

# FORMULACIÓN DE UNA REGLA DE FLUJO NO ASOCIATIVA BASADA EN LA TEORÍA DE Tensión-DILATANCIA DE ROWE<sup>1</sup>

Alejo O. Sfriso<sup>2</sup>, Guillermo G. Weber<sup>3</sup> y Eduardo Núñez<sup>4</sup>

Resumen: En este artículo se revisa la teoría de tensión-dilatancia de Rowe desde el punto de vista de su implementación como regla de flujo de la plasticidad convencional. Se deducen expresiones operativas, se analizan las consecuencias teóricas y numéricas de su forma matemática y se plantean elementos para su validación experimental.

**Palabras clave:** arenas, plasticidad no asociativa, tensión-dilatancia.

## FORMULATION OF A NONASSOCIATIVE FLOW RULE BASED ON ROWE'S STRESS-DILATANCY THEORY

Abstract: In this paper, Rowe's stress-dilatancy theory is reviewed from the viewpoint of its implementation as a flow rule for conventional plasticity. Operational expressions are derived, the theoretical and numerical consequences of their mathematical form are discussed and some elements towards its experimental validation are outlined.

**Keywords:** non associative plasticity, sands, stress-dilatancy.

### INTRODUCCIÓN A LA TEORÍA DE Tensión-DILATANCIA DE ROWE

La teoría de tensión-dilatancia (Rowe, 1962, 1971; Rowe et al, 1964) postula que existe una relación única entre el estado tensional de un agregado de partículas y su tasa de dilatancia. El desarrollo de la expresión matemática de esta relación se puede hacer con el auxilio de la Figura 1, que muestra una caja con dos paredes móviles que actúan como pistones (Sfriso, 2010).

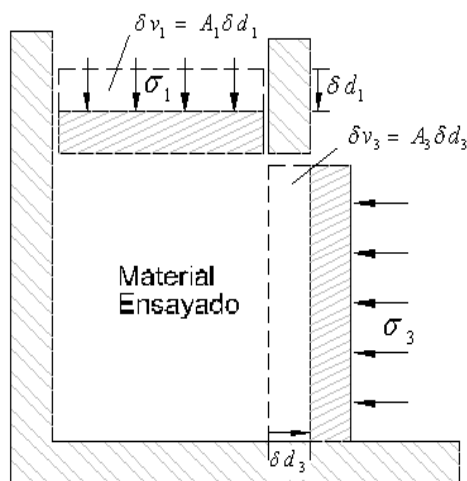


Figura 1: Modelo para el análisis conceptual de la teoría tensión-dilatancia.

<sup>1</sup> Artículo recibido el 5 de octubre de 2011 como parte del 2do Encuentro Latino de Profesores de Geotecnia. Artículo aceptado en versión final el 15 de noviembre de 2011.

<sup>2</sup> Profesor Adjunto, Depto. de Estabilidad, Universidad de Buenos Aires, Las Heras 2212, Buenos Aires, Argentina. E-mail: asfriso@fi.uba.ar

<sup>3</sup> Profesor, Departamento de Mecánica, Universidad de Texas en Brownsville. E-mail: guillermo.weber@utb.edu

<sup>4</sup> Profesor Consulto, Universidad de Buenos Aires. E-mail: enunezgeo@yahoo.com.ar

En primer lugar, la caja se llena con un fluido incompresible y sin peso. Se aplica una tensión  $\sigma_1$  en el pistón superior y otra  $\sigma_3$  en el pistón lateral y se impone un desplazamiento  $\delta d_1$  hacia abajo del pistón superior, lo que implica necesariamente un desplazamiento hacia fuera  $\delta d_2$  del pistón lateral. El trabajo incremental efectuado por las tensiones principales mayor y menor es

$$\dot{w}_{in} = \|\sigma_1 \delta v_1\| \quad (1)$$

$$\dot{w}_{out} = \|\sigma_3 \delta v_3\| \quad (2)$$

donde  $\delta v_1 = A_1 \delta d_1$  y  $\delta v_3 = A_3 \delta d_3$ . Como el fluido no disipa trabajo en la deformación, se verifica que

$$\dot{w}_{in} = \dot{w}_{out} \quad (3)$$

Para un fluido incompresible, la ecuación de continuidad es  $\delta v_1 = \delta v_3$  y por lo tanto  $\sigma_1 = \sigma_3$ , que es el resultado trivial.

