

# Formulación estabilizada de elementos finitos triangulares y tetraédricos para problemas de incompresibilidad en deformaciones infinitesimales

Quino Valverde

Departamento de Ingeniería - Sección Ingeniería Mecánica  
Pontificia Universidad Católica del Perú  
Av. Universitaria cdra. 18 s/n  
San Miguel, Apartado 100  
Lima, Perú  
e-mail: qvalver@pucp.edu.pe

Michele Chiumenti, Miguel Cervera y Carlos Agelet de Saracibar

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)  
Universidad Politécnica de Cataluña  
Gran Capitán s/n, Edificio C1  
Campus Norte, UPC  
08034 Barcelona, España  
Tel.: 34-93-205 70 16; Fax: 3-93-205 401 65 17  
e-mail: chiument@cimne.upc.edu, cervera@cimne.upc.edu, agelet@cimne.upc.es

## Resumen

Se presenta una formulación en multiescalas del método de elementos finitos capaz de estabilizar el comportamiento de elementos mixtos en problemas de elasticidad y de plasticidad incompresibles en deformaciones infinitesimales. Esta formulación está basada en el concepto de las subescalas ortogonales y se aplica a elementos con interpolaciones de desplazamientos y presión continuas. La formulación permite eludir la condición de estabilidad de Babuška-Brezzi y ofrece como principal ventaja la posibilidad de utilizar interpolaciones lineales en elementos mixtos triangulares y tetraédricos, muy convenientes en aplicaciones de interés práctico. Una de las contribuciones más relevantes de esta formulación es la eficacia y originalidad de la aproximación propuesta al parámetro de estabilización. En este artículo se explican tanto las consideraciones empleadas en el planteamiento como los principales aspectos de implementación. Finalmente, mediante ejemplos de simulación se muestra el buen comportamiento de los elementos obtenidos en comparación con las formulaciones estándar y la del elemento Q1P0.

## STABILIZED FORMULATION FOR TRIANGULAR AND TETRAHEDRAL FINITE ELEMENTS IN INCOMPRESSIBILITY PROBLEMS WITH INFINITESIMAL STRAINS

## Summary

In this paper, a multi-scale finite element formulation to stabilize the behaviour of mixed elements in incompressible elasticity and plasticity problems with infinitesimal strains is presented. The formulation is based in the concept of orthogonal sub-scales and it is applied to elements with continuous interpolations for displacements and pressure. The formulation allows to circumvent the Babuska-Brezzi stability condition and offers as main advantage the possibility of using linear interpolations in triangular and tetrahedral mixed elements, which is very convenient in practical applications. The main contribution is the efficiency and originality of the proposed approximation for the stabilization parameter. In the paper, both the derivation and the main implementation aspects are explained. Finally, simulation examples are offered to demonstrate the satisfactory behaviour of the proposed elements, when compared with the standard formulation and the Q1P0 element.

## INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos ofrece en general buenos resultados en una gran variedad de problemas en la ingeniería. Sin embargo, se encuentran importantes dificultades en la aplicación del método en diversas aplicaciones de interés práctico, notablemente en problemas en medios incompresibles, donde la formulación estándar en desplazamientos ofrece pésimos resultados. En mecánica de sólidos el comportamiento incompresible en régimen elástico se presenta en materiales elastómeros y en sólidos porosos húmedos saturados. Por otro lado, en régimen plástico presentan comportamiento prácticamente incompresible los metales en el transcurso de la fluencia. De hecho, la hipótesis común a los modelos de plasticidad J2, de amplio uso en la simulación numérica de metales, es que las deformaciones plásticas se desarrollan de manera isocórica. Es necesario entonces conocer las limitaciones del método, conocer las causas que originan estos inconvenientes y desarrollar formulaciones capaces de brindar resultados satisfactorios, incluso en estos casos.

Al plantear un problema mediante el método de elementos finitos se adopta un espacio de funciones de prueba, concretamente funciones de interpolación nodal, con la finalidad de aproximar la solución correspondiente al medio continuo. En esencia lo que se hace es convertir un problema de infinitos grados de libertad en un problema discretizado, cuya solución tiene un número finito de grados de libertad. El método de elementos finitos permite encontrar la mejor aproximación a la solución dentro del espacio de funciones de prueba. Es decir, se resuelve un problema con restricciones adicionales y, por lo tanto, la solución es más rígida que la real. En ciertas situaciones el espacio de funciones de prueba resulta demasiado pobre e incapaz de aproximar el comportamiento del medio continuo. Como consecuencia de ello, la solución del campo de desplazamientos ofrecida por el método de elementos finitos, que en general es infraestimada, en casos extremos podría llegar a ser cercana a la nula. A este fenómeno se le denomina *bloqueo*. Al abordar aplicaciones en medios incompresibles, los elementos finitos de bajo orden de interpolación de la formulación estándar en desplazamientos presentan este defecto, que se caracteriza por la dramática subestimación de las deformaciones y por la imposibilidad de calcular la tensión media, también conocida como presión.

