

# **Validación experimental del Particle Finite Element Method (PFEM)**

E. Oñate  
A. Larese  
S. Idelsohn  
M. Celigueta  
R. Rossi

# **Validación experimental del Particle Finite Element Method (PFEM)**

E. Oñate  
A. Larese  
S. Idelsohn  
M. Celigueta  
R. Rossi

Publicación CIMNE N°-318, Abril, 2008

# ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN .....	2
2	CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN DEL PFEM CON RESULTADOS TEÓRICOS .....	6
	2.1 Agitación de agua en un tanque .....	6
	2.2 Rotura de una ola sobre una playa .....	7
3	VALIDACIÓN DEL PFEM CON ENSAYOS PUBLICADOS EN LA LITERATURA.....	9
	3.1 Tanque de agua en reposo y agitado.....	10
	3.2 Estudio de las presiones de olas sobre una pared vertical .....	16
	3.3 Colapso de una columna de agua .....	30
	3.4 Flujo en lámina libre sobre una rampa .....	35
	3.5 Flujo en lámina libre sobre un modelo de aliviadero en escalera .....	45
	3.6 Flujo del agua a través de una compuerta .....	48
	3.7 Efecto de una corriente de agua sobre un objeto prismático.....	56
4	CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN DEL PFEM CON ENSAYOS REALIZADOS EN LA ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES DE MADRID .....	66
5	REFERENCIAS .....	77

## 1 INTRODUCCIÓN

Se presenta en este trabajo una colección de casos para colaboración y validación experimental del Método de Elementos Finitos y Partículas (PFEM por Particle Finite Element Method en inglés). El PFEM es una técnica numérica para análisis de problemas de interacción fluido-estructura utilizando una formulación lagrangiana para modelar la cinemática del fluido y la estructura.

El movimiento de sólidos en fluidos se analiza normalmente con el método de elementos finitos (MEF) utilizando la denominada formulación arbitraria Lagrangiana-Euleriana (ALE). En el método ALE, el movimiento de partículas del fluido está desacoplado del de los nodos de la malla. Por tanto la velocidad relativa entre los nodos de la malla y las partículas se utiliza como la velocidad convectiva en las ecuaciones de cantidad de movimiento.

La formulación ALE se ha utilizado conjuntamente con el método de elementos finitos estabilizados para obtener diferentes procedimientos numéricos para resolver el problema de interacción fluido-estructura y FE. Por ejemplo, Tezduyar *et al.* (1992a,b, 2001) han utilizado una formulación de un dominio deformado espacial junto con una técnica de estabilización en el espacio-tiempo para el cálculo de problemas de interacción de fluido-estructura con superficie libre. Las dificultades típicas del análisis de la interacción fluido-estructura utilizando el MEF tanto con la formulación Euleriana como la ALE incluyen el tratamiento de los términos convectivos y de la condición de incompresibilidad en las ecuaciones de fluido, el modelado y seguimiento de la superficie libre en el fluido, la transferencia de la información entre los dominios del fluido y del sólido vía las interfases de contacto, el modelado de la rotura de olas, la posibilidad de tratar grandes movimientos de sólidos rígidos de estructura dentro del fluido, la actualización eficiente de las mallas de elementos finitos para la estructura y el fluido, etc.

La mayoría de estos problemas desaparecen si se utiliza una *descripción Lagrangiana* para formular las ecuaciones de gobierno de los dominios del fluido y del sólido. En la formulación lagrangiana se sigue el movimiento de cada una de las partículas de forma individual y, consecuentemente, los nodos en una malla de elementos finitos pueden considerarse como "partículas" en movimiento. Por consiguiente, el movimiento de la malla discretiza el dominio total (incluyendo los dominios del fluido y la estructura) se sigue durante la solución transitoria.

En este trabajo hemos validado una clase particular de formulación Lagrangiana para resolver problemas en los que intervienen la interacción entre fluidos y sólidos (Figura 1). El método se denomina *método de partículas y elementos finitos* (PFEM), el PFEM trata los nodos en la malla tanto en los dominios del fluido como del sólido como partículas que pueden moverse libremente e incluso separarse del dominio principal del fluido representando, por ejemplo, el efecto de gotas de agua. En una malla de elementos finitos conecta los nodos que definen el dominio discretizado donde se resuelven las ecuaciones de gobierno en la forma estándar del MEF. El PFEM es la evolución natural del trabajo reciente de los autores para la resolución de problemas de interacción fluido-estructura



utilizando métodos de elementos finitos lagrangianos y técnicas sin malla [Aubry *et al.* (2004); Idelsohn *et al.* (2003a; 2003b; 2004); Oñate *et al.* (2003; 2004)].

Una ventaja obvia de la formulación Lagrangiana es que los términos convectivos desaparecen de las ecuaciones del fluido. La dificultad, sin embargo, se transfiere al problema de mover adecuadamente (y eficientemente) los nodos de la malla. Ciertamente para grandes movimientos de la malla puede ser necesario remallar a lo largo de la solución en el tiempo. Utilizamos un procedimiento de regeneración de la malla innovador que mezcla elementos de diferentes formas mediante un método extendido de Delaunay [Idelsohn *et al.* (2003a; 2003c)]. Estos elementos finitos polihédricos necesitan funciones de forma especiales. En nuestro trabajo se han utilizado las funciones de forma del denominado método de elementos finitos sin malla (PFEM) [Idelsohn *et al.* (2003a)].

En la formulación Lagrangiana existe todavía la necesidad de tratar adecuadamente la condición de la incompresibilidad en el fluido. La utilización de interpolaciones de elementos finitos estándar puede conducir al efecto del bloqueo por deformación volumétrica al menos que se tomen algunas precauciones. En la literatura se encuentran diferentes procedimientos de elementos finitos para aliviar el problema del bloqueo en fluidos incompresibles [Chorin (1967); Codina (2002); Codina *et al.* (1998); Codina y Blasco (2000); Codina and Zienkiewicz (2002); Cruchaga y Oñate (1997; 1999); Donea and Huerta (2003); Franca y Frey (1992); Hansbo y Szepessy (1990); Hughes *et al.* (1986; 1989; 1994); Oñate (1998); Sheng *et al.* (1996); Tezduyar *et al.* (1992); Zienkiewicz y Taylor (2000); Storti *et al.* (2004)]. Un objetivo general es poder utilizar elementos de bajo orden con interpolaciones de igual orden para las variables de velocidad y presión [Oñate (2000)]. En nuestro trabajo hemos utilizado una técnica de estabilización basada en el método de cálculo finito (FIC). En las referencias [García y Oñate (2003); Oñate (2004); Oñate *et al.* (2000; 2004); Oñate y García (2001); Oñate y Idelsohn (1998)] se pueden encontrar diferentes aplicaciones de la técnica FIC para problemas de fluidos incompresibles utilizando elementos triangulares y tetrahédricos lineales.

La formulación Lagrangiana tiene muchas ventajas para seguir el movimiento de las partículas del fluido en flujos en donde existen grandes desplazamientos de la superficie libre, como en el caso de olas que rompen sobre una estructura y en *splashing* (salpicadura) de líquidos. Recordamos que la información en el método PFEM es típicamente nodal, es decir la malla de elementos finitos se utiliza fundamentalmente para obtener los valores de las variables de estado (por ejemplo las velocidades, presiones, etc.) en los nodos. Aquí aparece una dificultad en la identificación de los contornos del dominio a partir de una colección dada de nodos. Ciertamente el "contorno" puede incluir la superficie libre en el fluido y también las partículas individuales del líquido que se mueven fuera del dominio del fluido. En nuestro trabajo hemos utilizado la técnica Alpha Shape para identificar los nodos contorno [Edelsbrunner y Mucke (1999)].

El contenido de este informe es el siguiente. En el próximo apartado se presentan las ideas básicas del PFEM. Tras ello se presenta una colección de casos de calibración y validación del PFEM utilizando resultados experimentales obtenidos en laboratorios especializados y otros resultados obtenidos por métodos analíticos.



## Ideas básicas del método de partículas y elementos finitos

Consideremos un dominio que contiene subdominios de fluido y de sólido. Las partículas de fluido en movimiento interactúan con los contornos del sólido induciendo por tanto la deformación del sólido que a su vez afecta al movimiento del fluido y, por consiguiente, el problema está totalmente acoplado.

Los problemas de interacción fluido-estructura se han resuelto tradicionalmente utilizando una descripción ALE para las ecuaciones del fluido mientras que la estructura se modela con una formulación Lagrangiana total. En la literatura se encuentran muchos ejemplos de aplicación de este tipo de procedimiento [Donea y Huerta (2003); Zienkiewicz y Taylor (2000)].

En la técnica PFEM que aquí se presenta, tanto los dominios del fluido como del sólido se modelan utilizando una *formulación Lagrangiana* actualizada (Figura 1). Se utiliza el método de los elementos finitos para resolver las ecuaciones de gobierno en ambos dominios. Por tanto debe generarse una malla que discretiza estos dominios para resolver las ecuaciones de gobierno para el fluido y el sólido en la forma de métodos finitos tradicional. Se destaca de nuevo que los nodos que discretizan los dominios del fluido y del sólido pueden entenderse como partículas de materiales cuyo movimiento se sigue durante la solución transitoria.

La calidad de la solución numérica dependerá obviamente de la discretización utilizada, como sucede en el MEF estándar. Puede utilizarse también técnicas de refinamiento adaptable para mejorar la solución en zonas donde ocurran grandes movimientos del fluido o de la estructura.

La formulación Lagrangiana permite seguir el movimiento de cada partícula individual del fluido (un nodo). Esto es útil para modelar la separación de las partículas del líquido del dominio principal del fluido y para seguir su movimiento como partículas individuales con una velocidad inicial y sometidas a las fuerzas de gravedad.

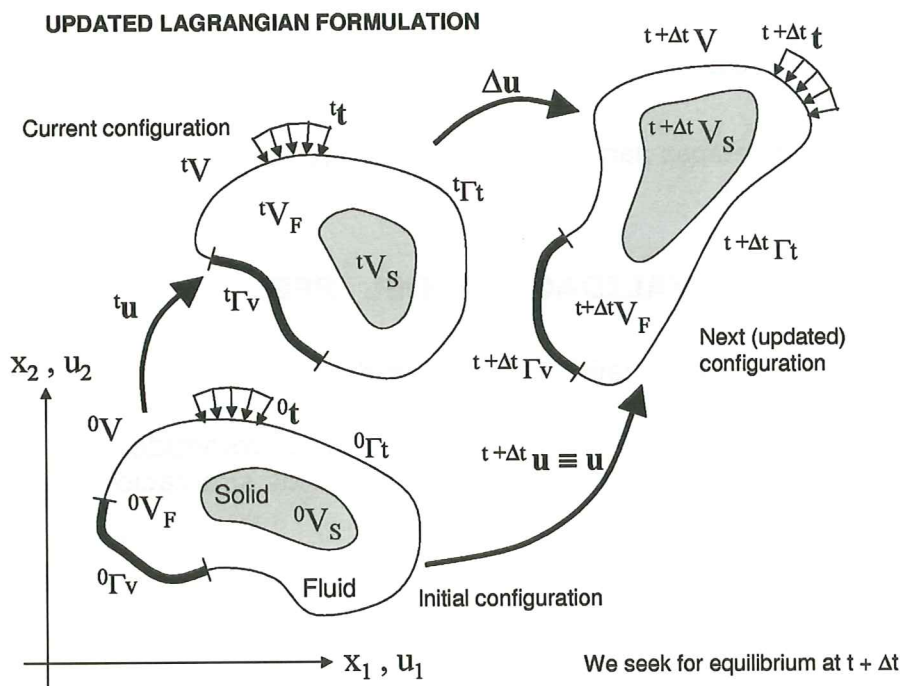
En resumen, una solución típica con el PFEM involucra las etapas siguientes.

1. Discretizar los dominios del fluido y del sólido con una malla de elementos finitos. El proceso de generación de la malla puede basarse en una discretización de Delaunay estándar [George (1991)] del dominio de análisis utilizando una colección inicial de puntos que se convierten entonces en los nodos de la malla. Alternativamente, puede generarse los nodos durante el proceso de generación de la malla utilizando un método de generación frontal [Irons (1970); Thompson *et al.* (1999)].
2. Identificar los contornos externos para los dominios del fluido y del sólido. Esta es una etapa esencial ya que algunos contornos (como la superficie libre en los fluidos) pueden haberse distorsionado severamente durante el proceso de solución, incluyendo la separación y reentrada de nodos. En nuestro trabajo hemos utilizado el método de Alpha Shape [Edelsbrunner y Mücke (2003)] para la definición de los nodos del contorno.
3. Resolver las ecuaciones acopladas del movimiento Lagrangiano para los dominios del fluido y del sólido. Calcular las variables de estado relevante en

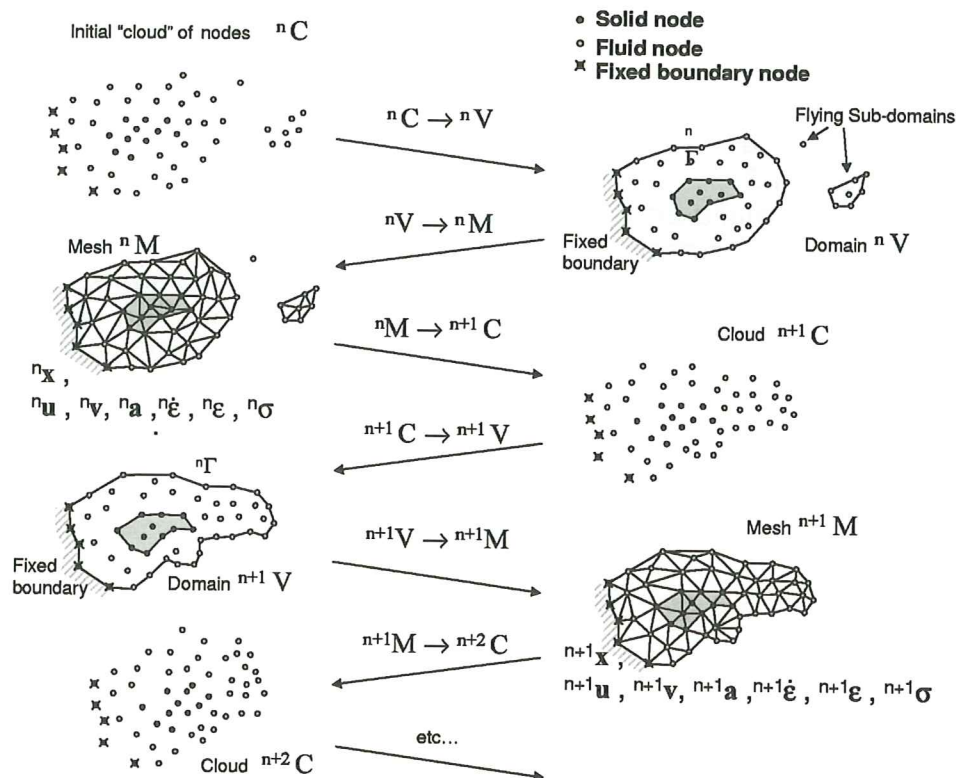
ambos dominios en cada paso de tiempo: las velocidades, la presión y las tensiones viscosas en el fluido, y los desplazamientos, las deformaciones y las tensiones en el sólido.

4. Mover los nodos de la malla a una nueva posición en función del tamaño del paso del tiempo. Esta etapa es típicamente una consecuencia del proceso de solución de la etapa 3.
5. Generar una nueva malla en caso necesario. El proceso de regeneración de la malla puede tener lugar después de un número prescrito de pasos de tiempo, o cuando la malla actual ha sufrido importantes distorsiones debido al movimiento Lagrangiano. En nuestro trabajo utilizamos un esquema de generación de malla innovador basado en una teselación extendida de Delaunay [Idelsohn *et al.* (2003a; 2003b; 2004)].
6. Volver a la etapa 2 y repetir el proceso de solución para el paso de tiempo siguiente.

En la Figura 2 se resumen las etapas anteriores.



**Figura 1.** Descripción lagrangiana actualizada para un continuo incluyendo un medio sólido y otro fluido.



**Figura 2.** Secuencia de etapas para actualizar una "nube" de nodos del tiempo  $n$  ( $t=t_n$ ) al  $n+2$  ( $t=t_n + 2\Delta t$ ).

## 2 CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN DEL PFEM CON RESULTADOS TEÓRICOS

El objetivo de los ensayos es validar la exactitud del PFEM para predecir la forma de la superficie libre en fluidos en movimiento, así como la distribución de presiones en el fluido y en la superficie de cuerpos sometidos a la acción del fluido. En la mayoría de los casos se realizaron varias simulaciones con el PFEM utilizando mallas de diferente tamaño.

En primer lugar se ha validado la precisión del PFEM con resultados analíticos de los siguientes problemas:

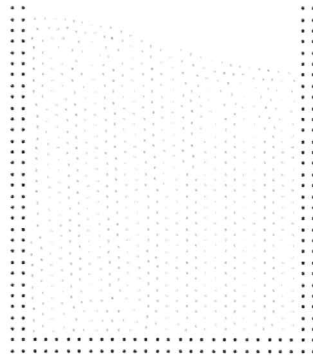
- Agitación de agua en un tanque
- Rotura de una ola sobre una playa

### 2.1 Agitación de agua en un tanque

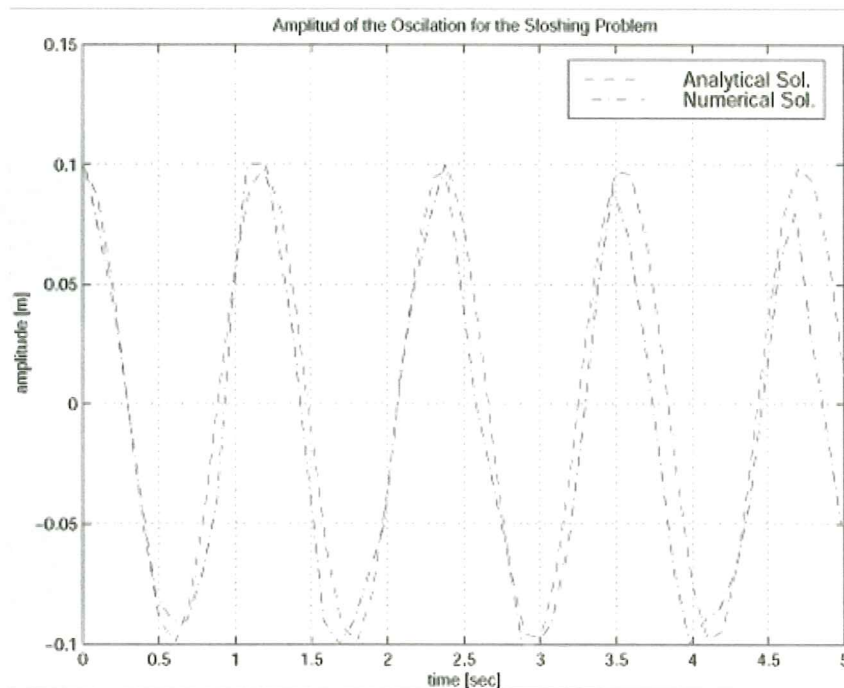
En la Figura 3 se muestra un ejemplo sencillo del análisis 2D de la oscilación libre del agua en un tanque cilíndrico. En la Figura 3 se muestra la distribución de puntos utilizada al inicio del análisis. En la Figura 4 se muestra la comparación de la amplitud obtenida con una solución analítica para un fluido casi-no viscoso. Los resultados del PFEM comparan muy bien con los analíticos [Radovitzki and



Ortiz (1998)] en las oscilaciones iniciales cuando el efecto de la viscosidad no es todavía importante.



**Figura 3.** Agitación del agua en un tanque cilíndrico. Distribución inicial de puntos.



**Figura 4.** Agitación del agua en un tanque cilíndrico. Comparación de la evolución de la amplitud de la oscilación obtenida analíticamente [Radovitzki and Ortiz (1998)] y con el PFEM.

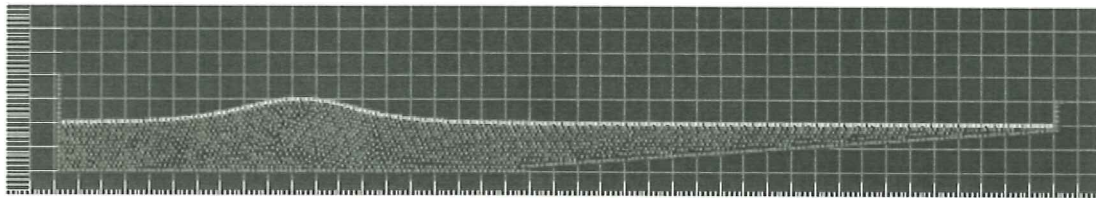
## **2.2 Rotura de una ola sobre una playa**

En las Figuras 5b y 6 se muestra un ejemplo de simulación con el PFEM de la propagación de una ola sobre un plano inclinado y su rotura sobre la playa. Se muestra también la comparación con una solución analítica [Radovitzki and Ortiz (1998)], apreciándose la concordancia entre ambas soluciones (en amplitud y fase) hasta el momento de la rotura en la playa, efecto que solo puede ser modelado con el PFEM.

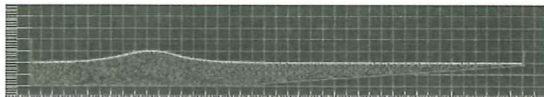




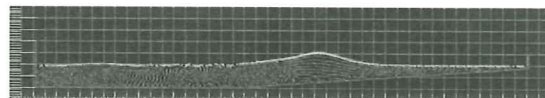
**Figura 5a.** Ola de gran tamaño rompiendo sobre una playa.



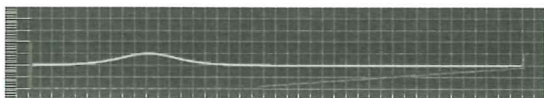
**Figura 5b.** Análisis 2D de la rotura de una ola sobre la playa. Vista general de la distribución de puntos en un instante.



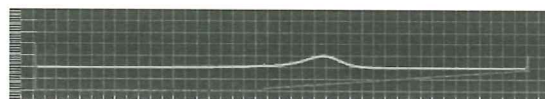
a)  $t = 0$  sec.



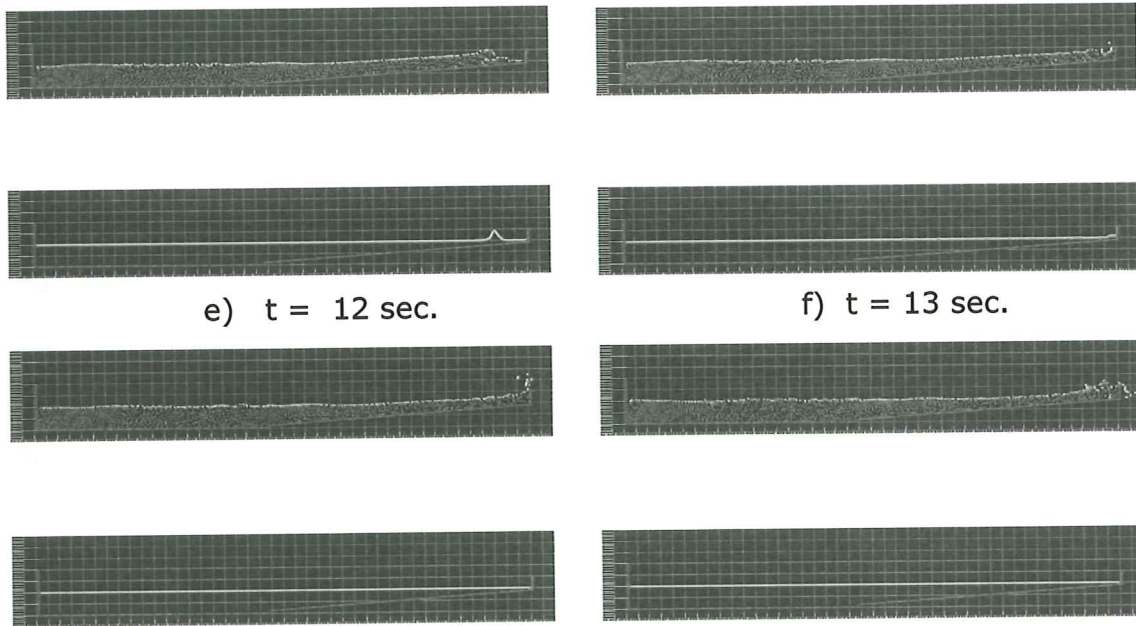
b)  $t = 6$  sec.



c)  $t = 10$  sec.



d)  $t = 11$  sec.



**Figura 6.** Análisis 2D de la rotura de una ola sobre una playa. Comparación de la evolución de la cresta de la ola con resultados analíticos en diferentes instantes. Figura superior: resultados del PFEM. Figura inferior: solución analítica.

### 3 VALIDACIÓN DEL PFEM CON ENSAYOS PUBLICADOS EN LA LITERATURA

- 1) Tanque en reposo y agitado.
- 2) Estudio de las presiones de olas sobre una pared vertical.
- 3) Colapso de una columna de agua
- 4) Flujo en lámina libre sobre una rampa
  - Modelo bidimensional
  - Modelo tridimensional
- 5) Flujo en lámina libre sobre un modelo simulando un aliviadero en escalera
  - Modelo bidimensional
- 6) Flujo del agua a través de una compuerta
  - Modelo bidimensional
- 7) Flujo de agua en un recipiente prismático originado por la rotura de un recipiente
  - Modelo bidimensional
  - Modelo tridimensional

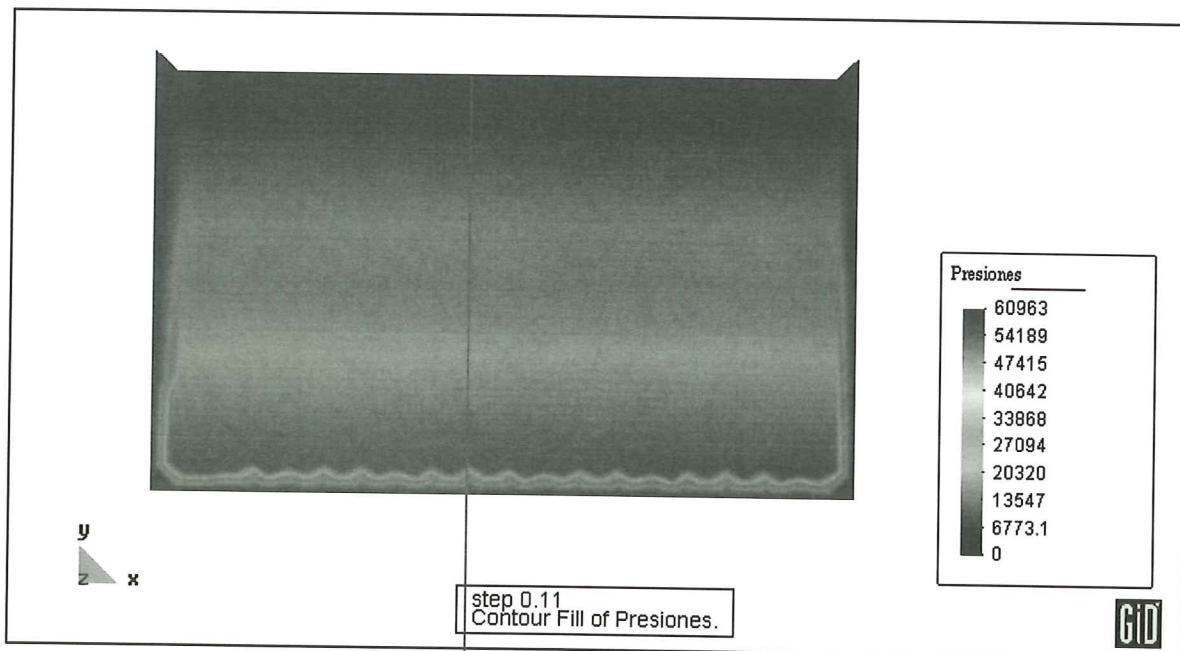
A continuación se describe cada uno de dichos ensayos y las pruebas de calibración/validación realizadas.

### 3.1 Tanque de agua en reposo y agitado

#### El caso hidrostático

Con el afán de validar si los valores de presión calculados por el PFEM son aceptables, se ha analizado el caso de un tanque de agua en reposo (simplificado en 2D). El hecho de conocer a priori que las presiones han de ser las hidrostáticas, siguiendo una ley triangular, hace que la comparación sea muy sencilla (Figura 7). Por ello, se ha ejecutado el programa sobre un tanque de 10 metros de ancho por 6 de profundidad. Se espera, por tanto, que las presiones en el fondo del tanque tengan un valor de 6 metros de columna de agua o, lo que es lo mismo, 58800 kPa.

Tras un breve tiempo de cálculo, se obtiene la distribución de presiones que se muestra en la Figura 7 (unidades en Pa.):



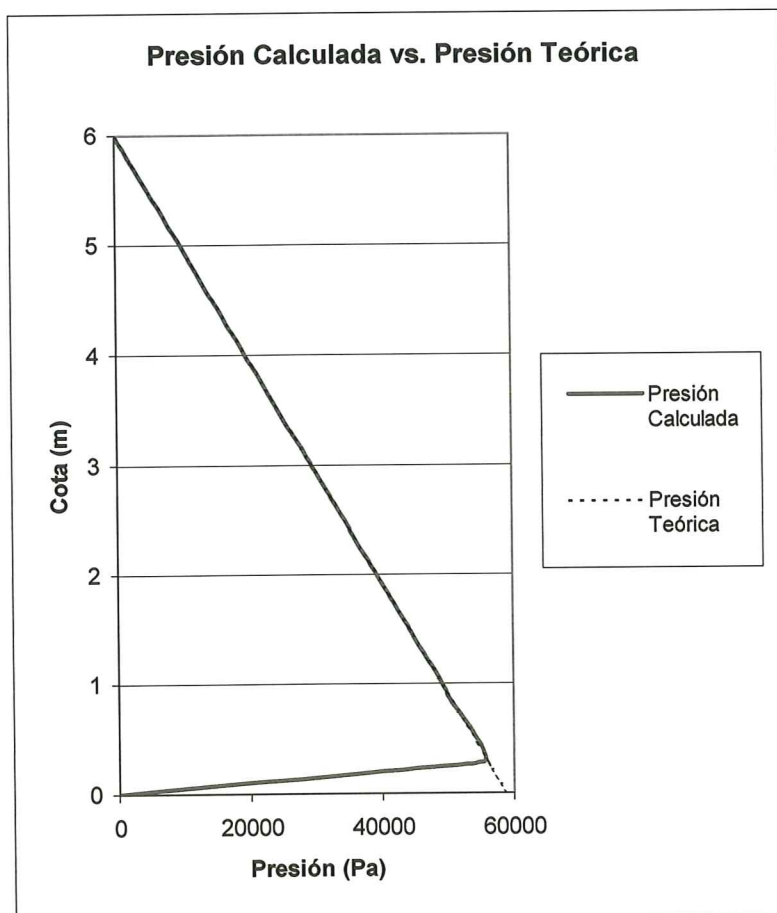
**Figura 7.** Presiones hidrostáticas (Pa).

La línea roja señala el corte que se ha hecho para graficar las presiones. El gráfico de la Figura 8 representa los valores de la presión a lo largo de dicha línea vertical.

En la Figura 8 se observa la perfecta rectitud de la distribución, y se puede comparar con la distribución teórica hidrostática. La comparativa muestra que son iguales excepto en los 30 cm. del fondo del tanque. Esta diferencia se debe a



que en esta simulación el programa identificó los nodos del fondo del tanque como nodos frontera, y por lo tanto les asigna presión cero. No obstante, el hecho de que las dos distribuciones se superpongan exactamente significa que la tendencia que tiene la distribución calculada conduce, mediante una sencilla extrapolación, directamente a los 58800 Pa (solución hidrostática), y no sería necesario el uso de los resultados analíticos. Obviamente, puede obtenerse también la solución hidrostática "exacta" no imponiendo un valor nulo de la presión en los nodos del fondo del tanque.



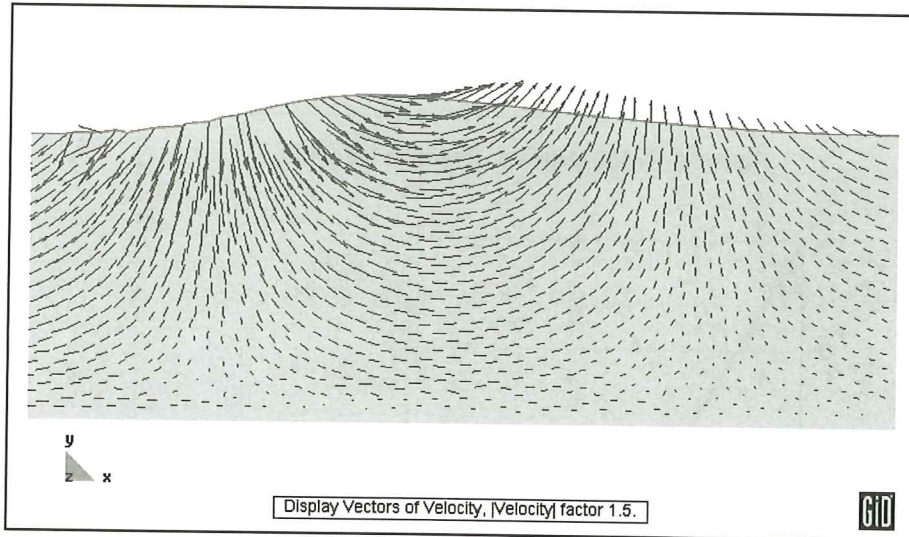
**Figura 8.** Presiones a lo largo de la vertical.

### Caso agitado. Estudio del campo de velocidades

Siguiendo con el objetivo de validar el PFEM y comparar sus resultados con algunos de los resultados teóricos más conocidos, se calculó el campo de velocidades de un fluido sometido a un cierto oleaje y se cotejó con las distribuciones de velocidades que establece la teoría lineal de olas.

Así pues, se ha ejecutado el programa del PFEM desarrollado en CIMNE sobre un ejemplo 2D que representa un canal con un generador de olas tipo *flap* (Anexo 2) que produce olas de unas características conocidas y determinadas ( $h = 13$  m.,  $T = 6$  s.,  $H = 2$  m.).

En un cierto instante de tiempo pasado el cual las olas se desarrollan completamente y en un cierto punto suficientemente alejado de la pala generadora, se ha capturado la forma de la ola y su campo de velocidades (Figura 9).



**Figura 9.** Campo de velocidades.

Se aprecia una cierta asimetría a ambos lados de la ola, ello es debido a que esta ola está en "aguas intermedias", es decir, que  $0.05 < \frac{h}{L} < 0.5$  (en el caso estudiado  $\frac{h}{L} = 0.25$ ).

La teoría lineal de olas explica que la distribución de velocidades verticales en la línea vertical bajo la cresta debe ser cero y que la distribución de velocidades horizontales en esa misma línea debe ser

$$v_x = \frac{\pi H}{T} \frac{\cosh k(h+z)}{\sinh kh}$$

Conociendo esto, a continuación se superponen las dos distribuciones (la teórica y la obtenida con el PFEM) en un gráfico (las tablas de Excel con los valores se encuentran en el Anexo 3) para facilitar su comparativa (Figura 10).

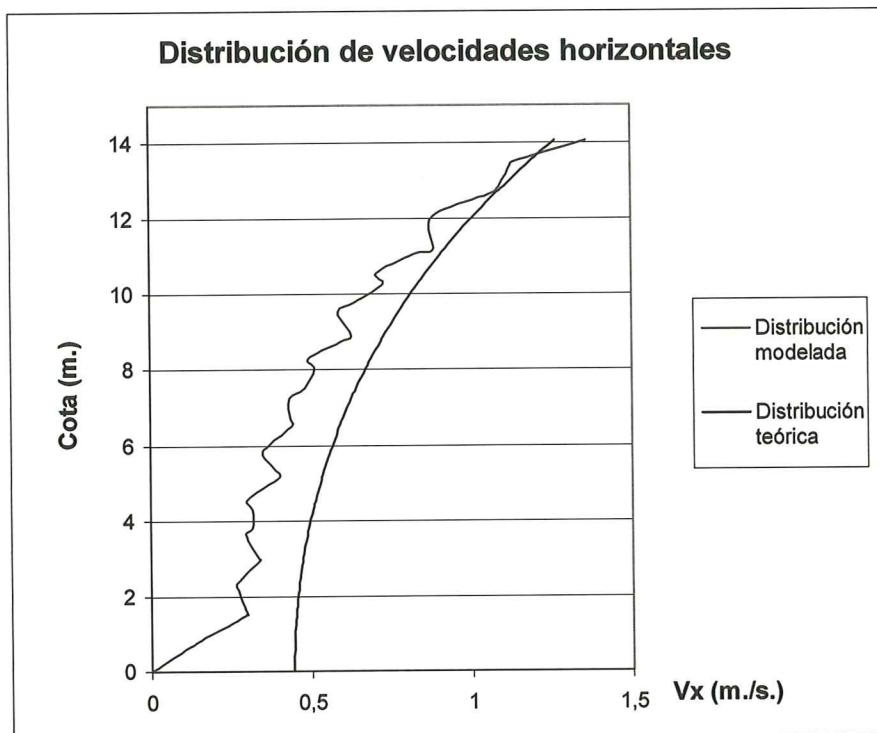
Algunos comentarios sobre las diferencias entre ambas distribuciones:

- la solución del PFEM "siente el fondo" mucho más que la teórica, el tamaño de la zona afectada por el fondo depende sin duda del tamaño de los elementos al mallar, y la distribución teórica elimina esa zona porque se considera la



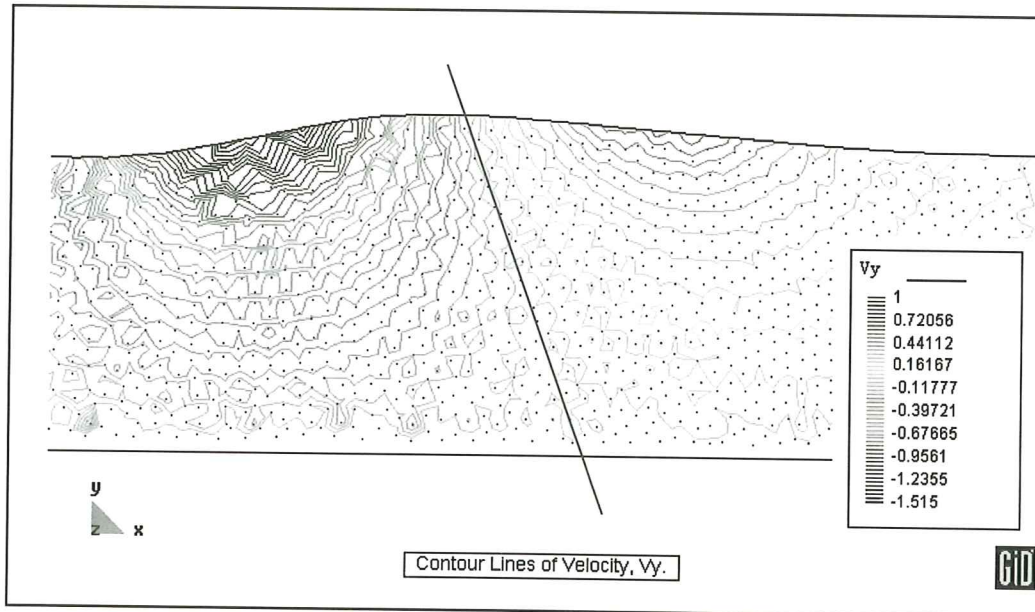
capa límite (zona afectada por la condición de adherencia perfecta) despreciable en relación con la profundidad.