El ensayo se repite con un fluido dilatante que tiene una tasa de dilatación  $\alpha$  (positivo es reducción de volumen). Para un fluido dilatante, la ecuación de continuidad se escribe como

$$\delta v_3 = (1 - \alpha) \delta v_1 \quad (4)$$

Como el fluido no disipa trabajo, vale la ecuación (3). Reemplazando la ecuación (4) en la ecuación (2) y luego las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación (3) queda

$$\sigma_1 = (1 - \alpha) \sigma_3 \quad (5)$$

Si el material es dilatante,  $\alpha < 0$ , y  $\sigma_1 > \sigma_3$ .

Si el dispositivo se llena ahora con partículas rígidas e irrompibles de arena en el estado crítico, el flujo isocórico ocurre para la relación de tensiones

$$\sigma_1 = N_c \sigma_3 \quad (6)$$

donde  $N_c$  es un parámetro material, cuyo significado físico en este contexto no se discute aquí, pero puede verse en Sfriso (2010). Si se multiplican ambos términos de la ecuación (6) por  $\delta v_1$  y se tiene en cuenta que el flujo isocórico implica  $\delta v_1 = \delta v_3$ , queda

$$\dot{w}_{in} = N_c \dot{w}_{out} \quad (7)$$

El postulado de Rowe (1962, 1971) es que la ecuación (7) es general, que vale aún cuando el flujo no sea isocórico, y vale para cualquier relación entre tensiones principales  $\sigma_1/\sigma_2/\sigma_3$ . Si se acepta este postulado, el estado tensional actuante durante el flujo dilatante de un material friccional surge de reemplazar la ecuación (4) en la ecuación (2) y luego las ecuaciones (1) y (2) en la ecuación (7). Queda

$$\sigma_1 = (1 - \alpha) N_c \sigma_3 \quad (8)$$

que es la forma particular de la teoría tensión-dilatancia de Rowe para flujo bidimensional axilsimétrico o de deformación plana (Rowe, 1962; 1971).

## LA TEORÍA DE TENSIÓN-DILATANCIA COMO REGLA DE FLUJO

### Hipótesis implícitas

Rowe (1962) calculó el término  $\dot{w}_{in}$  como la suma de las componentes positivas del triplete

$$w = \{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1, \sigma_2 \dot{\epsilon}_2, \sigma_3 \dot{\epsilon}_3\} \quad (9)$$

y  $\dot{w}_{out}$  como la suma de las componentes negativas, donde  $\sigma_i$  son los autovalores del tensor de tensiones (ordenados) y  $\dot{\epsilon}_i$  son los autovalores del tensor de incremento de deformación infinitesimal (que se asumen en el mismo orden). En rigor, la deformación que produce trabajo disipativo es la deformación plástica, con autovalores  $\dot{\epsilon}_i^p$ , por lo que la forma correcta de la ecuación (9) es

$$w = \{\sigma_1 \dot{\epsilon}_1^p, \sigma_2 \dot{\epsilon}_2^p, \sigma_3 \dot{\epsilon}_3^p\} \quad (10)$$

Rowe (1971) admitió esta inconsistencia, que justificó en el hecho de que las ecuaciones (9) y (10) son numéricamente equivalentes porque en los procesos de deformación por corte de arenas, la energía elástica almacenada es mucho más pequeña que la energía disipada en fricción. En la teoría clásica de la plasticidad, la deformación plástica se calcula a partir del potencial plástico  $G$  mediante la expresión

$$\epsilon_{ij}^p = \lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (11)$$

Cuando  $G$  es igual a la función de fluencia  $F$ , la plasticidad se denomina asociativa. En cualquier otro caso, la plasticidad es no asociativa, los tensores  $\sigma$  y  $\epsilon^p$  pueden tener autovectores diferentes, y los términos de la ecuación (10) no tienen sentido físico, porque son el producto de autovalores cuyos autovectores asociados no son coincidentes.

