^-)} \quad (8.85)$$

Donde  $\bar{\sigma}_{oct}^-$  y  $\bar{\tau}_{oct}^-$  son las tensiones octahédricas normal y tangencial obtenidas del tensor  $\bar{\sigma}_{ij}^-$  y  $K$  es un parámetro del material que permite ajustar la relación entre umbrales de daño en compresión biaxial simétrica y compresión uniaxial.

Se introducen dos criterios de daño separados para tracción y compresión:

$$g^+(\bar{\tau}^+, r^+) = \bar{\tau}^+ - r^+ \leq 0 \quad g^-(\bar{\tau}^-, r^-) = \bar{\tau}^- - r^- \leq 0 \quad (8.86)$$

En la Figura 8.3 se muestra la forma de la superficie umbral de daño en el espacio de tensiones.

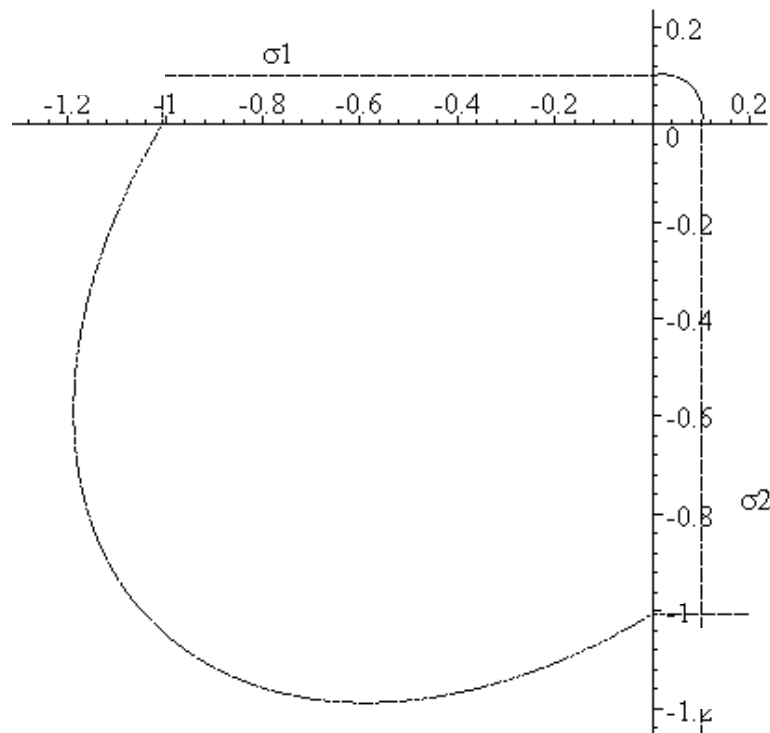


Figura 8.3. Superficie umbral de daño en el espacio de tensiones  
 $\sigma_c^d / \sigma_t^d = 10; \sigma_{cb}^d / \sigma_c^d = 1.16$

**Leyes de evolución de las variables internas**

$$\dot{d}^+ = \dot{g}^+ \frac{\partial G^+(r^+)}{\partial r^+} \quad \dot{r}^+ = \dot{g}^+ \geq 0 \quad (8.87)$$

$G^+$  y  $G^-$  son funciones monotónicas crecientes seleccionadas de acuerdo a observaciones experimentales y  $\dot{\vartheta}^+$  y  $\dot{\vartheta}^-$  los parámetros de consistencia de daño.

Las condiciones de carga/descarga se escriben:

$$\dot{\vartheta}^+ \geq 0 \quad g^+ \leq 0 \quad \dot{\vartheta}^+ g^+ = 0 \quad (8.88)$$

De manera que en un instante cualquiera  $t$ , el umbral de daño está dado por:

$$r^+ = \max \left\{ r_o^+, \max_{s \in [0, t]} (\bar{\tau}_s^+) \right\} \quad (8.89)$$

Trabajando con estas ecuaciones se puede encontrar la evolución de la variable de daño en tracción durante la carga:

$$\dot{d}^+ = \frac{\partial G^+(r^+)}{\partial r^+} \dot{r}^+ = \dot{G}^+(r^+) \geq 0 \Rightarrow d^+ = G^+(r^+) \quad (8.90)$$

$$\dot{d}^- = \frac{\partial G^-(r^-)}{\partial r^-} \dot{r}^- = \dot{G}^-(r^-) \geq 0 \Rightarrow d^- = G^-(r^-)$$

$$G^+(r^+) = 1 - \frac{r_o^+}{r^+} e^{A^+ \left(1 - \frac{r^+}{r_o^+}\right)} \quad A^+ = \frac{1}{\frac{g_f}{r_o^{+2}} - \frac{1}{2}} \quad (8.91)$$

$$G^-(r^-) = 1 - \frac{r_o^-}{r^-} (1 - A^-) - A^- e^{B^- \left(1 - \frac{r^-}{r_o^-}\right)}$$

### Regla de evolución de las deformaciones plásticas

Se utiliza la siguiente regla:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \beta E^o H(\dot{d}^-) \frac{\langle \bar{\sigma}_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} \rangle}{\bar{\sigma}_{mn} \bar{\sigma}_{mn}} C_{ijkl}^{o-1} \bar{\sigma}_{kl} \quad (8.92)$$

Donde  $\beta \geq 0$  es un parámetro introducido para controlar la velocidad de crecimiento de la deformación plástica.

La idea básica de la ecuación (8.92) es que la evolución de deformación plástica tiene la dirección de la deformación elástica  $C_{ijkl}^{o-1} \bar{\sigma}_{kl}$  y sólo se produce cuando crece el daño en compresión. Esto corresponde al tipo de acoplamiento disipativo definido como a) en el apartado 8.2.2.

### Expresión secante

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = (1 - d^+) \frac{\partial \Psi^{o+}}{\partial \varepsilon_{ij}^e} + (1 - d^-) \frac{\partial \Psi^{o-}}{\partial \varepsilon_{ij}^e} \quad (8.93)$$

$$\sigma_{ij} = (1 - d^+) \bar{\sigma}_{ij}^+ + (1 - d^-) \bar{\sigma}_{ij}^-$$

*Disipación*

$$\begin{aligned} \dot{\Xi} &= \Psi^{o+} \dot{d}^+ + \Psi^{o-} \dot{d}^- - \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \\ \Xi &= \Psi^{o+} \dot{d}^+ + \Psi^{o-} \dot{d}^- + 2b \Psi \geq 0 \quad b = \beta E^o H(\dot{d}^-) \frac{\langle \bar{\sigma}_{mn} \dot{\varepsilon}_{mn} \rangle}{\bar{\sigma}_{mn} \bar{\sigma}_{mn}} \geq 0 \end{aligned} \quad (8.94)$$

**8.5.2. Regularización viscosa**

Siguiendo un procedimiento análogo al de Perzyna para viscoplasticidad, la evolución del umbral de daño descrita por ecuación (8.162b) se reemplaza por:

$$\dot{r}^+ = \mu^+ \phi^+(\bar{\tau}^+, r^+) \geq 0 \quad (8.95)$$

$$\phi^+(\bar{\tau}^+, r^+) = r_o^+ \left[ \frac{\langle \bar{\tau}^+ - r^+ \rangle}{r^+} \right]^{a^+} \quad (8.96)$$

Donde  $\mu^+$  denota el parámetro de fluidez y  $a^+$  es un exponente positivo, ambos parámetros del material que deben ser determinados a partir de ensayos uniaxiales.

Expresiones totalmente similares se utilizan para el caso de compresión con otros parámetros materiales  $\mu^-$  y  $a^-$ .

Las expresiones (8.90) para la evolución de las variables de daño siguen siendo válidas en este caso.

**8.5.3. Tratamiento numérico**

La integración de la ecuación constitutiva se hace en forma desacoplada. En primer lugar se resuelve el modelo plástico para encontrar la tensión efectiva y luego se resuelve el modelo de daño. Para la resolución del modelo plástico se emplea un algoritmo de tipo Euler-Backward y se tiene en cuenta, además, que las deformaciones plásticas sólo ocurren en el caso en que haya evolución del daño  $d^-$ .

A continuación se esquematiza el algoritmo completo.

1) Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$

2) Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} (\Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3) Predictor efectivo elástico

$$\lambda = 1 \quad (\bar{\sigma}_{ij})_o^n = (\bar{\sigma}_{ij})^{n-1} + C_{ijkl}^o \Delta \varepsilon_{kl}^n$$

$$(d^+)^n = d^{+(n-1)} \quad (r^+)^n = r^{+(n-1)} \quad , \quad (d^-)^n = d^{-(n-1)} \quad (r^-)^n = r^{-(n-1)}$$

4) Descomposición de la tensión efectiva:  $(\bar{\sigma}_{kl}^-)^n = \sum_{i=1}^3 \langle -(\bar{\sigma}_i^-)^n \rangle (n_k^i n_l^i)^n$

5) Evaluación de la fuerza termodinámica conjugada de la variable de daño  $d^-$ :

$$(y^-)^n = (\Psi^{o-})^n = \frac{1}{2} (\bar{\sigma}_{ij}^-)^n C_{ijkl}^{o-} (\bar{\sigma}_{kl}^-)^n$$

6) Evaluación de la deformación equivalente:  $(\bar{\tau}^-)^n = \bar{\tau}^- [(y^-)^n]$

7) Verificación del criterio de daño  $d^-$

$$\text{Si } g^-(\bar{\tau}^-, r^-) \leq 0 \quad \text{No hay plasticidad} \rightarrow (10)$$

8) Condición de fluencia:  $\left\langle \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^-)^n : \Delta \varepsilon_{ij}^n}{\sqrt{(\bar{\sigma}_{ij}^-)^n (\bar{\sigma}_{ij}^-)^n}} \right\rangle \leq 0 \quad \text{No hay plasticidad} \rightarrow (10)$

9) Evolución plástica:  $\lambda = 1 - \frac{\beta}{\sqrt{(\bar{\sigma}_{ij}^-)^n (\bar{\sigma}_{ij}^-)^n}} E \left\langle \frac{(\bar{\sigma}_{ij}^-)^n : \Delta \varepsilon_{ij}^n}{\sqrt{(\bar{\sigma}_{ij}^-)^n (\bar{\sigma}_{ij}^-)^n}} \right\rangle$

10) Cálculo de la tensión efectiva:  $(\bar{\sigma}_{ij}^-)^n = \lambda (\bar{\sigma}_{ij}^-)^n$

11) Descomposición de la tensión efectiva:

$$(\bar{\sigma}_{kl}^+)^n = \sum_{i=1}^3 \langle (\bar{\sigma}_i^+)^n \rangle (n_k^i n_l^i)^n \quad (\bar{\sigma}_{kl}^-)^n = \sum_{i=1}^3 \langle -(\bar{\sigma}_i^-)^n \rangle (n_k^i n_l^i)^n$$

12) Evaluación de las deformaciones equivalentes:

$$\bar{\tau}^{+n} = \sqrt{\bar{\sigma}_{ij}^{+n} C_{ijkl}^{o-} \bar{\sigma}_{kl}^{+n}} \quad \bar{\tau}^{-n} = \sqrt{\sqrt{3} (K \bar{\sigma}_{oct}^{-n} + \bar{\tau}_{oct}^{-n})}$$

13) Criterio de daño  $d^+$ :  $g^+(\bar{\tau}^{+n}, r^{+n}) = \bar{\tau}^{+n} - r^{+n} \leq 0 \quad \text{No evoluciona } d^+ \rightarrow (16)$

14)  $d^{+n} = G(\bar{\tau}^{+n})$

15) Actualización del umbral de daño:  $r^{+n} = \bar{\tau}^{-n}$

16) Criterio de daño  $d^-$ :  $g^-(\bar{\tau}^{-n}, r^{-n}) = \bar{\tau}^{-n} - r^{-n} \leq 0 \quad \text{No evoluciona } d^- \rightarrow (19)$

17)  $d^{-n} = G(\bar{\tau}^{-n})$

18) Actualización del umbral de daño:  $r^{-n} = \bar{\tau}^{-n}$

19) Actualización del tensor de tensiones

$$\sigma_{ij}^n = (1 - d^{+n}) (\bar{\sigma}_{ij}^+)^n + (1 - d^{-n}) (\bar{\sigma}_{ij}^-)^n$$

20) Fin del proceso de integración de la ecuación constitutiva.

## 8.6. Un modelo de daño anisótropo y plasticidad acoplado (Voyiadjis 2000)

Se trata de un modelo incremental de plasticidad y daño acoplados independiente y dependiente de la velocidad de deformación.

### 8.6.1. Formulación teórica

En este modelo se elige como variable interna un tensor de daño de segundo orden simétrico que caracteriza el fenómeno anisótropo de distribución de fisuras en el material y puede ser interpretado como una reducción de área efectiva causada por las microfisuras y cavidades debido al daño. Se expresa como sigue:

$$\phi_{ij} = b_{ik} b_{jl} \hat{\phi}_{kl} \quad (8.97)$$

Donde  $\phi_{ij}$  es el tensor de daño de segundo orden simétrico con tres direcciones principales de daño,  $\hat{\phi}_{kl}$  es el tensor de daño en un sistema de coordenadas coincidente con las direcciones principales de daño y tiene forma diagonal:

$$\hat{\phi}_{kl} = \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\phi}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{\phi}_3 \end{bmatrix} \quad (8.98)$$

y el tensor de transformación de segundo orden  $b_{ij}$  se expresa como:

$$b_{ij} = \begin{bmatrix} n_1^1 & n_2^1 & n_3^1 \\ n_1^2 & n_2^2 & n_3^2 \\ n_1^3 & n_2^3 & n_3^3 \end{bmatrix} \quad (8.99)$$

$n_i^j$  es el autovector  $j$  del tensor  $\phi_{ij}$

La energía libre se expresa como:

$$\Psi = \Psi(\varepsilon_{ij}^e, T, \phi_{ij}, p, \alpha, \kappa, \gamma) \quad (8.100)$$

donde  $p$  y  $\alpha$  son variables que caracterizan el endurecimiento isótropo y cinemático en plasticidad/viscoplasticidad y  $\kappa$  y  $\gamma$  son variables que caracterizan el endurecimiento isótropo y cinemático en daño.

$$\dot{p} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\varepsilon}_{ij}^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p} \quad \dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3} \dot{\phi}_{ij} \dot{\phi}_{ij}} \quad (8.101)$$

Como las variables internas son independientes unas de otras se puede desacoplar la energía libre en una parte correspondiente a cada variable interna. Se utiliza la siguiente forma cuadrática para la densidad de energía libre por unidad de volumen:



$$\Psi = \frac{1}{2} \varepsilon_{ij}^e C_{ijkl}(\phi_{kl}) \varepsilon_{kl}^e + \frac{1}{2} k_1 \alpha_{ij} \alpha_{ij} + \frac{1}{2} k_2 p^2 + \frac{1}{2} k_3 \gamma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} k_4 \kappa^2 \quad (8.102)$$

Donde  $\rho$  es la densidad y  $k_1$ ,  $k_2$ ,  $k_3$  y  $k_4$  son constantes del material. Esta forma corresponde al tipo de acoplamiento descrito como b) en el punto 8.2.1.

Reemplazando en la desigualdad de Clausius Duhem, resultan las siguientes ecuaciones de estado y variables termodinámicas asociadas a las variables internas:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}^e} = C_{ijkl} \varepsilon_{kl}^e \quad (8.103)$$

$$\eta = - \frac{\partial \Psi}{\partial T} \quad (8.104)$$

$$Y_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \phi_{ij}} \quad (8.105)$$

$$R = \frac{\partial \Psi}{\partial p} = k_2 p \quad (8.106)$$

$$X_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \alpha_{ij}} \quad (8.107)$$

$$K = \frac{\partial \Psi}{\partial \kappa} = k_4 \kappa \quad (8.108)$$

$$\Gamma_{ij} = \frac{\partial \Psi}{\partial \gamma_{ij}} \quad (8.109)$$

La disipación mecánica se escribe como:

$$\dot{\Xi} = \dot{\Xi}^p + \dot{\Xi}^d = \underbrace{\sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij}^p - R \dot{p} - X_{ij} \dot{\alpha}_{ij}}_{\dot{\Xi}^p} - \underbrace{Y_{ij} \dot{\phi}_{ij} - K \dot{\kappa} - \Gamma_{ij} \dot{\gamma}_{ij}}_{\dot{\Xi}^d} \geq 0 \quad (8.110)$$

El material exhibe dos mecanismos disipativos de plasticidad y daño que interactúan entre sí. Tanto la velocidad de deformación plástica como la velocidad de daño dependen del estado tensional y de la variable termodinámica conjugada de la variable de daño: por lo tanto, la energía disipada por daño y la energía disipada plásticamente son interdependientes a través de esas variables.