- la solución del PFEM presenta oscilaciones de velocidad, estas oscilaciones no son graves y se mitigan refinando la malla.
- la solución del PFEM, salvo en la superficie libre, da velocidades menores que la teórica, de un 38 % en el peor de los puntos. Este es un punto crítico, y por ello a continuación se analizan las causas de esta diferencia.



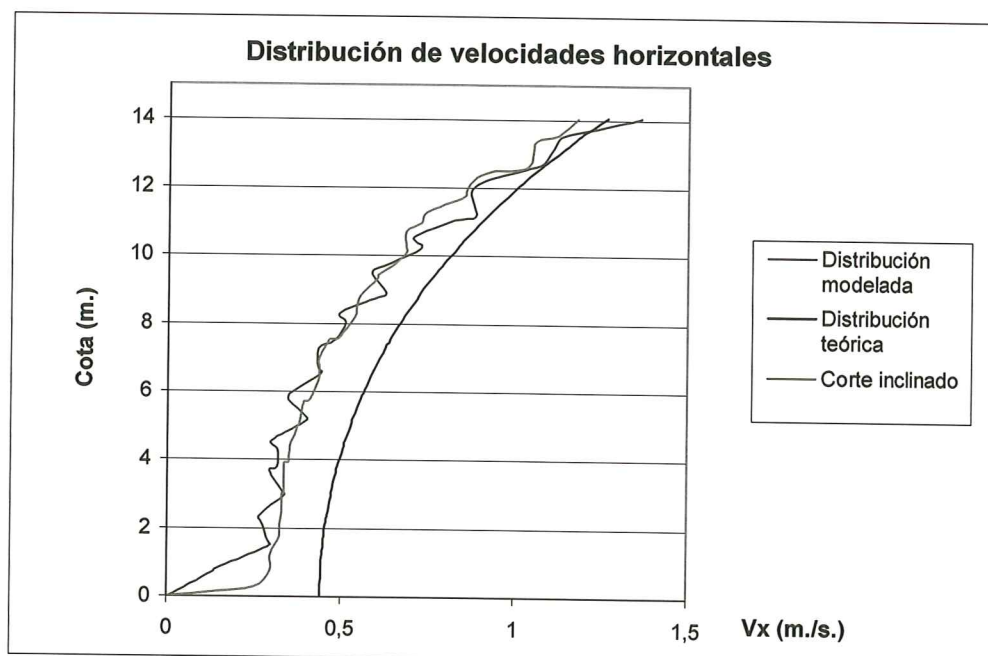
**Figura 10.** Velocidades horizontales sobre la vertical (ag. intermedias).

En la ola generada por el modelo se observa que la línea de velocidades verticales nulas no es vertical (véase la Figura 11, valores en m./s.), tal y como describe la teoría lineal de olas. Sin embargo, sí se aprecia un perfil inclinado a lo largo del cual las velocidades verticales se mantienen alrededor del valor 0.



**Figura 11.** Isolíneas de velocidad vertical.

Si se comparan las velocidades sobre la línea roja de la Figura 12 (proyectadas sobre la vertical) con la distribución teórica que nos proporciona la teoría lineal, estas no coinciden de forma exacta, tal y como se puede ver en el gráfico siguiente:



**Figura 12.** Velocidades horizontales sobre la línea  $V_y=0$  (ag. intermedias).

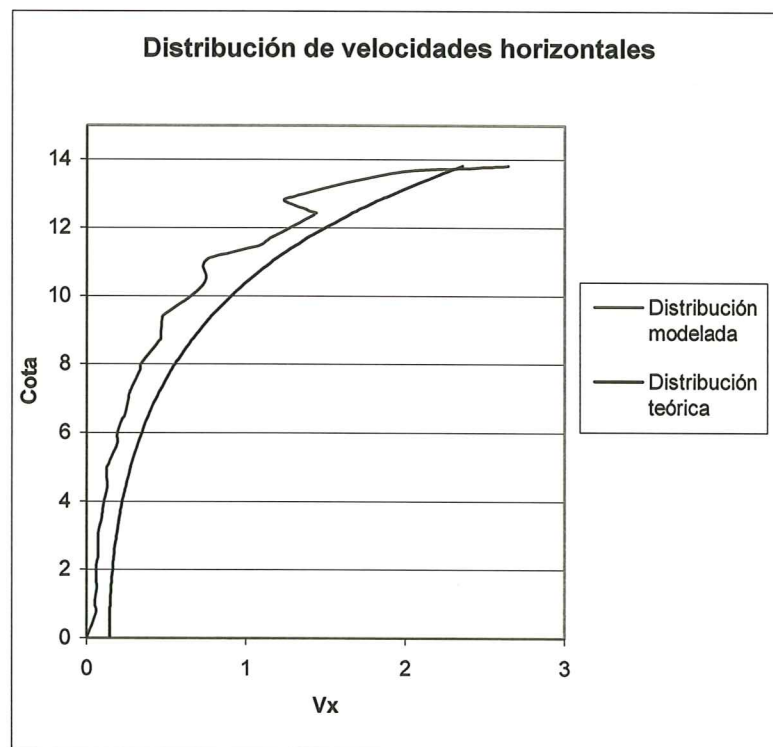
Por lo tanto, en aguas intermedias el parecido es razonable en cuanto a forma y magnitud a la distribución teórica pero no se puede aceptar la coincidencia entre ellas. Sin embargo, la teoría lineal de olas no garantiza forzosamente una buena representación de la zona intermedia, sino que se considera una buena aproximación para el caso de "aguas profundas" ( $\frac{h}{L} < 0.05$ ). Por eso se ha elaborado un nuevo ejemplo, esta vez cumpliendo la condición de aguas profundas, con las siguientes características de ola:

$h = 13 \text{ m.}$ $T = 4 \text{ s.}$ $L = 24.9$ $\text{m.}$
--

$$\frac{h}{L} = 0.522 \text{ cumple la condición de aguas profundas}$$

$$\frac{H}{L} = 0.098 < 0.1 \text{ evita la rotura por peralte}$$

En estas condiciones, las distribuciones de velocidad horizontal modelada y teórica se superponen en la Figura 13.



**Figura 13.** Velocidades horizontales en aguas profundas.

Puede observarse que las velocidades que da el método numérico son un poco menores que las teóricas esperadas, pero la tendencia y la curva de la distribución son cualitativamente muy ajustadas, y cuantitativamente más parecidas que en el caso de aguas intermedias. Dando un resultado aceptable.

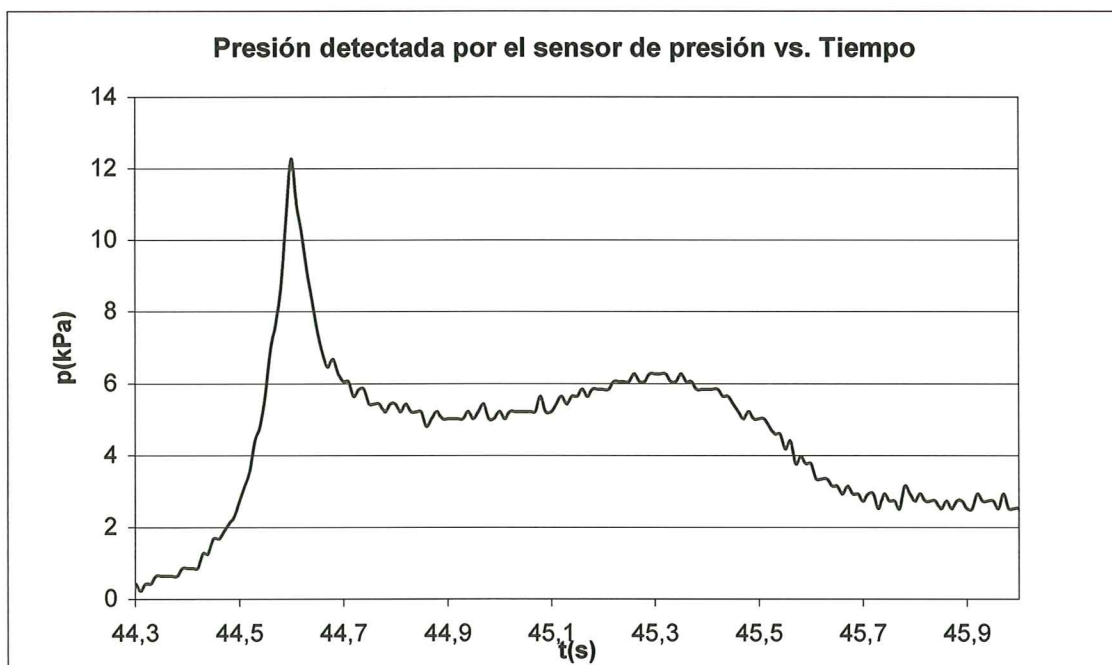
### 3.2 Estudio de las presiones de olas sobre una pared vertical

Este estudio tiene como objetivo validar las presiones obtenidas por el PFEM.

Para ello, se han comparado los resultados de un caso concreto de olas incidentes sobre un dique obtenidos con el programa con los resultados experimentales de un ensayo experimental efectuado en las instalaciones del CIEM<sup>1</sup>, de la UPC. El ensayo que se ha tenido en cuenta es uno incluido en un proyecto CIEM, que estudia los fenómenos asociados a las olas que inciden sobre diques reflejantes.

El ensayo en cuestión elegido consistió en la generación artificial de un oleaje regular de características prefijadas ( $H = 0,6 \text{ m}$   $T = 4,5 \text{ s}$ ). Dicho oleaje se transmite a lo largo del canal hasta chocar contra un dique metálico vertical, en el cual se colocaron unos sensores de presión a diferentes alturas que medían la presión a lo largo del tiempo.

Los valores captados por un sensor de presión, constantemente sumergido durante la incidencia de una ola cualquiera, siguen todos una forma característica que se puede apreciar en el gráfico de la Figura 14.



**Figura 14.** Presión detectada experimentalmente en el canal de ensayos real.

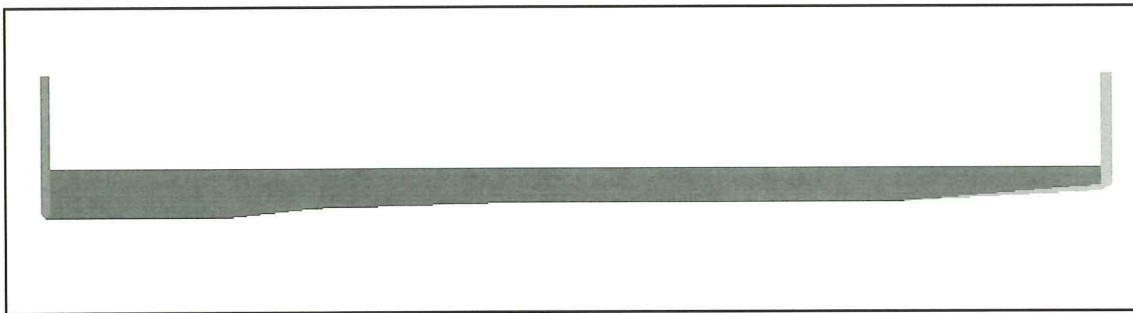
<sup>1</sup> Canal de Investigación y Experimentación Marítimas. Instalaciones construidas para la realización de ensayos hidráulicos a escala. Su longitud es de 100 m. de largo, 3 m. de ancho y 5 m. de alto. Está ubicado en el Campus Nord de la UPC, Barcelona.



Se observa un pico de presión inicial asociada a presiones dinámicas y más tarde (unos 0.7 s. después) otro máximo local más suavizado y de menor valor de presión, que se puede asociar a las presiones hidrostáticas. Todas las olas que chocan contra el dique –salvo las primeras, cuando el oleaje no está totalmente desarrollado– presentan sin excepción este perfil de presiones.

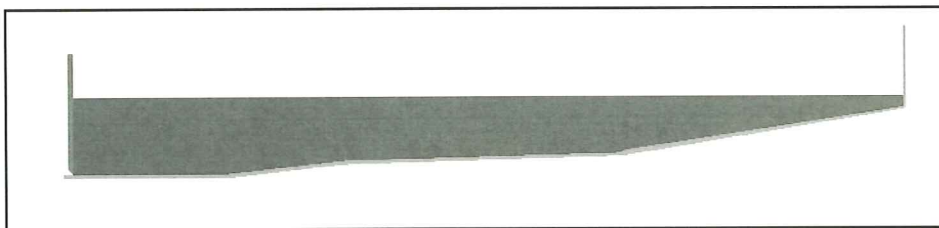
A partir de aquí se deben comparar los resultados obtenidos con el PFEM. Así pues, se ha ejecutado un caso con generador de tipo flap (ver Anexo 2 y referencias [Dean y Dalrymple (1992); Hughes (1993)]) sobre el canal de ensayos “virtual” (Figura 16).

Con el objeto de reducir el tiempo de ejecución del programa, se ha recortado el canal en algunos tramos en los que el calado no cambiaba, es decir, de solera horizontal. Ello no afecta a los resultados ya que la propagación de onda en fondo plano no modifica las características de la ola. El canal que inicialmente debía tener la forma de la Figura 15.



**Figura 15.** Geometría del canal real.

acaba teniendo la geometría siguiente:



**Figura 16.** Geometría del canal virtual (mismos calados).

El calado en las dos geometrías debe ser el mismo, y sólo existen variaciones en la longitud de los tramos con solera horizontal. La zona más cercana a la pala generadora tiene una longitud suficiente para que las olas se formen completamente ya que la longitud de canal necesaria para la completa formación de una ola es de dos veces el calado [Mayo (2003)].

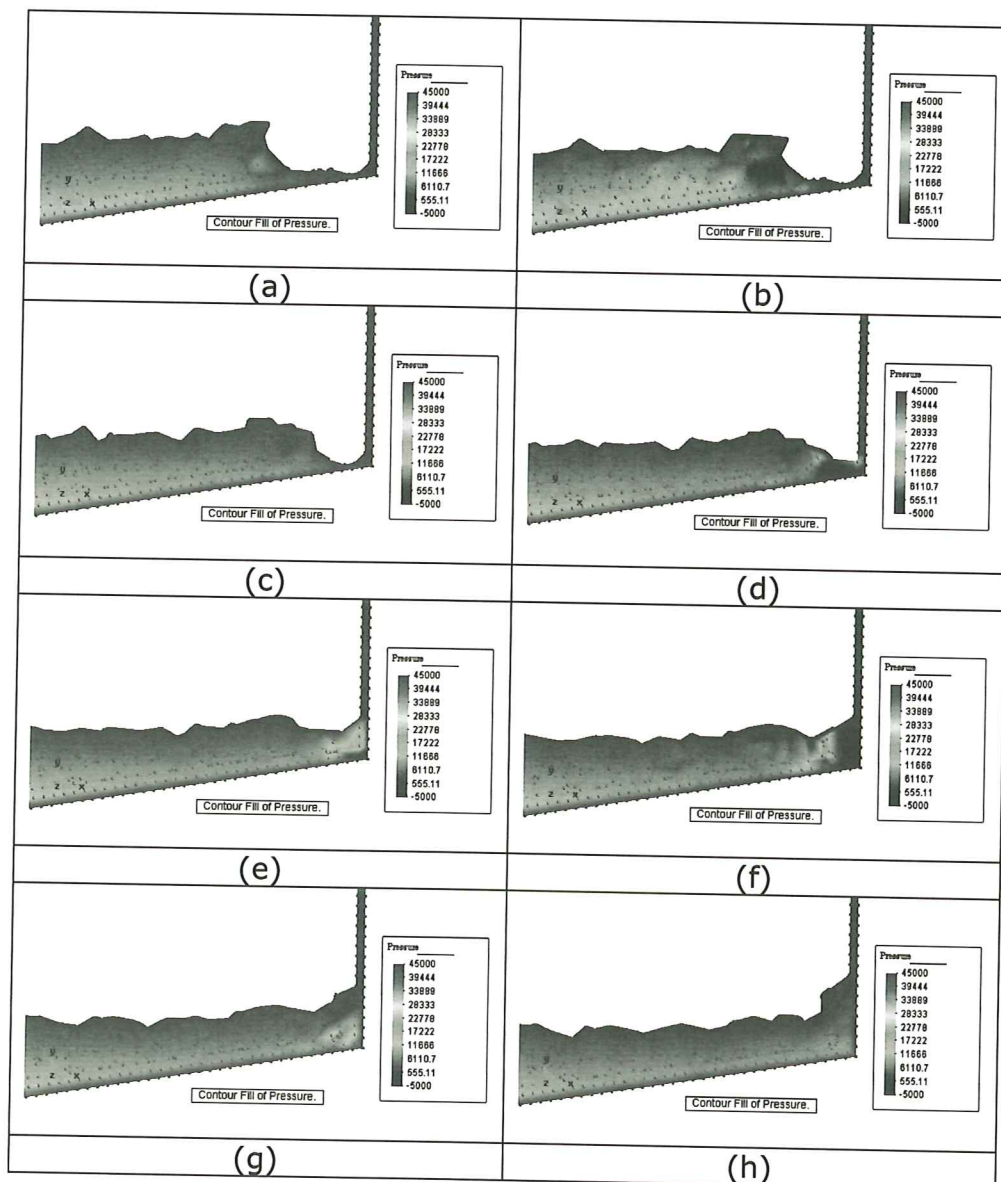
Las animaciones obtenidas son en verdad de aspecto muy realista. Las olas se forman y se propagan aparentemente de forma muy natural y chocan contra el

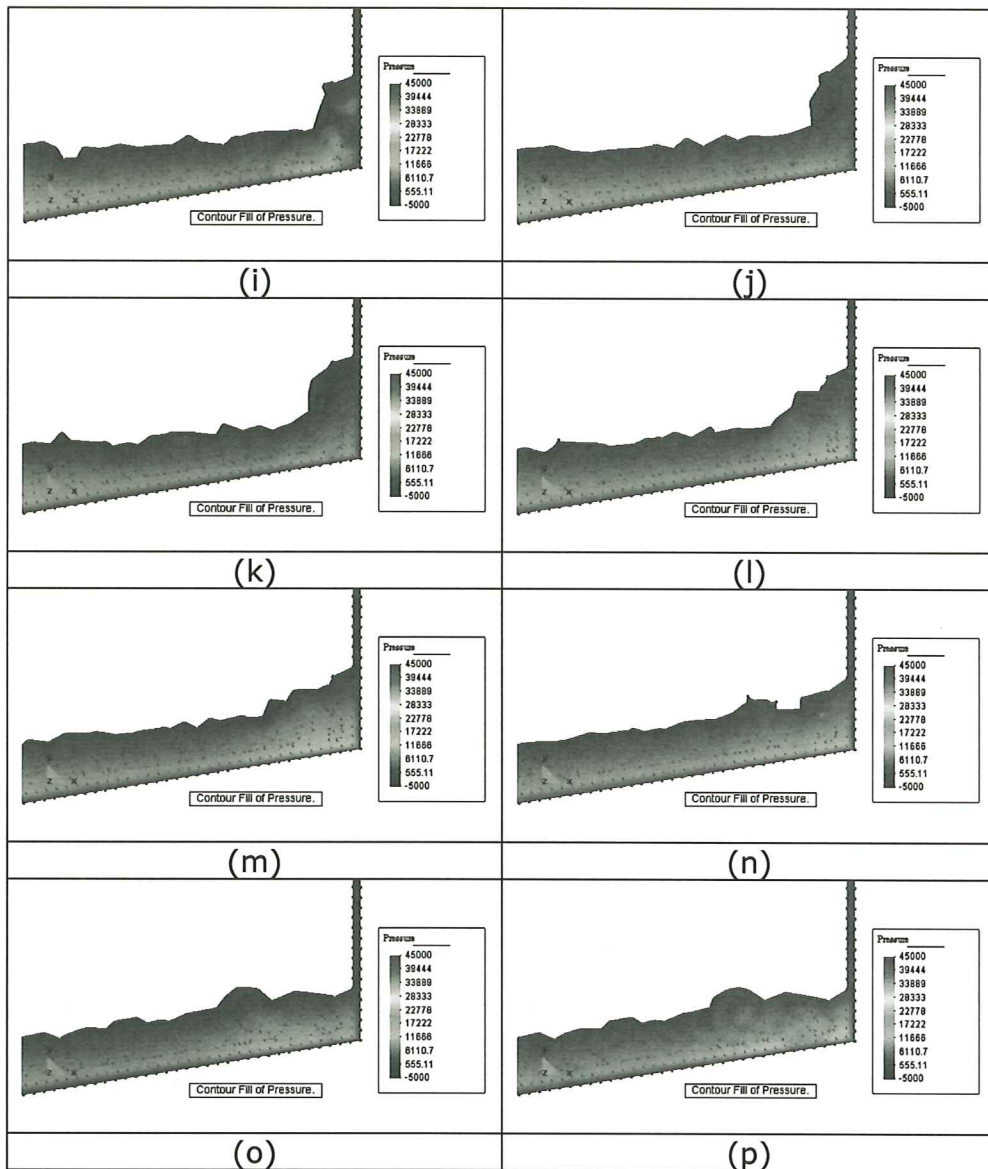


dique, donde se reflejan y siguen su camino en sentido contrario al inicial, interfiriendo con las siguientes olas incidentes.

Para una correcta comparación con los datos experimentales, se deben escoger cuidadosamente las olas a comparar. No es necesario que sean exactamente las mismas en el ensayo y en el modelo, pero sí que ambas se encuentren en un cierto intervalo comprendido entre el completo desarrollo de las olas (se descartan las primeras olas que no rompen porque aún no se solapan con olas reflejadas significantes) y el instante en que la primera ola reflejada llega a la pala generadora.

La secuencia que se presenta a continuación muestra el movimiento del agua con detalle en las proximidades del dique cuando llega una de las olas del intervalo de estudio, y muestra las presiones (en Pa.) con un relleno de colores. No contiene todos los pasos de tiempo del intervalo mostrado, tan sólo algunos de significativos para esbozar el movimiento (Figura 17).

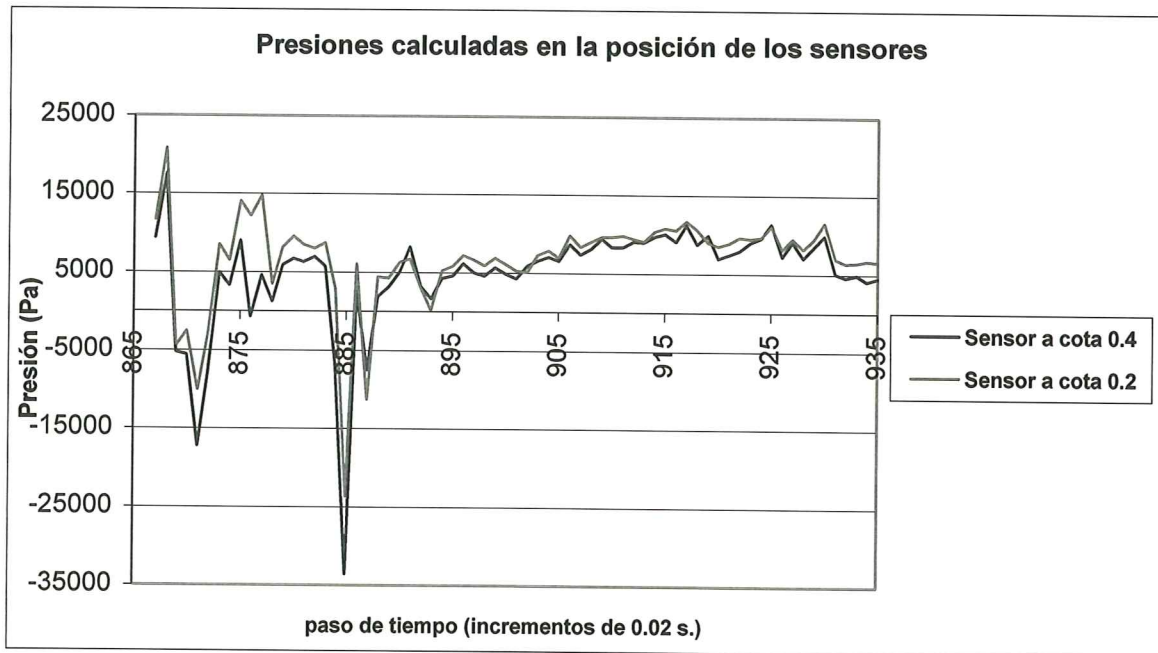




**Figura 17.** Movimiento del agua con detalle en las proximidades del dique cuando llega una de las olas del intervalo de estudio.

Para todos los pasos de tiempo que el programa ha utilizado (uno cada 0.02 s.), se ha capturado el valor de presión en dos puntos determinados de la pared del dique, el que está a cota 0.2 m. y el que está a cota 0.4 m. desde la solera del canal, coincidiendo con las posiciones de dos de los sensores utilizados durante los ensayos en el canal del CIEM.

Sin ningún tipo de tratamiento ni filtrado de los datos, se han obtenido gráficos de presiones como los siguientes (Figura 18).



**Figura 18.** Resultados del PFEM sin tratamiento.

Este es un resultado que difiere en parte del esperado, ya que aparecen unas ciertas oscilaciones que se pasan a estudiar en detalle.

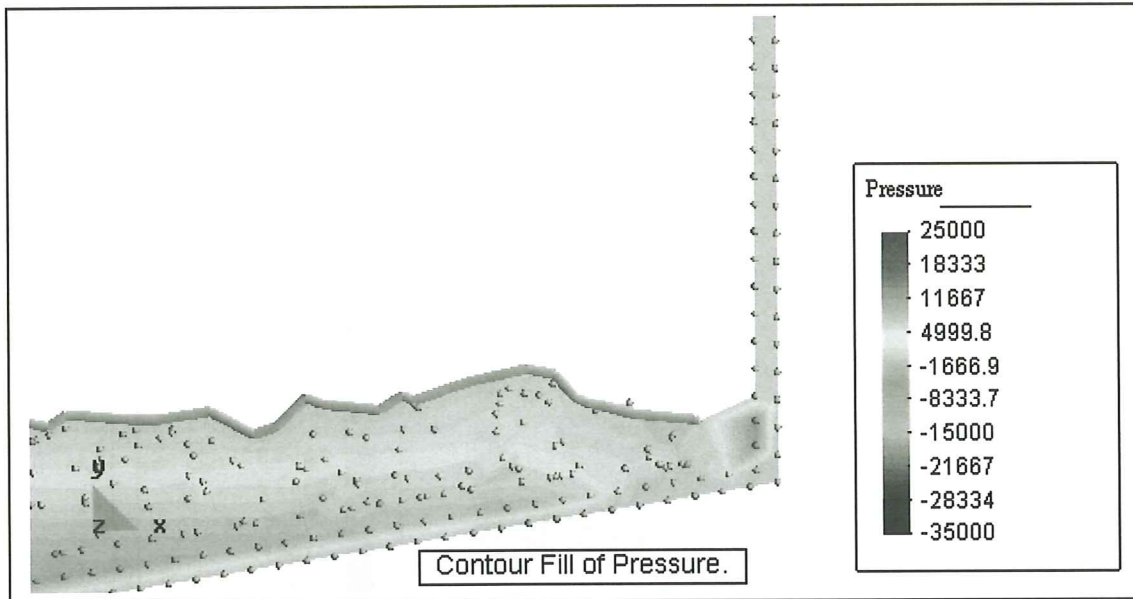
#### **Estudio de detalle del impacto de la ola**

Se escogió este ensayo en concreto porque se producían olas “no impactantes” en el sentido más técnico, es decir, que no rompen justo en el dique de manera que ocluyan aire y se formen fenómenos más complejos inabarcables por el método numérico estudiado. El uso de la palabra *impacto* no se referirá, en ningún caso, a ese tipo de fenómenos, sino que equivale a *choque* o *incidencia*, pero con la connotación de que este se produce con cierta violencia.

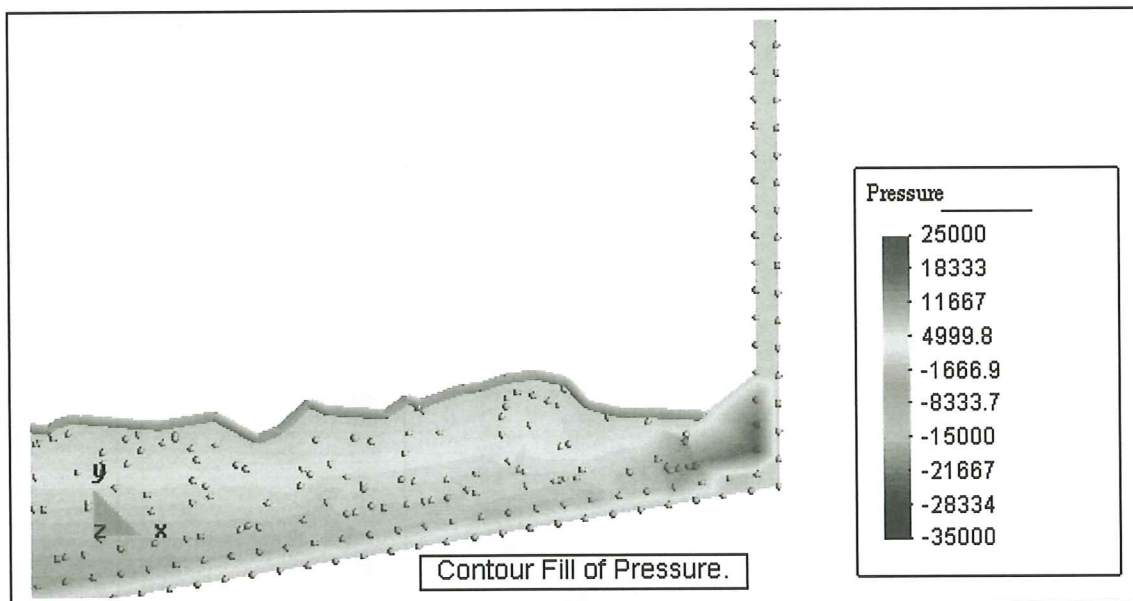
Si se analiza con detalle el gráfico de presión obtenido experimentalmente (Figura 14), se ve el pico de presión anteriormente descrito. Respecto al movimiento de la ola, ese pico no representa la llegada de la cresta de la ola – como podría parecer a priori-, sino la llegada del principio de la ola, con una cierta velocidad y que encuentra un contorno rígido que hace cambiar sus características. Las partículas de agua encuentran que su velocidad se ve bruscamente reducida a cero y este fenómeno crea las presiones dinámicas tan elevadas que se grafican. Después de eso, las presiones disminuyen hasta, prácticamente, limitarse a las hidrostáticas. Sin embargo, la cresta de la ola está aún por llegar, de modo que las presiones acaban efectivamente elevándose y más tarde disminuyendo a medida que la ola va chocando contra el dique siguiendo principalmente la dicha distribución hidrostática.

Aceptando esto, todos estos pasos podrían tener una correspondencia en los resultados ofrecidos por el PFEM. Sin embargo, el PFEM tiene problemas puntuales en algunos pasos de tiempo muy concretos que se explicitan a continuación y se comentan con más detalle en cada figura (unidades de presión en Pa.).

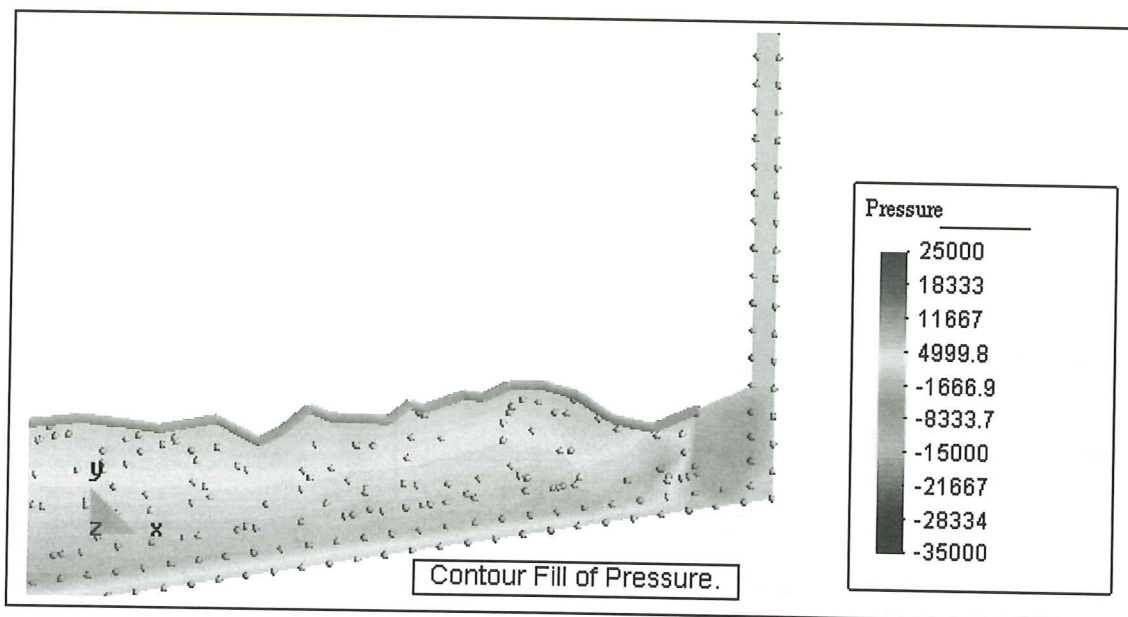




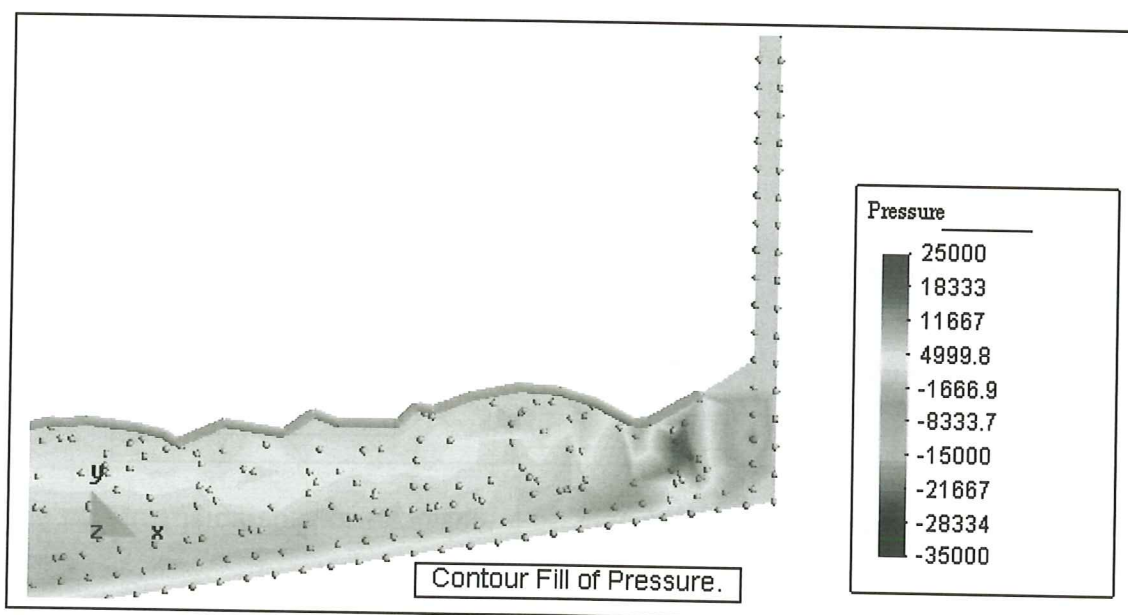
**Figura 19a. Paso de tiempo 867:** la ola tiene el primer contacto con el dique. Las presiones aumentan notablemente.