Para que  $\sigma$  y  $\epsilon^p$  compartan autovectores, es necesario que  $G(\sigma)$  sea una función isotrópica de  $\sigma$ . Aunque el problema no es trivial para el caso de la no asociatividad general, puede resolverse para el caso de asociatividad deviatorica y no asociatividad volumétrica. Este tipo de no asociatividad puede ponerse en la forma

$$\dot{\epsilon}_{ij}^p = \dot{\lambda} m_{ij} \quad (12)$$

$$m_{ij} = m_{ij}^d + \beta \delta_{ij} \quad (13)$$

$$m_{ij}^d = n_{ij}^d / \|n_{ij}^d\| \quad (14)$$

$$n_{ij}^d = Dev(\partial F / \partial \sigma_{ij}) \quad (15)$$

donde  $\dot{\lambda}$  es un multiplicador plástico,  $\beta$  es un escalar,  $\delta_{ij}$  es el delta de Kronecker y  $n^d$  es la parte deviatorica del gradiente de la superficie de fluencia. En efecto, el cambio de proyección volumétrica de  $\epsilon^p$  impuesto por  $\beta$  no aumenta el espacio espectral de  $\epsilon^p$  y por lo tanto no rompe la herencia de propiedades espectrales de  $\sigma$  en  $\epsilon^p$  dada por la cadena de ecuaciones (12) a (15). Para este caso particular de no asociatividad volumétrica, la disipación plástica unitaria puede escribirse como (Sfriso, 2007, 2010; Sfriso y Weber, 2010)

$$\dot{w}^p = \sigma_1 \dot{\epsilon}_1^p + \sigma_2 \dot{\epsilon}_2^p + \sigma_3 \dot{\epsilon}_3^p \quad (16)$$

con lo que se recuperan los términos del triplete dado por la ecuación (10). Si se opera sobre las ecuaciones (12) a (15) y se reemplaza en la ecuación (10) queda

$$w = \dot{\lambda} \{ \sigma_1 (m_1^d + \beta), \sigma_2 (m_2^d + \beta), \sigma_3 (m_3^d + \beta) \} \quad (17)$$

donde  $m_i^d$  son los autovalores de  $m^d$ , que ahora tienen el mismo espacio espectral y ordenamiento que los autovalores de  $\sigma$ . La combinación de las ecuaciones (7) y (3) implica que la teoría tensión-dilatancia permite determinar  $\beta$  como una función del estado de tensiones, o sea,  $\beta = \beta(\sigma)$ .

### Cálculo del término de dilatancia

Todos los autovalores de  $\sigma$  son positivos. Sin embargo, los autovalores  $\dot{\epsilon}_1^p$  y  $\dot{\epsilon}_3^p$  deben tener signos distintos, como lo ilustra el hecho que el pistón lateral de la Figura 1 tiene que desplazarse hacia fuera. Esto implica que  $\sigma_1 (m_1^d + \beta) > 0$  (aporta a  $\dot{w}_m$ ) y  $\sigma_3 (m_3^d + \beta) < 0$  (aporta a  $\dot{w}_{out}$ ), mientras que el signo de  $\sigma_2 (m_2^d + \beta)$  es desconocido.