En la literatura que aborda este problema en la mecánica de sólidos se pueden encontrar varias estrategias basadas en formulaciones mixtas o en la formulación de deformaciones mejoradas (“enhanced assumed strains”, EAS). La formulación EAS plantea la incorporación de modos de deformación adicionales a los elementos estándar, de acuerdo con ciertas condiciones, con la finalidad de eliminar el fenómeno de bloqueo tanto en problemas de incompresibilidad como en problemas de flexión<sup>18,19</sup>. Por otro lado, la formulación mixta  $\mathbf{u}/p$  considera la presión como variable independiente adicional, introduce de esta manera mayor flexibilidad y ofrece un marco natural para el desarrollo de elementos para problemas en medios incompresibles. Sin embargo, las formulaciones mixtas están restringidas por la condición de Babuška-Brezzi<sup>1</sup>, que establece los requisitos de compatibilidad entre las funciones de interpolación de los campos involucrados para garantizar que la respuesta en presión sea estable. Esta condición descarta los elementos de igual orden de interpolación, en particular los elementos  $\mathbf{u}/p$  con interpolaciones lineal/lineal. Por otro lado, la formulación EAS tiene importantes limitaciones, puesto que adolece de ciertas inestabilidades numéricas. Además, esta formulación y las que se derivan de ella no son aplicables a elementos triangulares o tetraédricos lineales<sup>17</sup>, que son de gran interés práctico por su bajo coste computacional y su versatilidad para la generación de mallas sobre configuraciones geométricas realistas. Estas ventajas han motivado la propuesta de formulaciones mixtas estabilizadas adecuadas a este tipo de elementos<sup>22,20,15,14</sup>.

Las técnicas de estabilización han alcanzado gran desarrollo en el contexto de la mecánica de fluidos, debido a la necesidad de solucionar las dificultades numéricas que se presentan en

diversas aplicaciones. En particular, el método de las subescalas propuesto en este ámbito por Hughes<sup>12</sup> ofrece un marco general, en el cual se encuentra explicación física a varias de estas técnicas. La idea fundamental es concebir la solución del problema en dos escalas: una resoluble en el espacio de elementos finitos y otra, denominada subescala, con la finalidad de considerar adecuadamente el efecto de la componente de la solución que no se puede captar en la solución de elementos finitos. En mecánica de sólidos, Hughes ha aplicado este método a problemas de localización<sup>9,10</sup>. En la referencia 10 la subescala se define mediante funciones y parámetros ad hoc, de manera similar al método de deformaciones asumidas de mejora (EAS). En el contexto de la mecánica de fluidos, Codina ha propuesto el método de las subescalas ortogonales<sup>6</sup>, un método ingenioso y preciso que se enmarca en el método general de las subescalas.

Motivados por la similitud de las ecuaciones que gobiernan respectivamente el problema de Stokes en mecánica de fluidos y el problema de incompresibilidad en elasticidad lineal, los autores del presente trabajo han aplicado el método de las subescalas ortogonales como una técnica de estabilización en el contexto de la mecánica de sólidos<sup>4</sup>. La efectividad y robustez de la formulación han motivado la extensión de su aplicación a problemas no lineales, tanto desde el punto de vista del modelo constitutivo como del rango de las deformaciones. En la referencia 21 se ha desarrollado la formulación de elementos estabilizados lineales triangulares y tetraédricos en mecánica de sólidos, aptos tanto para incompresibilidad elástica como para elasto-plasticidad J2, en deformaciones infinitesimales y en grandes deformaciones. En las referencias 5 y 2 se presentan aplicaciones de la formulación en el rango de las deformaciones infinitesimales elastoplásticas J2.

En el presente artículo se presenta una síntesis de la formulación de estos elementos en el contexto de las deformaciones infinitesimales, en la que cabe resaltar la propuesta de aproximación al parámetro de estabilización. En la siguiente sección se presenta la formulación mixta  $\mathbf{u}/p$  del problema de incompresibilidad inducido por el modelo de plasticidad J2. Más adelante se presentan el planteamiento correspondiente en multiescalas, la aplicación del método de estabilización de las subescalas ortogonales al problema y algunos aspectos de la implementación de los elementos propuestos. Finalmente se comprueba el buen comportamiento de los elementos propuestos mediante diversas simulaciones numéricas en comparación tanto con la formulación estándar como con la formulación mixta correspondiente al elemento Q1P0.