**Figura 19b. Paso de tiempo 868:** las presiones se intensifican considerablemente en el contacto.

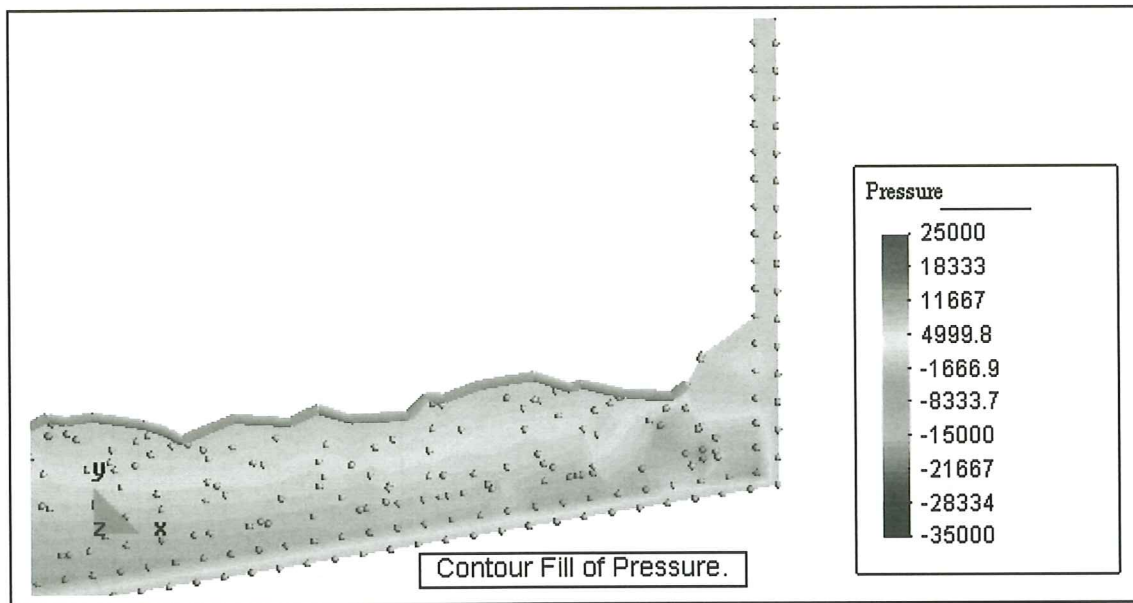


**Figura 19c. Paso de tiempo 869:** repentinamente, allí donde había grandes presiones, estas se acercan a 0. Ello se debe probablemente a un intento de reflexión de los nodos más adelantados de la ola, pero posiblemente se exagera por el hecho de que hay gran ausencia de nodos cerca del dique. Esta ausencia de nodos se produce por que los elementos finitos que se forman son muy alargados (horizontalmente), y este efecto es en realidad difícil de evitar con esta versión del programa.

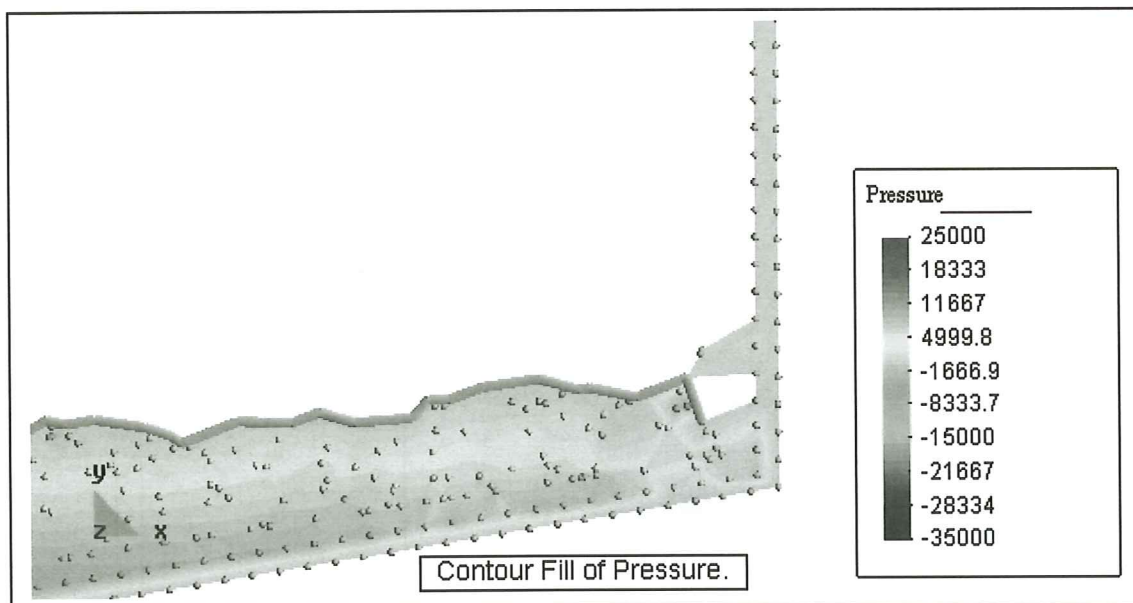


**Figura 19d. Paso de tiempo 871:** las presiones empiezan a aumentar, pero no en el dique, sino a una cierta distancia de él. La distancia que separa los nodos del dique de los nodos de agua que está en contacto con él parece evitar que la presión se transmita adecuadamente a los nodos de pared, e incluso se producen valores de presión negativa.



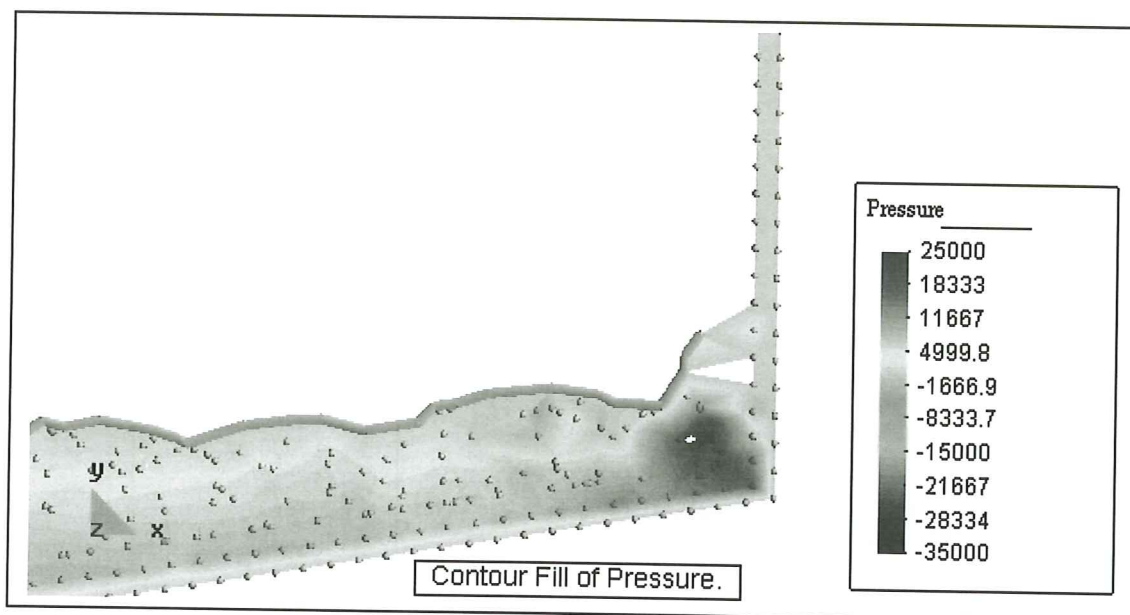


**Figura 19e. Paso de tiempo 873:** no es hasta este instante cuando la presión se transmite hasta el dique de forma continua y coherente.

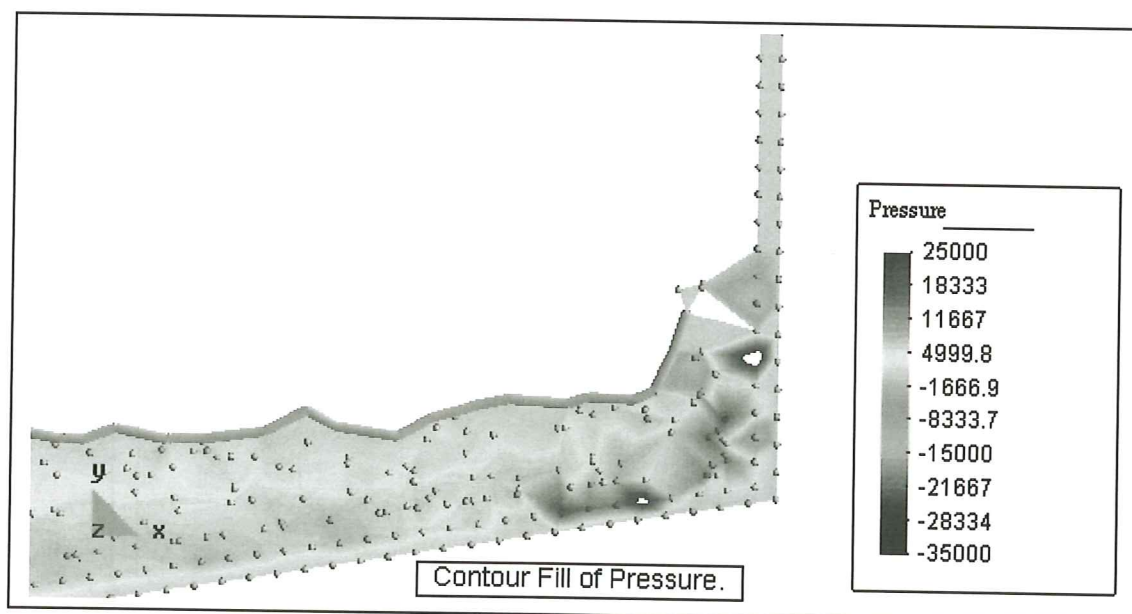


**Figura 19f. Paso de tiempo 874:** en este paso se presenta un problema añadido, algunos nodos se han separado tanto que se ha formado un hueco en el interior del agua. En ese caso, el programa entiende que se trata de nodos de superficie libre y les asigna la condición de presión 0. La consecuencia directa es que se ha formado lo que se ha decidido llamar una "bomba de implosión", el fluido trata de rellenar el hueco. En la mayoría de casos, las bombas de implosión falsean los resultados porque no son las condiciones reales del seno del fluido<sup>2</sup>.

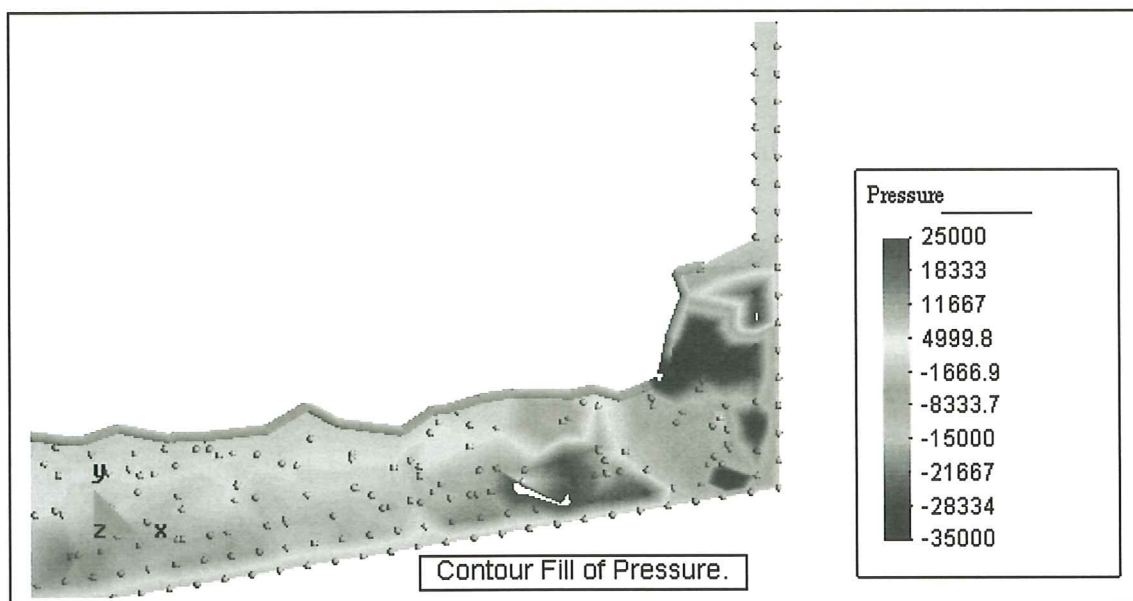
<sup>2</sup> Las versiones más recientes del programa PFEM incorporan sistemas de mallado que eliminan nodos de zonas con gran densidad de ellos y los colocan en zonas de poca densidad, así se evita que se produzcan huecos en el fluido.



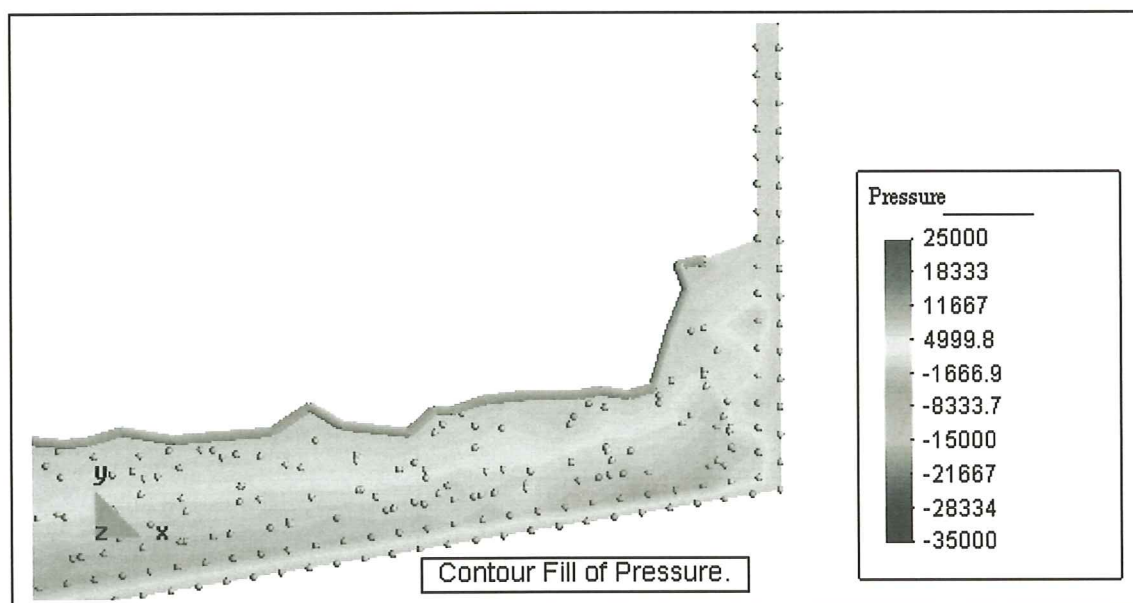
**Figura 19g. Paso de tiempo 877:** se forma otra bomba de implosión.



**Figura 19h. Paso de tiempo 884:** la presión aumenta junto al dique en ciertas cotas. Más hacia las partes altas que en las bajas donde están los sensores. En algunos puntos, el valor de presión excede el límite de la escala.



**Figura 19i. Paso de tiempo 885:** sorprendentemente, aparecen junto al dique valores de alta presión negativa.



**Figura 19j. Paso de tiempo 886:** inmediatamente después, los valores negativos desaparecen.

**Paso de tiempo 887 y siguientes:** los resultados se vuelven más estables y mantienen tendencias claras.

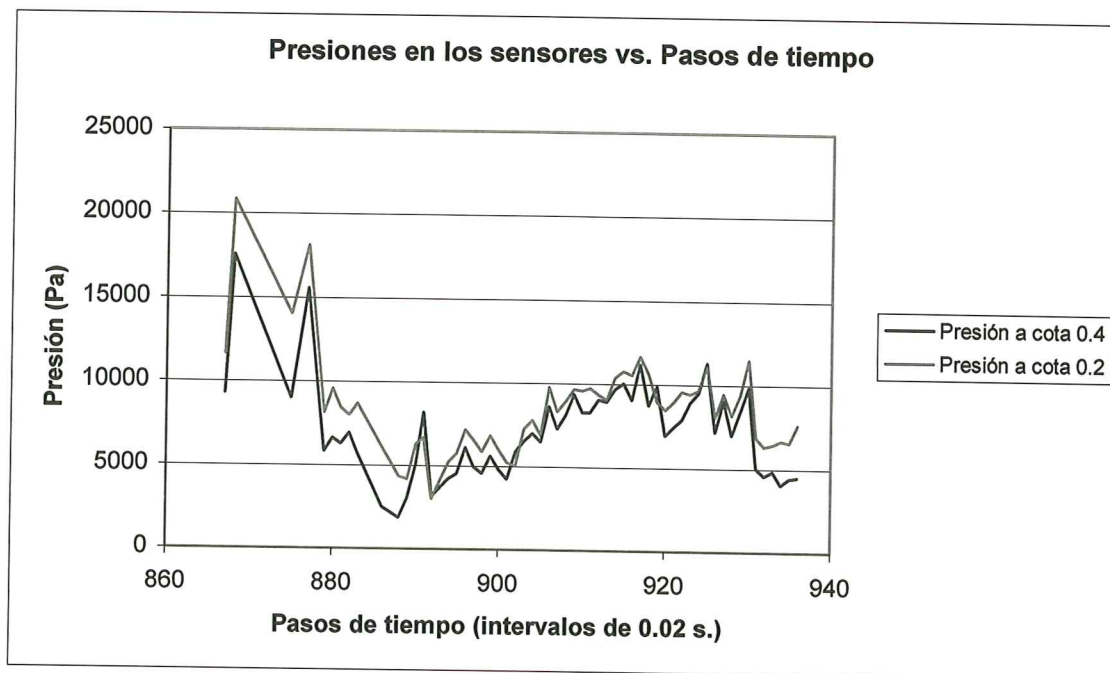
## Tratamiento y filtrado de los resultados

Tal y como se ha visto, hay algunos aspectos de los resultados obtenidos con el PFEM que no son ciertamente coherentes. No tiene sentido, por ejemplo, lo que sucede en el paso de tiempo 885, donde aparecen presiones muy negativas sin que haya una razón para ello, estando además flanqueado en el tiempo por resultados de presiones mucho más aceptables que tienen resultados de presión positiva. Este tipo de errores pueden producirse por varios factores, incluyendo el mallado poco uniforme o defectuoso (bombas de implosión), pero la explicación más probable es el hecho de que las presiones son las incógnitas más difíciles de calcular. En el proceso es obligatorio resolver un sistema lineal que no siempre puede estar bien condicionado y que cuyo operador puede acercarse a la singularidad.

En este caso, por lo tanto, se hace indispensable un cierto tratamiento de los datos antes de exponer los resultados finales.

La opción adoptada ha consistido en eliminar aquellos datos susceptibles de contener errores, por ser estos claros (caso del paso 885) o por haber dado muestras de ello durante el proceso de su obtención (presiones oscilantes en el seno del fluido para un solo instante de tiempo, variaciones bruscas de la presión en la zona más cercana a la posición de los sensores, ...). Estos valores son fáciles de encontrar porque, al realizar un "corte" en el fluido, las presiones que se obtienen a lo largo de esa línea presentan tendencias anormales.

Después del tratamiento, el gráfico de presiones obtenido con el PFEM queda como se muestra en la Figura 20.

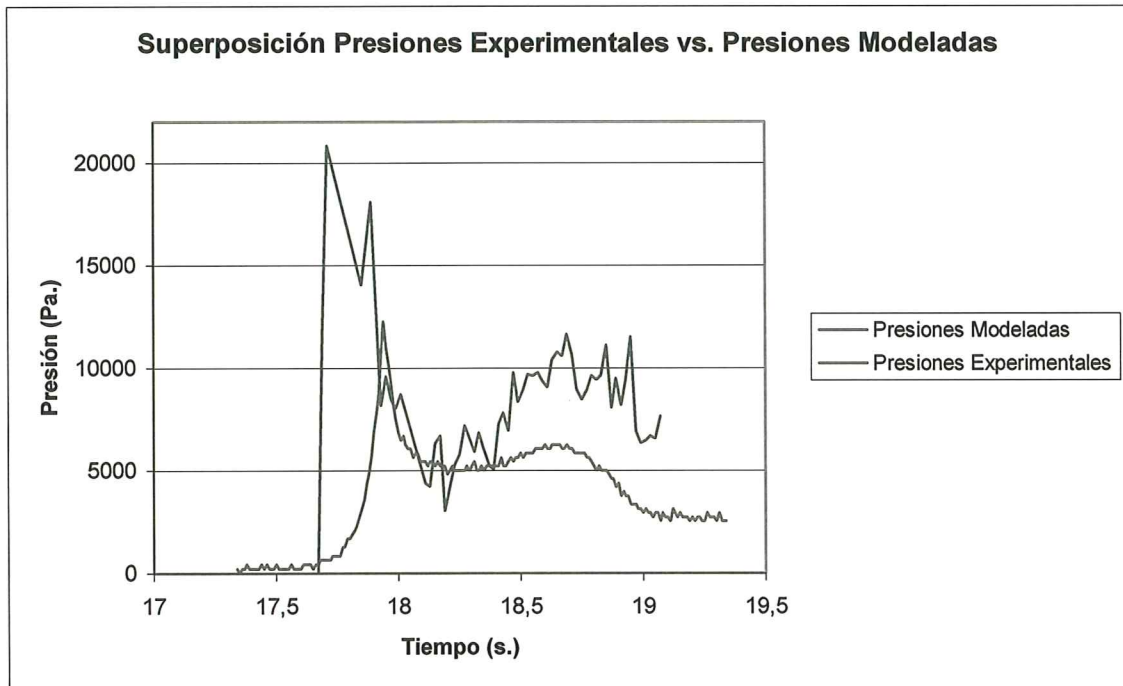


**Figura 20.** Resultados del PFEM tras filtrado.



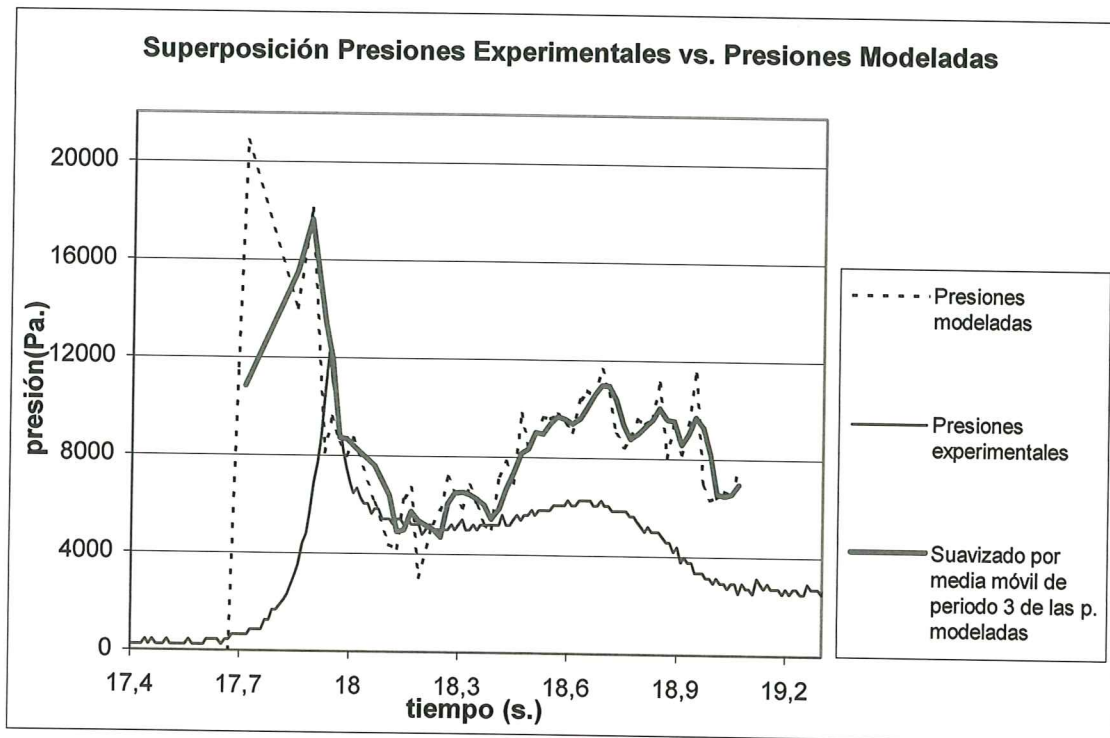
Los dos sensores están separados 20 cm. Eso significa en términos de presión unos 2000 Pa., que es aproximadamente la diferencia de presión que se observa entre los dos sensores en este gráfico.

Después de convertir estos datos a una escala de tiempo en segundos, se pueden superponer los resultados experimentales con los resultados del PFEM (se ha hecho sólo para el sensor inferior porque los demás se comportan de manera análoga) (Figura 21).



**Figura 21.** Superposición de resultados.

Substituyendo la línea roja oscilante por un suavizado utilizando la línea de tendencia de la media móvil de periodo 3 se obtiene:

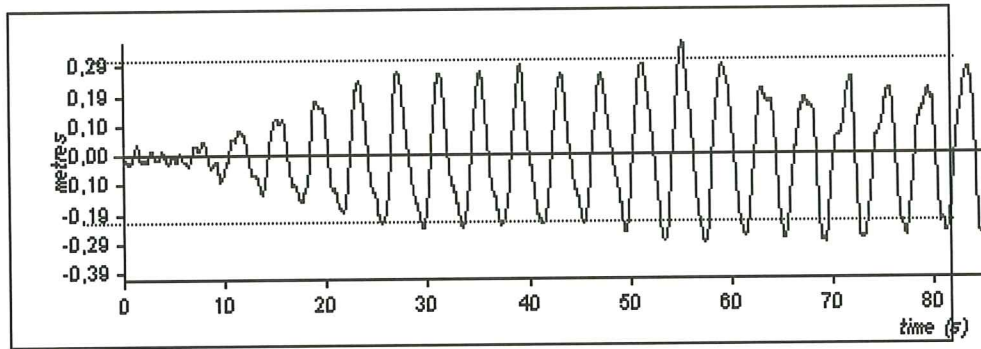


**Figura 22.** Superposición y suavizado de resultados.

La anterior superposición de gráficos permite observar prácticamente una igualdad entre ambos a nivel cualitativo –aparecen perfectamente los dos máximos y el valle intermedio–, y también pone de manifiesto que los valores representados son similares. Sin embargo, hay que decir que las presiones modeladas son mayores de lo que se podía esperar, en especial en aquellos momentos en los que los movimientos del agua son más rápidos y violentos (presiones dinámicas).

En cuanto a este aspecto, la explicación de las diferencias entre los distintos valores de presión se debe probablemente al hecho de que las olas generadas por el método que llegan al dique virtual son más grandes que las que llegaron al dique del experimento del canal. De hecho, al haber recortado la longitud del canal, la disipación de energía en el ensayo modelado en el ordenador podría haber sido menor que la del ensayo experimental, ello implica una disminución mayor de la altura de ola y por supuesto unas presiones en el dique menores. Pero aún más importante, es asimismo posible que las olas generadas en el modelo sean mayores que las que se generaron experimentalmente. Tanto en el modelo como en el ensayo la altura de ola se fija antes del ensayo y se predetermina el movimiento de la pala generadora a partir de esa altura.

Los datos de altura de ola obtenidos a posteriori en el canal real confirman que las alturas de ola conseguidas (en especial las primeras totalmente desarrolladas, a partir del segundo 30 en la Figura 23) no miden exactamente 0.6 m., sino un poco menos.



**Figura 23.** Oscilaciones de la lámina libre medidas en el canal real.

Pero, además, las olas generadas por el PFEM tienen más de 0,70 m. Y aunque esta medida no es precisa porque incluye el reflejo de olas que se habían generado antes, indica que estas son mayores de lo que se deseaba.

El procedimiento a seguir a partir de aquí ha consistido en aplicar una cierta escala tanto a los valores de presión modelada como experimental. Esta escala se obtiene mediante:

$$escala = \frac{0.6}{H_{medida}} \quad (\text{en m.})$$

Donde  $H_{medida}$  es la altura de ola que se ha medido tanto en el ensayo experimental como en el modelo numérico (ola dentro del intervalo de estudio anteriormente descrito).

Los valores de escala obtenidos son:

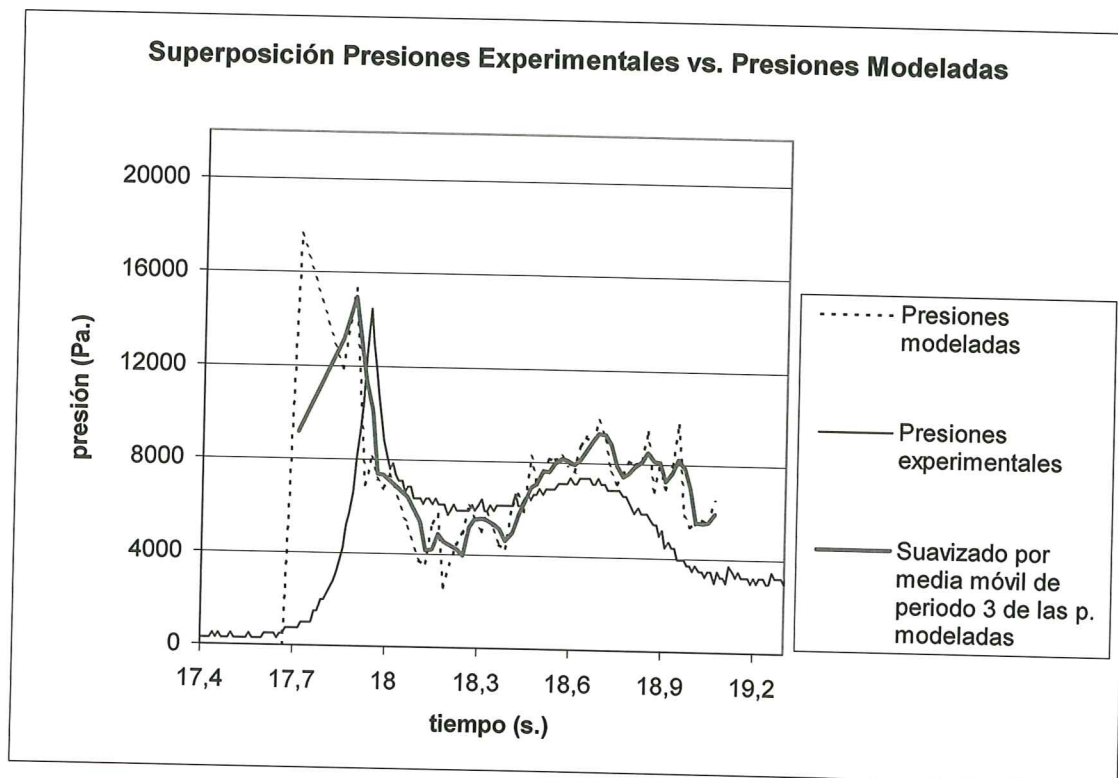
- para el modelo PFEM,  $H_{medida} = 0.71 \text{ m.}$ ,  $escala = 0.845$
- para el canal experimental,  $H_{medida} = 0.51 \text{ m.}$ ,  $escala = 1.176$

Estos valores de escala son cocientes de alturas de ola. En este estudio se acepta la relación de proporcionalidad lineal entre altura de ola y presiones en el dique que también aceptan los métodos de Goda y Sainflou de dimensionado de diques.

Teniendo en cuenta los coeficientes de escala antes calculados, y multiplicándolos a los datos anteriormente representados, obtenemos el gráfico de la Figura 24.

Los gráficos de la Figura 24 muestran una muy buena semejanza entre ambas distribuciones de presiones. El PFEM tiende a exagerar tanto los valores de la presión máximos como los mínimos, pero dentro de un rango muy aceptable. De hecho, las olas experimentales presentaron registros de presión ligeramente distintos entre sí, y alguno de ellos podría perfectamente coincidir con el que el modelo nos ha ofrecido. Así pues, se pueden calificar estos últimos resultados de muy buenos.





**Figura 24.** Superposición final de distribuciones.

### Conclusiones del estudio de las presiones

Para cualquier programa informático que resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes, la solución de las presiones es probablemente el aspecto más crítico desde el punto de vista de la dificultad. En nuestro caso, la presión ha sido el resultado más difícil de interpretar y de contrastar, y ha requerido un tratamiento superior a los demás resultados.

A pesar de eso, el PFEM ha dado buena muestra de su exactitud desde los niveles de mínimo detalle (movimiento general del fluido) a los de máxima exigencia, como ha sido este estudio de la evolución de la presión en puntos concretos escogidos a priori.

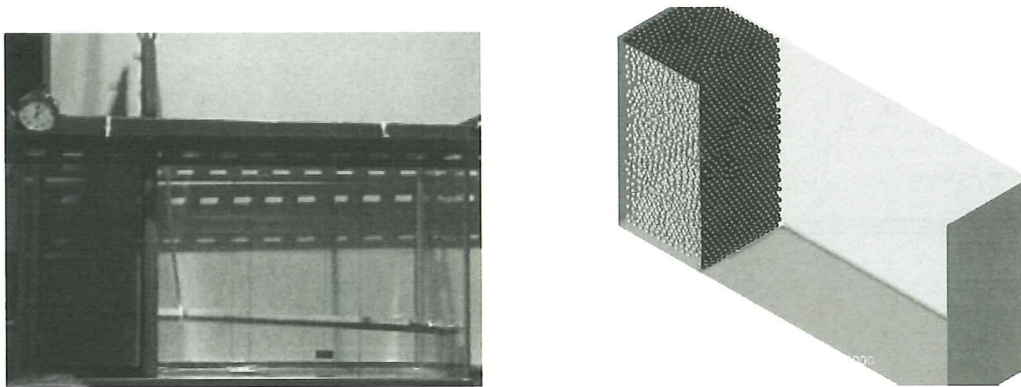
Se destaca que este ejemplo de validación se realizó en las primeras semanas del Hito 1. Obviamente, la técnica PFEM y el código de cálculo correspondiente se ha ido mejorando en base a las experiencias de validación llevadas a cabo a lo largo de los últimos doce meses. Los ejemplos de validación que se muestran a continuación son demostrativos de la precisión del PFEM, tanto para predecir el perfil de la superficie libre como la distribución de presiones.

### 3.3 Colapso de una columna de agua

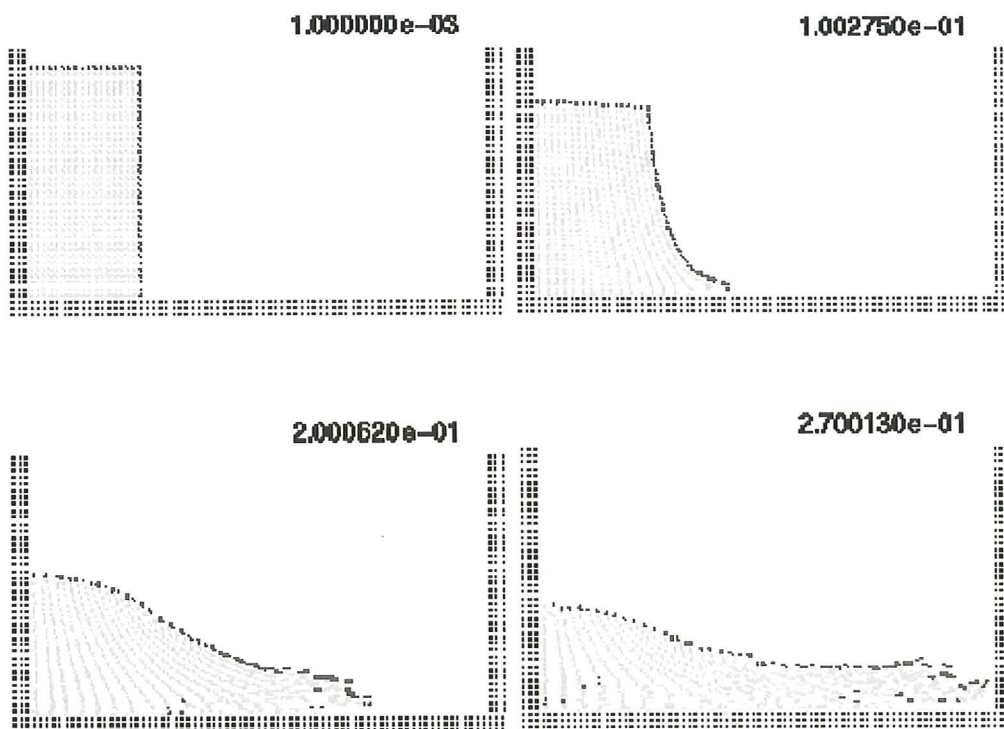
En este problema se estudia el colapso de una columna de agua. Este problema se resolvió experimentalmente por Koshizu and Oka (1996). Se ha convertido en un clásico para validar la formulación Lagrangiana en fluidos. El agua permanece

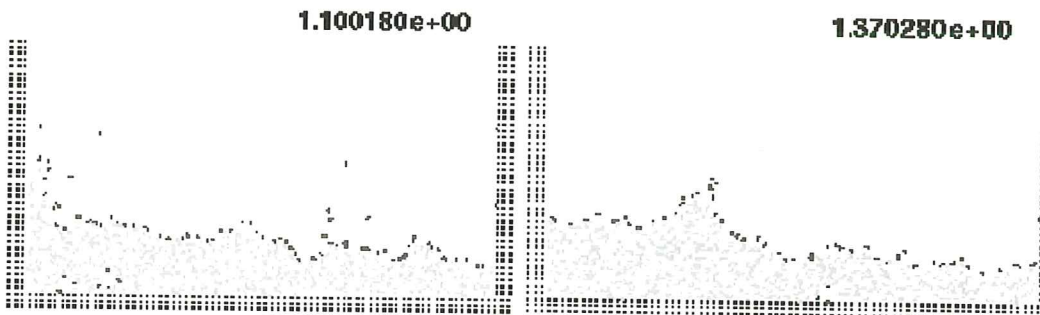
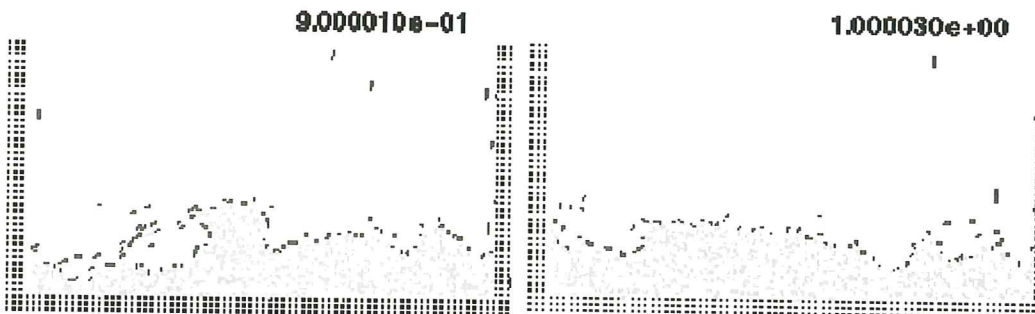
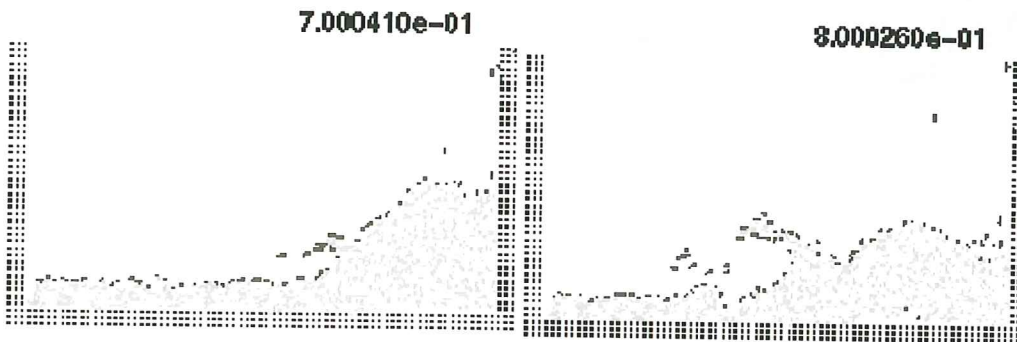
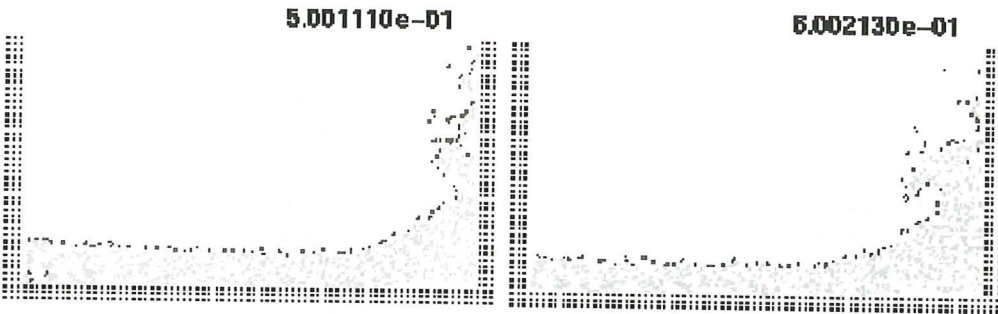
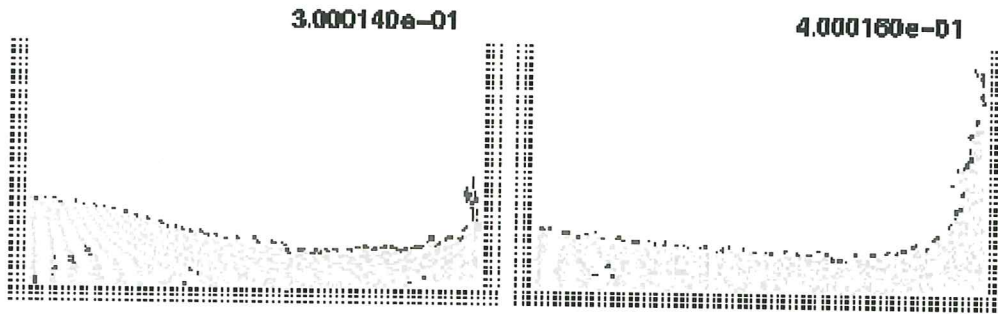
inicialmente encerrada en un recipiente rectangular (Figura 25). Las condiciones de contorno son de velocidad cero en las paredes y presión atmosférica (de valor cero) en la superficie libre. La Figura 24 muestra la malla 3D que discretiza el dominio de agua y las paredes del recipiente. Se destaca que el método permite seguir el movimiento de la columna de agua y la separación de partículas. El colapso comienza en el tiempo  $t=0$  al eliminar la pared derecha del recipiente.