Para resolver el problema debe procederse en dos etapas. En la primera etapa se asume que  $(m_2^d + \beta) \leq 0$ . Luego de algo de álgebra se obtiene (Sfriso, 2007, 2010; Sfriso y Weber, 2010)

$$\beta = -\frac{\sigma_1 m_1^d + N_c (\sigma_2 m_2^d + \sigma_3 m_3^d)}{\sigma_1 + N_c (\sigma_2 + \sigma_3)} \quad (18)$$

Con este resultado se comprueba que efectivamente  $(m_2^d + \beta) \leq 0$ . Si es así, el valor de  $\beta$  es definitivo. En cambio, si el valor de  $\beta$  calculado con la ecuación (18) arroja  $(m_2^d + \beta) > 0$  debe ser descartado, y se procede a calcular un nuevo valor con

$$\beta = -\frac{\sigma_1 m_1^d + \sigma_2 m_2^d + N_c \sigma_3 m_3^d}{\sigma_1 + \sigma_2 + N_c \sigma_3} \quad (19)$$

Debe notarse que el caso especial  $(m_{d2} + \beta) = 0$  queda comprendido en la ecuación (18). En efecto, tanto la ecuación (18) como la ecuación (19) colapsan a la expresión común

$$\beta = -\frac{\sigma_1 m_1^d + N_c \sigma_3 m_3^d}{\sigma_1 + N_c \sigma_3} \quad (20)$$

La ecuación (18) se asocia a estados cercanos a compresión triaxial; la ecuación (19) a estados cercanos a extensión triaxial; y la ecuación (20) a deformación plana. Esto implica que la teoría de tensión-dilatancia produce dilatancias diferentes para estos tres estados, aún para un mismo valor del cociente  $\sigma_1/\sigma_3$  (Sfriso, 2007, 2010; Sfriso y Weber, 2010).

### Compresión y extensión triaxial

Para compresión triaxial, los autovalores de  $m_{ij}$  son

$$m_1^d = \sqrt{2/3} \quad (21)$$

$$m_3^d = -\sqrt{1/6} \quad (22)$$

y por lo tanto

$$\dot{\epsilon}_1^p = \dot{\lambda} (\sqrt{2/3} + \beta_{TC}) \quad (23)$$

$$\dot{\epsilon}_3^p = \dot{\lambda} (-\sqrt{1/6} + \beta_{TC}) \quad (24)$$

con lo que se obtiene el término de dilatancia para compresión triaxial

$$\beta_{TC} = \sqrt{2/3} \frac{N_c \sigma_3 - \sigma_1}{\sigma_1 + 2N_c \sigma_3} \quad (25)$$

Para extensión triaxial, el mismo análisis arroja

$$\beta_{TE} = \sqrt{2/3} \frac{N_c \sigma_3 - \sigma_1}{2\sigma_1 + N_c \sigma_3} \quad (26)$$

## Otras implementaciones

Guo y Stolle (2004) presentaron una extensión de la hipótesis de la ecuación (7) y derivaron una formulación basada en el tensor auxiliar

$$\pi_{ij} = \sigma_{ik} \dot{\epsilon}_{kj} \quad (27)$$

cuyos autovalores coinciden, para asociatividad deviatorica, con los términos del triplete indicado en la ecuación (9). El término de dilatación que se obtiene es una forma tensorial derivable, al precio de que la formulación se aparta de los postulados originales de Rowe (1962).

Guo y Wan (2007) investigaron arreglos granulares 2D con diferentes disposiciones de partículas regulares y demostraron que la hipótesis de mínimo cociente de trabajos implica una cota inferior de la dilatación de materiales anisotrópicos. Desarrollaron una nueva formulación tensión-dilatación basada en micromecánica 2D y dedujeron una regla de flujo consistente con esta formulación. Aunque la regla de flujo de Guo y Wan (2007) tiene un buen sustento en la microescala, requiere la definición y calibración de un tensor de fábrica, y no puede ser extendida a estados tridimensionales de tensiones de manera sencilla.

Finalmente, Woodward y Molenkamp (1999) calcularon los términos de dilatación para compresión y extensión triaxial y propusieron una interpolación lineal en función del ángulo de Lode entre ambos extremos. Una implementación de la formulación presentada en este artículo con una interpolación similar puede verse en Sfriso (2010) y en Sfriso y Weber (2010).