Se pueden formular leyes complementarias en relación con estos procesos de disipación. Esto implica la existencia de un potencial de disipación expresado como una función escalar, convexa y continua de las variables de flujo:

$$\Theta = \Theta(\dot{\varepsilon}_{ij}^p, \dot{\phi}_{ij}, \dot{p}, \dot{\alpha}_{ij}, \dot{\kappa}, \dot{\gamma}_{ij}) \quad (8.111)$$

Por medio de la transformada de Legendre-Fenchel se pueden obtener leyes complementarias en forma de leyes de evolución de las variables de flujo en términos de las variables duales y expresar el potencial de disipación como:

$$\Theta^* = \Theta^*(\sigma_{ij}, Y_{ij}, R, K, X_{ij}, \Gamma_{ij}) \quad (8.112)$$

que puede descomponerse en dos partes: una plástica y otra de daño:

$$\Theta^* = F(\sigma_{ij}, R, X_{ij}) + G(Y_{ij}, K, \Gamma_{ij}) \quad (8.113)$$

Sin embargo, debe observarse que existe un acoplamiento implícito entre estos dos potenciales de disipación a través de la fuerza conjugada al daño que es función de el tensor de tensiones y del tensor de daño. Teniendo esto en cuenta, las leyes de evolución de la deformación plástica y del daño pueden obtenerse utilizando el cálculo de funciones de varias variables con multiplicadores de Lagrange  $\dot{\lambda}^p$  y  $\dot{\lambda}^d$ . Esta función puede ser escrita como:

$$\Omega = \Xi^p + \Xi^d - \dot{\lambda}^p F - \dot{\lambda}^d G \quad (8.114)$$

Para hallar los extremos de esta función se igualan sus derivadas a cero y de allí surgen las ecuaciones de evolución acopladas siguientes para el caso  $F \geq 0$  y  $G \geq 0$ :

$$\begin{aligned} \dot{\epsilon}_{ij}^p &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} + \dot{\lambda}^d \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \\ \dot{\phi}_{ij} &= \dot{\lambda}^p \frac{\partial F}{\partial Y_{ij}} + \dot{\lambda}^d \frac{\partial G}{\partial Y_{ij}} \end{aligned} \quad (8.115)$$

De donde se deduce que existe acoplamiento entre la velocidad de deformación plástica y la velocidad de daño cuando  $F \geq 0$  y  $G \geq 0$ .  $F$  y  $G$  representan la el potencial plástico y el potencial de daño respectivamente. En el caso de que alguno de los dos sea negativo, se desacoplan los flujos anteriores. Este tipo de acoplamiento corresponde al descrito como b) en el punto 8.2.2.

Las leyes de evolución del resto de las variables internas resultan:

$$\dot{p} = -\dot{\lambda}^p \frac{\partial F}{\partial R} \quad (8.116)$$

$$\dot{\alpha}_{ij} = -\dot{\lambda}^p \frac{\partial F}{\partial X_{ij}} \quad (8.117)$$

$$\dot{\kappa} = -\dot{\lambda}^d \frac{\partial G}{\partial K} \quad (8.118)$$

$$\dot{\gamma}_{ij} = -\dot{\lambda}^d \frac{\partial G}{\partial \Gamma_{ij}} \quad (8.119)$$

### 8.6.2. Potencial plástico y criterio de fluencia

Se utiliza un modelo de endurecimiento cinemático no lineal. El potencial plástico se toma igual a la función de fluencia  $F=f$ . La función de fluencia se expresa como:

$$f = \left[ \frac{3}{2} (\sigma_{ij} - X_{ij})(\sigma_{ij} - X_{ij}) \right]^{\frac{1}{2}} - R(p) - \sigma_y \leq 0 \quad (8.120)$$

$\sigma_y$  es el umbral de fluencia inicial.

$$\dot{X}_{ij} = \frac{2}{3} C^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \Gamma^p X_{ij} \dot{p} \quad (8.121)$$

$C^p$  y  $\Gamma^p$  son los parámetros de endurecimiento cinemático del material.

La condición de consistencia plástica

$$\dot{f} = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \phi_{ij}} \dot{\phi}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} \dot{X}_{ij} + \frac{\partial f}{\partial R} \dot{R} = 0 \quad (8.122)$$

Conduce a una ecuación del tipo:

$$a_{11} \dot{\lambda}^p + a_{12} \dot{\lambda}^d = -b_1 \quad (8.123)$$

### 8.6.3. Criterio de daño y potencial de daño

Se utiliza un criterio de daño anisótropo con endurecimiento isótropo y cinemático y un potencial de daño distinto del criterio de daño.

El criterio de daño se escribe como:

$$g = (Y_{ij} - \Gamma_{ij}) P_{ijkl} (Y_{kl} - \Gamma_{kl}) - 1 = 0 \quad (8.124)$$

$P_{ijkl}$  es un tensor de cuarto orden que describe la naturaleza anisótropa de la iniciación y el crecimiento del daño y puede escribirse en términos del tensor de endurecimiento  $h_{ij}$  como:

$$P_{ijkl} = h_{ij}^{-1} h_{kl}^{-1} \quad (8.125)$$

Donde:

$$h_{ij} = \lambda \eta \left( \frac{\kappa}{\lambda} \right)^\xi \delta_{ik} \phi_{kj} + \delta_{ij} \lambda \nu^2 \quad (8.126)$$

El primer término está asociado con el crecimiento anisótropo del daño. La anisotropía está introducida por la naturaleza anisótropa del tensor de daño mientras que el endurecimiento está dado por el multiplicador  $\lambda \eta \left( \frac{\kappa}{\lambda} \right)^\xi$ .  $\lambda$  y  $\nu$  son la constante de Lamé y el coeficiente de Poisson del material dañado.

Se utiliza un potencial de daño no asociado definido como:

$$G = g + \frac{k_5}{2k_3} \Gamma_{ij} \Gamma_{ij} \quad (8.127)$$

$k_5$  es una constante del material

La condición de consistencia de daño se expresa como:

$$\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \phi_{ij}} \dot{\phi}_{ij} + \frac{\partial g}{\partial \kappa} \dot{\kappa} + \frac{\partial g}{\partial \Gamma_{ij}} \dot{\Gamma}_{ij} = 0 \quad (8.128)$$

que puede ser escrita en la forma:

$$a_{21}\dot{\lambda}^p + a_{22}\dot{\lambda}^d = -b_2 \quad (8.129)$$

A partir de la solución simultánea de las condiciones de consistencia plástica y de daño que constituyen dos ecuaciones lineales en los multiplicadores plástico y de daño, se pueden encontrar los mismos como:

$$\begin{pmatrix} \dot{\lambda}^p \\ \dot{\lambda}^d \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} -b_1 \\ -b_2 \end{pmatrix} \quad (8.130)$$

Sustituyendo los valores de  $\dot{\lambda}^p$  y  $\dot{\lambda}^d$  en las ecuaciones (8.115), se obtienen:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \chi_{ijkl}^p \dot{\sigma}_{kl} \quad (8.131)$$

$$\dot{\phi}_{ij} = \chi_{ijkl}^d \dot{\sigma}_{kl} \quad (8.132)$$

$$\chi_{ijkl}^p = K_{ijkl} + L_{ijkl} \quad (8.133)$$

$$K_{ijkl} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left( a_{12} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - a_{22} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (8.134)$$

$$L_{ijkl} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \left( a_{21} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - a_{11} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (8.135)$$

$$\chi_{ijkl}^d = P_{ijkl} + Q_{ijkl} \quad (8.136)$$

$$P_{ijkl} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\partial f}{\partial Y_{ij}} \left( a_{12} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - a_{22} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (8.137)$$

$$Q_{ijkl} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} \left( a_{21} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} - a_{11} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{kl}} \right) \quad (8.138)$$

#### 8.6.4. Daño dependiente de la velocidad de deformación acoplado con viscoplasticidad

Con el objeto de tener en cuenta la dependencia de la velocidad de deformación y regularizar los problemas de localización, se implementa un mecanismo de daño anisótropo viscoso. Tal modelo tiene en cuenta el retardo en el crecimiento de microfisuras para velocidades de deformación más altas. El modelo está basado en el concepto de sobretensión de la viscoplasticidad. Sin embargo, se considera que el daño depende de la velocidad de deformación sólo después que aparecen las deformaciones inelásticas. En la región elástica se supone que el daño es independiente de la velocidad de deformación. Esto es debido a que la teoría propuesta no tiene en cuenta un comportamiento viscoelástico en la región elástica.