La Figura 26 muestra la evolución de los puntos del fluido en diferentes pasos de tiempo. Los puntos negros indican la superficie libre del agua detectado con el algoritmo descrito en el Anexo 1. Se muestran también en negro los puntos fijos del contorno detectados también con el mismo algoritmo.

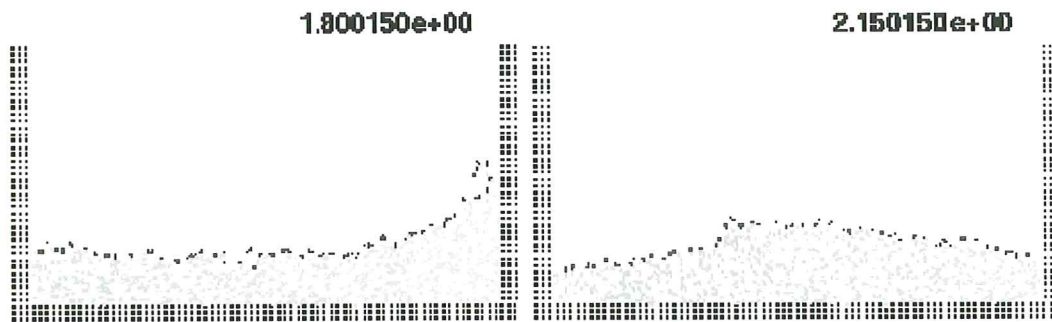


**Figura 25.** Simulación de un ensayo de rotura de un recipiente prismático lleno de agua. Malla utilizada para la solución 3D por el PFEM.







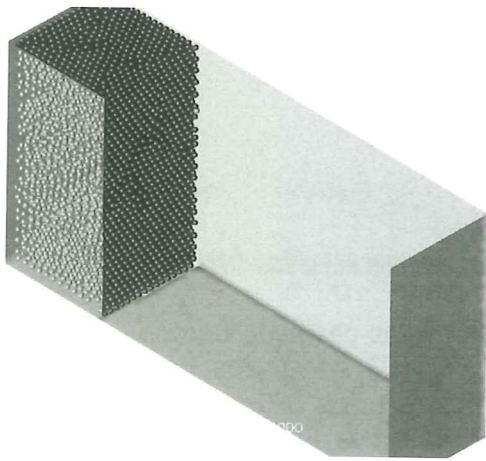


**Figura 26.** Colapso de una columna de agua en diferentes pasos de tiempo. El agua evoluciona sobre el fondo hasta que tras 0.3 segundos impacta sobre la pared vertical derecha. La ola de retorno se inicia a unos 0.6 seg. y después de 1 seg. la ola alcanzó de nuevo la pared izquierda. En la Figura 27 se compara la solución obtenida con el PFEM utilizando tres mallas de tamaños diferentes. Es interesante que para las tres mallas, los resultados coincidan muy bien con los experimentales de Koshizuka and Oka (1996), tanto en la forma de la superficie libre como en su evolución.

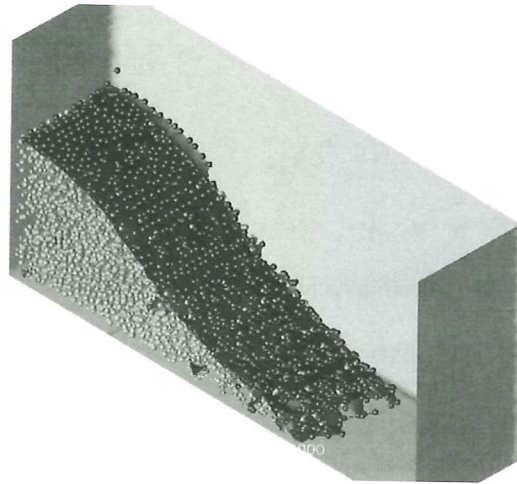
En la Figura 28 se muestra la solución 3D del mismo problema.



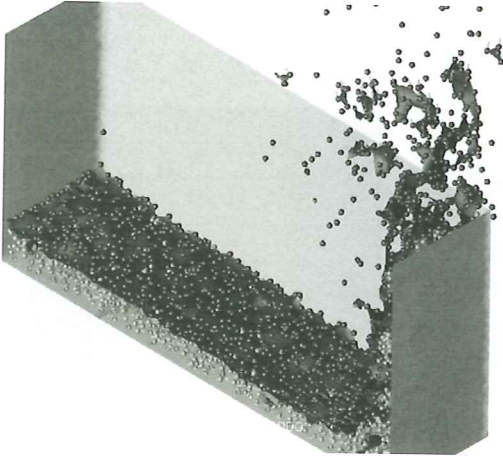
**Figura 27.** Rotura de un recipiente prismático lleno de agua. Comparación de los resultados obtenidos con tres mallas distintas en tres tiempos diferentes con las medidas experimentales.



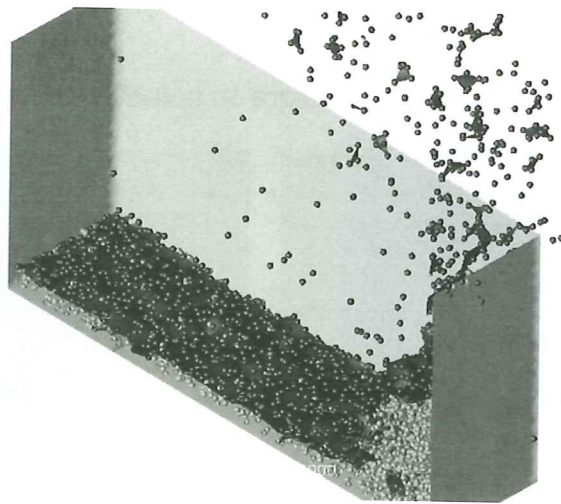
a)  $t = 0$  sec.



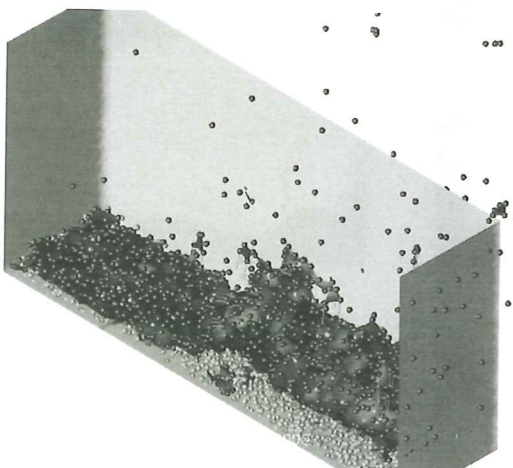
b)  $t = 0.2$  sec.



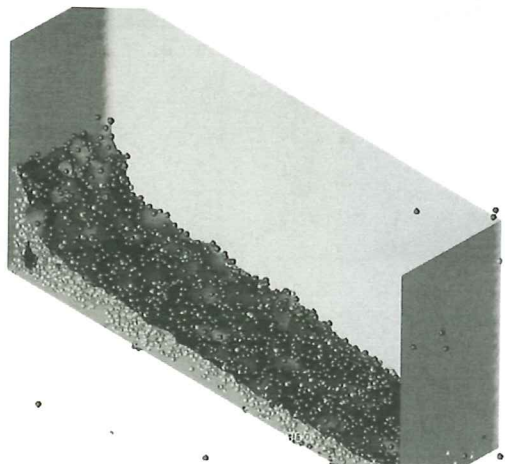
c)  $t = 0.4$  sec.



d)  $t = 0.6$  sec.



e)  $t = 0.8$  sec.

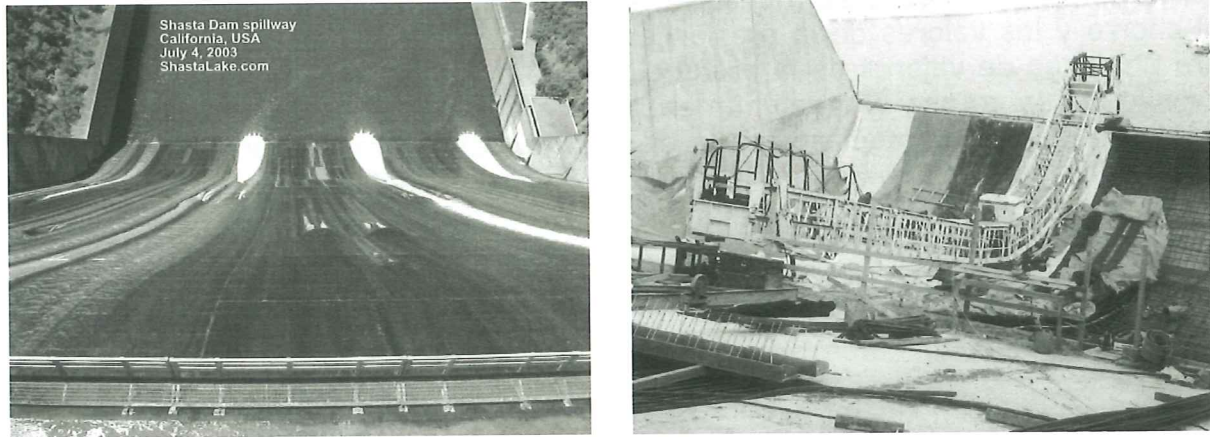


f)  $t = 1.1$  sec.

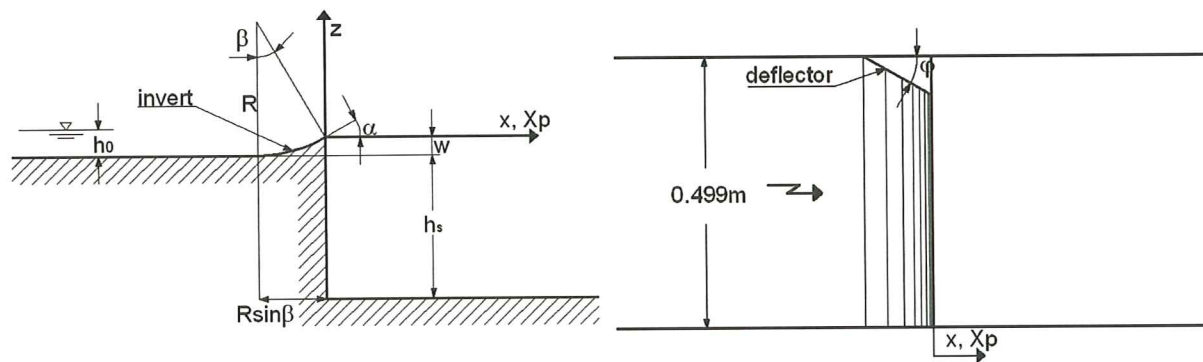
**Figura 28.** Colapso de una columna de agua en un dominio 3D.

### 3.4 Flujo en lámina libre sobre una rampa

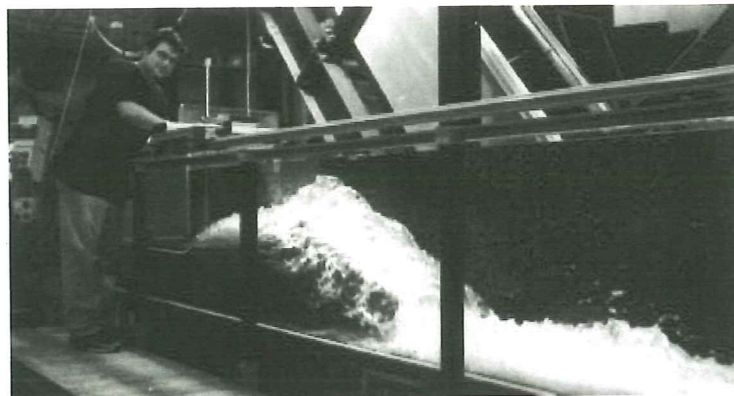
Se han estudiado los experimentos desarrollados en la Universidad de Zurich [Juan and Hager 2000] para el estudio del flujo de agua sobre aliviaderos en rampa (Figura 29). En la Figura 30 se muestra el alzado y la planta del experimento de Juan and Hager y en la Figura 31 una vista de un instante del ensayo del modelo de rampa con deflector.



**Figura 29.** Ejemplos de aliviaderos en rampa.



**Figura 30.** Planta y alzado del ensayo de flujo en lámina libre sobre una rampa (Juan and Hager, 2000).



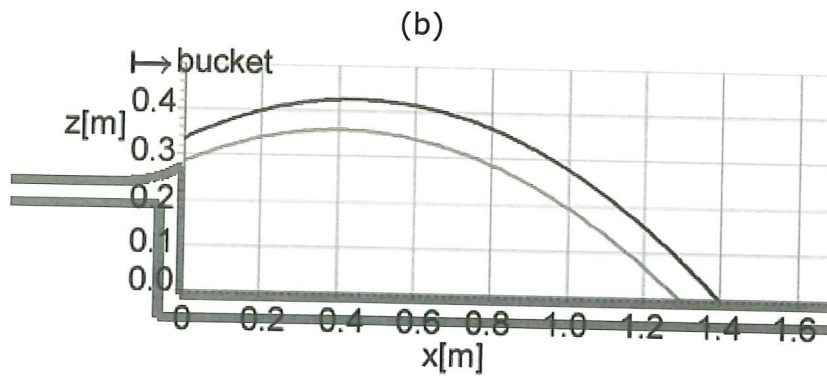
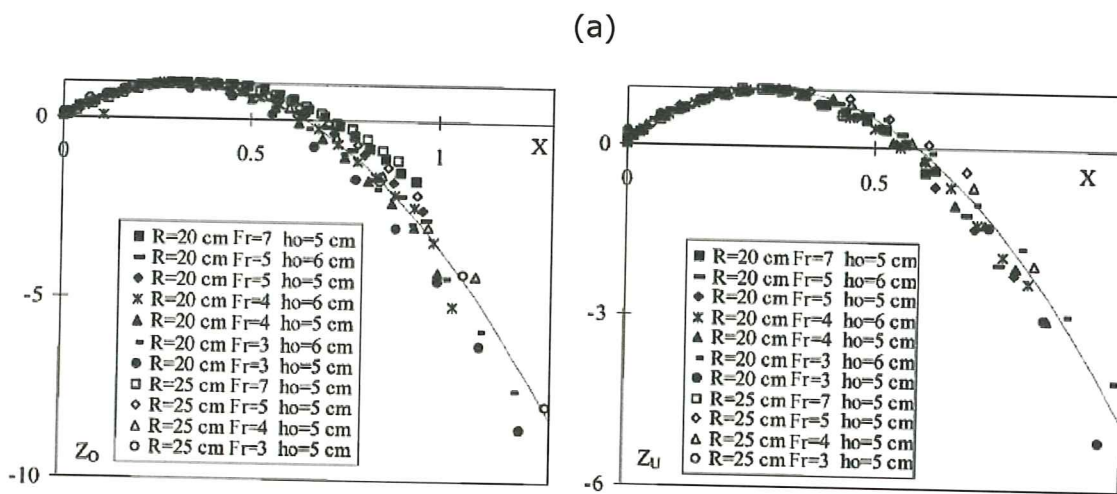
**Figura 31.** Vista de un instante del ensayo de lámina libre sobre una rampa.



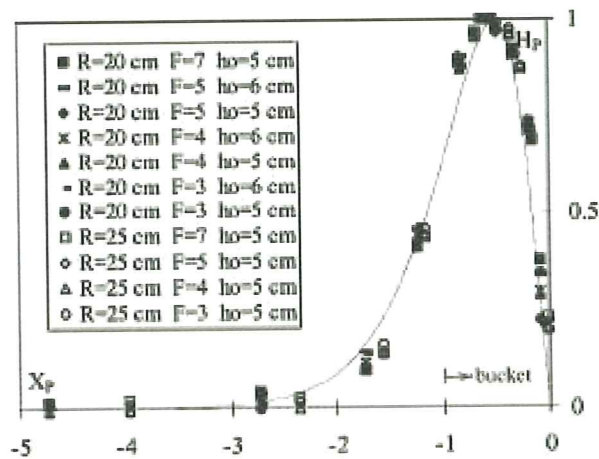
Estudio bidimensional

El primer experimento se realiza sobre un canal de 7m de largo, 0.49 m de base y 0.7m de alto. El canal se dividió en dos zonas. La zona de entrada con un canal de 1m de largo hasta la rampa y la zona de aguas abajo reproduciendo la balsa de disipación (Figura 30).

Los gráficos de la Figura 32 muestran las medidas experimentales para el perfil del chorro y los valores de la presión en la zona próxima a la rampa obtenidas para un rango de valores de la profundidad del fluido en el canal de entrada  $h_0$ , el radio de la rampa  $R$  y el número de Froude  $Fr$ . De estos resultados se dedujeron las curvas medias para la trayectoria del chorro y la presión sobre la rampa utilizados para comparación con los resultados del PFEM.



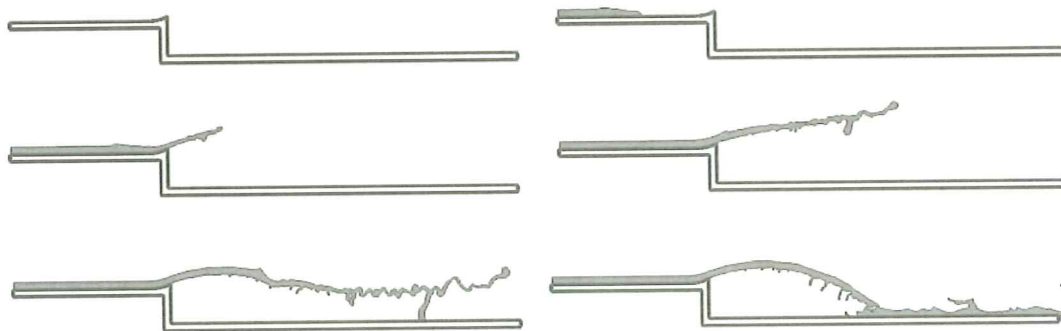
(c)



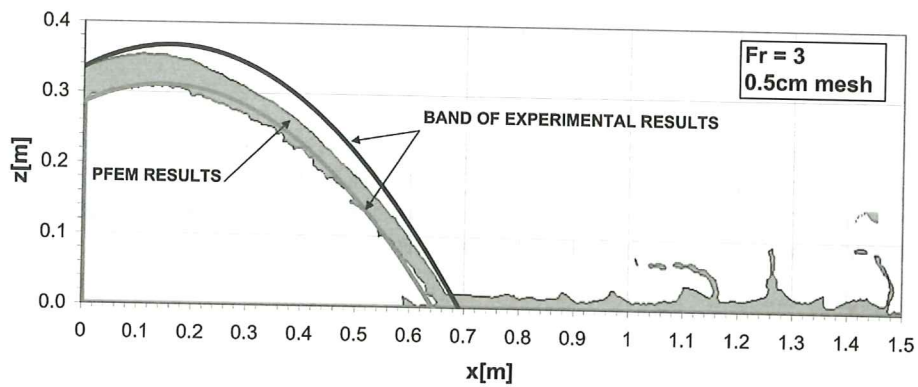
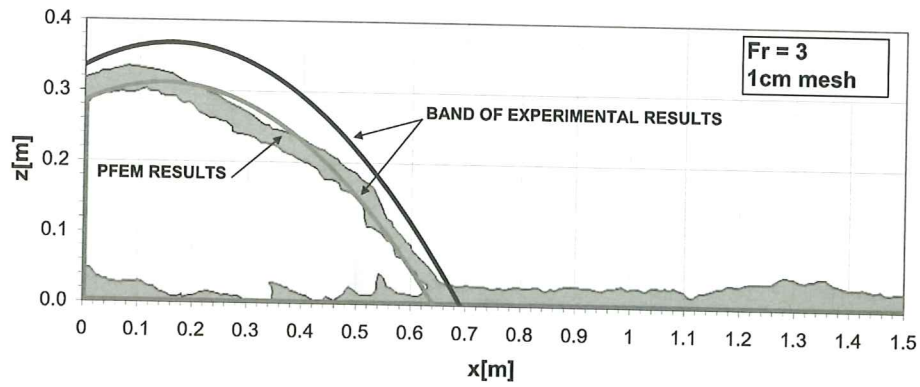
**Figura 32.** Flujo sobre una rampa. (a) Medidas del perfil del chorro para varios radios ( $R$ ), altura ( $h_0$ ) y números de Froude ( $Fr$ ); (b) Perfiles superior e inferior de la superficie libre del chorro deducidos de las medidas experimentales; (c) Mediciones de la presión en la proximidad de la rampa para distintos valores de  $R$ ,  $h_0$  y  $Fr$ .

El estudio con el PFEM se realizó mediante un modelo bidimensional (2D) con mallas de partida de (a) 831 elementos de 1cm de tamaño y (b) 1659 elementos de 0.5cm de tamaño. Los análisis se realizaron para valores de  $h_0=0.05\text{m}$ ,  $R = 5\text{m}$  y cuatros valores del número de Froude de  $Fr = 3, 4, 5$  y  $7$ .

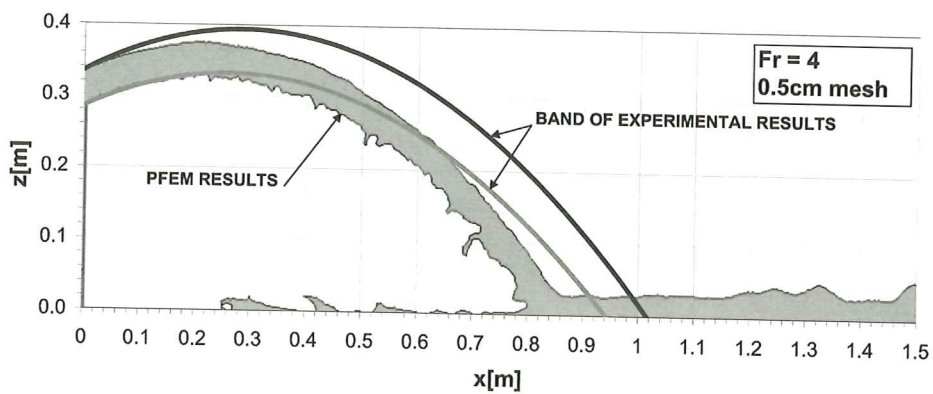
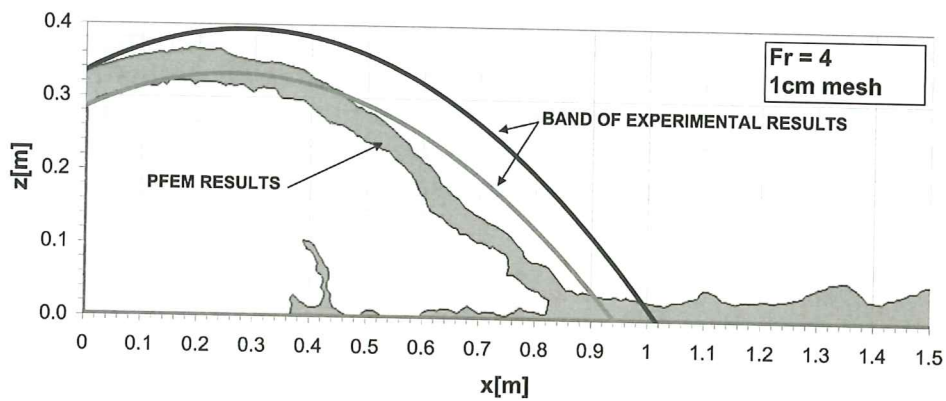
En la Figura 33 se muestra la evolución del chorro sobre la rampa en diversos instantes de tiempo y en las Figuras 34-37 la comparación de los resultados del PFEM con las medidas experimentales del perfil del chorro para diferentes números de Froude. La correlación entre los resultados numéricos y experimentales es buena, siendo más precisa para los números de Froude más altos.



**Figura 33.** Resultados del flujo sobre la rampa obtenidos con el PFEM ( $Fr = 7$ ).

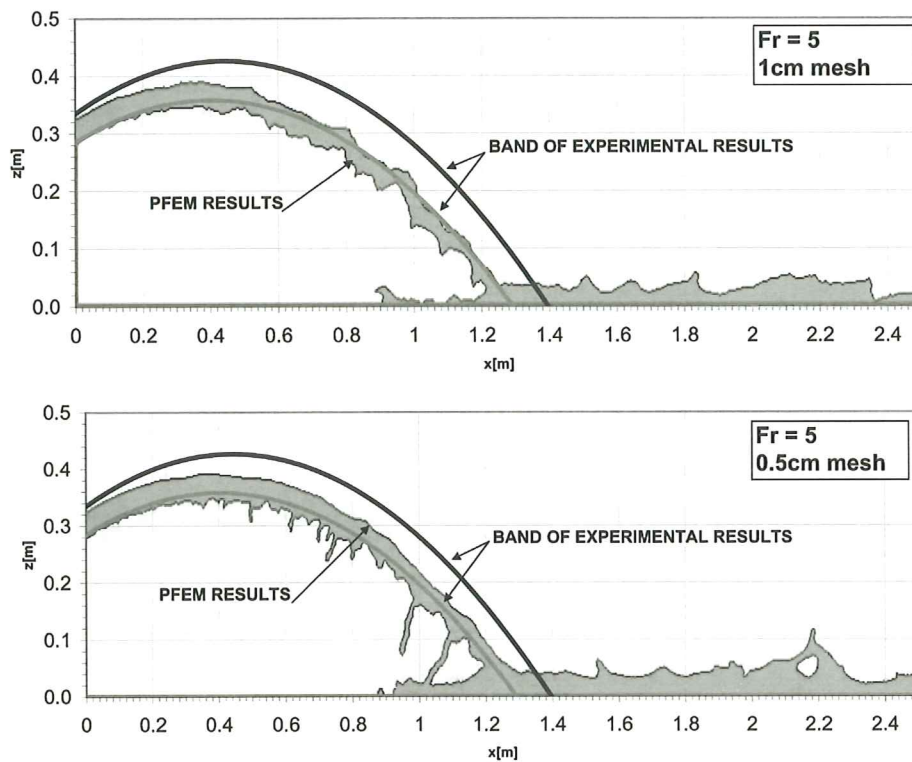


**Figura 34.** Perfil del chorro. Comparación entre los resultados del PFEM y los experimentales para un número de Froude ( $Fr = 3$ ) y dos mallas diferentes.

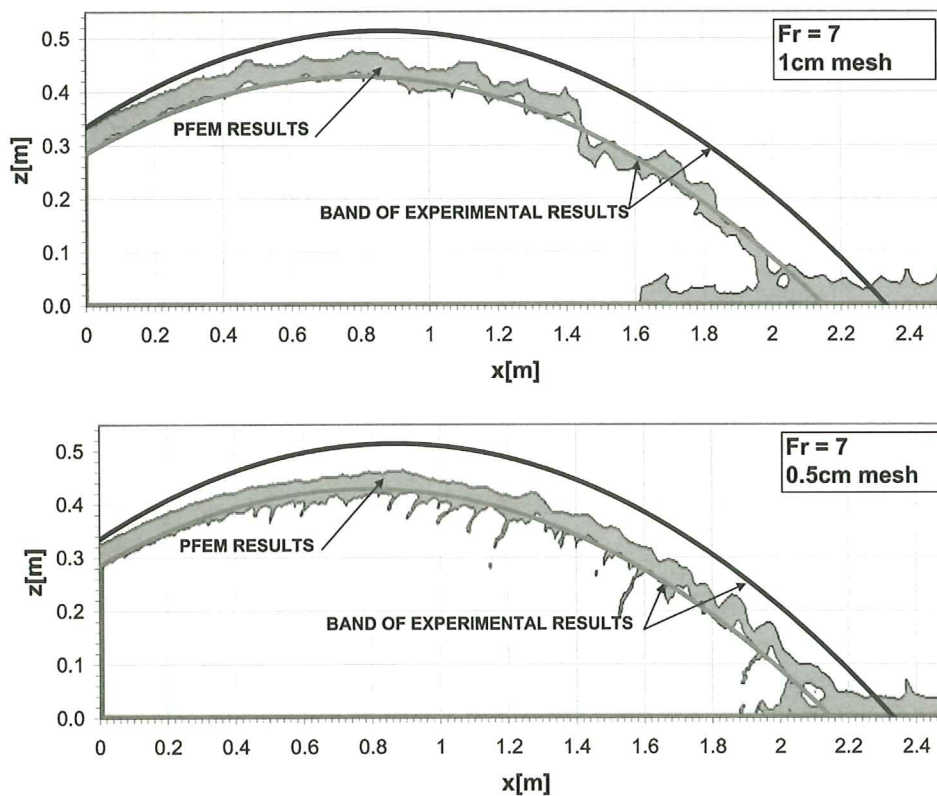


**Figura 35.** Perfil del chorro. Comparación entre los resultados del PFEM y los experimentales para un número de Froude ( $Fr = 4$ ) y dos mallas diferentes.





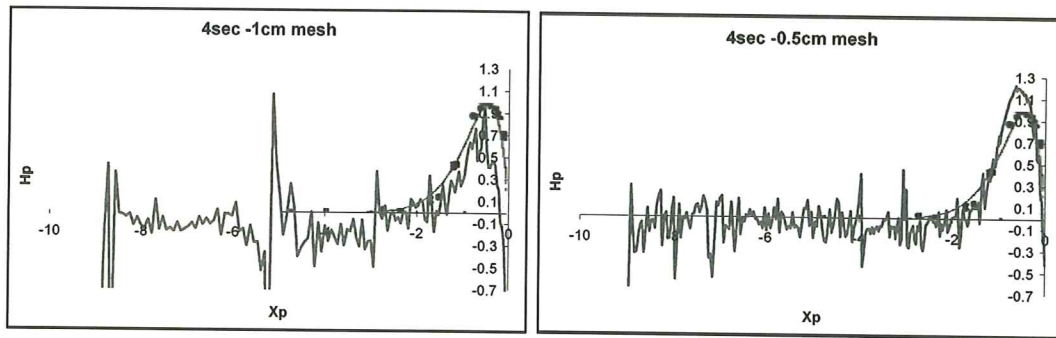
**Figura 36.** Perfil del chorro. Comparación entre los resultados del PFEM y los experimentales para un número de Froude ( $Fr = 5$ ) y dos mallas diferentes.



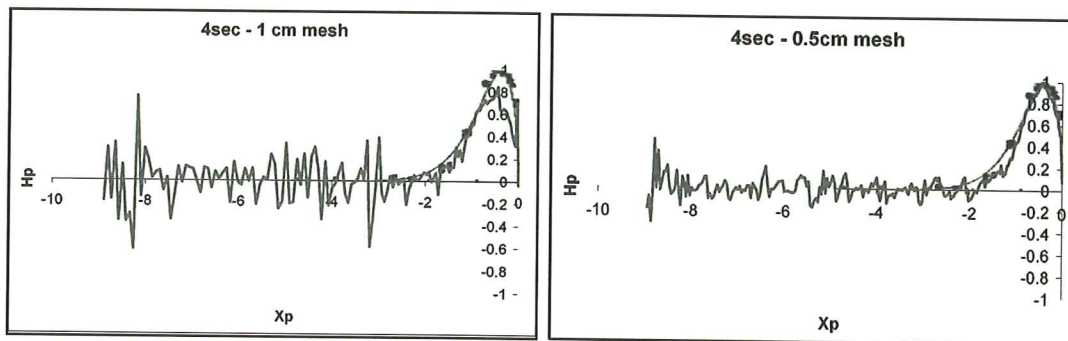
**Figura 37.** Perfil del chorro. Comparación entre los resultados del PFEM y los experimentales para un número de Froude ( $Fr = 7$ ) y dos mallas diferentes.

En la Figura 38 se muestra la comparación de la distribución de la presión medida en las proximidades de la rampa, con los resultados del PFEM para las dos mallas estudiadas y tres números de Froude ( $Fr=3,5$  y  $7$ ). Se aprecia una buena concordancia entre los resultados del PFEM y los experimentales, sobre todo para el valor de la presión máxima, que es el más significativo para el proyecto de la rampa.

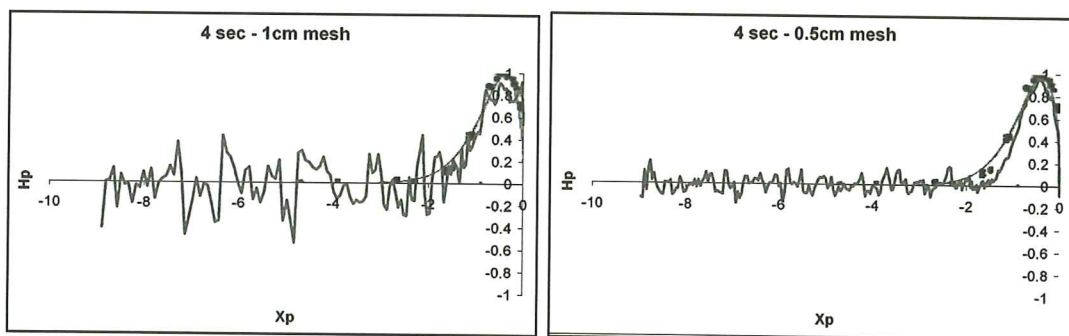
(a)  $Fr = 3$



(b)  $Fr = 5$



(c)  $Fr = 7$



**Figura 38.** Distribución de la presión en las proximidades de la rampa. Comparación entre los resultados experimentales (puntos y línea continua suave) y los obtenidos con el PFEM (línea oscilante) para dos tipos de malla y tres números de Froude,  $Fr = 3, 5$  y  $7$ .