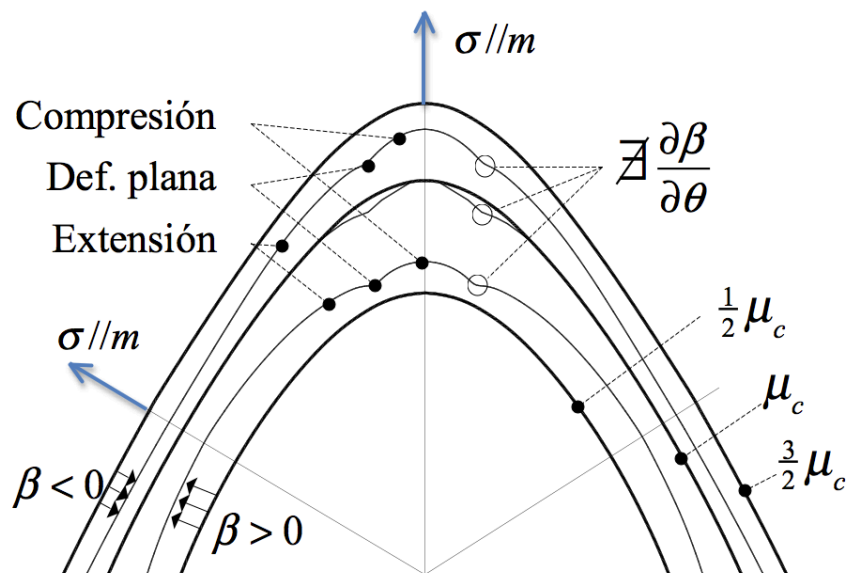
## ANÁLISIS DE LA FORMULACIÓN

### Aspectos teóricos

Las ecuaciones (18) a (20) definen una función continua de  $\sigma$  que permite calcular  $\beta$  para un dado estado tensional de un material granular, a partir de un único parámetro material  $N_c$ . Sin embargo,  $\beta$  depende también de la función de fluencia que el modelo emplee, puesto que ésta impacta en  $m^d$ . Este aspecto no fue advertido por Rowe (1962, 1971) puesto que analizó solo casos particulares: compresión triaxial, donde  $m_2^d = m_3^d$ ; extensión triaxial, donde  $m_2^d = m_1^d$ ; y deformación plana, donde  $m_2^d + \beta = 0$  si se asume comportamiento rígido-plástico como hizo Rowe (1962, 1971).

En el caso de la función de fluencia de Mohr-Coulomb u otras funciones que presentan traza facetada en el plano deviatorico, pequeños cambios de tensiones cerca de los vértices producen grandes cambios en la relación entre los autovalores de  $m^d$ , lo que a su vez induce funciones  $\beta$  que no son suaves. Aún para funciones de fluencia continuas y suaves, como la función de fluencia de Matsuoka-Nakai (1974) o de Lade-Duncan (1975),  $\beta$  presenta una discontinuidad en su derivada primera en el punto de la ecuación (20).

En la Figura 2 se presenta  $\beta$  para tres estados tensionales y para todos los ángulos de Lode  $\theta$  entre compresión y extensión triaxial. Allí,  $\mu_c$  representa el parámetro de fricción del criterio de Matsuoka-Nakai para el estado crítico. Los otros dos estados que se analizan corresponden a un estado contractivo ( $1/2 \mu_c, \beta > 0$ ) y un estado dilatante ( $3/2 \mu_c, \beta < 0$ ). Puede apreciarse la discontinuidad en la derivada de  $\beta$  respecto a  $\theta$ . También se muestra que los puntos que analizó Rowe (1962, 1971, Rowe et al 1964) son los únicos en los que  $\sigma$  y  $m$  son paralelos, y por lo tanto los únicos en los que el producto simple de componentes tiene sentido físico.



**Figura 2:**  $\beta$  en función del ángulo de Lode  $\theta$  y evidencia de su derivada discontinua para tres estados de tensiones, aplicada al criterio de fluencia de Matsuoka-Nakai.