Las ecuaciones para la tasa de deformación plástica y de daño se reemplazan en este caso por:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} = \left( \frac{\langle \|\sigma_{kl} - X_{kl}\| - \sigma_y^{*vp} \rangle}{D^{vp}} \right)^{n_1} n_{ij}^{vp} + \left( \frac{\langle \|\gamma_{kl} - \Gamma_{kl}\| - Y^{*d} \rangle}{D^d} \right)^{n_2} n_{ij}^{vd} \quad (8.139)$$

$$\dot{\phi}_{ij} = \left( \frac{\langle \|\sigma_{kl} - X_{kl}\| - \sigma_y^{*vp} \rangle}{D^{vp}} \right)^{n_1} n_{ij}^{dvp} + \left( \frac{\langle \|\gamma_{kl} - \Gamma_{kl}\| - Y^{*d} \rangle}{D^d} \right)^{n_2} n_{ij}^d \quad (8.140)$$

$$\sigma_y^{*vp} = R(p) + \sigma_y(\dot{\varepsilon}_{ij}) \quad (8.141)$$

$$Y^{*d} = K(\kappa) + Y_d(\dot{\varepsilon}_{ij}) \quad (8.142)$$

$D^{vp}$  y  $D^d$  representan los efectos del endurecimiento isótopo y son considerados parámetros constantes.

Los tensores unitarios  $n_{ij}^{vp}$  y  $n_{ij}^d$  se utilizan para indicar la dirección del flujo de deformaciones plásticas y de daño y se expresan como:

$$n_{ij}^{vp} = \left( \frac{\partial F^{vp}}{\partial \sigma_{ij}} \right) / \left\| \frac{\partial F^{vp}}{\partial \sigma_{kl}} \right\| \quad n_{ij}^d = \left( \frac{\partial G^d}{\partial Y_{ij}} \right) / \left\| \frac{\partial G^d}{\partial Y_{kl}} \right\| \quad (8.143)$$

$$n_{ij}^{dvp} = \left( \frac{\partial F^{vp}}{\partial Y_{ij}} \right) / \left\| \frac{\partial F^{vp}}{\partial Y_{kl}} \right\| \quad n_{ij}^{vpd} = \left( \frac{\partial G^d}{\partial \sigma_{ij}} \right) / \left\| \frac{\partial G^d}{\partial \sigma_{kl}} \right\|$$

Donde  $F^{vp}$  y  $G^d$  son los potenciales dinámicos viscoplástico y de daño respectivamente dados por:

$$F^{vp} = \left\{ \frac{f^*}{[R(p) + \sigma_y(\dot{\varepsilon}_{ij})]} + 1 \right\}^{1/2} - 1 \quad \text{y} \quad G^d = \left\{ \frac{g^*}{[K(\kappa) + \sigma_d(\dot{\varepsilon}_{ij})]} + 1 \right\}^{1/2} - 1 \quad (8.144)$$

$f^*$  y  $g^*$  representan las superficie de viscoplasticidad y de daño de equilibrio y dependen de la velocidad de deformación:

$$f^* = \left[ \frac{3}{2} (\sigma_{ij}^* - X_{ij}) (\sigma_{ij}^* - X_{ij}) \right]^{1/2} - [R(p) + \sigma_y(\dot{\varepsilon}_{ij})] \leq 0 \quad (8.145)$$

$$g^* = (Y_{ij}^* - \Gamma_{ij}) P_{ijkl} (Y_{kl}^* - \Gamma_{kl}) - 1 = 0 \quad (8.146)$$

$$\sigma_y(\dot{\varepsilon}_{ij}) = A \tanh \left[ C \ln \left( 1 + \frac{1}{2} B_{abcd} \dot{\varepsilon}_{ab} \dot{\varepsilon}_{cd} \right) \right] \quad (8.147)$$

A, B y C son parámetros del material.  $\sigma_{ij}^*$  y  $Y_{ij}^*$  son respectivamente las tensiones y las fuerzas conjugadas sobre las superficies de equilibrio. Se postula que  $\sigma_{ij}^*$  cae sobre la línea que une el estado de tensiones actual y el centro de la superficie de equilibrio, ver Figura 8.3. Lo mismo se aplica para las fuerzas conjugadas.

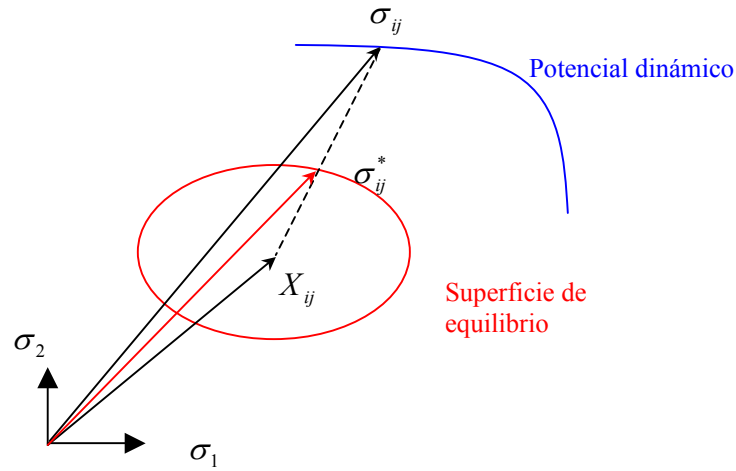


Figura 8.3 Superficie de equilibrio y potencial viscoplástico.

$$\sigma_{ij}^* = X_{ij} + c^{vp} (\sigma_{ij} - X_{ij}) \quad (8.148)$$

$$Y_{ij}^* = \Gamma_{ij} + c^d (Y_{ij} - \Gamma_{ij}) \quad (8.149)$$

$$c^{vp} = \sqrt{\frac{R(p) - \sigma_y(\dot{\epsilon}_{kl})}{\frac{3}{2}(\sigma_{ij} - X_{ij})(\sigma_{ij} - X_{ij})}} \quad (8.150)$$

$$c^d = \sqrt{\frac{1}{(Y_{ij} - \Gamma_{ij})P_{ijkl}(Y_{kl} - \Gamma_{kl})}} \quad (8.151)$$

En este caso de dependencia de la velocidad de deformación, las variables internas del modelo deben ser redefinidas de manera de caracterizar los efectos de recuperación temporal. Por esta razón, las variables internas se agrupan ahora en variables de endurecimiento, variables de recuperación dinámica y variables de recuperación estática. Los términos de endurecimiento representan el aumento de resistencia, mientras que los términos de recuperación representan los mecanismos de ablandamiento. Los términos de endurecimiento y recuperación dinámica evolucionan con la deformación debido a la plasticidad o al daño o a ambos. La recuperación estática evoluciona con el tiempo. La evolución de las variables para el caso de dependencia de la velocidad viene dada por:

$$\dot{X}_{ij} = \frac{3}{2} H^{vp} \left( \dot{\epsilon}_{ij}^{vp} - \frac{3}{2} \frac{\|X_{rs}\|}{L^{vp}} \|\dot{\epsilon}_{kl}^{vp}\| d_{ij}^{vp} \right) - \mathcal{G}^{vp} X_{ik} b_{kj}^{vp} \quad (8.152)$$

$$\dot{R} = Q^{vp} \left( 1 - \frac{R}{Q^{vp}} \right) \|\dot{\epsilon}_{kl}^{vp}\| - \mathcal{G}^{vp} \gamma(p) \quad (8.153)$$

$$b_{ij}^{vp} = \frac{X_{ij}}{\|X_{kl}\|} \quad (8.154)$$

$$d_{ij}^{vp} = (1 - \rho^{vp}) b_{ij}^{vp} + \rho^{vp} \frac{n_{ik}^{vp} X_{kl} n_{lj}^{vp}}{\|X_{rs}\|} \quad (8.155)$$

$$\dot{\Gamma}_{ij} = \frac{3}{2} H^d \left( \dot{\phi}_{ij} - \frac{3}{2} \frac{\|\Gamma_{rs}\|}{L^d} \|\dot{\phi}_{rs}\| d_{ij}^d \right) - \mathcal{G}^d \Gamma_{ik} b_{kj}^d \quad (8.156)$$

$$\dot{K} = Q^d \left( 1 - \frac{K}{Q^d} \right) \|\dot{\phi}_{ij}\| - \mathcal{G}^d \gamma(\kappa) \quad (8.157)$$

$$b_{ij}^d = \frac{\Gamma_{ij}}{\|\Gamma_{kl}\|} \quad (8.158)$$

$$d_{ij}^d = (1 - \rho^d) b_{ij}^d + \rho^d \frac{n_{ik}^d \Gamma_{kl} n_{lj}^d}{\|\Gamma_{rs}\|} \quad (8.159)$$

$\rho^{vp}$  y  $\rho^d$  definen la condición de no proporcionalidad,  $H^{vp}, L^{vp}, Q^{vp}, H^d, L^d, Q^d$  son parámetros del material.