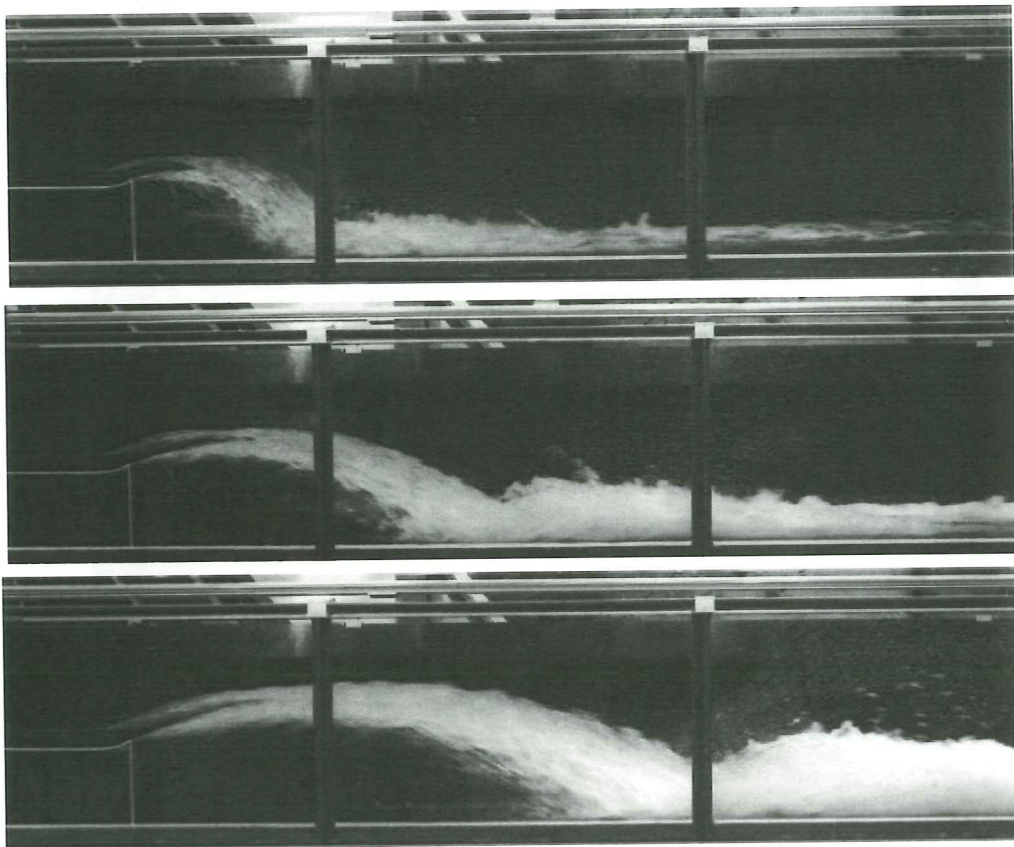
### Estudio tridimensional

Juan y Hager realizaron también ensayos de índole tridimensional (3D) introduciendo un deflector en uno de los extremos de la rampa (Figura 29). Los ensayos 2D discutidos en el apartado anterior corresponden a un valor del ángulo de deflexión  $\phi$  igual a cero.

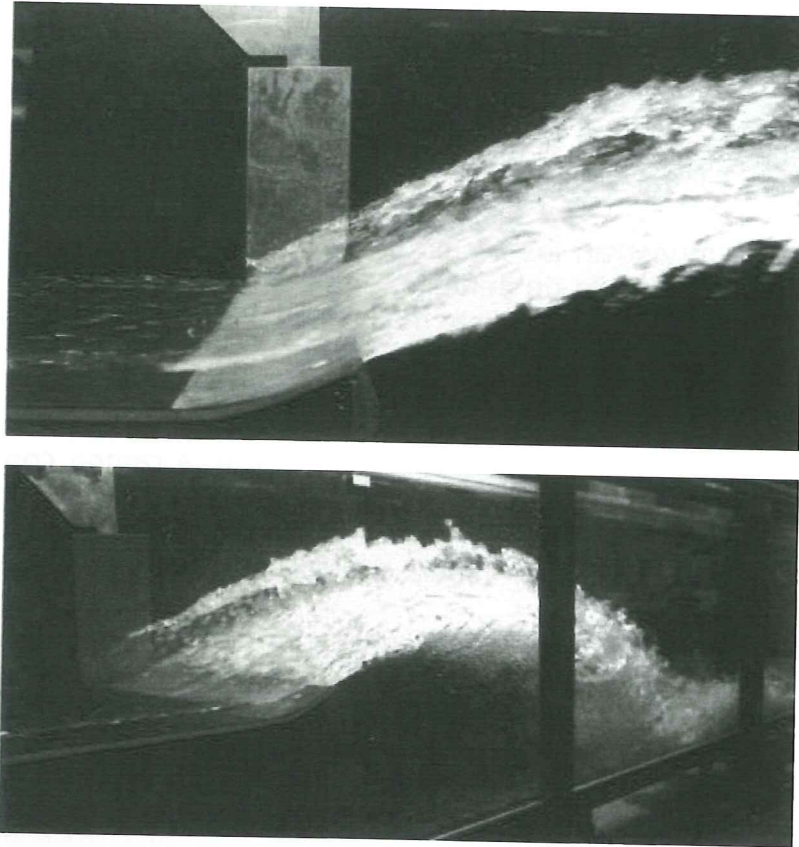
Las Figuras 39 y 40 muestran los resultados experimentales del chorro sobre la rampa para valores del ángulo de deflexión igual a  $30^\circ$ . El estudio tridimensional (3D) con el PFEM se realizó con una malla inicial de 75.000 tetraedros. Este número se incrementa rápidamente hasta aproximadamente unos 1.5 millones de elementos tetraedros tras varios instantes del análisis.

La Figura 41 muestra diferentes vistas del flujo sobre la rampa con el deflector. Por otra parte, en las Figuras 42 y 43 se comparan los resultados del PFEM y los experimentales para el perfil del chorro para dos números de Froude ( $Fr=3$  y  $5$ ). Se puede observar la buena concordancia entre ambos tipos de resultados.

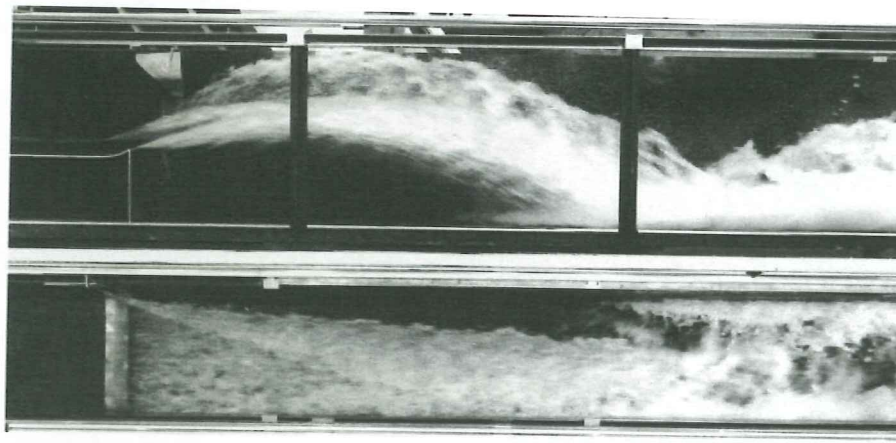
Finalmente en la Figura 44 se muestra una comparación cualitativa entre dos fotografías de la forma del chorro (en planta y alzado) con los resultados del PFEM ( $Fr = 7$ ). De nuevo la comparación entre los resultados numéricos y los experimentales es buena.



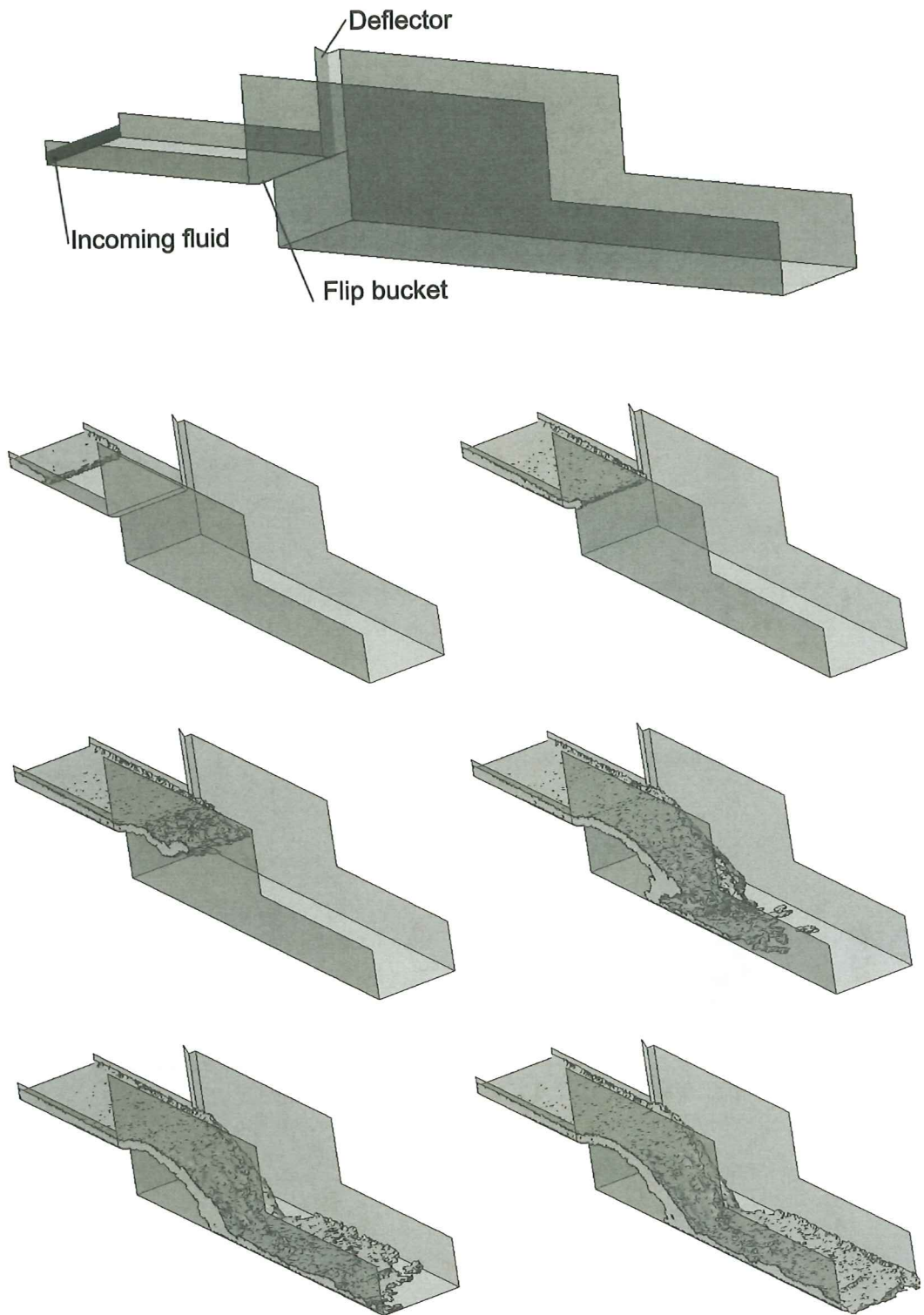




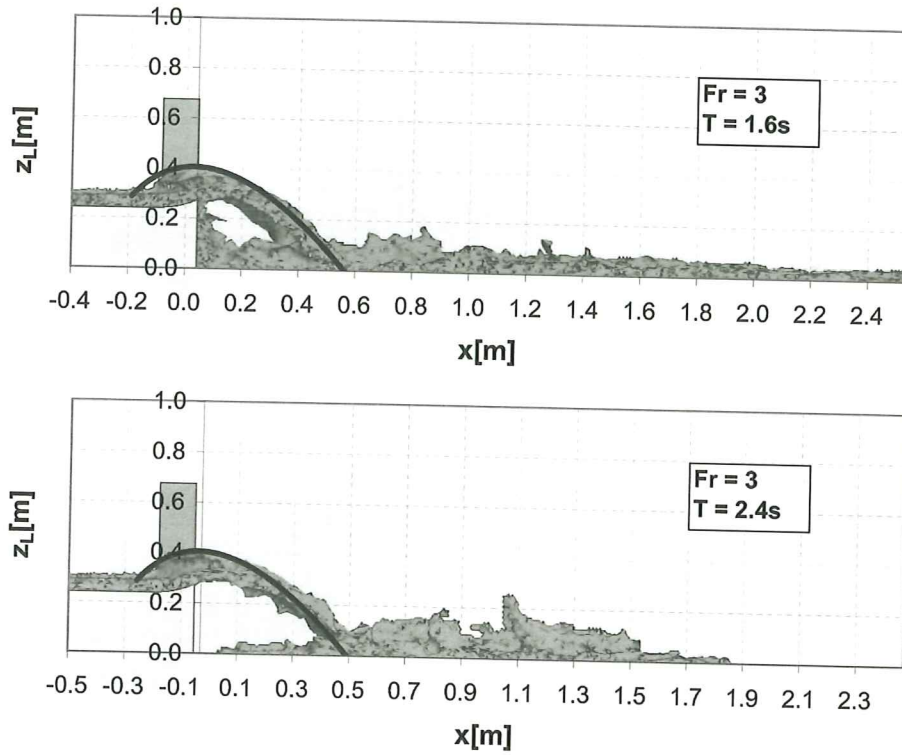
**Figura 39.** Flujo sobre una rampa. Resultados experimentales del chorro para un ángulo de deflexión de  $\phi = 30^\circ$ .



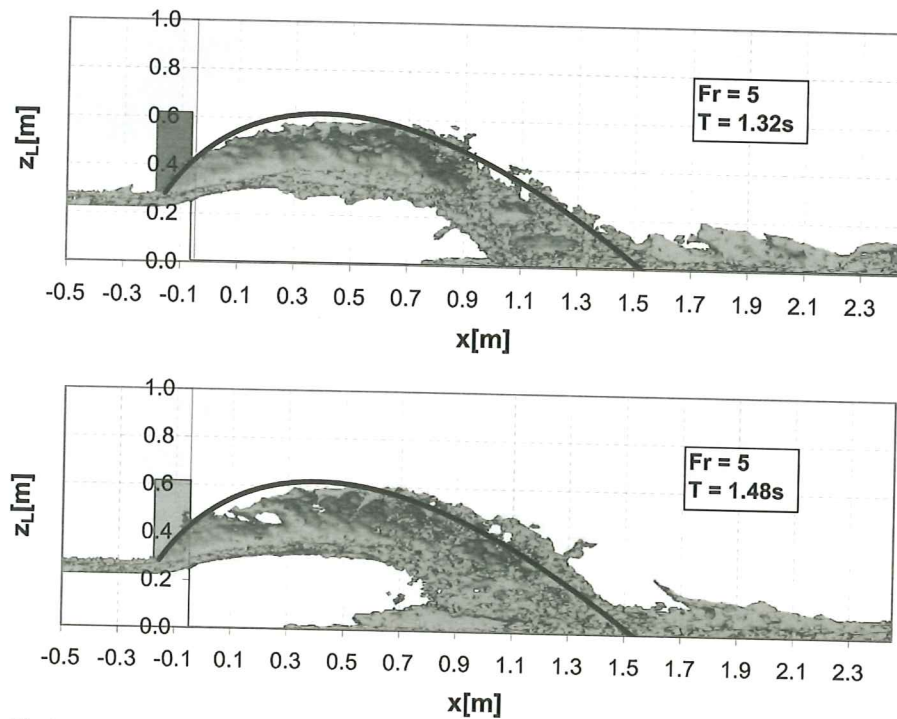
**Figura 40.** Flujo sobre una rampa. Resultados experimentales del chorro para un ángulo de deflexión de  $\phi = 30^\circ$ .



**Figura 41.** Flujo sobre una rampa con un deflector. Resultados obtenidos con el PFEM.

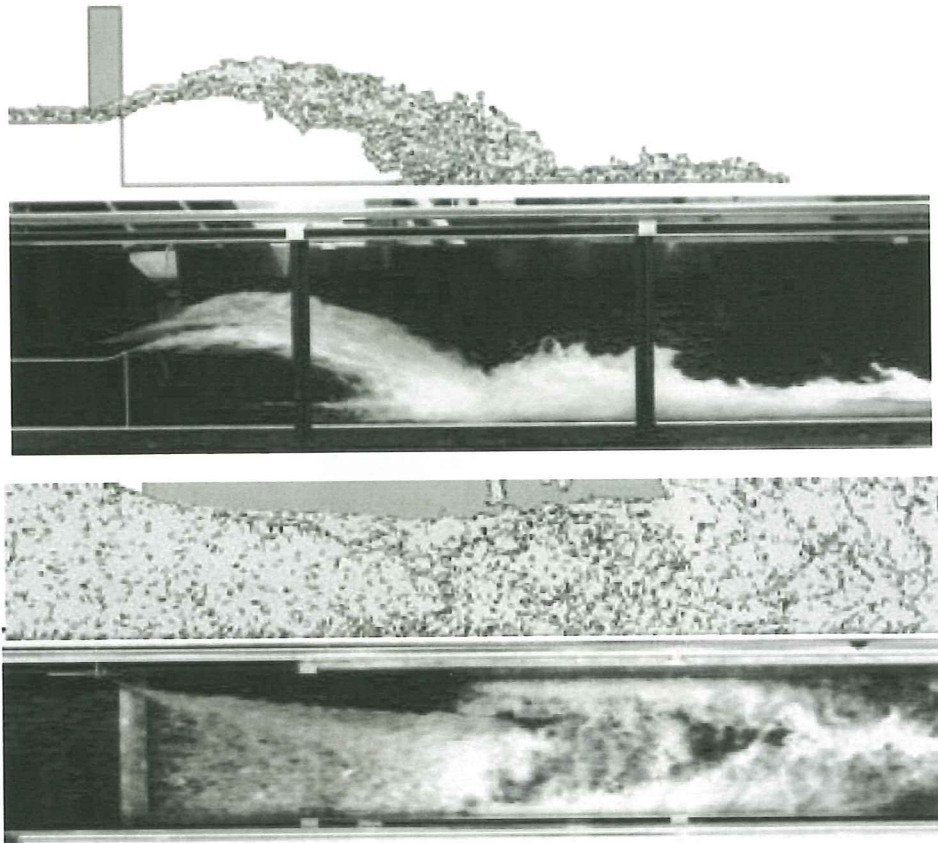


**Figura 42.** Flujo sobre una rampa con un deflector. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos con el PFEM para  $Fr = 3$ .



**Figura 43.** Flujo sobre una rampa con un deflector. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos con el PFEM para  $Fr = 5$ .





**Figura 44.** Flujo en lámina libre sobre una rampa con deflector. Comparación entre los resultados obtenidos con el PFEM y los experimentales para  $Fr = 7$ .

### 3.5 Flujo en lámina libre sobre un modelo de aliviadero en escalera

Se han estudiado los experimentos desarrollados en la Universidad Politécnica de Cataluña [Sánchez-Juni 2001 y Táboas 2004] para el análisis del flujo en lámina libre sobre un aliviadero escalonado (Figura 45).

La Figura 46 muestra una visión esquemática del modelo 2D utilizado para la simulación de la zona superior de la escalera, o sea, de la zona no aireada. La Figura 47 muestra los resultados de la simulación del flujo sobre el aliviadero con el PFEM.

En la Figura 48 se presenta la distribución del campo de velocidades en el flujo calculado por el PFEM y las medidas experimentales, respectivamente.

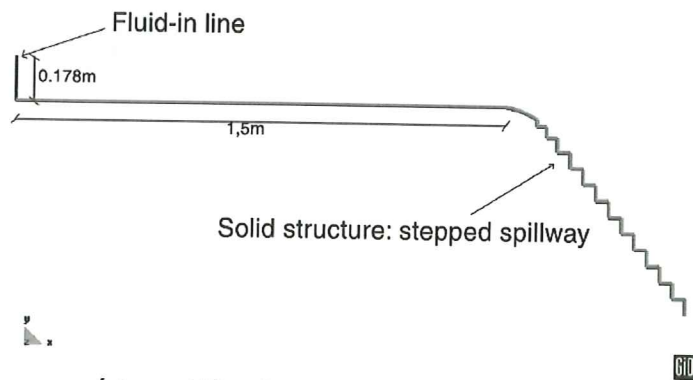
Se puede apreciar una buena correspondencia de los valores de la velocidad. Se consigue una clara visualización de ambos el flujo recirculatorio en los escalones y la aceleración del flujo en la zona superior de los mismos.

En la Figura 49 puede apreciarse la comparación entre los valores de la presión sobre la huella y la contrahuella de los escalones 30 y 31 calculados con el PFEM y los valores experimentales.

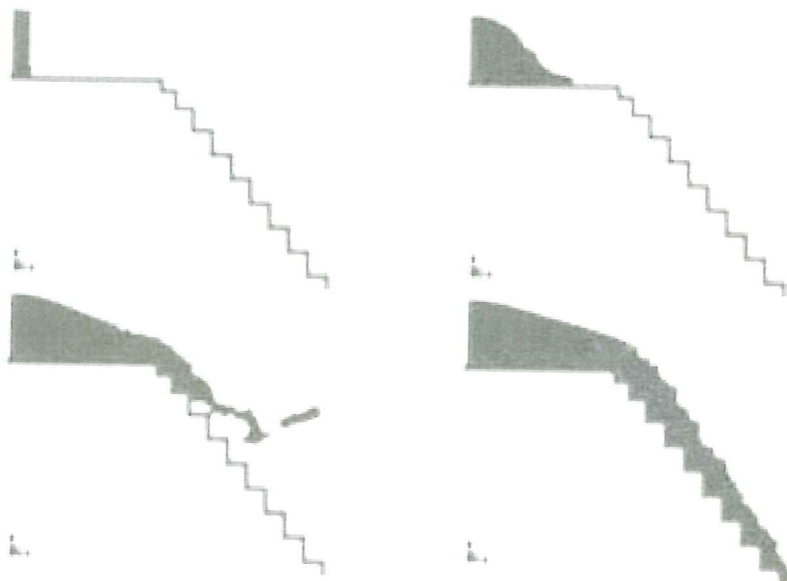
Los resultados de presión no son particularmente precisos en el punto más alto de la contrahuella donde el flujo superior se encuentra con el flujo recirculatorio.



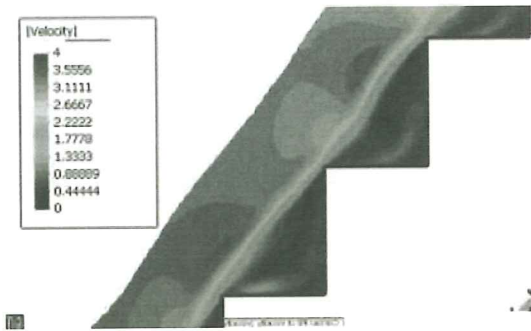
**Figura 45.** Vista general del ensayo del flujo sobre un aliviadero escalonado.



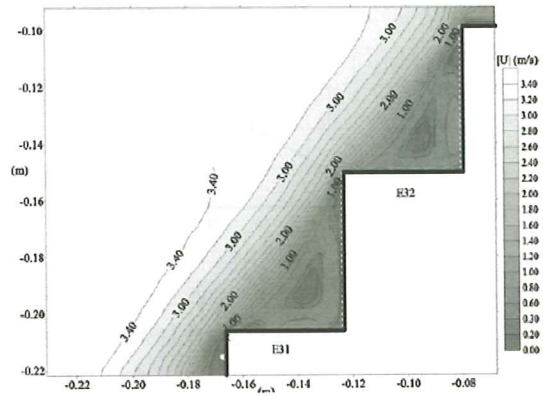
**Figura 46.** Modelo numérico utilizado para el estudio de un flujo sobre un aliviadero escalonado.



**Figura 47.** Modelización del flujo sobre el aliviadero escalonado con el PFEM.

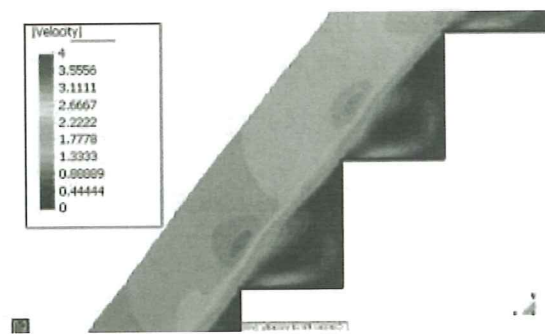


(a) Resultados con PFEM

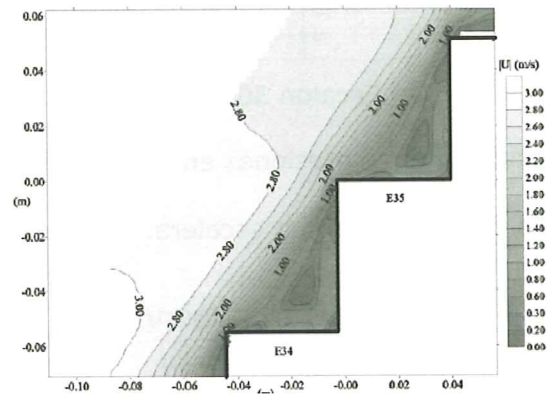


(b) Resultados experimentales

(1) Diagramas de velocidades en la zona de los escalones 31 y 32.



(a) Resultados con PFEM

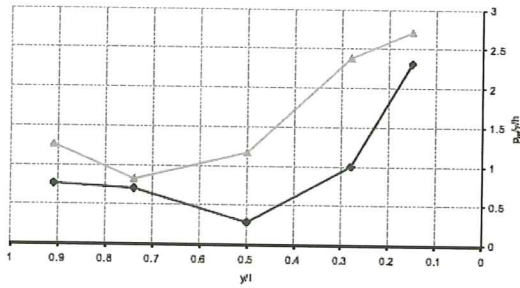


(b) Resultados experimentales

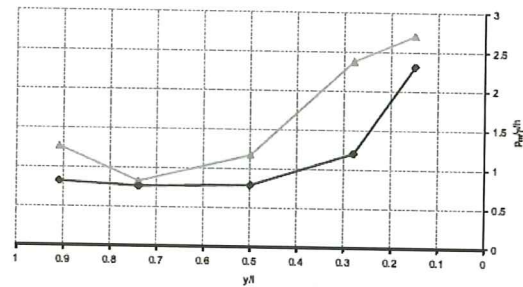
(2) Diagramas de velocidades en la zona de los escalones 34 y 35.

**Figura 48.** Aliviadero en escalera. Diagramas de velocidades.



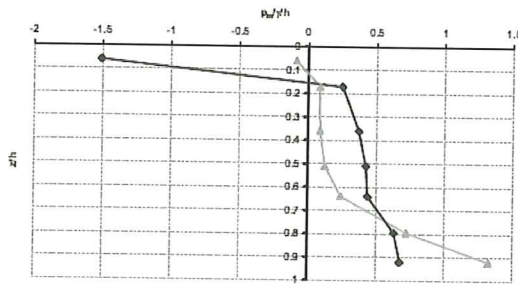


(a) Escalón 30

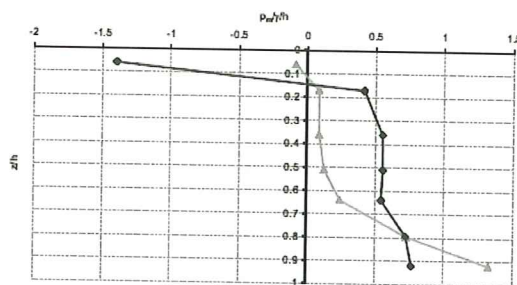


(b) Escalón 31

(1) Resultados de presiones en las huellas de los escalones 30 y 31.



(a) Escalón 30



(b) Escalón 31

(2) Resultados de presiones en las contrahuellas de los escalones 30 y 31.

**Figura 49.** Aliviadero en escalera. Comparación entre la distribución de la presión.

### 3.6 Flujo del agua a través de una compuerta

En la Universidad de Padua [Cola (2002)] se estudió experimentalmente el flujo de agua en un depósito y a través de una compuerta colocada en la parte inferior de un extremo.

En la Figura 50 se muestra una representación esquemática del ensayo. En la Figura 51 se muestran los dos tipos de depósito estudiados. El primero tiene tres separadores interiores y el segundo tiene los tres separadores agujereados para permitir el paso del agua a través de ellos.

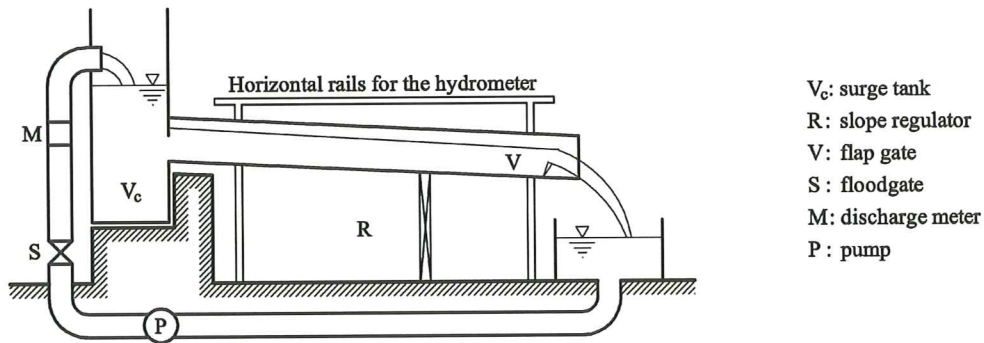
En la Figura 52 se muestra la evolución del fluido en el interior del depósito para los dos modelos estudiados. Por otra parte, en las Figuras 53 y 54 se muestra la distribución de la presión medida y calculada por el PFEM a lo largo del contorno de salida para los Modelos 1 y 2. Se ha dibujado también la distribución hidrostática como referencia.

En la Figura 55 se muestra la evolución temporal de la presión en el punto A del Modelo 2 de la Figura 51. La línea horizontal es la media de los resultados experimentales.

La concordancia entre los resultados numéricos y los experimentales para este problema es aceptable.

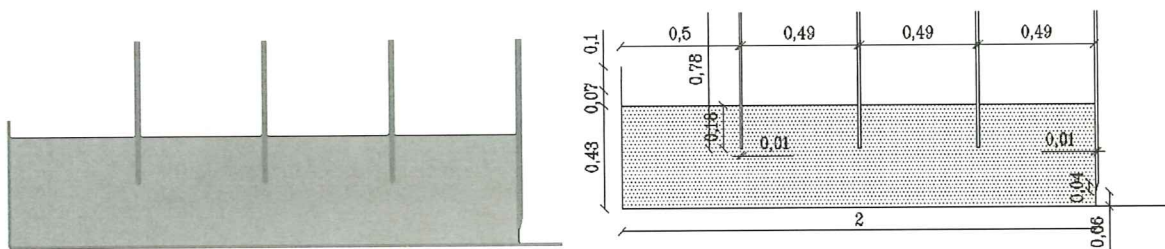
En la Figura 56 se muestra la forma de la superficie libre aguas abajo de la compuerta en dos instantes para el Modelo 2.

El mismo ensayo se utilizó para realizar medidas de superficie libre en un **resalto hidráulico** colocado aguas debajo de la compuerta. En las Figuras 57 y 58 se muestran los resultados obtenidos por el PFEM y los experimentales.