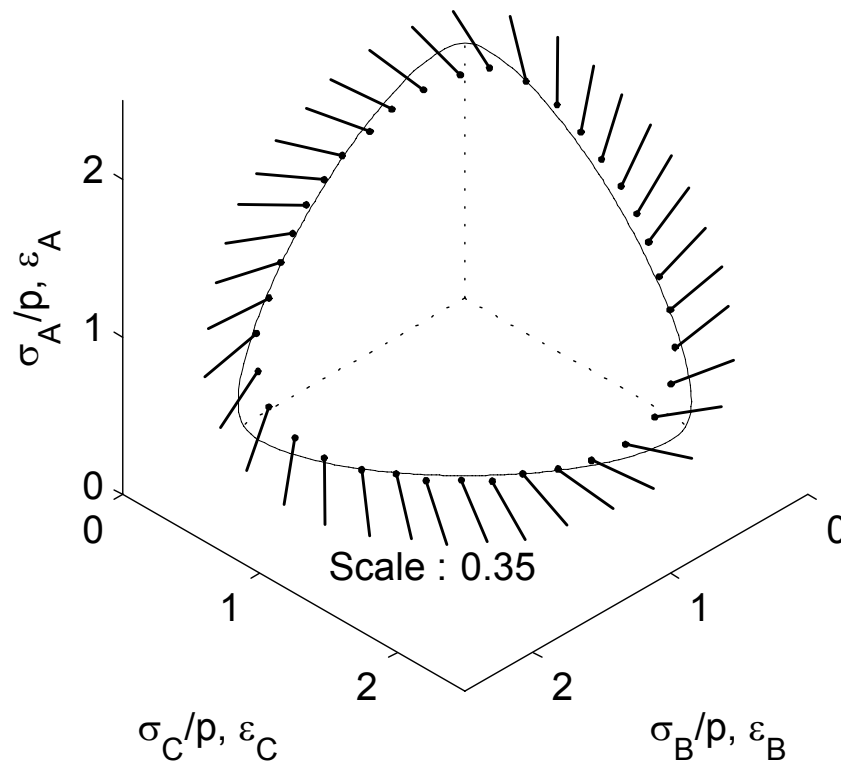
#### Aspectos numéricos

La formulación resumida en las ecuaciones (18) a (20) tiene dos inconvenientes numéricos: i) por no tener una forma tensorial compacta, requiere el cálculo de los autovalores de los tensores de tensión y de dirección de deformación plástica; ii) las discontinuidades en la derivada primera de  $\beta$  impiden el cálculo de un operador algorítmico consistente. Sfriso (2010) presentó algoritmos para la implementación numérica de esta formulación en el marco de un modelo constitutivo basado en hiperelasticidad isotrópica y plasticidad convencional no asociativa.

#### Validación experimental

El comportamiento dilatante de las arenas está bien establecido para trayectorias generales de carga, desde los trabajos pioneros de Lade (1972). Por su parte, la teoría tensión-dilatancia de Rowe (1971) está validada para compresión triaxial monotónica (sin descarga ni rotación de tensiones principales) y, en menor medida, para compresión plana y extensión triaxial monotónica. Sin embargo, no está bien establecido experimentalmente: i) si tiene una razonable capacidad predictiva para carga monotónica distinta a los casos particulares descriptos; y ii) si tiene algún tipo de capacidad predictiva para trayectorias de tensiones que incluyan rotación de tensiones principales.

En lo que respecta a la formulación presentada en este artículo y a su empleo en modelos constitutivos, el punto básico a validar es si las ecuaciones (18) y (19) pueden aplicarse para calcular la dilatancia en trayectorias de carga más complejas. Un ejemplo de estas trayectorias se presenta en la Figura 3 (Choi, 2004), en la que se muestran las direcciones de  $\dot{\epsilon}^p$  medidas durante un ensayo triaxial 3D con rotación de tensiones principales. Se aprecia que los vectores no son normales a ninguna superficie de fluencia simétrica en el origen, por lo que no es válida la hipótesis de asociatividad deviatorica y, por lo tanto, las ecuaciones (18) y (19) no podrían aplicarse a este caso. Sin embargo, la información experimental parece mostrar que hay un comportamiento dilatante que, al menos, es cualitativamente similar al postulado por la teoría tensión-dilatancia (Choi, 2004), aunque se requieren más ensayos para intentar una validación adecuada de la formulación.