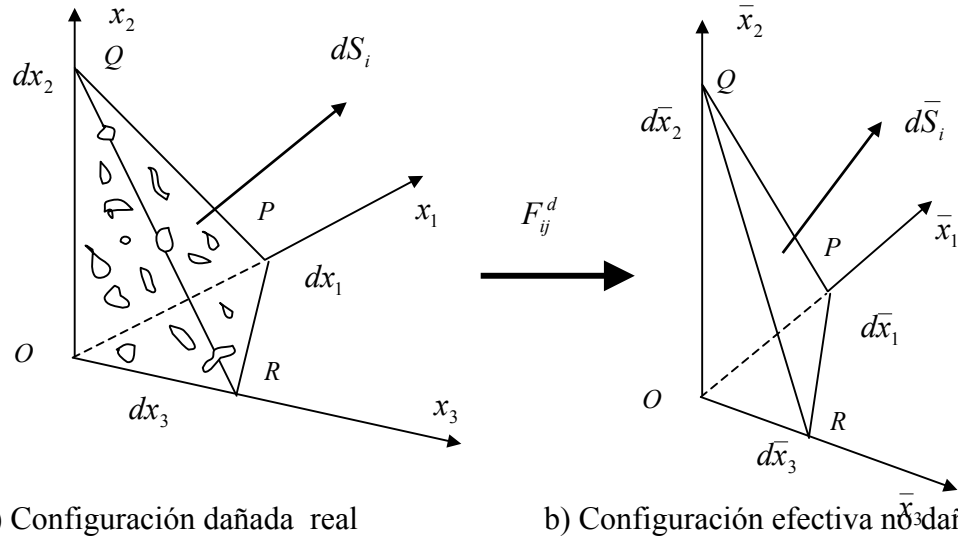
$$\mathcal{G}^{vp} = \frac{\|\dot{\mathcal{E}}_{ij}^{vp}\|}{\langle \|\sigma_{kl} - X_{kl}\| - \sigma_y^{*vp} \rangle} D^{vp} \quad (8.160)$$

$$\mathcal{G}^d = \frac{\|\dot{\phi}_{ij}\|}{\langle \|Y_{kl} - \Gamma_{kl}\| - Y^{*d} \rangle} D^d \quad (8.161)$$

### 8.6.5 Interpretación física del daño

El daño se caracteriza por la disminución del área neta debido a la distribución tridimensional de microfisuras y microvacíos. Se considera un elemento tetraédrico arbitrario PQR con una orientación arbitraria para el material deformado en la configuración dañada actual C, ver Figura 8.4. Las longitudes OP, OQ, OR y el área PQR están representadas por las longitudes diferenciales  $dx_1, dx_2, dx_3$  y el vector dS en el en el que los ejes  $x_i$  coinciden con las direcciones principales de daño.

Se supone que existe una configuración efectiva no dañada con una reducción del área debida al daño. El gradiente de deformación de la configuración C a la configuración  $\bar{C}$  viene representado por  $F_{ij}^d$ . Las direcciones de los vectores  $dS_i$  y  $d\bar{S}_i$  no son necesariamente coincidentes debido a que la reducción debida al daño no está únicamente confinada al plano PQR.



a) Configuración dañada real

b) Configuración efectiva no dañada

Figura 8.4. Representación esquemática del gradiente de deformación para microfisuras

El gradiente  $F_{ij}^d$  se utiliza para relacionar las longitudes en las dos configuraciones :

$$d\bar{x}_i = F_{ij}^d dx_j \quad (8.162)$$

Las componentes de los vectores de área en ambas configuraciones están dadas por:

$$dS_1 = -\frac{1}{2} dx_2 dx_3 \quad dS_2 = -\frac{1}{2} dx_1 dx_3 \quad dS_3 = -\frac{1}{2} dx_2 dx_1 \quad (8.163)$$

$$d\bar{S}_1 = -\frac{1}{2} d\bar{x}_2 d\bar{x}_3 \quad d\bar{S}_2 = -\frac{1}{2} d\bar{x}_1 d\bar{x}_3 \quad d\bar{S}_3 = -\frac{1}{2} d\bar{x}_2 d\bar{x}_1 \quad (8.164)$$

La reducción en el área entre una configuración y otra puede ser expresada a través de los valores propios del tensor de daño de segundo orden  $\phi_{ij}$  :

$$d\bar{S}_1 = (1 - \hat{\phi}_1) dS_1 \quad d\bar{S}_2 = (1 - \hat{\phi}_2) dS_2 \quad d\bar{S}_3 = (1 - \hat{\phi}_3) dS_3 \quad (8.165)$$

De donde se pueden obtener los valores propios del tensor  $F_{ij}^d$  en función de los valores propios del tensor de daño de segundo orden  $\phi_{ij}$  :

$$\hat{F}_{11}^d = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\phi}_2)(1 - \hat{\phi}_3)}{(1 - \hat{\phi}_1)}} \quad \hat{F}_{22}^d = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\phi}_1)(1 - \hat{\phi}_3)}{(1 - \hat{\phi}_2)}} \quad \hat{F}_{33}^d = \sqrt{\frac{(1 - \hat{\phi}_2)(1 - \hat{\phi}_1)}{(1 - \hat{\phi}_3)}} \quad (8.166)$$

El Jacobiano del gradiente de daño se expresa como:

$$J^d = \sqrt{(1 - \hat{\phi}_1)(1 - \hat{\phi}_2)(1 - \hat{\phi}_3)} \quad (8.167)$$

Como la configuración efectiva se obtiene removiendo el daño, entonces el diferencial de volumen es :

$$d\bar{V} = dV - dV^d = \sqrt{(1 - \hat{\phi}_1)(1 - \hat{\phi}_2)(1 - \hat{\phi}_3)} dV \quad (8.168)$$



### 8.6.6. Expresión incremental para el tensor de daño

En un estado general de daño la tensión efectiva está relacionada con la tensión nominal a través de un tensor de transformación de cuarto orden:

$$\bar{\sigma}_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} \quad (8.169)$$

Sin embargo, dependiendo del tensor  $M_{ijkl}$  esta expresión puede conducir a un tensor de tensiones no simétrico. Cordebois y Sidoroff proponen un método de simetrización en el que la tensión efectiva se expresa como:

$$\bar{\sigma}_{ij} = (\delta_{ik} - \phi_{ik})^{-\frac{1}{2}} \sigma_{kl} (\delta_{jl} - \phi_{jl})^{-\frac{1}{2}} \quad (8.170)$$

Donde el tensor de daño de cuarto orden resulta una forma simétrica del tensor de daño de segundo orden:

$$M_{ijkl} = (\delta_{ik} - \phi_{ik})^{-\frac{1}{2}} (\delta_{jl} - \phi_{jl})^{-\frac{1}{2}} \quad (8.171)$$

Como es difícil obtener una representación explícita de  $(\delta_{ik} - \phi_{ik})^{-\frac{1}{2}}$ , el tensor de transformación  $M_{ijkl}$  puede obtenerse mediante una transformación de coordenadas a partir del referido a las direcciones principales de daño:

$$M_{ijkl} = b_{mi} b_{nj} b_{pq} b_{ql} \hat{M}_{mnpq} \quad (8.172)$$

Donde  $b_{ij}$  es el tensor de transformación de segundo orden y el tensor de daño de cuarto orden  $\hat{M}_{ijkl}$  referido a las direcciones principales de daño puede escribirse como:

$$\hat{M}_{ijkl} = \hat{a}_{ij} \hat{a}_{kl} \quad (8.173)$$

$$\hat{a}_{ij} = (\delta_{ij} - \hat{\phi}_{ij})^{-\frac{1}{2}} \quad (8.174)$$

Debido a la naturaleza incremental de la plasticidad y del daño es necesario obtener ecuaciones incrementales. Derivando la relación entre tensión efectiva y nominal se obtiene:

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \dot{M}_{ijkl} \sigma_{kl} + M_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (8.175)$$

$$\dot{M}_{ijkl} = \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \phi_{rs}} \dot{\phi}_{rs} \quad (8.176)$$

$$\dot{\bar{\sigma}}_{ij} = \left( M_{ijkl} + \frac{\partial M_{ijkl}}{\partial \phi_{rs}} \chi_{rspq}^d \sigma_{pq} \right) \dot{\sigma}_{kl} = m_{ijkl} \dot{\sigma}_{kl} \quad (8.177)$$

De la hipótesis de equivalencia de energía elástica:

$$\frac{1}{2} \dot{\bar{\sigma}}_{ij} \dot{\bar{\epsilon}}_{ij}^e = \frac{1}{2} \dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij}^e \quad (8.178)$$

Se obtiene:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^e = m_{ijkl}^{-1} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (8.179)$$

Sin embargo la hipótesis de equivalencia de energía de deformación no es suficiente para obtener el incremento de deformación total. Para ello es necesario postular la equivalencia de disipación plástica, lo que conduce a:

$$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = M_{ijkl}^{-1} \dot{\varepsilon}_{kl}^p = \bar{H}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^p \quad (8.180)$$

La descomposición aditiva del tensor de deformaciones en ambas configuraciones se obtiene como:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (8.181)$$

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \dot{\varepsilon}_{ij}^e + \dot{\varepsilon}_{ij}^p \quad (8.182)$$

La relación entre el incremento total de deformación efectiva y el incremento total de deformación resulta:

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \left[ m_{ijkl} + \bar{H}_{ijrs} (M_{rskl} - m_{rskl}) \right]^{-1} \dot{\varepsilon}_{kl} = m_{ijkl}^* \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (8.183)$$

$$m_{ijkl}^* = \left[ m_{ijkl} + \bar{H}_{ijrs} (M_{rskl} - m_{rskl}) \right]^{-1} \quad (8.184)$$

Este tensor  $m_{ijkl}^*$  de daño incremental de deformaciones en general es distinto al que relaciona los incrementos de tensión  $m_{ijkl}$ , salvo cuando no hay deformaciones plásticas, caso en que ambos tensores coinciden.

### 8.6.7. Ecuación constitutiva tangente

La rigidez elastoplástica para el material dañado puede ser obtenida a partir de la ley de Hooke en el espacio efectivo:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \bar{C}_{ijkl} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (8.185)$$

Transformando los incrementos de tensión y de deformación elástica en los correspondientes al espacio dañado resulta:

$$\dot{\sigma}_{ij} = m_{ijrs}^{-1} \bar{C}_{rspq} m_{pqkl}^{-1} \dot{\varepsilon}_{kl}^e \quad (8.186)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^d (\dot{\varepsilon}_{kl} - \chi_{klrs}^p \dot{\sigma}_{rs}) = (I_{ijrs} + C_{ijpq}^d \chi_{pqrs}^p)^{-1} C_{rskl}^d \dot{\varepsilon}_{kl} = C_{ijkl}^t \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (8.187)$$

Donde  $C_{ijkl}^d$  representa la rigidez elástica dañada

$$C_{ijkl}^d = m_{ijrs}^{-1} \bar{C}_{rspq} m_{pqkl}^{-1} \quad (8.188)$$

y  $C_{ijkl}^t$  es el tensor elastoplástico dañado tangente:

$$C_{ijkl}^t = (I_{ijrs} + C_{ijpq}^d \chi_{pqrs}^p)^{-1} C_{rskl}^d \quad (8.189)$$

### 8.6.8. Implementación numérica

Se adopta un algoritmo desacoplado en tres pasos para descomponer aditivamente las ecuaciones constitutivas en comportamientos elástico, inelástico y dañado como se ilustra a continuación

Elasticidad	Plasticidad	Daño
$\Delta \varepsilon_{ij}$	$\Delta \varepsilon_{ij} = 0$	$\Delta \varepsilon_{ij} = 0$
$\dot{\phi} = 0$	$\dot{\phi} = 0$	$\dot{\phi} = \begin{cases} 0 & \text{si } g \leq 0 \\ \lambda^d \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} & \text{si } \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} \dot{Y}_{ij} \geq 0 \end{cases}$
$\dot{\kappa} = 0$	$\dot{\kappa} = 0$	$\dot{\kappa} = \sqrt{\frac{2}{3}} \phi_{ij} \dot{\phi}_{ij}$
$\dot{\Gamma} = 0$	$\dot{\Gamma} = 0$	$\dot{\Gamma}_{ij} = \lambda^d \left( k_3 \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} - k_5 \Gamma_{ij} \right)$
$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}(\phi_{mn}) \dot{\varepsilon}_{kl}$	$\dot{\sigma}_{ij} = -C_{ijkl}(\phi_{mn}) \dot{\varepsilon}_{kl}^p$	$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{\partial M_{ijrs}^{-1}}{\partial \phi_{pq}} \dot{\phi}_{pq} C_{rskl}(\phi_{mn}) \dot{\varepsilon}_{kl}^e$
$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$	$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = \begin{cases} 0 & \text{si } f \leq 0 \\ \lambda^p \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} & \text{si } \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij} \geq 0 \end{cases}$	$\dot{\varepsilon}_{ij}^p = 0$
$\dot{\alpha}_{ij} = 0$	$\dot{\alpha}_{ij} = -\lambda^p \frac{\partial F}{\partial X_{ij}}$	$\dot{\alpha}_{ij} = 0$
$\dot{p} = 0$	$\dot{p} = \dot{\lambda}^p$	$\dot{p} = 0$

Se utiliza el espacio efectivo o ficticio no dañado para el análisis elastoplástico y viscoplástico. En este espacio se supone que las variables de daño han sido removidas ficticiamente, de manera que las soluciones elastoplástica y viscoplásticas pueden ser encontradas en ausencia de daño. La descripción del daño presentada da lugar a una relación no lineal que requiere un procedimiento iterativo para corregir el estado de daño. Para ello se utiliza un algoritmo de tipo implícito.

#### Algoritmo de corrección plástica

Se usa un algoritmo de tipo retorno mapeado.

Si se linealiza la condición de fluencia alrededor de las variables de estado actuales, se puede escribir:

$$f_{k+1}^n \cong f_k^n + \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \right)_k^n \left[ (\bar{\sigma}_{ij})_{k+1}^n - (\bar{\sigma}_{ij})_k^n \right] + \left( \frac{\partial f}{\partial X_{ij}} \right)_k^n \left[ (X_{ij})_{k+1}^n - (X_{ij})_k^n \right] \quad (8.190)$$

Haciendo  $f_{k+1}^n = 0$  y sustituyendo:

$$(\bar{\sigma}_{ij})_{k+1}^n - (\bar{\sigma}_{ij})_k^n = -\Delta\lambda^p C_{ijrs}^o \left( \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \right)_k^n \quad (8.191)$$

$$(X_{ij})_{k+1}^n - (X_{ij})_k^n = \Delta\lambda^p \left( \frac{2}{3} C^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma^p X_{ij} \dot{p} \right)_k^n \quad (8.192)$$

Resulta:

$$\Delta\lambda^p = \frac{f_k^n}{\left[ \frac{\partial f}{\partial \bar{\sigma}_{ij}} \left( C_{ijrs}^o \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{2}{3} C^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \gamma^p X_{ij} \dot{p} \right) \right]_k^n} \quad (8.193)$$

Con este valor del multiplicador plástico se puede actualizar las variables del problema plástico y volver a controlar la condición de fluencia. El procedimiento se repite en forma iterativa hasta que se satisface cierto criterio de convergencia. Se obtiene así la tensión correspondiente a las variables de daño constantes. La etapa final de este proceso es tomada condición inicial de las ecuaciones de daño, mientras que las variables plásticas se consideran constantes durante el análisis de daño.