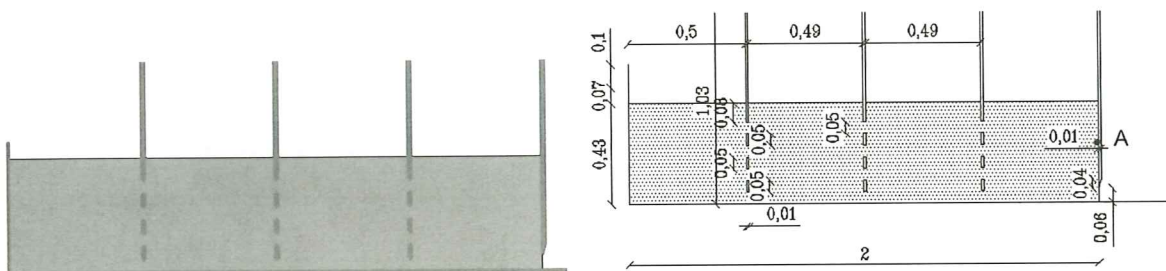


**Figura 50.** Flujo de agua a través de una compuerta en un depósito. Vista del experimento de Cola (2002).

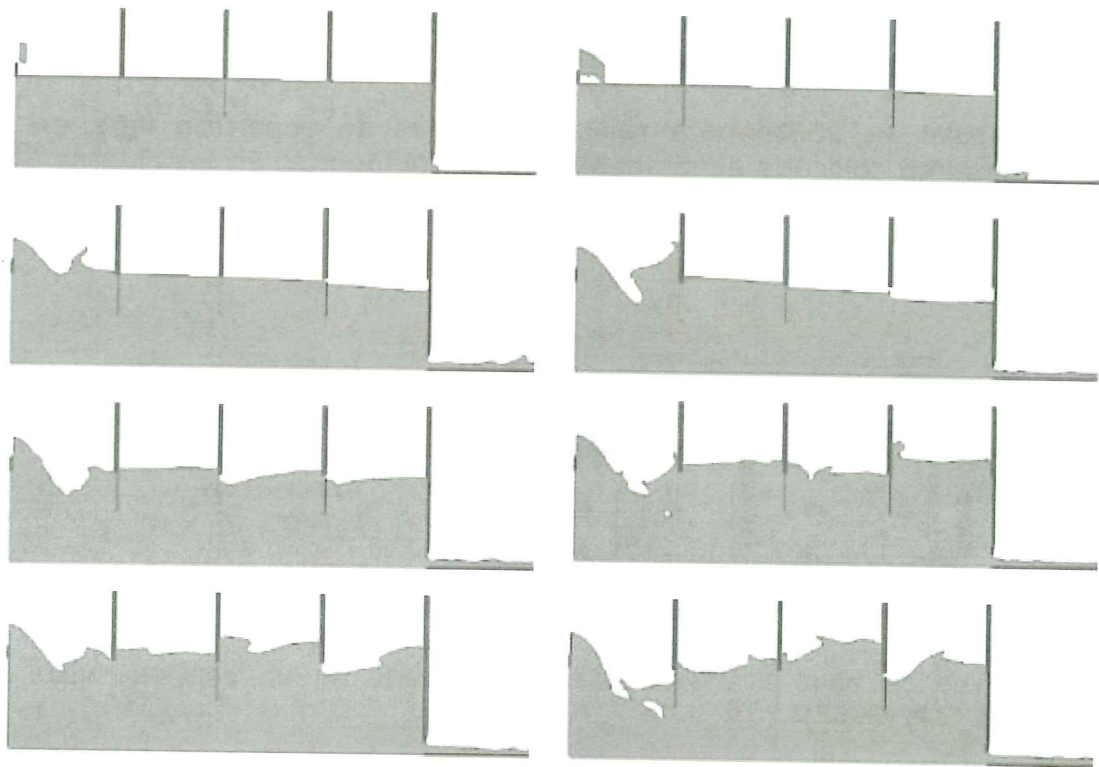
**Modelo 1**



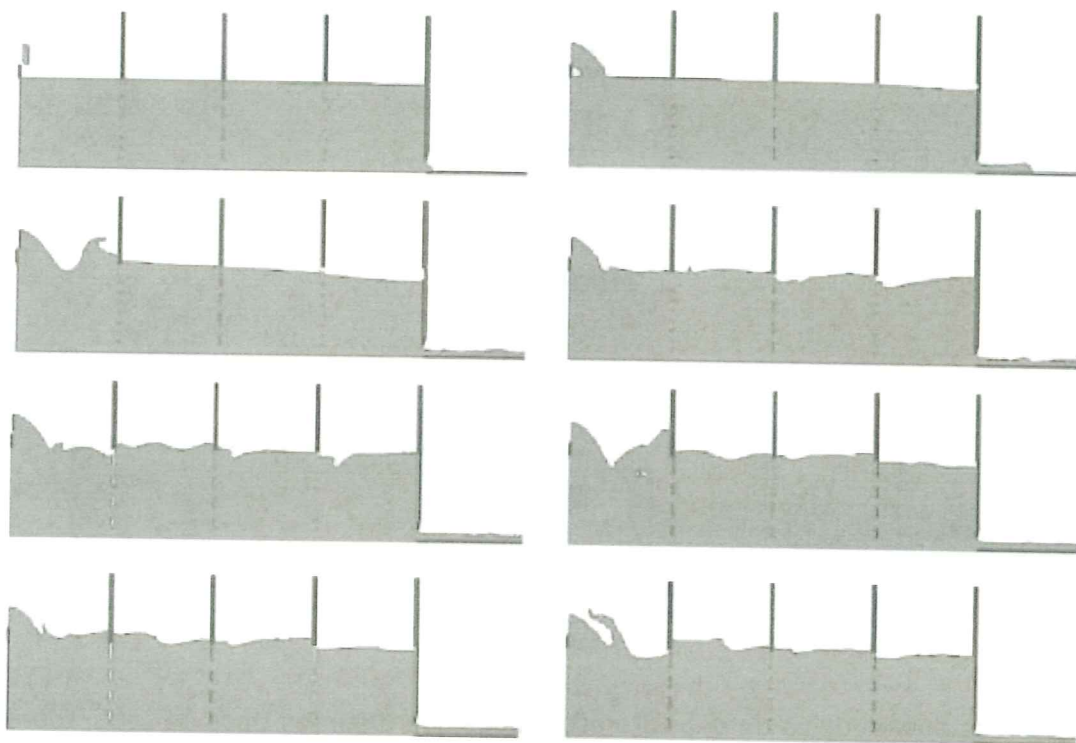
**Modelo 2**



**Figura 51.** Los dos modelos de depósito estudiados con distintos tipos de separadores.



Modelo 1. Resultados obtenidos con el PFEM

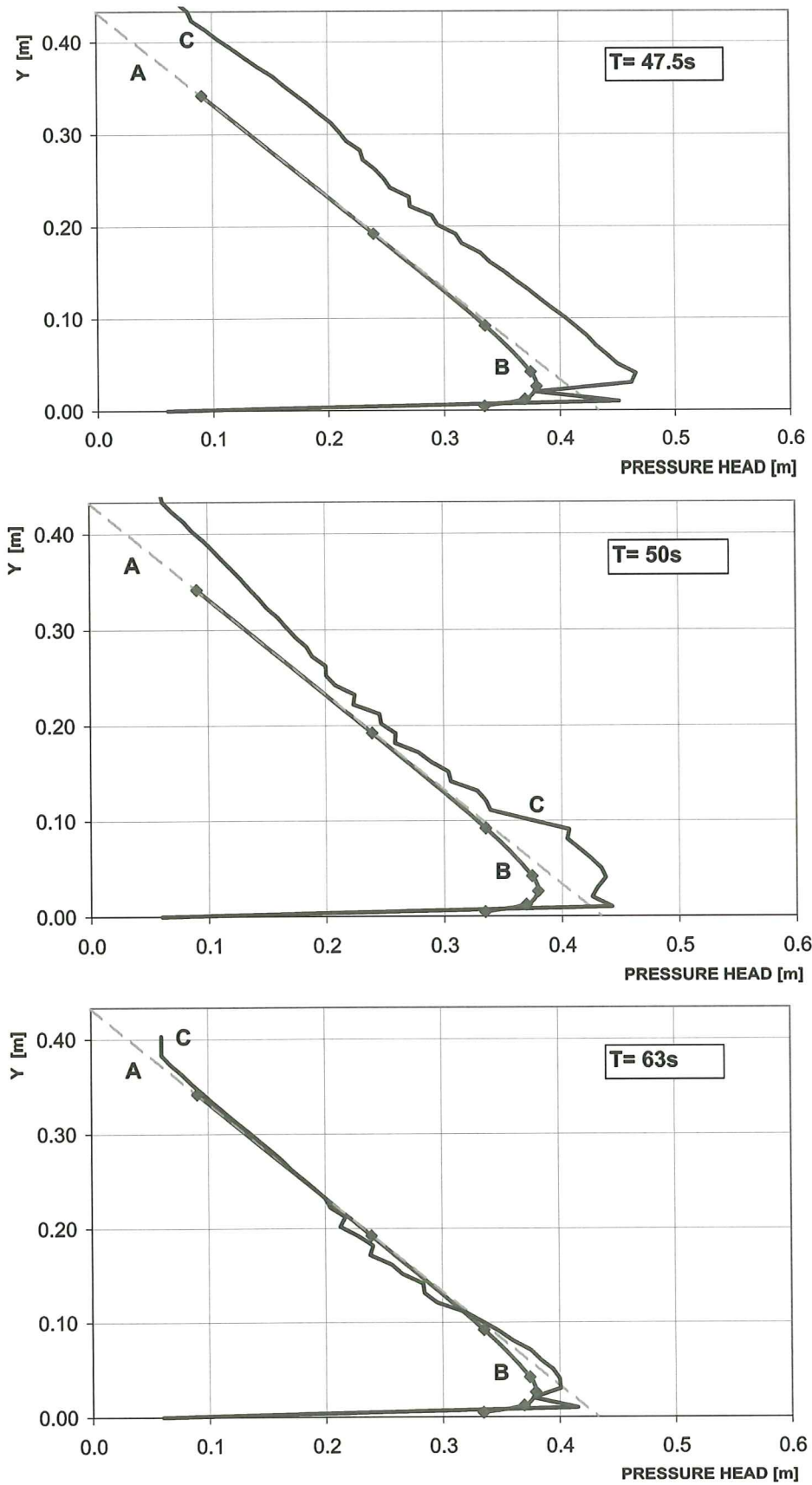


Modelo 2. Resultados obtenidos con el PFEM

**Figura 52.** Flujo a través de una compuerta.

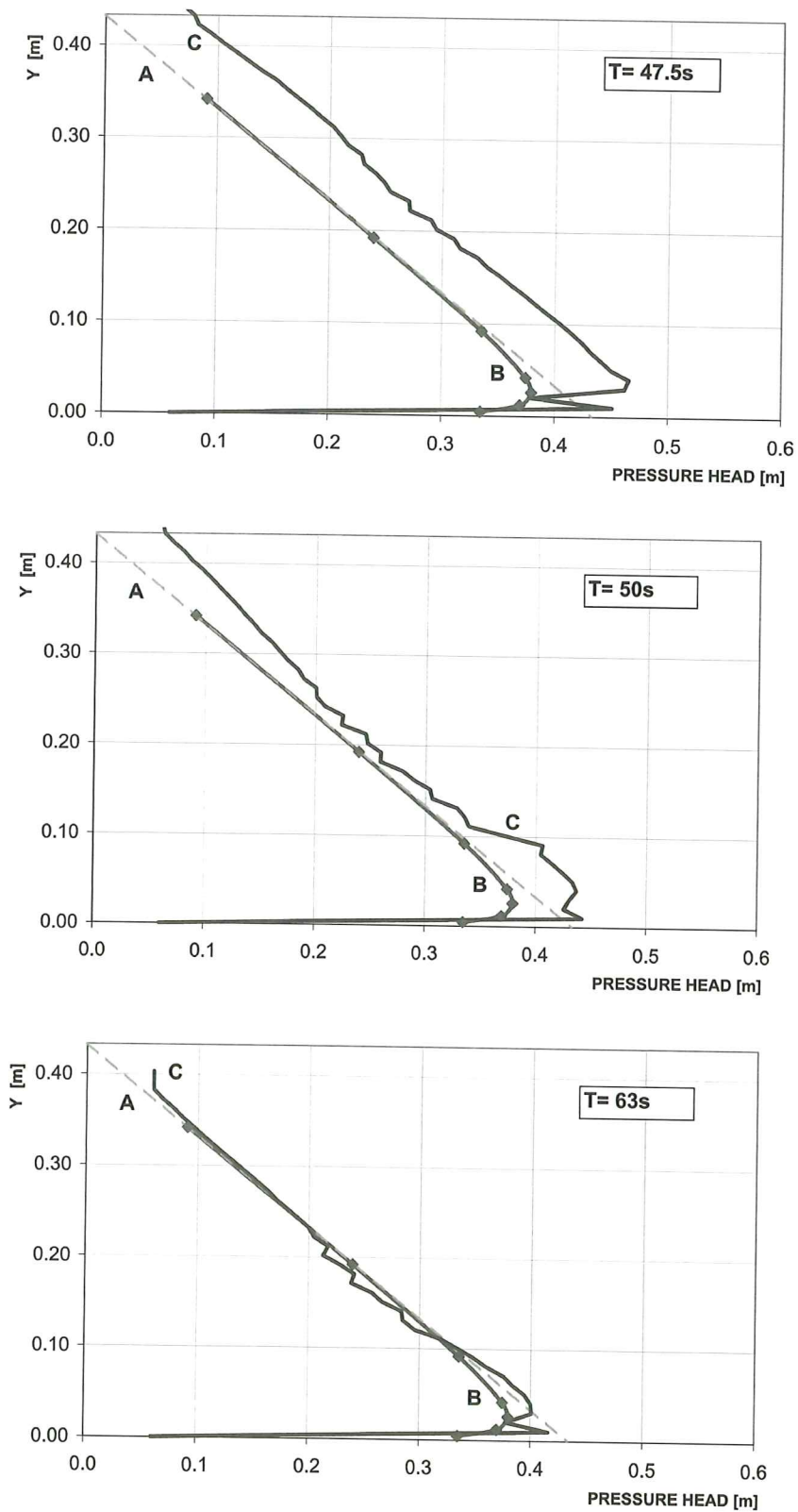


### Modelo 1

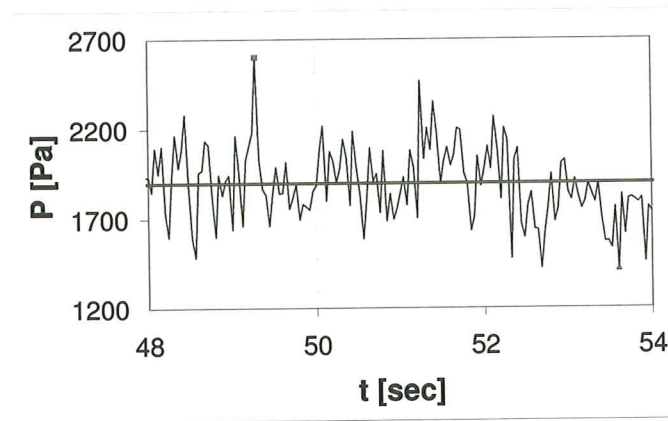


**Figura 53.** Distribución de la presión en el contorno de salida. A: Presión hidrostática, B: Medida experimental, C: Resultados obtenidos con el PFEM.

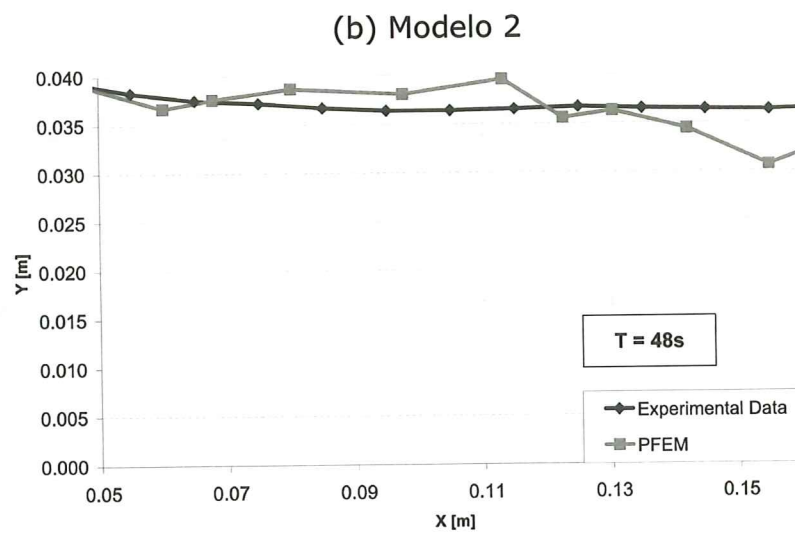
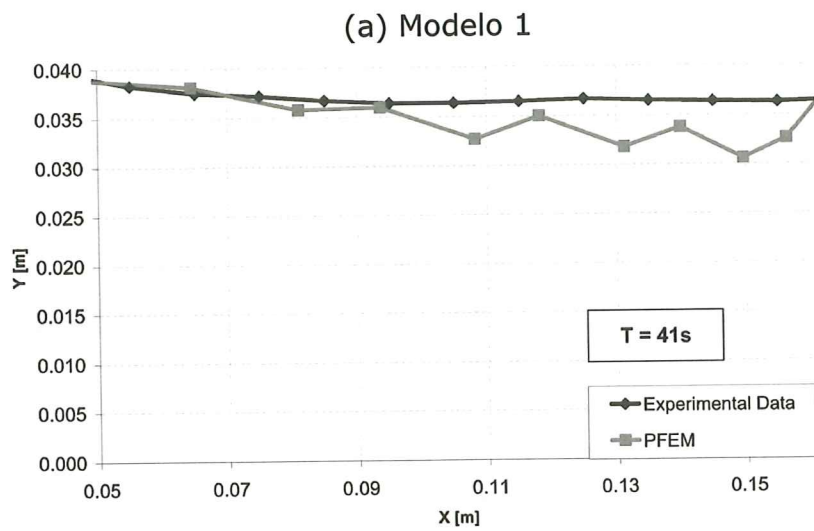
### Modelo 2



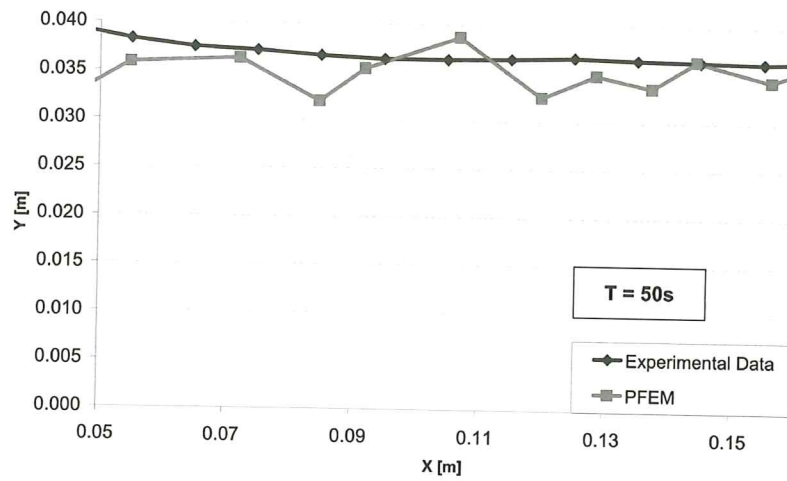
**Figura 54.** Distribución de la presión en el contorno de salida. A: Presión hidrostática, B: Medida experimental, C: Resultados obtenidos con el PFEM.



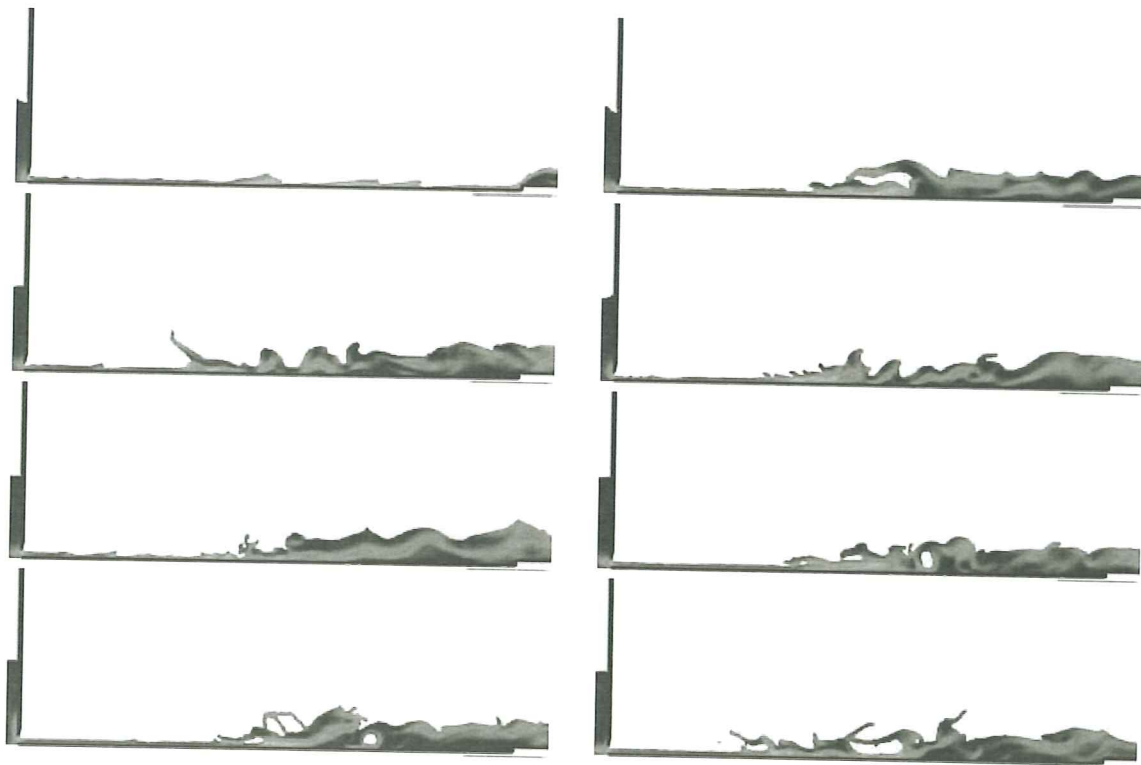
**Figura 55.** Evolución temporal de la presión en el punto A del Modelo 2 (Figura 51). La línea horizontal es la media de los resultados experimentales.



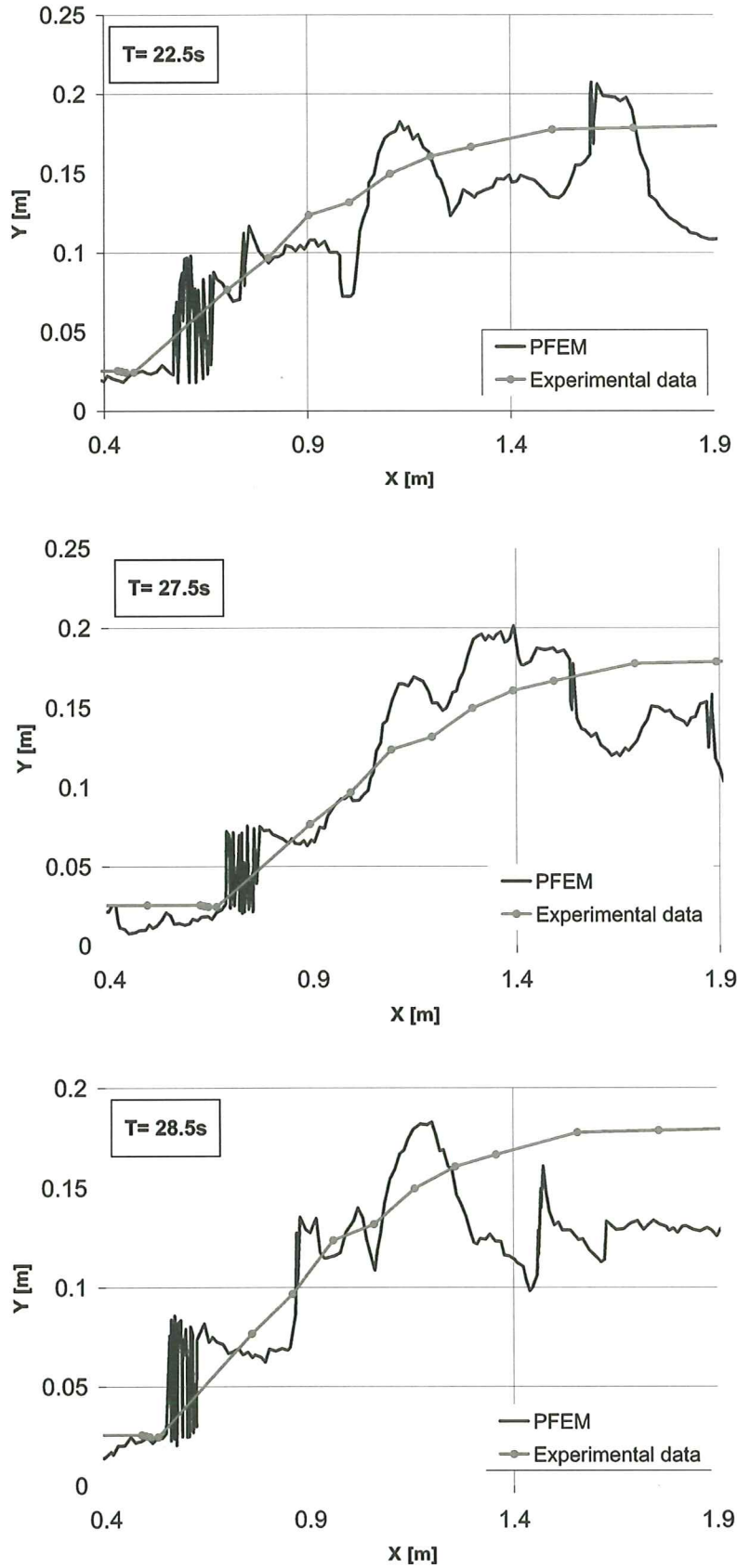




**Figura 56.** Forma de la superficie libre en dos instantes (Modelo 2).



**Figura 57.** Resalto hidráulico aguas abajo del depósito de la Figura 51 (Modelo 2). Resultados obtenidos con el PFEM.



**Figura 58.** Resalto hidráulico. Perfil de la superficie libre en varios instantes.

### 3.7 Efecto de una corriente de agua sobre un objeto prismático

#### Ensayo de Koshizuka et al.

Koshizuka *et al.* (1995) han estudiado experimentalmente el efecto del flujo producido por la rotura de una columna de agua sobre un objeto prismático colocado en un recipiente.

En la Figura 59 se muestra esquemáticamente el ensayo. El cálculo con el PFEM se realizó con un modelo 2D utilizando una malla de 100.000 elementos triangulares.

Las Figuras 60 y 61 muestran la evolución del flujo de agua en el recipiente tras la rotura de la columna y el impacto del agua con el objeto y las paredes. Se aprecia una excelente correlación hasta el momento en que la superficie libre impacta con la pared en el extremo derecho del recipiente. A partir de ese momento los resultados del PFEM no capturan el efecto "burbuja" producido al quedar atrapado aire en el interior del flujo.

Para corregir este defecto, se realizó un nuevo estudio con el PFEM, modelando esta vez el efecto del aire. Los resultados del estudio se muestran en la Figura 62. Se aprecia que en este caso se reproduce perfectamente el efecto burbuja antes mencionado. Obviamente, el coste de esta segunda simulación es más costoso al incluir los elementos de aire en el cálculo.

#### Ensayo de Kleefsman et al. (2005)

Este ensayo realizado por Kleefsman es similar al anterior, aunque el objetivo en este caso es medir las presiones del agua al impactar sobre el objeto. En las Figuras 63 y 64 se muestra un esquema del ensayo y la disposición de puntos sobre el objeto donde se realizaron medidas de presión.

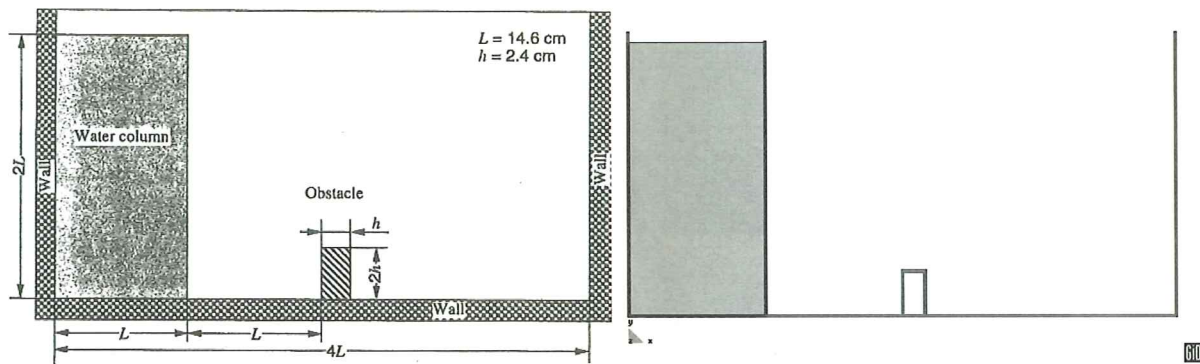
En la Figura 65 se muestra el dominio para análisis por el PFEM realizado con una malla de 60.000 elementos tetraédricos.

En la Figura 66 se muestran los resultados del flujo de agua en el recipiente y sobre el objeto en varios instantes calculados por el PFEM.

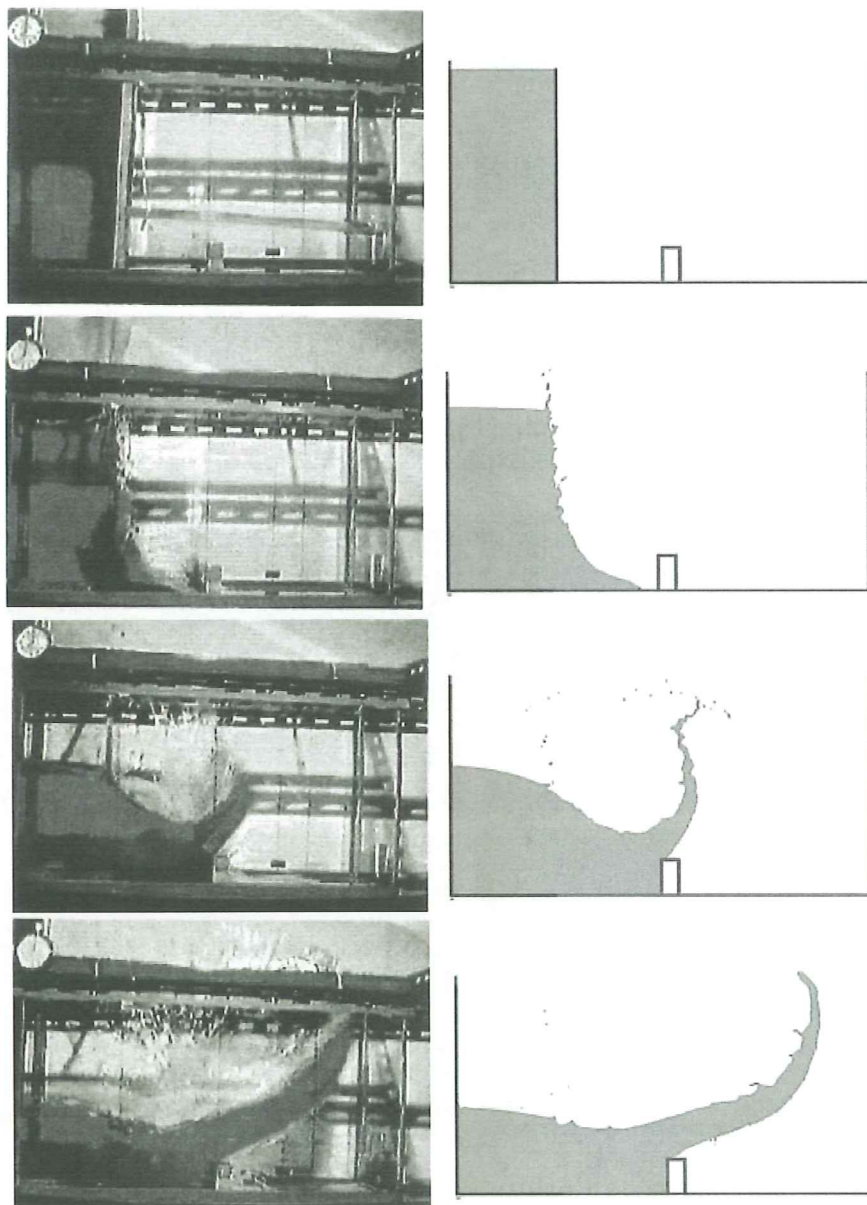
En las Figuras 67-70 se muestra la comparación entre los resultados experimentales y numéricos para la distribución de la presión en los 8 puntos de muestreo. La precisión del PFEM es remarcable, sobre todo para los valores más altos de la presión (Punto 1).

Se realizó también en este caso un segundo cálculo con una malla más fina (170.000 tetraedros) para comparar la convergencia de los resultados del PFEM. Los resultados para la distribución de las presiones en los puntos 1 y 5 se muestran en la Figura 71. Tal y como se esperaba, al utilizar una malla más fina se aprecia una mejora sustancial de los resultados en la distribución de la presión en los primeros instantes. Esta mejora es más notable para el punto 5.

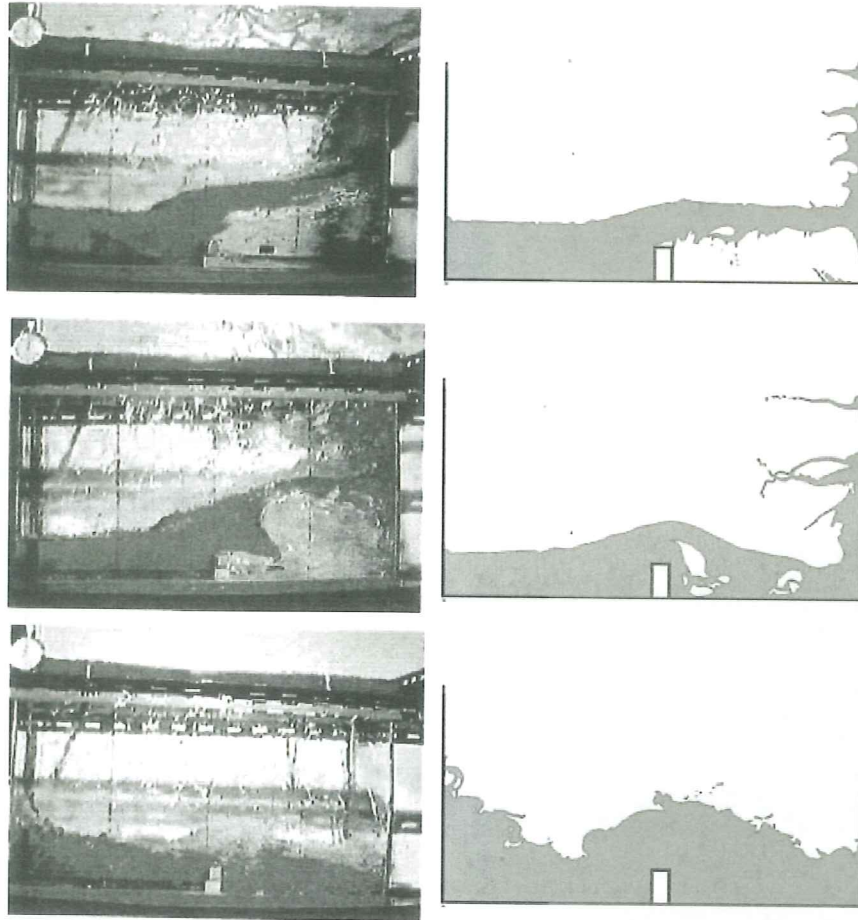




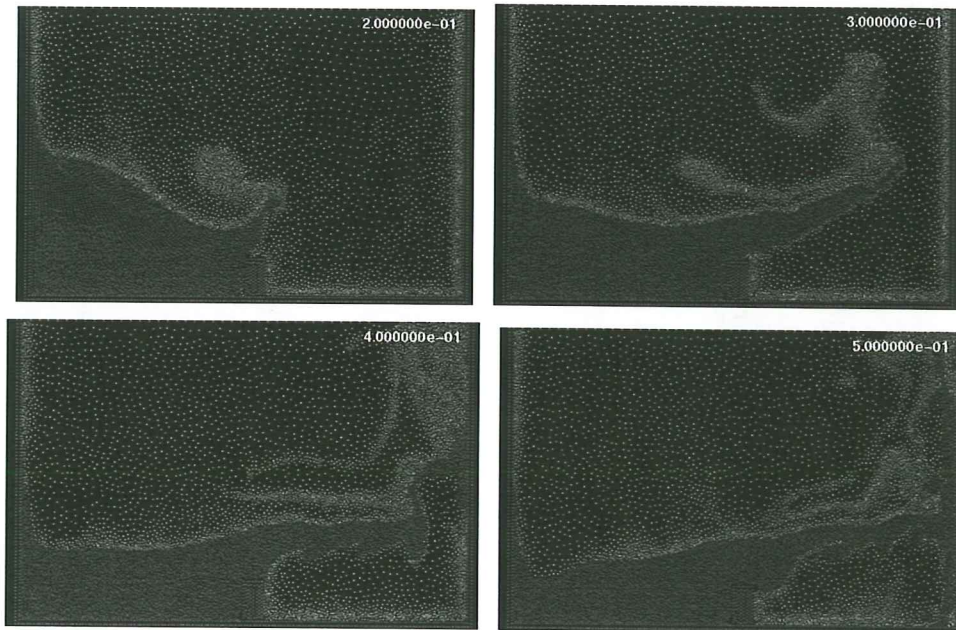
**Figura 59.** Columna de agua fluyendo sobre un objeto. Esquema del ensayo de Koshizuka *et al.* (1995) (izquierda) y modelo para el cálculo con el PFEM (derecha).



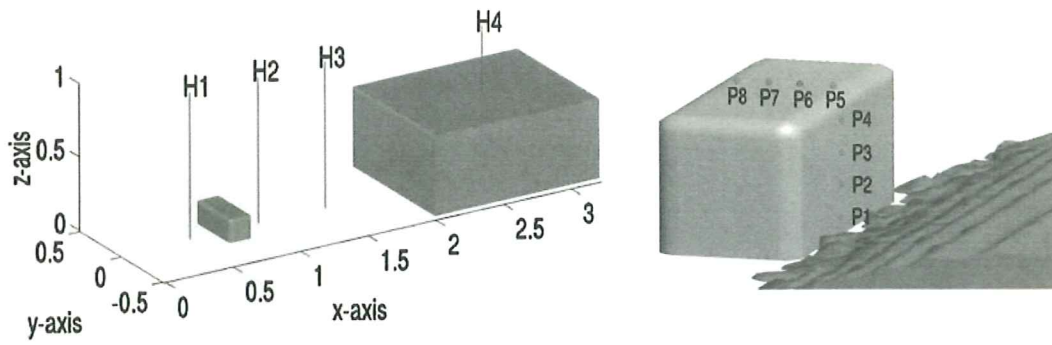
**Figura 60.** Ensayo de Koshizuka *et al.* (1995). Evolución temporal de la columna de agua. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos con el PFEM.



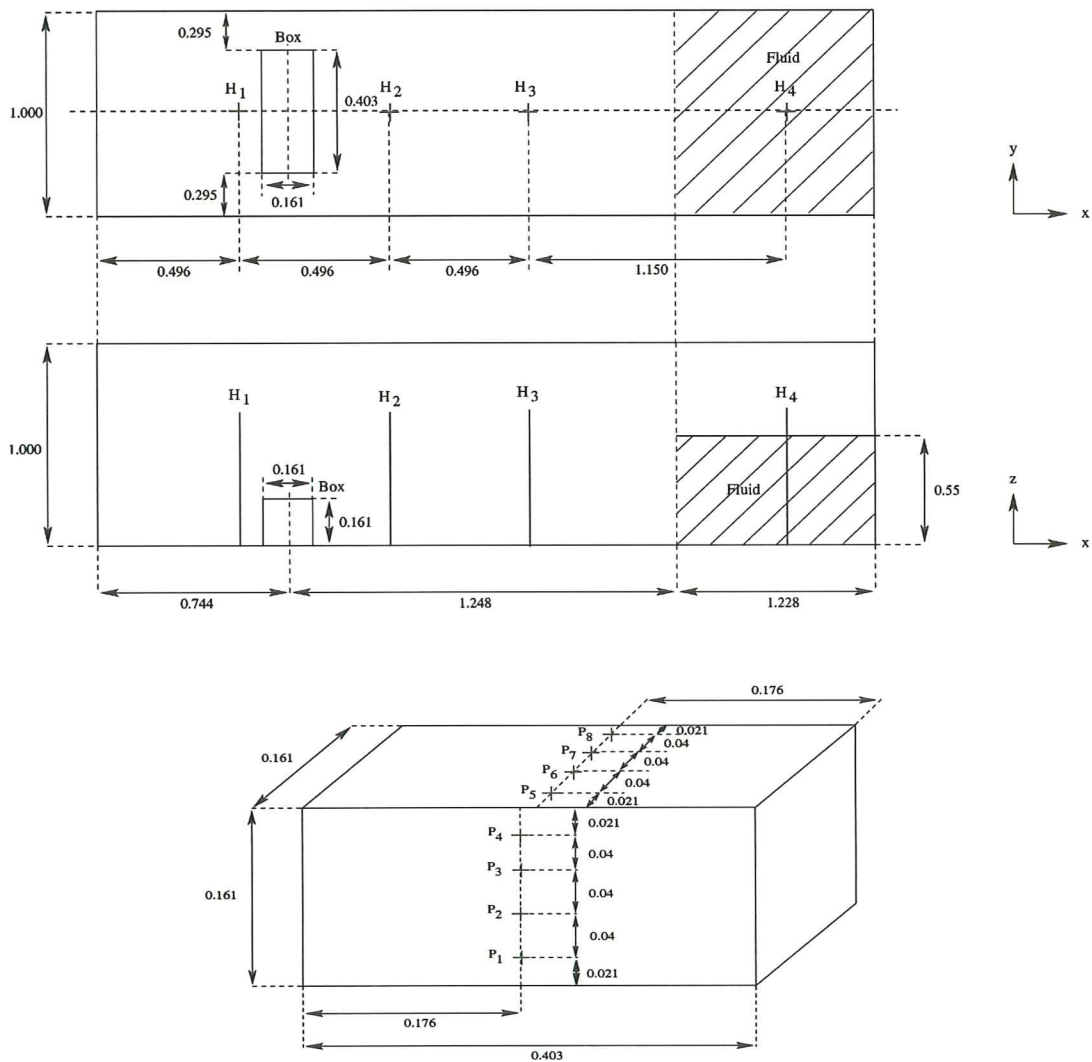
**Figura 61.** Ensayo de Koshizuka et al. (1995). Evolución temporal de la columna de agua. Comparación entre los resultados experimentales y los obtenidos con el PFEM.



**Figura 62.** Análisis del ensayo de Koshizuka *et al.* (1995) incluyendo el efecto del aire. Se aprecia claramente como se reproduce la burbuja de aire tras el impacto del chorro en la pared derecha.

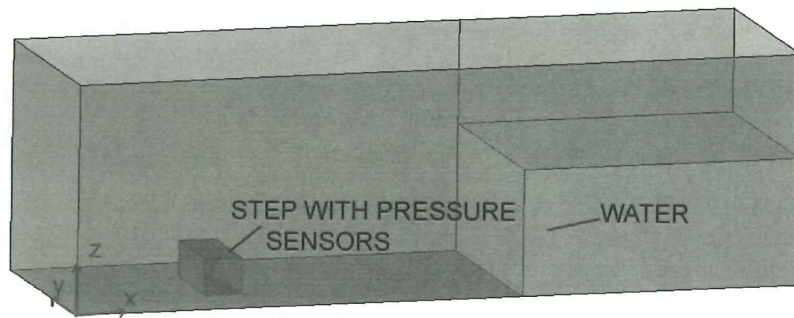


**Figura 63.** Impacto de una columna de agua sobre un objeto. Esquema del ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). La presión se midió en los puntos P1-P8.