**Figura 3: Direcciones de deformación plástica durante ensayos triaxiales 3D con rotación de tensiones principales (Choi, 2004). Los subíndices A, B, C representan las direcciones de carga de la celda triaxial cúbica empleada.**

## CONCLUSIONES

Se presentó una revisión de la teoría de tensión-dilatancia de Rowe, orientada a su implementación como regla de flujo de la plasticidad convencional. Se derivaron las expresiones necesarias para calcular la tasa de dilatancia para cualquier estado tensional, con un procedimiento general que puede aplicarse a cualquier función de fluencia. La restricción principal de la formulación es que la regla de flujo para la componente deviatorica del incremento de deformación plástica debe ser una función isotrópica del estado de tensiones. Se analizaron brevemente las consecuencias teóricas y numéricas de las formas matemáticas deducidas, y se presentaron algunos elementos para el planeamiento de un programa de validación experimental de la formulación para estados generales de tensiones.

## AGRADECIMIENTOS

El primer autor agradece el apoyo de su maestro E. Núñez durante el desarrollo de los estudios e investigaciones que formaron la base de las formulaciones que se presentan en este artículo.

## REFERENCIAS

- Choi, C. (2004). "Physical and mathematical modeling of coarse-grained soils" Ph.D. Dissertation, University of Washington, Seattle, Washington, 439 p.
- Guo, P. y Stolle, D. (2004). "The extension of Rowe's stress-dilatancy model to general stress condition", *Soils and Foundations*, Vol. 44, No. 4, pp. 1-10.
- Guo, P. y Wan, R. (2007). "Rational approach to stress-dilatancy modeling using an explicit micromechanical formulation", in *Bifurcations, Instabilities, Degradation in Geomechanics*, G.E. Exadaktylos, I. Vardoulakis, eds., Springer, pp. 201-230.
- Lade, P. (1972). "The stress-strain and strength characteristics of cohesionless soils", Ph.D. Dissertation, University of California at Berkeley.
- Lade, P. y Duncan, M. (1975). "Elastoplastic stress strain theory for cohesionless soils", *ASCE Journal of Geotechnical Engineering Division*, Vol. 101, No. GT10, pp. 1037-1053.

- Matsuoka, H. y Nakai, T. (1974). "Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses", *Proceedings of the Japanese Society of Civil Engineers*, No. 232, pp. 59-70.
- Rowe, P. (1962). "The stress dilatancy relation for static equilibrium of an assembly of particles in contact", *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 269, pp. 500-527.
- Rowe, P., Barden, L. y Lee, K. (1964). "Energy components during the triaxial cell and direct shear tests", *Geotechnique*, Vol. 14, No. 3, pp. 247-261.
- Rowe, P. (1971). "Stress-strain relationships for particulate materials at equilibrium", *Special Conference on Performance of Earth and Earth Supported Structures*, Vol. 3, pp. 327-359.
- Sfriso, A. (2007). "A constitutive model for sands: Evaluation of predictive capability", *13ª Conferencia Panamericana de Mecánica de Suelos e Ingeniería Geotécnica*, Venezuela, Vol. 1, pp. 242-247.
- Sfriso, A. (2010). "Caracterización mecánica de materiales constituidos por partículas", Tesis para optar al título de Doctor en Ingeniería, Universidad de Buenos Aires, Argentina, 240 p.
- Sfriso, A. y Weber, G. (2010). "Formulation and validation of a constitutive model for sands in monotonic shear", *Acta Geotechnica*, Vol. 5, Issue 4, pp. 257-272.
- Woodward, P. y Molenkamp, F. (1999). "Application of an advanced multi surface kinematic constitutive soil model", *International Journal of Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, Vol. 23, No. 15, pp. 1995-2043.