#### Algoritmo de corrección del daño.

Si se linealiza la función de daño se obtiene:

$$\begin{aligned} g_{k+1}^n \cong g_k^n + \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \right)_k^n \left[ (\sigma_{ij})_{k+1}^n - (\sigma_{ij})_k^n \right] + \left( \frac{\partial g}{\partial \phi_{ij}} \right)_k^n \left[ (\phi_{ij})_{k+1}^n - (\phi_{ij})_k^n \right] \\ + \left( \frac{\partial g}{\partial \kappa} \right)_k^n \left[ (\kappa)_{k+1}^n - (\kappa)_k^n \right] + \left( \frac{\partial g}{\partial \Gamma_{ij}} \right)_k^n \left[ (\Gamma_{ij})_{k+1}^n - (\Gamma_{ij})_k^n \right] \end{aligned} \quad (8.194)$$

Teniendo en cuenta que:

$$(\sigma_{ij})_{k+1}^n - (\sigma_{ij})_k^n = \Delta\lambda^d \left( \frac{\partial M_{ijrs}^{-1}}{\partial \phi_{pq}} \frac{\partial g}{\partial Y_{pq}} \right)_k^n \bar{\sigma}_{rs}^n \quad (8.195)$$

$$(\phi_{ij})_{k+1}^n - (\phi_{ij})_k^n = \Delta\lambda^d \left( \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} \right)_k^n \quad (8.196)$$

$$(\kappa)_{k+1}^n - (\kappa)_k^n = \Delta\lambda^d \left( \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}}} \right)_k^n \quad (8.197)$$

$$\left(\Gamma_{ij}\right)_{k+1}^n - \left(\Gamma_{ij}\right)_k^n = \Delta\lambda^d \left( C^d \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} + \gamma^d \Gamma_{ij} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}}} \right)_k^n \quad (8.198)$$

Se puede obtener:

$$\Delta\lambda^d = -\frac{\mathcal{G}_k^n}{H^d} \quad (8.199)$$

$$H^d = \left( \frac{\partial g}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial M_{ijrs}^{-1}}{\partial \bar{\sigma}_{pq}} \frac{\partial g}{\partial Y_{pq}} \bar{\sigma}_{rs} \right)_k^n + \left( \frac{\partial g}{\partial \phi_{ij}} \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} \right)_k^n + \left( \frac{\partial g}{\partial \kappa} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}}} \right)_k^n + \left[ \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} \left( C^d \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} + \gamma^d \Gamma_{ij} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}}} \right) \right]_k^n \quad (8.200)$$

Se puede actualizar las variables de daño utilizando este último valor del multiplicador de daño. El proceso iterativo continua hasta que se satisface la condición de consistencia de daño dentro de una cierta tolerancia. Se obtienen así las variables correspondientes al instante de tiempo  $t$ .

Algoritmo completo

El esquema de cálculo para el modelo independiente del tiempo se presenta a continuación.

1. Obtención del incremento de desplazamiento para el paso "n" a partir de la ecuación de equilibrio escrita de acuerdo al esquema de elementos finitos:  $\Delta u_i^n$
2. Obtención del incremento de deformaciones y actualización de las deformaciones:

$$\Delta \varepsilon_{ij}^n = \frac{1}{2} \left( \Delta u_{i,j}^n + \Delta u_{j,i}^n \right)$$

$$\varepsilon_{ij}^n = \varepsilon_{ij}^{n-1} + \Delta \varepsilon_{ij}^n$$

3. Predictor elástico:  $k = 0$

$$\left(\Delta\lambda^p\right)_o^n = 0; \left(\bar{\sigma}_{ij}\right)_o^n = C_{ijkl}^o \left[ \left(\varepsilon_{ij}\right)^n - \left(\varepsilon_{ij}^p\right)^{n-1} \right]; \left(X_{ij}\right)_o^n = \left(X_{ij}\right)^{n-1}; p_o^n = p^{n-1}$$

4. Control de la condición de fluencia plástica:

$$\text{Si } f_k^n(\bar{\sigma}_{ij}, X_{ij}, p) < 0 \text{ no hay plasticidad vaya a (10)}$$

5. Proceso plástico: Cálculo del multiplicador plástico:

$$\Delta\lambda^p = \frac{f_k^n}{\left[ \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \left( C_{ijrs}^o \frac{\partial f}{\partial \sigma_{rs}} + \frac{2}{3} C^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p + \gamma^p X_{ij} \dot{p} \right) \right]_k^n}$$

6.  $k=k+1$

7. Actualización de la tensión efectiva:  $(\bar{\sigma}_{ij})_k^n = (\bar{\sigma}_{ij})_{k-1}^n - \Delta\lambda^p C_{ijrs}^o \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)_{k-1}^n$

8. Actualización de las variables plásticas:  $(X_{ij})_k^n = (X_{ij})_{k-1}^n + \Delta\lambda^p \left( \frac{2}{3} C^p \dot{\varepsilon}_{ij}^p - \gamma^p X_{ij} \dot{p} \right)_{k-1}^n$

$$p_k^n = p_{k-1}^n + \Delta\lambda^p$$

9. Vuelva a (4)

10. Final del proceso de corrección plástica:

$$(\bar{\sigma}_{ij})^n = (\bar{\sigma}_{ij})_k^n \quad (\varepsilon_{ij}^p)^n = (\varepsilon_{ij}^p)_k^n \quad ; \quad (X_{ij})^n = (X_{ij})_k^n \quad ; \quad p^n = p_k^n$$

11. Predictor elastoplástico:  $k=0$

$$(\Delta\lambda^d)_o^n = 0 \quad ; \quad (\phi_{ij})_o^n = (\phi_{ij})^{n-1} \quad ; \quad (\sigma_{ij})_o^n = C_{ijkl} [(\phi_{rs})_o^n] [(\varepsilon_{kl})^n - (\varepsilon_{kl})_o^n] \quad ;$$

$$(\kappa)_o^n = (\kappa)^{n-1}, \quad (\Gamma_{ij})_o^n = (\Gamma_{ij})^{n-1}$$

12. Control de la condición de daño.

$$\text{Si } g_k^n(\sigma_{ij}, \phi_{ij}, \kappa, \Gamma) < 0 \text{ no hay daño. vaya a (19)}$$

13. Proceso de daño: Cálculo del multiplicador de daño:  $\Delta\lambda^d = -\frac{g_k^n}{H^d}$

14.  $k=k+1$

15. Actualización del tensor de daño:  $(\phi_{ij})_k^n = (\phi_{ij})_{k-1}^n + \Delta\lambda^d \left( \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} \right)_{k-1}^n$

16. Actualización del tensor de tensiones:  $(\sigma_{ij})_k^n = (\sigma_{ij})_{k-1}^n + \Delta\lambda^d \left( \frac{\partial M_{ijrs}^{-1}}{\partial \phi_{pq}} \frac{\partial g}{\partial Y_{pq}} \right)_{k-1}^n \bar{\sigma}_{rs}^n$

17. Actualización de resto de de las variables internas:

$$(\kappa)_k^n = (\kappa)_{k-1}^n + \Delta\lambda^d \left( \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}}} \right)_{k-1}^n$$

$$(\Gamma_{ij})_k^n = (\Gamma_{ij})_{k-1}^n + \Delta\lambda^d \left( C^d \frac{\partial g}{\partial Y_{ij}} + \gamma^d \Gamma_{ij} \sqrt{\frac{2}{3} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}} \frac{\partial g}{\partial Y_{rs}}} \right)_{k-1}^n$$

18. Vuelva a (12)

19. Fin del proceso de corrección de daño

$$(\sigma_{ij})^n = (\sigma_{ij})_k^n \quad ; \quad (\phi_{ij})^n = (\phi_{ij})_k^n \quad ; \quad (\kappa)^n = (\kappa)_k^n \quad ; \quad (\Gamma_{ij})^n = (\Gamma_{ij})_k^n$$