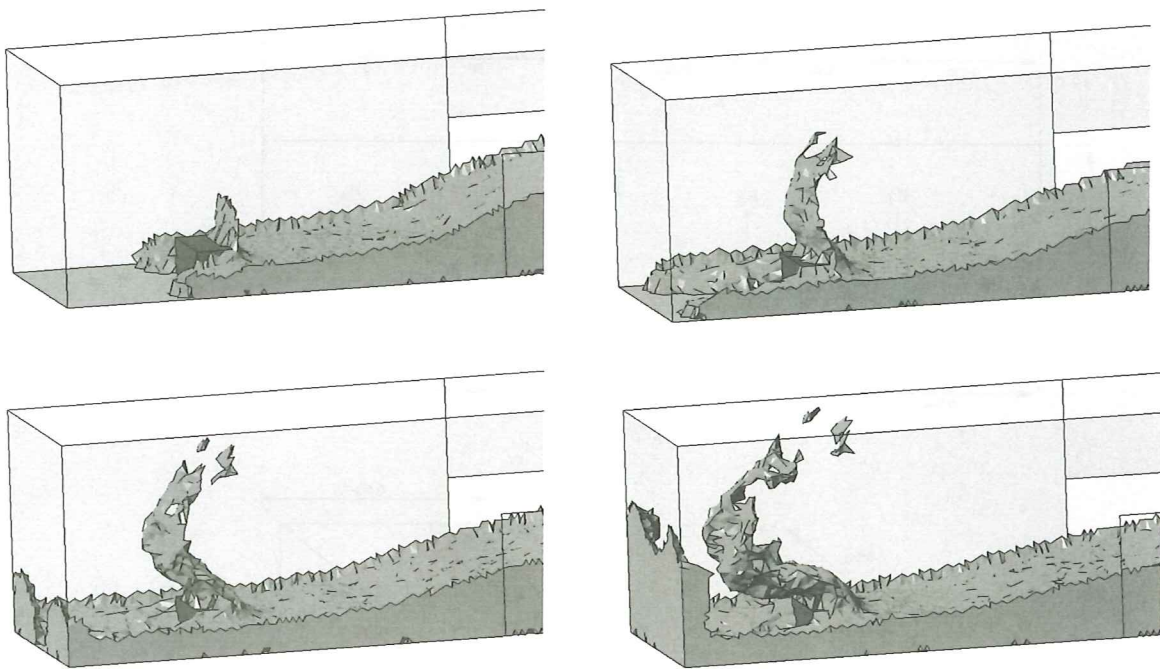


**Figura 64.** Detalles del ensayo de Kleefsman *et al.* (2005).

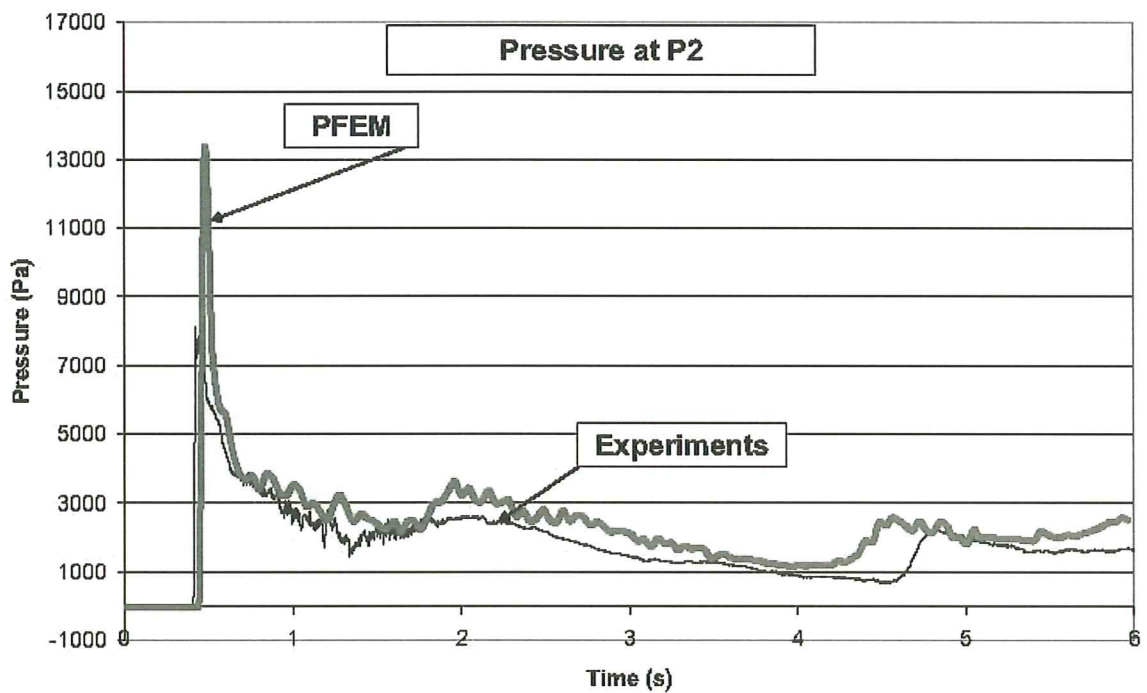
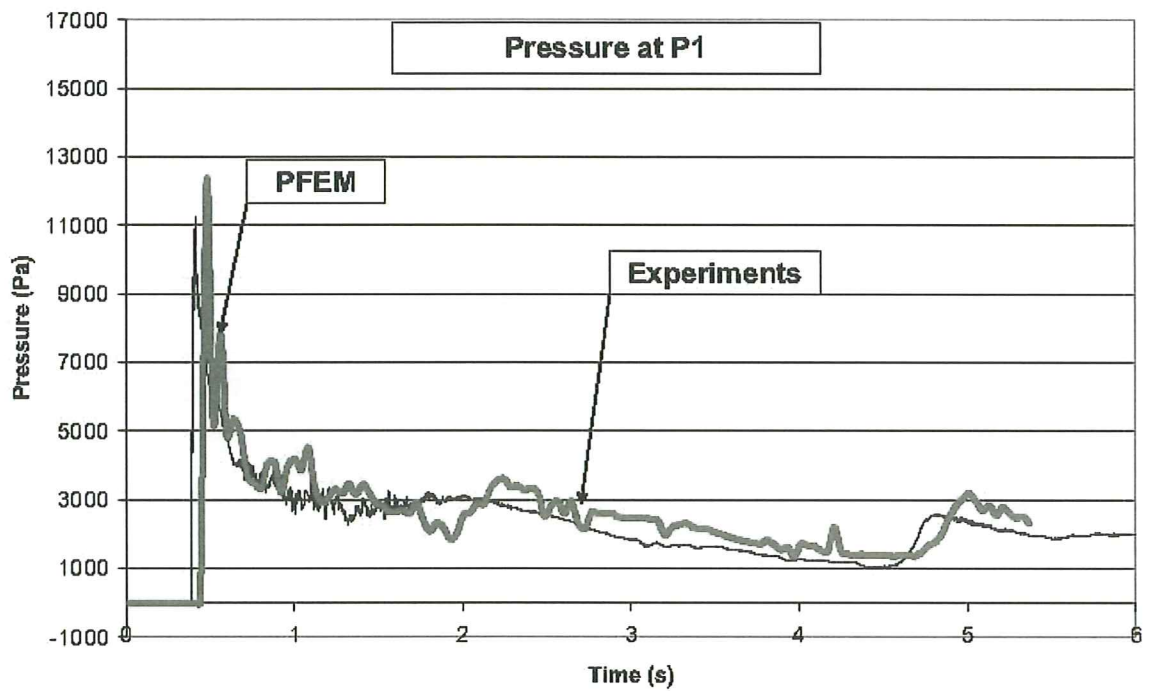




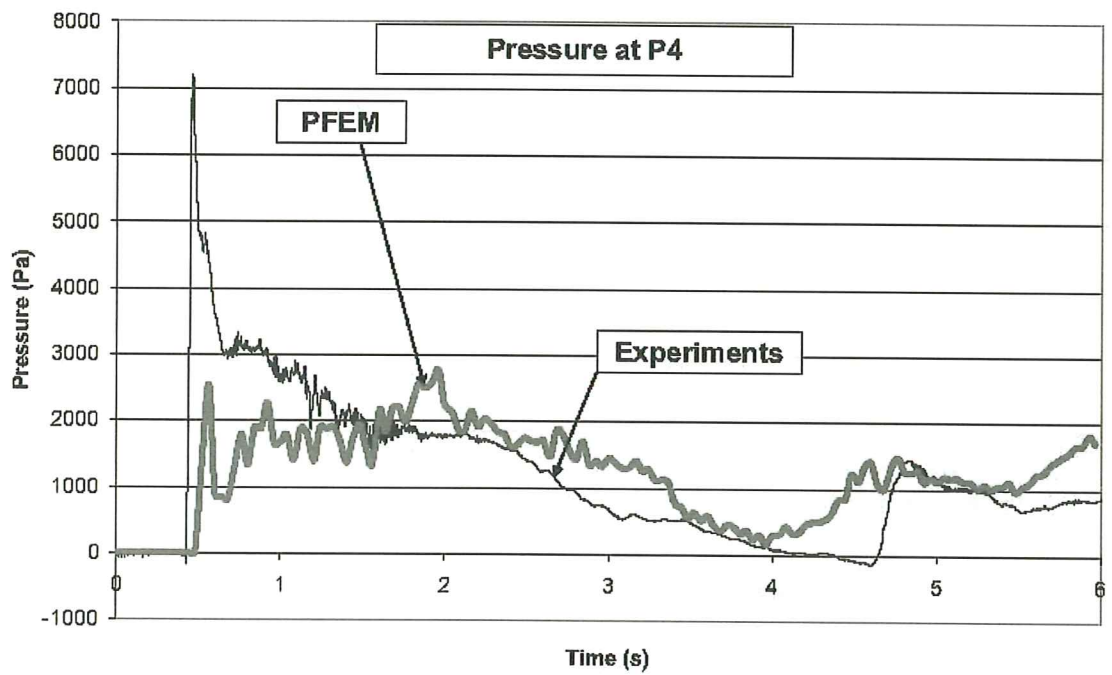
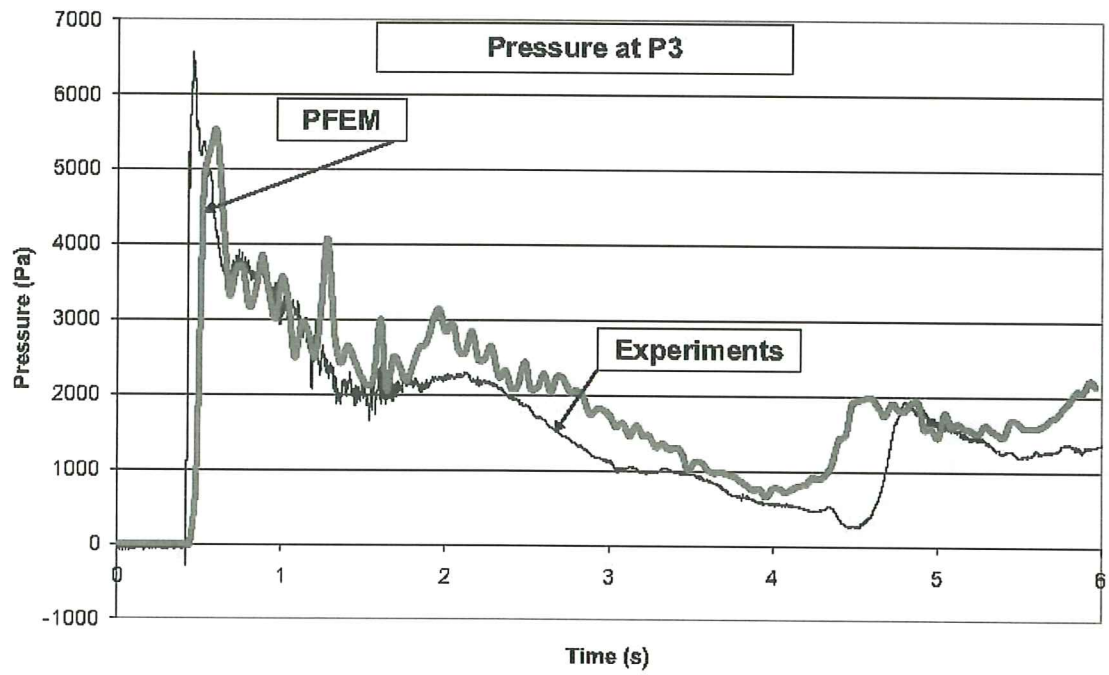
**Figura 65.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Dominio utilizado para el análisis con el PFEM.



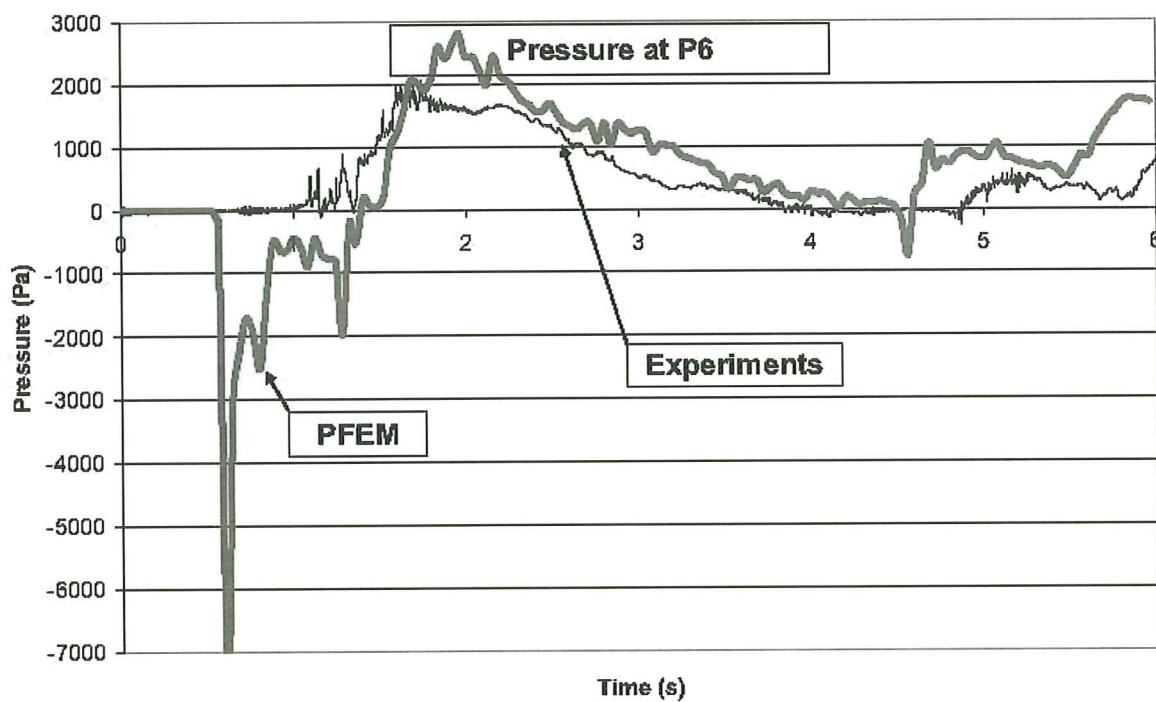
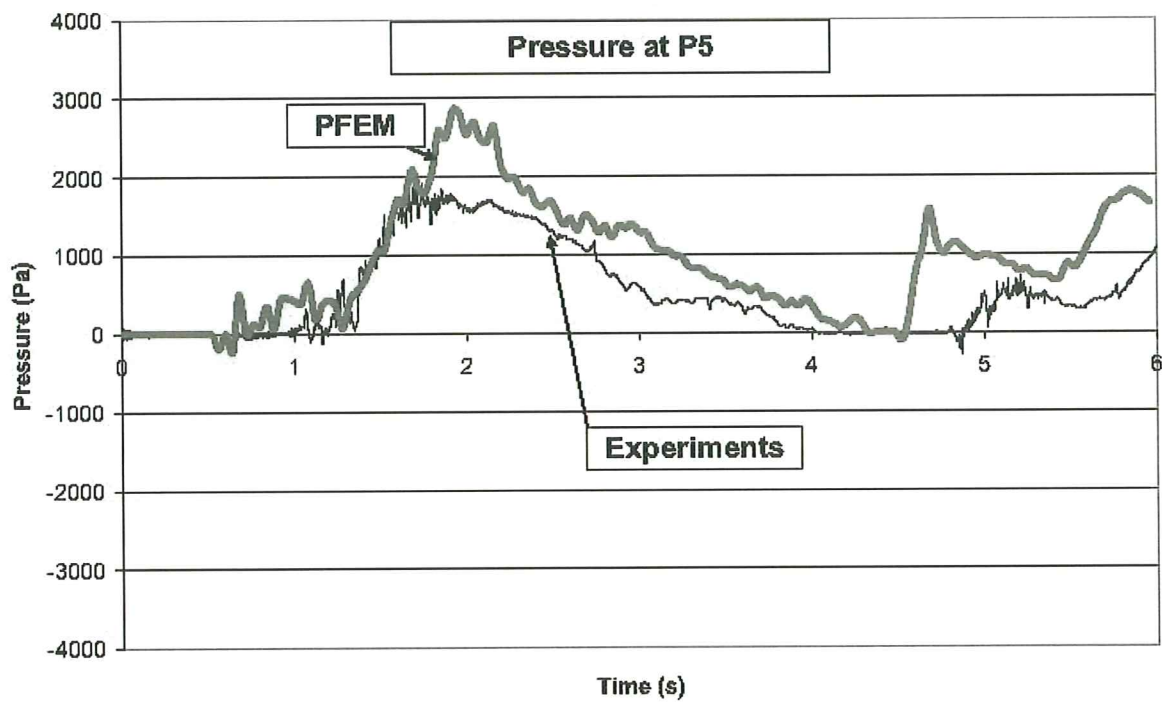
**Figura 66.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Resultados obtenidos con el PFEM.



**Figura 67.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Valores de la presión en varios instantes en los puntos P1 y P2.

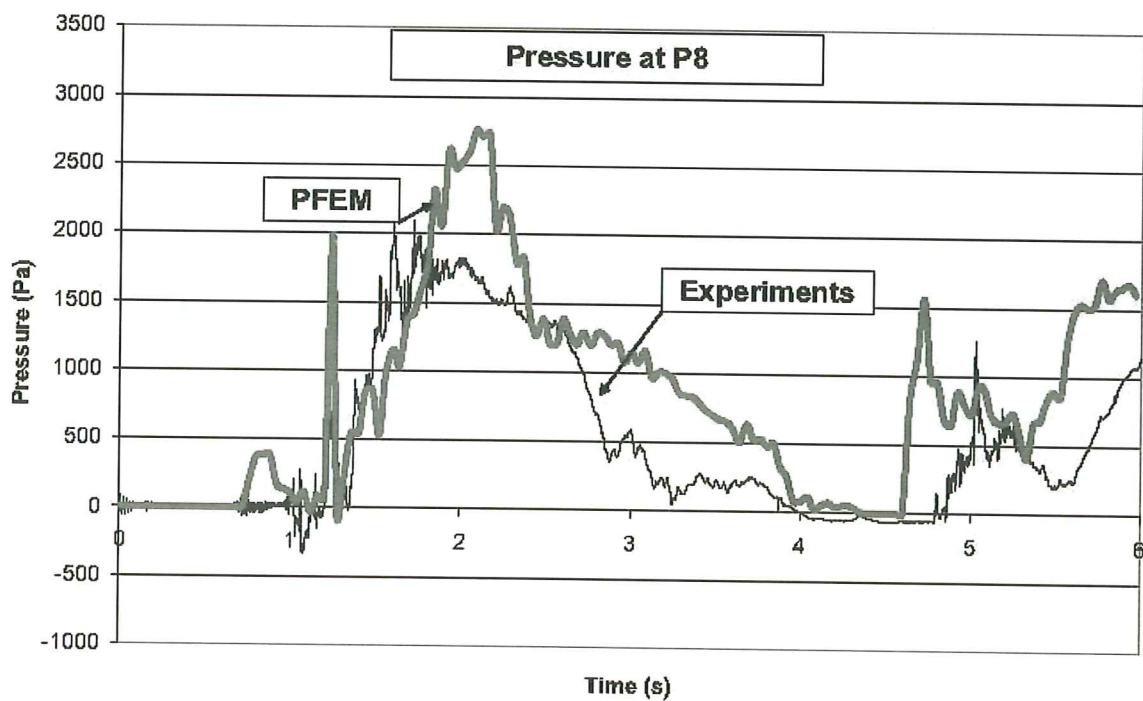
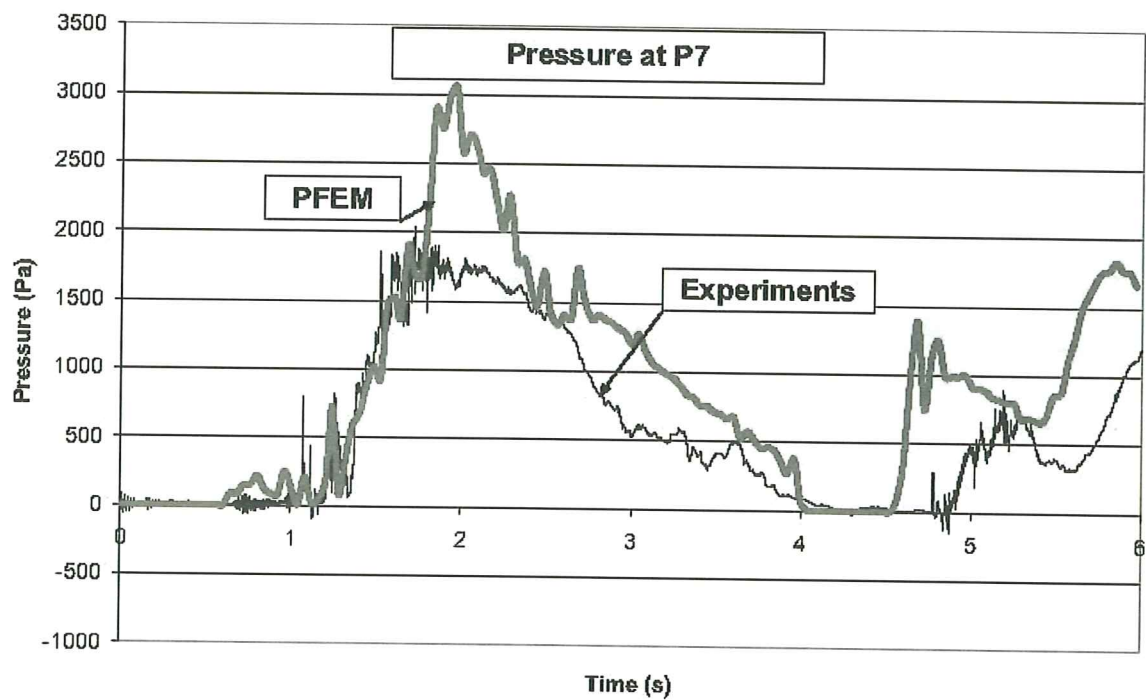


**Figura 68.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Valores de la presión en varios instantes en los puntos P3 y P4.

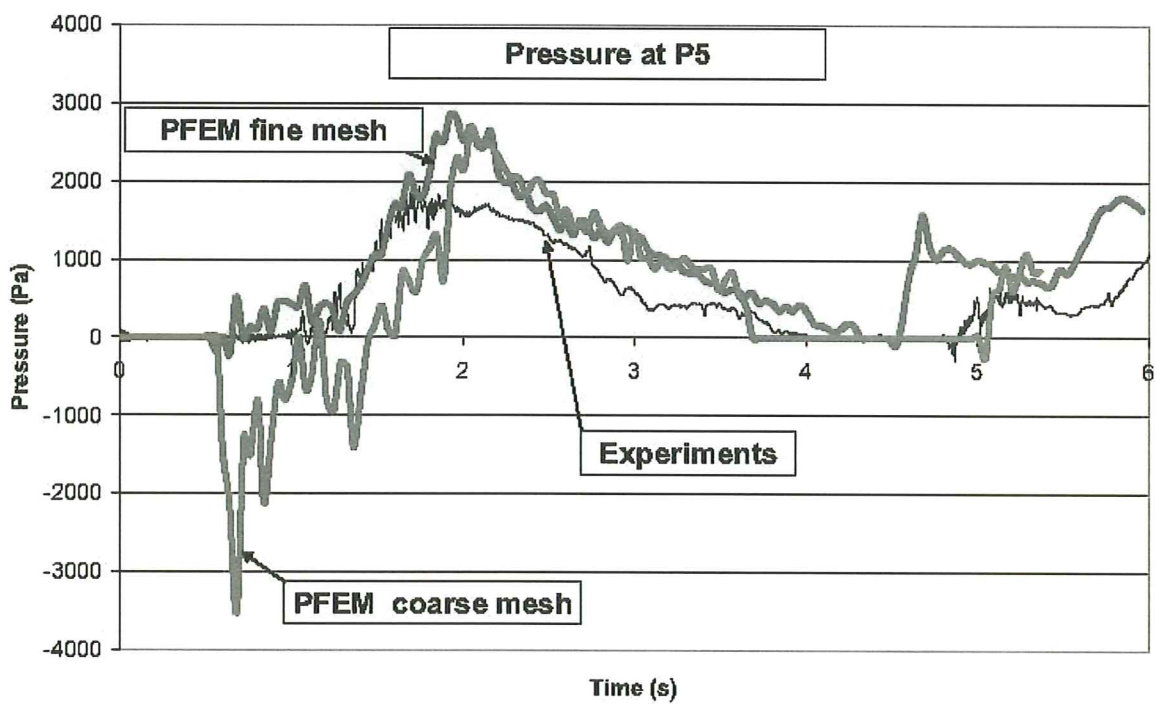
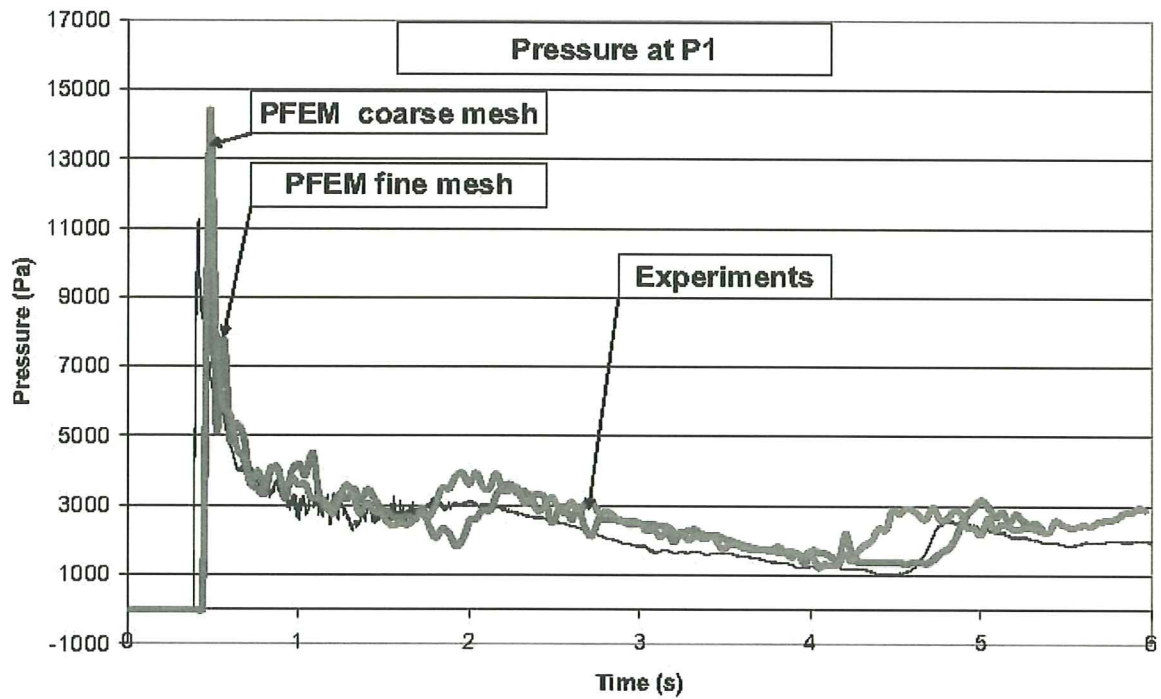


**Figura 69.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Valores de la presión en varios instantes en los puntos P5 y P6.





**Figura 70.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Valores de la presión en varios instantes en los puntos P7 y P8.



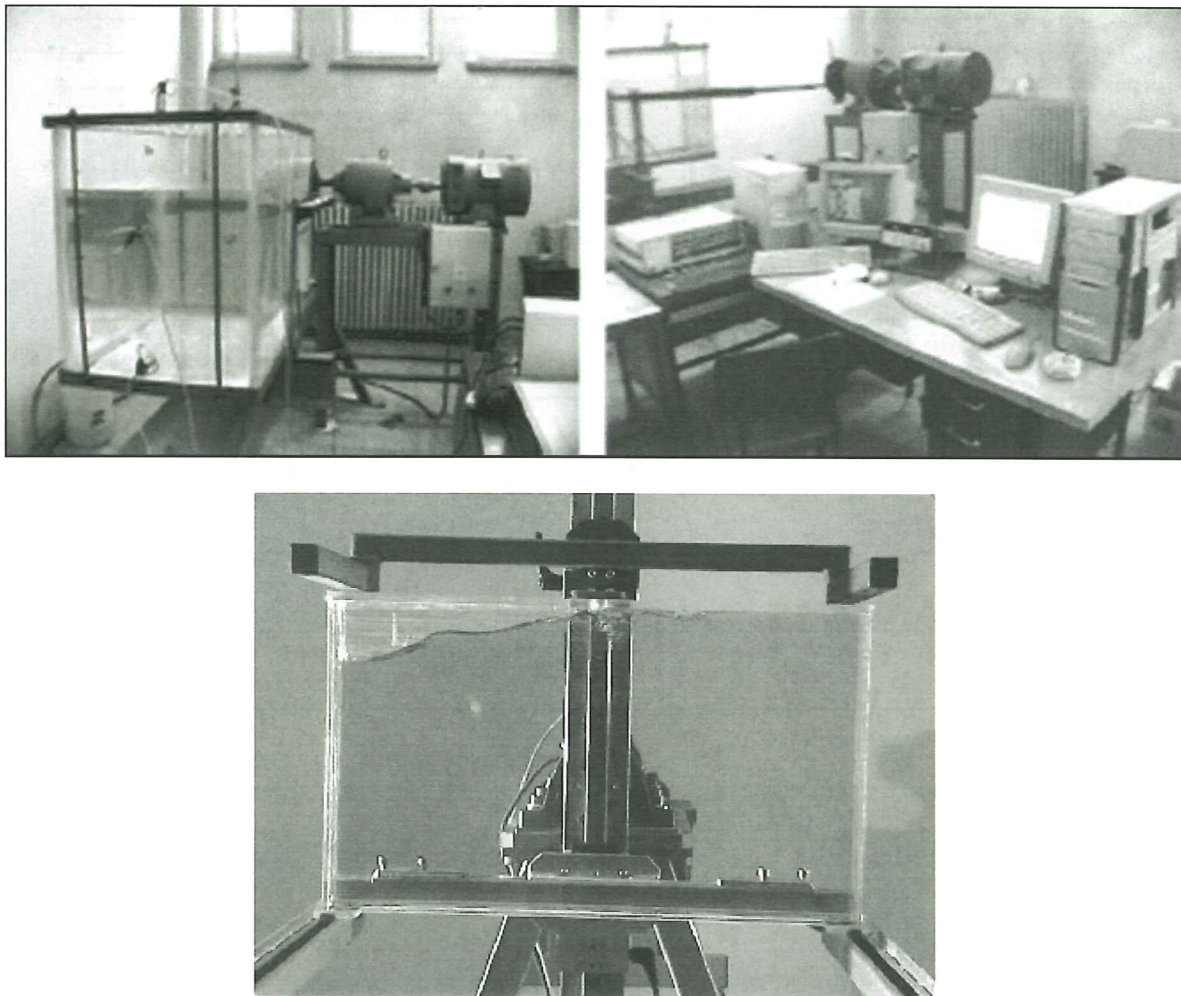
**Figura 71.** Ensayo de Kleefsman *et al.* (2005). Valores de la presión en varios instantes en los puntos P1 y P5 obtenidos con dos mallas. Comparación con los valores experimentales.

#### **4 CALIBRACIÓN Y VALIDACIÓN DEL PFEM CON ENSAYOS REALIZADOS EN LA ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIEROS NAVALES DE MADRID**

Los ensayos se han realizado en los laboratorios de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales de Madrid (Figura 72). Estos ensayos han consistido en los siguientes estudios:

**a) Movimiento oscilante del agua en lámina libre en un recipiente prismático basculante sometido a una oscilación fija.**

Se han realizado ensayos para varios volúmenes de agua en el recipiente y para diferentes condiciones del movimiento oscilatorio del recipiente basculante.



**Figura 72.** Ensayos de movimiento oscilante del agua en un tanque realizados en la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Navales de Madrid.

### Ensayo con altura de agua $h=9.3\text{cm}$ y periodo de oscilación del tanque $T=1.91\text{s}$

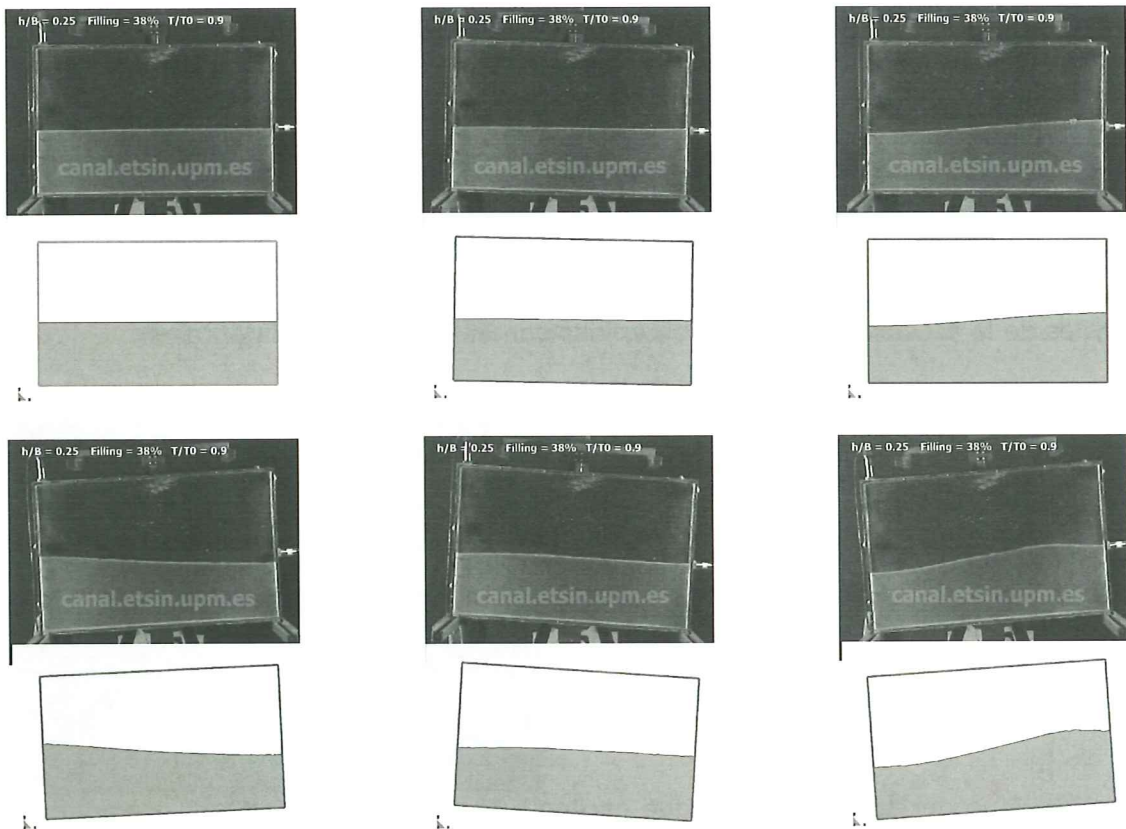
La Figura 73 muestra una secuencia del proceso simulado con PFEM en directa comparación con las imágenes de los correspondientes instantes experimentales.

En la Figura 74 se muestra la comparación entre los valores de presión medidos sobre las paredes a la altura de la superficie libre y los valores numéricos calculados en el mismo punto.

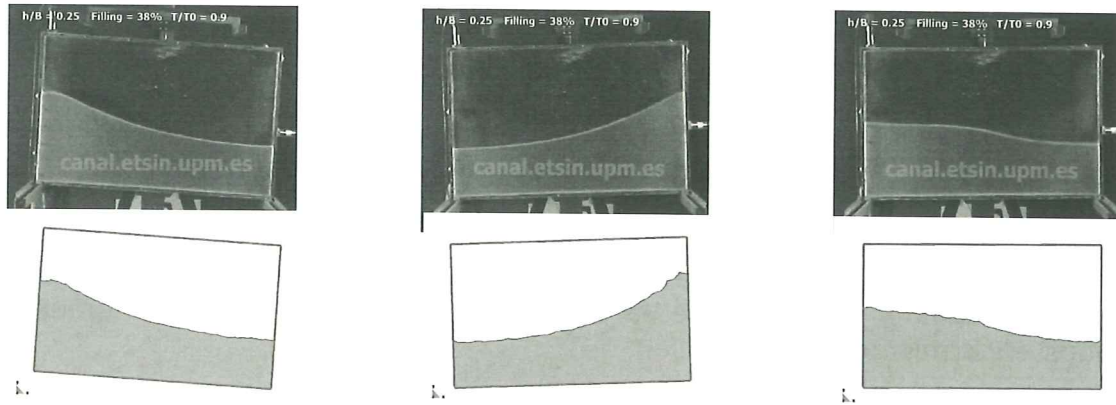
### Ensayo con altura de agua $h=22.2\text{cm}$ y con periodo de oscilación del tanque $T=1.19\text{s}$

En la Figura 75 se muestra una comparación entre los resultados obtenidos con el PFEM y una imagen de la prueba experimental al mismo instante de tiempo.

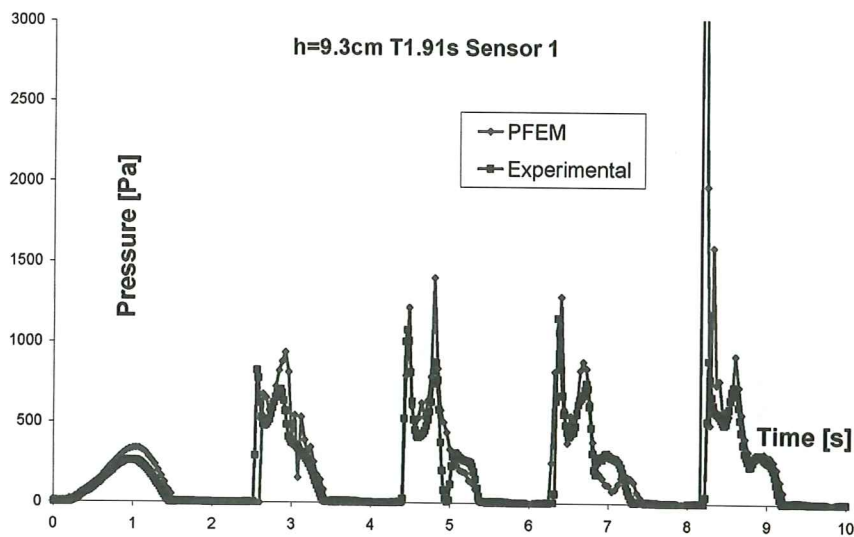
En la Figura 76 se muestra la comparación entre los resultados de presiones en el tiempo, medidos experimentalmente con un sensor puesto a la altura de la superficie libre, y las presiones calculadas con el PFEM. Se puede apreciar la precisión con la cual el PFEM consigue capturar el fenómeno del bateo (*beating*) que aparece bajo estas condiciones.