20. Calculo del tensor de rigidez tangente

21. Fin integración ecuación constitutiva.

# Referencias

- Armero F., Oller S. (2000), A general framework for continuum damage models. I. Infinitesimal plastic damage models in stress space, *International Journal of Solids and Structures* 37, 7409-7436.
- Armero F., Oller S. (2000), A general framework for continuum damage models. II. Integration algorithms, with applications to the numerical simulation of porous metals, *International Journal of Solids and Structures* 37 (2000) 7437-7464.
- Barbat A., Oller S., Oñate E., Hanganu A. (1997), Viscous Damage Model for Timoshenko Beam Structures, *Int. J. Solids and Structures*, Vol.34, No.30, 3953-3976.
- Besson J., Cailletaud G., Chaboche J.L., Forest S. (2001), *Mécanique non Linéaire des Matériaux*, Hermes Science Europe Ltd, Paris.
- Carol I., Willam K. (1996). Spurious Energy Dissipation/Generation in Stiffness Recovery Models for Elastic Degradation and Damage, *Int. J. Solids Structures*, Vol.33, No.20-22, pp. 2939-2957.
- Carol I., Rizzi E., Willam K. (2001a), On the formulation of anisotropic elastic degradation , part I: theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate, *Int. J. Solids Struct.* 38 (4), 491-518.
- Carol, E. Rizzi, K. Willam (2001b), On the Formulation of Anisotropic Degradation II. Generalized Pseudo Rankine Model for Tensile Damage, *International Journal of Solids and Structures* 38, 519-543.
- Chaboche J.L. (1992), Damage Induced Anisotropy: On the Difficulties Associated with Active/Passive Unilateral Condition, *International Journal of Damage Mechanics*, Vol.1, No. 2, pp. 148-171.
- Chaboche J.L. (1993), Development of Continuum Damage Mechanics for Elastic Solids Sustaining Anisotropic and Unilateral Damage, *Int. Journal of Damage Mechanics*, Vol.2, pp.311-329.
- Chaboche J.L.(1995), A Continuum Damage Theory with Anisotropic and Unilateral Damage, *La Recherche Aérospatiale*, No.2, 139-147.
- Cordebois J. P. and Sidoroff F. (1979), Damage-Induced Elastic Anisotropy, in *Mechanical Behavior of Anisotropic Solids*, Colloque Euromech 115 (J.P. Boehler, Ed., Villard de Lans, Martinus Nijhoff, Dordrecht, The Netherlands, 761-774.
- Cormery F. , Welemene H. (2002) A critical review of some damage models with unilateral effect *Mechanic Research Communications* 29 (2002)391 –395.



- 
- Dubé J. F., Pijudier Cabot, G. (1996). Rate Dependent Damage Model for Concrete in Dynamics. *Journal of the Engineering Mechanics, ASCE*, Vol 122, No. 10, pp. 939-947.
  - Faria R., Oliver J., Cervera M. (1998), A strain-based plastic viscous-damage model for massive concrete structures, *Int. J. of Solids and Structures*, Vol 35, No.14.
  - Hanganu A., Oñate E., Barbat A. (2002), A Finite element methodology for local/global damage evaluation in civil engineering structures, *Computers and Structures* 80 1667–1687.
  - Hartmann S., Lührs G. and Haupt P. (1997) An Efficient Stress Algorithm with Applications in Viscoplasticity and Plasticity”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 40, 991-1013.
  - Hult, J. (1979), Continuum Damage Mechanics.Capabilities, Limitations and Promises, *Mechanics of Deformation and Fracture*, Pergamon, Oxford, 1979,. 233-347.
  - Ju J. W. (1989) On energy-based coupled elastoplastic damage theories: constitutive modeling and computational aspects, *Int. Journal Solids Structures* Vol.25, No.7 803-833.
  - Ju J.W. (1990), Isotropic and Anisotropic Damage Variables in Continuum Damage mechanics, *ASCE Journal of Engineering Mechanics*, Vol. 116, No.12, 2764-2770.
  - Kachanov L. M. (1958), Time of the rupture process under creep conditions. *IVZ Akad Nauk - S.S.R. - Otd Tech Nauk* 8.
  - Krajcinovic D., Fonseka U. (1981), The Continuous Damage Theory of Brittle Materials, Part I and II, *Journal of Applied Mechanics*, ASME, Vol.48, 809-824.
  - La Borderie, C., Berthaud, I., Pijaudier-Cabot, G (1990), Crack Closure Effects in Continuum Damage Mechanics. Numerical implementation. In *Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures* (Edited by Bicanic and H. Mang), Pineridge Press, Zell-am-See, 975-986.
  - Lemaitre J. and Chaboche J. L. (1978), Aspecta Phenométrique de la Rupture par Endommagement, *Journal of Mecanique Théorique et Appliquée* (1978) 317-365.
  - Lemaitre J. (1996), *A Course on Damage Mechanics*, 1996, Springer Verlag.
  - Lemaitre J., Chaboche J.L.(2000), *Mechanics of Solids Materials*, Cambridge University Press, 2000.
  - Lemaitre J., R. Desmorat, M. Sauzy (2000), Anisotropic Damage Law of Evolution, *Eur. J. Mech. A/Solids* 19, 187-208.
  - Lubliner J. (1990), *Plasticity Theory*, Mc. Millan Publishing U.S.A..
  - Luccioni, B.M. (1993). *Formulación de un Modelo Constitutivo para Materiales Ortótropos*. Ph.D. Thesis- Universidad Nacional de Tucumán, Argentina (1993).

- 
- Luccioni B., Oller S., Danesi R. (1996), Coupled Plastic-Damaged Model, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering 129, 81-89.
  - Luccioni B., Oller S. (2003) A directional Damage Model, Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg., 1119-1145.
  - Luccioni B. and Oller S.(2002), Modelo de daño direccionado para materiales anisótopos, Mecánica Computacional Vol XXI, 739-754.
  - Luege M., Luccioni B., Danesi R. (2002), Modelo de Daño Dependiente de la Velocidad de Deformación, Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería, Vol.18, 2, 3-17, UPC, Barcelona, España, 411-431.
  - Martín O.,(2001), Modelo de daño anisótropo, Ph.D. Thesis- Universidad Nacional de Tucumán, Argentina.
  - Mazars J. (1982), Mechanical Damage and fracture of Concrete Structures. Advances in Fracture research (Fracture 81), Vol.4, pp. 1499-1506. Pergamon Press, Oxford.
  - Mazars,J. (1985), A Model of Unilateral Elastic Damageable Material and its Application to Concrete}, RILEM Int. Conf. Fracure Mechanics of Concrete, Lausanne; Fracture Toughness and Fracture Energy of Concrete, New York, Elsevier.
  - Mazars J. and Pijaudier-Cabot G. (1989), Continuum Damage Theory – application to concrete. J. Engng. Mech. ASCE 115, 354-365.
  - Maugin G. A. (1992), The Thermomechanics of Plasticity and Fracture (Cambridge University Press.
  - Murakami S., Ohno N. (1980), A Continuum Theory of Creep and Creep Damage, 3° IUTAM Symposium on Creep in Structure.
  - Oliver J., Cervera M., Oller S. and Lubliner J. (1990), Isotropic Damage Models and Smeared Crack Analysis of Concrete. Second International Conference on Computer Aided Analysis and Design of Concrete Structures.
  - Oller S. (1988), Un Modelo de "Daño Continuo" para Materiales Friccionales, Ph.D. Thesis, Universitat Politecnica de Catalunya, Escola Tecnica Superior D'Enginyers De Camins, Canals I Ports , Spain.
  - Oller S., S. Botello, J. Miquel, E. Oñate (1995), An Anisotropic Elastoplastic Model Based on an Isotropic Formulation, Engineering Computations, Vol.12, 245-262.
  - Oller S.(2001), Fractura Mecánica. Un Enfoque Global, CIMNE, Barcelona, España.
  - Ortiz M. (1985), A Constitutive Theory for the Inelastic Behaviour of Concrete, Mechanics of Materials 4 (1985) 67-93.
  - Rizzi E., Maier G., Willam K. (1996), On Failure Indicators in Multi-Dissipative Materials, Int. J. Solids Structures, Vol.33, No.20-22, pp.3187-3214.

- Simo C., Ju J. (1987a), Stress and Strain Based Continuum Damage Models:I.Formulation. *Int. J. Solids Structures* 23,821-840.
- Simo C., Ju J. (1987b), Stress and Strain Based Continuum Damage Models:II. Computational Aspects. *Int. J. Solids Structures* 23,841-869.
- Sumarac Krajinovic, D., A self-consistent model for microcrack weakened solids, *Mechanics of materials*, Vol.6, pp39-52.
- Valanis, K.C. (1985), On the Uniqueness of Solution of the Initial Value Problem in Softening Materials, *Journal of Applied Mechanics* Vol 52, 649-653.
- Valanis K. C. (1991), A Global Damage Theory and the Hyperbolicity of the Wave Problem, *J. Appl. Mech. ASME* 58, 311-316.
- Van Mier J., Nooru-Mohamed N., Timmers G. (1991), An Experimental Study of Shear Fracture and Aggregate Interlock in Cement Based Composites, *Heron*, Vol.36, No.4.
- Voyiadjis G. Z., Deliktas B. (2000), A Coupled Anisotropic Damage Model for the Inelastic Response of Composite Materials, *Compt. Methos Appl. Mech. Engrg.* 183, 159-199.
- Yang Q., Zhou W.Y. and Swoboda G. (1999), Micromechanical identification of anisotropic evolution laws, *International Journal of Fracture* 98, pp. 55-76.