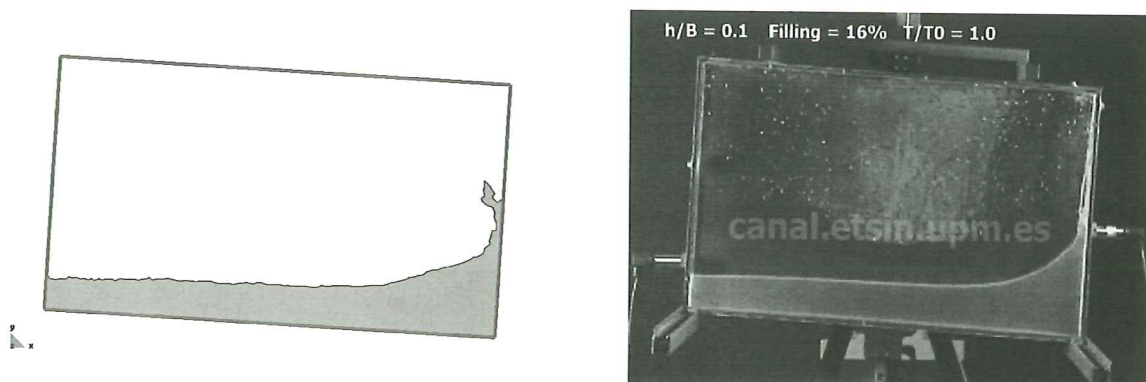




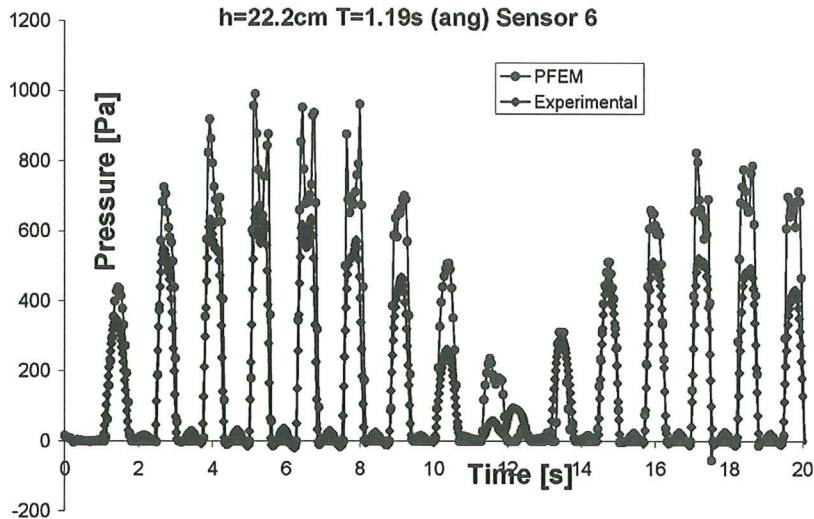
**Figura 73.** Flujo del agua en un tanque oscilante ( $h=9.3\text{cm}$  y  $T=1,91\text{s}$ ). Comparación entre la evolución temporal de la superficie libre obtenida en los ensayos y con el PFEM.



**Figura 74.** Oscilación del agua en un tanque ( $h=9.3\text{cm}$  y  $T=1,91\text{s}$ ). Variaciones temporales de la presión. Resultados obtenidos con el PFEM y experimentales.



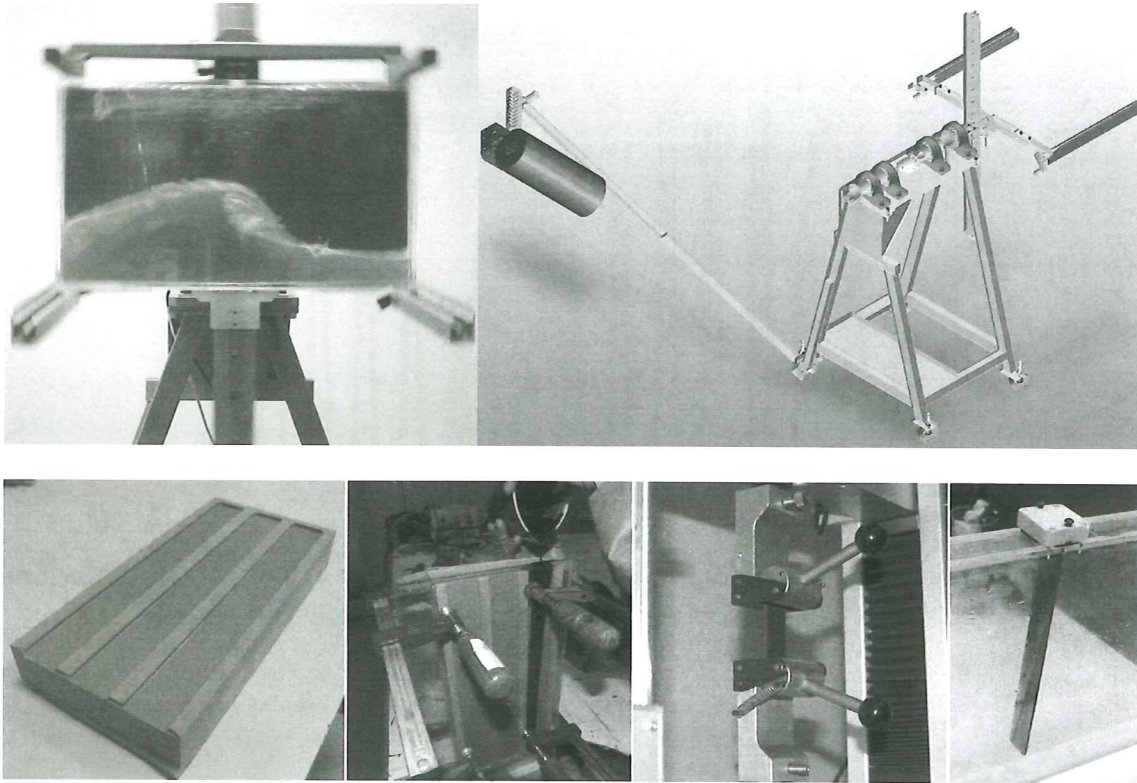
**Figura 75.** Flujo del agua en un tanque oscilante ( $h=22.2\text{cm}$  y  $T=1,91\text{s}$ ). Comparación entre la evolución temporal de la superficie libre obtenida en los ensayos y con el PFEM.



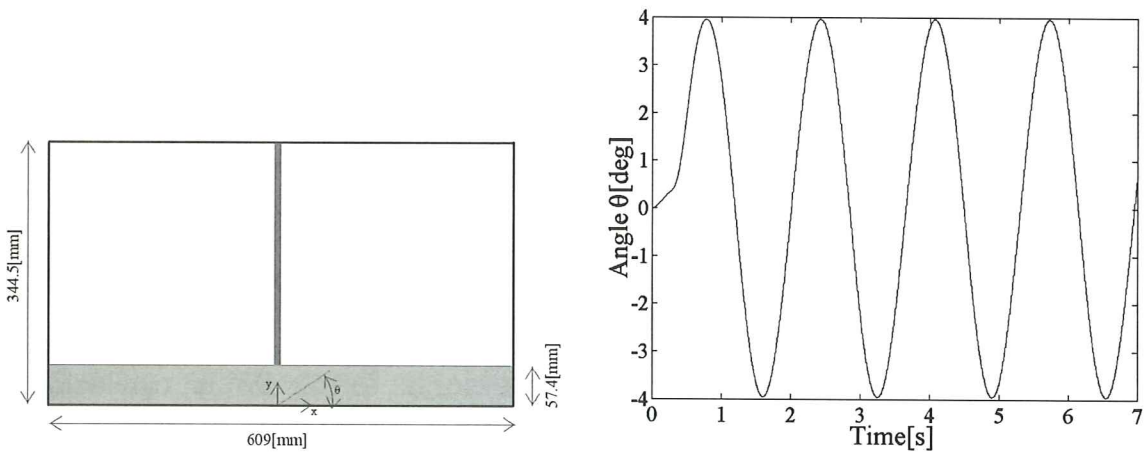
**Figura 76.** Oscilación del agua en un tanque ( $h=22.2\text{cm}$  y  $T=1,91\text{s}$ ). Variaciones temporales de la presión. Resultados obtenidos con el PFEM y experimentales.

**b) Movimiento oscilante del agua en lámina libre en un recipiente prismático basculante conteniendo en su interior un elemento flexible.**

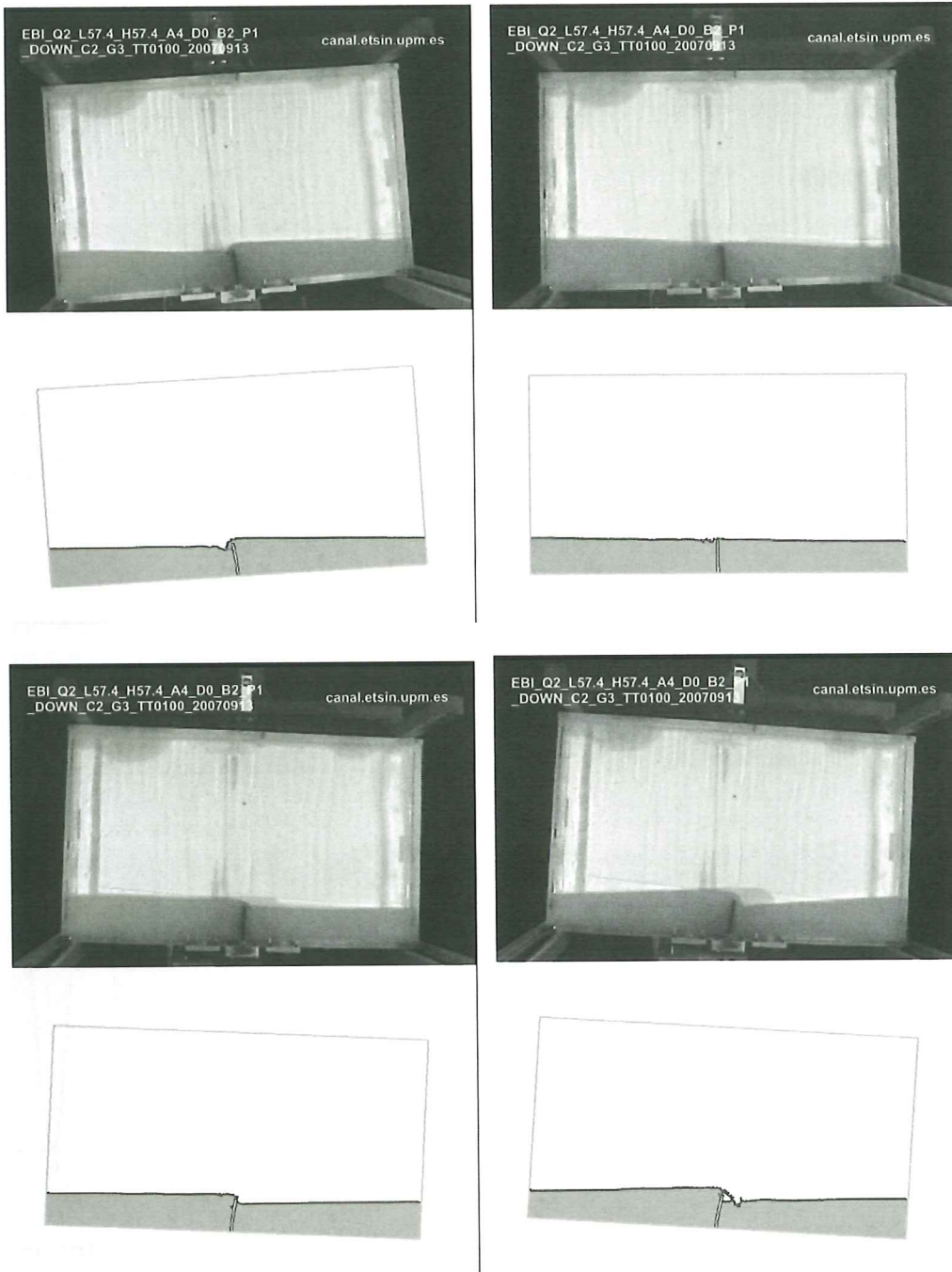
El objetivo del ensayo es validar la precisión del PFEM para predecir el movimiento de cuerpos deformables en corrientes de agua. El ensayo consiste en el movimiento oscilatorio de un tanque de metacrilato de  $609 \times 344.5 \times 39\text{mm}$  con el objetivo de producción de olas. Se ha estudiado el efecto del fluido sobre una banda elástica de  $32.2\text{ mm}$  de ancha,  $4\text{ mm}$  de espesor y diferentes longitudes. El modelo elástico del material de la banda empotrada en el fondo es  $E=0.006\text{ GPa}$  y su densidad es  $\rho=1.1\text{ g/cm}^3$ . Las propiedades de la banda empotrada en la parte superior son  $E=0.004\text{ GPa}$  y  $\rho=1.9\text{ g/cm}^3$ . El líquido utilizado fue aceite de girasol estándar a  $23^\circ\text{C}$  con las siguientes propiedades: densidad  $\rho=0.917$  y viscosidad cinemática  $\nu=5 \times 10^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ . En las figuras siguientes se detalla la geometría de cada uno de los ensayos, así como la forma de la oscilación impuesta y se comparan los resultados de las medidas experimentales y los obtenidos con el PFEM. Los resultados de este ensayo se muestran en las Figuras 77-86.



**Figura 77.** Movimiento de un elemento flexible en un recipiente oscilante con líquido. Vista general de la instrumentación para el ensayo.

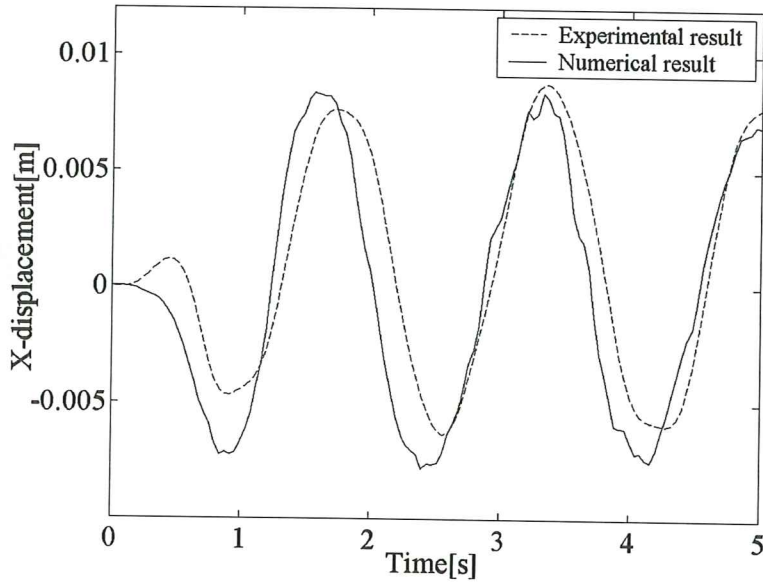


**Figura 78.** Viga elástica empotrada en recipiente con agua poco profunda. Geometría inicial y variación temporal del ángulo de giro del recipiente.

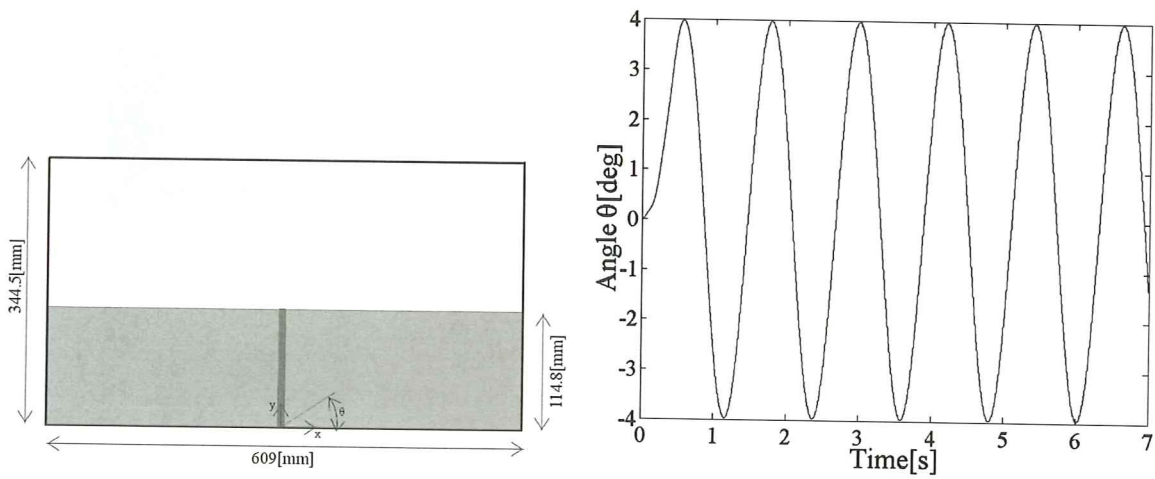


**Figura 79.** Viga elástica empotrada e inmersa en líquido poco profundo. Comparación de resultados numéricos y experimentales para  $t=0.92, 1.20, 1.40, 1.68$  [s].

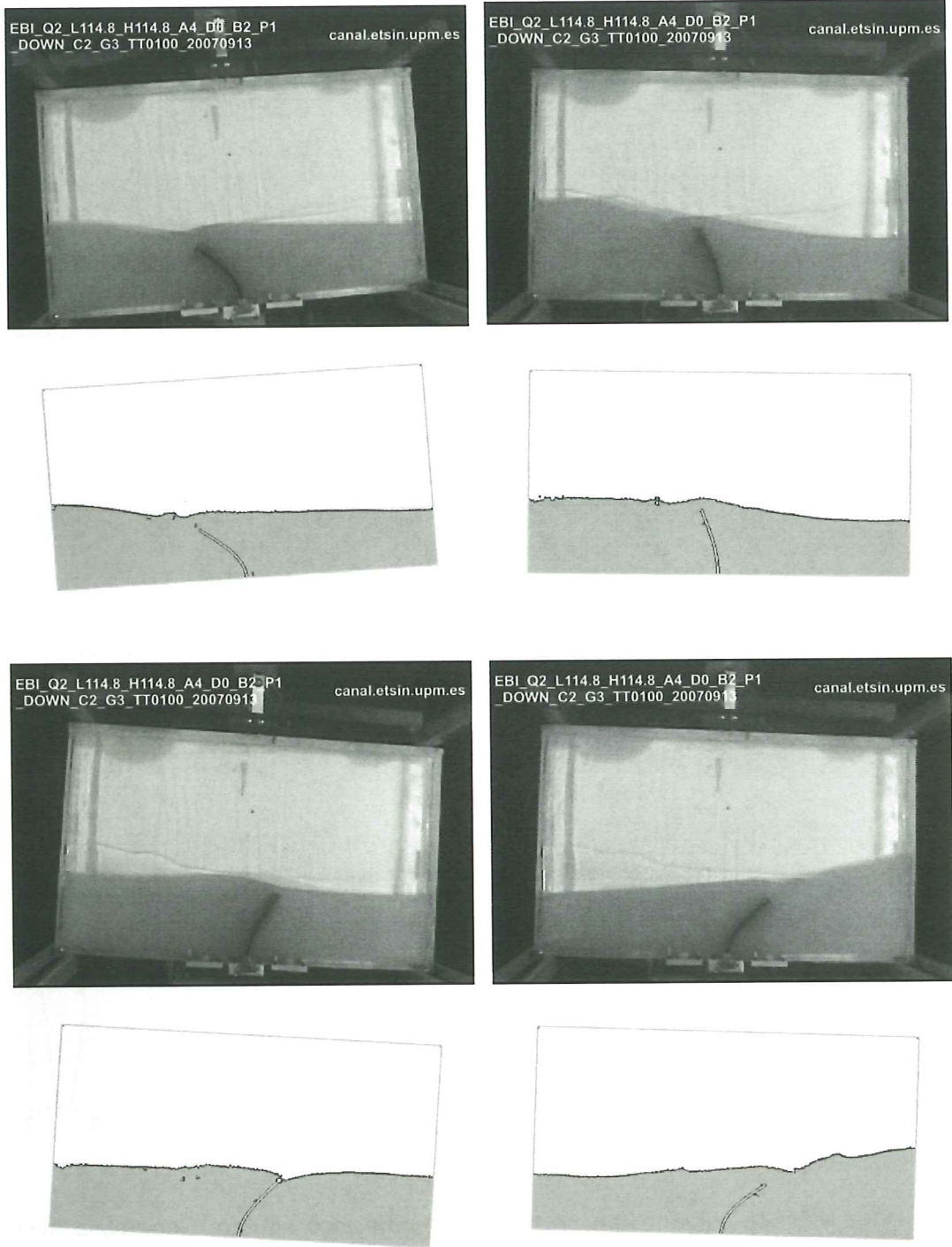




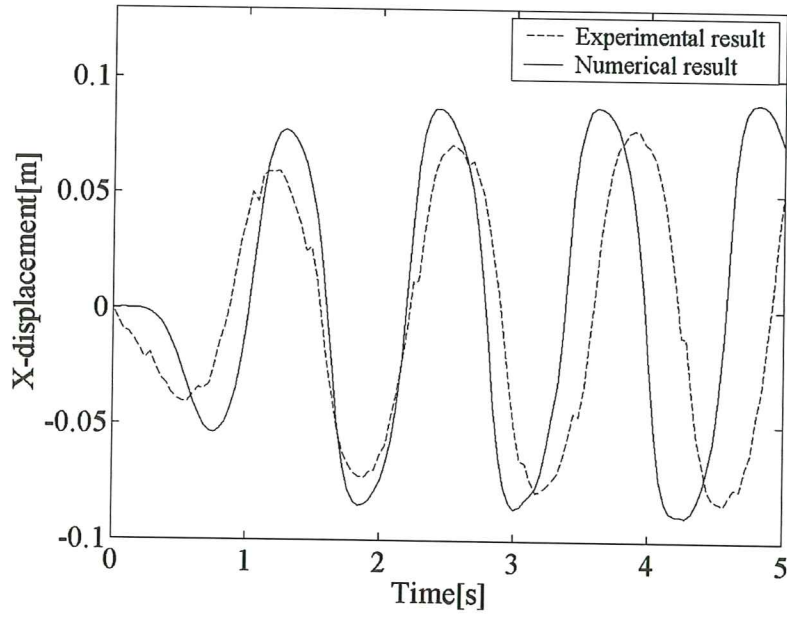
**Figura 80.** Viga elástica empotrada e inmersa en líquido poco profundo. Comparación de los valores experimentales obtenidos con el PFEM para el desplazamiento horizontal.



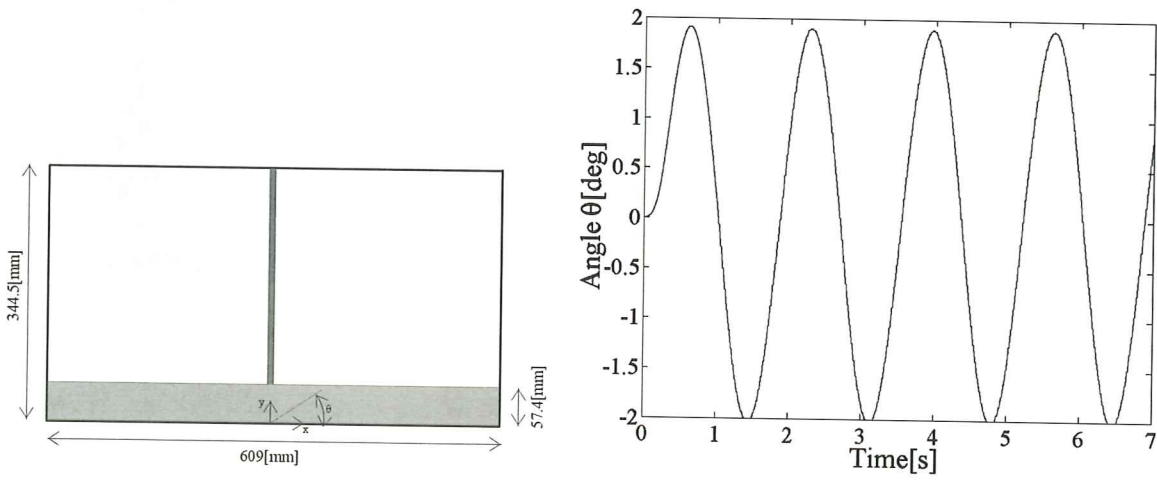
**Figura 81.** Viga elástica empotrada e inmersa con bastante líquido. Geometría inicial y variación temporal del ángulo de giro del recipiente.



**Figura 82.** Viga elástica empotrada e inmersa con bastante líquido. Comparación de resultados numéricos y experimentales para  $t=1.84, 2.12, 2.32, 2.56$  [s].



**Figura 83.** Viga elástica empotrada e inmersa con bastante líquido. Comparación de los valores experimentales obtenidos con el PFEM para el desplazamiento horizontal.

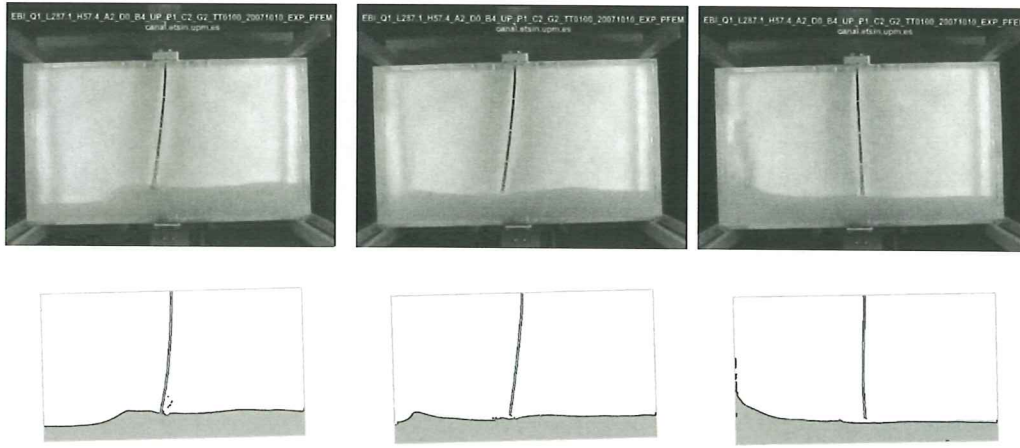


**Figura 84.** Viga elástica colgante en un recipiente con poco líquido. Geometría inicial y variación temporal del ángulo de giro del recipiente.

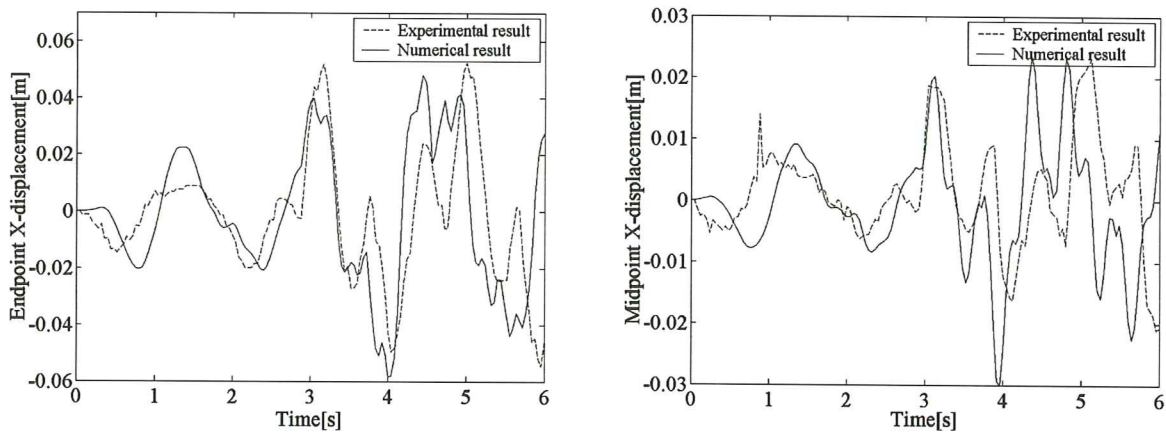


**Figura 85.** Viga elástica empotrada e inmersa con bastante líquido. Comparación de resultados numéricos y experimentales para  $t=0.76,1.64,2.4,2.68,2.96,3.32,3.4,3.56,3.80,3.84,4,4.16[s]$





**Figura 85. Cont.**



**Figura 86.** Viga elástica colgante con agua poco profunda. Comparación del momento horizontal del punto del extremo y del punto medio de la viga.

## 5 REFERENCIAS

- Aubry, R., Idelsohn, S.R. and Oñate, E. (2005). Particle finite element method in fluid mechanics including thermal convection-diffusion. *Computer & Structures*, 83, 1459-75.
- Chorin, A.J. (1967). A numerical solution for solving incompressible viscous flow problems. *J. Comp. Phys.*, 2, 12-26.
- Codina, R. (2002). Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 191, 4295-4321.
- Codina, R., Vázquez, M. and Zienkiewicz, O.C. (1998). A general algorithm for compressible and incompressible flow - Part III. The semi-implicit form. *Int. J. Num. Meth. in Fluids*, 27, 13-32.
- Codina, R. and Blasco, J. (2000). Stabilized finite element method for the transient Navier-Stokes equations based on a pressure gradient operator. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, 182, 277-301.
- Codina, R. and Zienkiewicz, O.C. (2002). CBS versus GLS stabilization of the incompressible Navier-Stokes equations and the role of the time step as stabilization parameter. *Communications in Numerical Methods in Engineering*, 18 (2), 99-112.
- Cola, R. (2002). *Idraulica*, IMAGE, Hydraulic Department of the University of Civil Engineering of Padua, Italy.
- Cruchaga, M.A. and Oñate, E. (1997). A finite element formulation for incompressible flow problems using a generalized streamline operator. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, 143, 49-67.
- Cruchaga, M.A. and Oñate, E. (1999). A generalized streamline finite element approach for the analysis of incompressible flow problems including moving surfaces. *Comput. Methods in Appl. Mech. Engrg.*, 173: 241-255.
- Dean, R.G. and R.A. Dalrymple. *Water wave mechanics for engineers and scientists*. Prentice-Hall. 1992.
- Donea, J. and Huerta, A. (2003). *Finite element method for flow problems*. J. Wiley.
- Edelsbrunner, H. and Mucke, E.P. (1999). Three dimensional alpha shapes. *ACM Trans. Graphics*, 13, 43-72.
- García, J. and Oñate, E. (2003). An unstructured finite element solver for ship hydrodynamic problems. in *J. Appl. Mech.*, 70, 18-26, January.

George. (1991). *Automatic mesh generation. Application to the finite element method*, J. Wiley.

GiD. (2004). The personal pre/postprocessor. CIMNE, Barcelona, [www.gidhome.com](http://www.gidhome.com).

Hansbo, P. and Szepessy, A. (1990). A velocity-pressure streamline diffusion finite element method for the incompressible Navier-Stokes equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 84, 175-192.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Balestra, M. (1986). A new finite element formulation for computational fluid dynamics. V Circumventing the Babuska-Brezzi condition: A stable Petrov-Galerkin formulation of the Stokes problem accommodating equal order interpolations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 59, 85-89.

Hughes, T.J.R., Franca, L.P. and Hulbert, G.M. (1989). A new finite element formulation for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-squares method for advective-diffusive equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 73, 173-189.

Hughes, T.J.R., Hauke, G. and Jansen, K. (1994). Stabilized finite element methods in fluids: Inspirations, origins, status and recent developments. in: *Recent Developments in Finite Element Analysis. A Book Dedicated to Robert L. Taylor*, T.J.R. Hughes, E. Oñate and O.C. Zienkiewicz (Eds.), CIMNE, Barcelona, Spain, pp. 272-292.

Hughes, S.A. (1993). *Physical models and laboratory techniques in coastal engineering*. Advanced Series on Ocean Engineering. Vol. 7. World Scientific.

Idelsohn, S.R., Oñate, E., Del Pin, F., Calvo, N. (2002). Lagrangian formulation: the only way to solve some free-surface fluid mechanics problems. Fifth *World Congress on Computational Mechanics*, H.A. Mang, F.G. Rammerstorfer, J. Eberhardsteiner (eds), July 7-12, Viena, Austria.

Idelsohn, S.R., Oñate, E., Calvo, N. y Del Pin, F. (2003a). The meshless finite element method, *Int. J. Num. Meth. Engng.* 58(6), 893-912.

Idelsohn, S.R., Oñate y Del Pin, F. (2003b). A lagrangian meshless finite element method applied to fluid-structure interaction problems. *Computer and Structures*, 81, 655-671.

Idelsohn, S.R., Calvo, N. y Oñate E. (2003c), Polyhedrization of an arbitrary point set, *Comput. Method Appl. Mech. Engng.*, 192 (22-24), 2649--2668.

Idelsohn, S.R., Oñate y Del Pin, F. (2004). The particle finite element method: a powerful tool to solve incompressible flows with free-surfaces and breaking waves, *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 61, 964-989.



Idelsohn, S.R., Oñate, Del Pin, F. y Calvo, N. (2006). Fluid-structure interaction using the particle finite element method, *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 195, 2100-2113.

Idelsohn, S.R., Marti, J., Souto-Iglesias, A. y Oñate, E. (2008). Interaction between an elastic structure and free-surface flows: experimental versus numerical comparisons using the PFEM. *Computational Mechanics*. In print.

Irons, B.M. (1970). A frontal solution program. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 2, 5-32.

Juon, R. and Haber, W. (2000). Flip bucket without and with deflector. *Journal of Hydraulic Engineering*, 126, 837-845.

Kleefsman, K.M.T. et al. (2005). A volume of fluid based simulation method for wave impact problems, *Journal of Computational Physics*, 206, 363-393.

Koshizuka, S., T.H. Oka, Y. (1995). A particle method for incompressible viscous flow with fluid fragmentation, *Computational Fluid Dynamic Journal*, 4, 29-46.

Larese, A., Rossi, R., Oñate, E. y Idelsohn S.R. (2008). Particle finite element method (PFEM): a powerful algorithm for simulation of free surface flows. Some examples of validation. Submitted to *Engineering Computations*.

Mayo, S. (2003). *Diseño de un canal de oleaje para modelos físicos de Ingeniería Marítima*. Tesina de final de carrera de Camins, Canals i Ports, U.P.C.

Oñate, E. (1998). Derivation of stabilized equations for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 151: 233-267.

Oñate, E. (2000). A stabilized finite element method for incompressible viscous flows using a finite increment calculus formulation. *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 182, 1(2), 355-370.

Oñate, E. (2004). Possibilities of finite calculus in computational mechanics. *Int. J. Num. Meth. Engng.*, 60 (1), 255-281.

Oñate, E. and Idelsohn, S.R. (1998). A mesh free finite point method for advective-diffusive transport and fluid flow problems. *Computational Mechanics*, 21, 283-292.

Oñate, E., Sacco, C. and Idelsohn, S.R. (2000). A finite point method for incompressible flow problems. *Comput. and Visual. in Science*, 2, 67-75.

Oñate, E. and García, J. (2001). A finite element method for fluid-structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation. *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, 191, 635-660.

Oñate, E., Idelsohn, S.R. and Del Pin, F. (2003). Lagrangian formulation for incompressible fluids using finite calculus and the finite element method. In



*Numerical Methods for Scientific Computing Variational Problems and Applications*, Y. Kuznetsov, P. Neittanmaki and O. Pironneau (Eds.), CIMNE, Barcelona.

Oñate, E., García, J. and Idelsohn, S.R. (2004). Ship hydrodynamics. In *Encyclopedia of Computational Mechanics*, E. Stein, R. de Borst and T.J.R. Hughes (Eds), J. Wiley.

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Del Pin, F. y Aubry, R. (2004). The particle finite element method. An overview. *Int. J. Comput. Methods*, Vol. 1 (2), 267-307.

Oñate, E., Idelsohn, S.R., Celigueta, M.A. y Rossi, R. (2008). Advances in the particle finite element method for the analysis of fluid-multibody interaction and bed erosion in free surface flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 197, (19-20), 1777-1800.

Radovitzki, R. and Ortiz, M. (1998). Lagrangian finite element analysis of a Newtonian flows. *Int. J. Num. Meth. Engrg.*, Vol. 43, 607-619.

Sánchez-Juni, M. (2001). *Comportamiento hidráulico de los aliviaderos escalonados en presa de hormigón compactado. Análisis del campo de presiones*. Ph.D. Thesis.

Sheng, C., Taylor, L.K. and Whitfield, D.L. (1996). Implicit lower-upper/approximate-factorization schemes for incompressible flows" *Journal of Computational Physics*, 128 (1), 32-42.

Storti, M., Nigro, N. and Idelsohn, S.R. (1995). Steady state incompressible flows using explicit schemes with an optimal local preconditioning. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 124, 231-252.

Táboas Amador, A. (2004). *Comportamiento hidráulico de los aliviaderos escalonados en presa de hormigón compactado*. Ph.D. Thesis.

Tezduyar, T.E., Mittal, S., Ray, S.E. and Shih, R. (1992). Incompressible flow computations with stabilized bilinear and linear equal order interpolation velocity-pressure elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 95, 221-242.

Tezduyar, T.E., Behr, M. and Liou, J. (1992a). A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces - The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: I. The Concept and the Preliminary Numerical Tests. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, 339-351.

Tezduyar, T.E., Behr, M., Mittal, S. and J. Liou (1992b). A New Strategy for Finite Element Computations Involving Moving Boundaries and Interfaces - The Deforming-Spatial-Domain/Space-Time Procedure: II. Computation of Free-surface Flows, Two-liquid Flows, and Flows with Drifting Cylinders. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94, 353-371.

Tezduyar, T. (2001). Finite Element Interface-Tracking and Interface-Capturing Techniques for Flows with Moving Boundaries and Interfaces ASME Paper IMECE2001/HTD-24206, Proceedings of the *ASME Symposium on Fluid-Physics and Heat Transfer for Macro- and Micro-Scale Gas-Liquid and Phase-Change Flows*, ASME, New York, New York, CD-ROM.

Thompson, J.F., Soni, B.K. and Weatherill, N.P. (Eds.) (1999). *Handbook of Grid Generation*, CRC Press.

Zienkiewicz, O.C. and Taylor, R.L. (2000). *The finite element method*. 5th Edition, 3 Volumes, Butterworth-Heinemann.