## FORMULACIÓN MIXTA PARA PLASTICIDAD J2

Antes de presentar la formulación es conveniente introducir previamente la notación estándar básica. Sea la región del espacio ocupada por un cuerpo  $\Omega$ , un dominio abierto en  $\mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}$ , donde  $n_{\text{dim}}$  es el número de dimensiones del espacio,  $\bar{\Omega}$  su clausura, y su contorno  $\Gamma$ , tal que  $\Gamma = \bar{\partial\Omega}_u \cup \bar{\partial\Omega}_t$  y  $\partial\Omega_u \cap \partial\Omega_t = \emptyset$ . El espacio de funciones cuyo cuadrado es integrable en  $\Omega$  es  $L^2(\Omega)$  y  $H^1(\Omega)$  es el espacio de funciones cuyas primeras derivadas pertenecen a  $L^2(\Omega)$ . Se utilizan caracteres en negrita para las respectivas contrapartes vectoriales de estos espacios. Los productos internos  $L^2$  en  $\Omega$  y  $\partial\Omega$  se denotan por  $(\cdot, \cdot)$  y  $(\cdot, \cdot)_{\partial\Omega}$ , respectivamente. En lo sucesivo se entenderá la ortogonalidad con respecto a este producto.

### Forma fuerte

El problema mecánico cuasiincompresible se puede formular considerando la tensión media o presión  $p$  como variable independiente, adicional al campo de desplazamientos  $\mathbf{u}$ . En función de estas dos variables, el tensor de tensiones  $\sigma$  se define como

$$\sigma = p\mathbf{1} + \mathbf{s}(\mathbf{u}) \quad (1)$$

donde  $\mathbf{s}(\mathbf{u}) = \text{dev}(\boldsymbol{\sigma})$  es la componente desviadora del tensor de tensiones y  $p = \frac{1}{3}\text{tr}(\boldsymbol{\sigma})$  la presión. La expresión del tensor de tensiones en (1), desacoplada en componentes volumétrica y desviadora, es la opción natural a emplear en esta formulación. El tensor de deformaciones se puede expresar como

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{3}\varepsilon_v \mathbf{1} + \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}] \quad (2)$$

en función de sus componentes volumétrica  $\varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon})$  y desviadora  $\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}]$ , respectivamente. Las ecuaciones constitutivas correspondientes se pueden expresar como

$$p = \kappa \varepsilon_v \quad (3)$$

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}) = 2\mu \text{dev}[\nabla^s \mathbf{u} - \boldsymbol{\varepsilon}^p] = 2\mu \text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}^e] \quad (4)$$

donde  $\varepsilon_v$  es la parte volumétrica de las deformaciones,  $\boldsymbol{\varepsilon}^e$  y  $\boldsymbol{\varepsilon}^p$  la deformación elástica y plástica, respectivamente,  $\mu$  el módulo de cizallamiento y  $\kappa$  el módulo de compresibilidad del material. Según se establece en (4), la relación entre los módulos de las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras elásticas es lineal en función de  $\mu$ , es decir,

$$2\mu = \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\text{dev}[\boldsymbol{\varepsilon}^e]\|} \quad (5)$$

La hipótesis común a los modelos de tipo J2 es que la deformación plástica es isocórica, es decir la parte volumétrica de las deformaciones plásticas es nula,  $\varepsilon_v^p = 0$ . Por lo tanto

$$\varepsilon_v = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}) = \nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^e) \quad (6)$$

La forma fuerte del problema, con las condiciones de borde correspondientes, se puede plantear como: hallar los campos de desplazamientos  $\mathbf{u}$  y presión  $p$ , dada la fuerza de volumen prescrita  $\mathbf{b}$ , tales que

$$\nabla \cdot \mathbf{s} + \nabla p + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad \text{en } \Omega \quad (7)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} - \frac{1}{\kappa} p = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (8)$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{0} \quad \text{en } \partial\Omega_u \quad (9)$$

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \bar{\mathbf{t}} \quad \text{en } \partial\Omega_t \quad (10)$$

donde se ha reemplazado la expresión de las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  dada en función de  $\mathbf{u}$  y  $p$  por la relación constitutiva (1). Obsérvese que la formulación es válida, tanto en el caso compresible como en el límite incompresible. En particular, en el caso incompresible, es decir, cuando  $\kappa \rightarrow \infty$ , la ecuación (8) se transforma en

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad \text{en } \Omega \quad (11)$$

Las ecuaciones asociadas al problema se pueden expresar en forma compacta en un arreglo como

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) = \mathcal{F} \quad (12)$$

donde  $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^t$  es el vector de incógnitas y

$$\mathcal{L}(\mathbf{U}) : = \begin{bmatrix} -\nabla p - \nabla \cdot \mathbf{s}(\mathbf{u}) \\ -\frac{1}{\kappa} p + \nabla \cdot \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathcal{F} : = \begin{bmatrix} \mathbf{b} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

### Forma débil

Considérense  $\mathbf{U} := [\mathbf{u}, p]^t \in \mathcal{W}_0$  y  $\mathbf{W} := [\mathbf{w}, q]^t \in \mathcal{W}_0$  los vectores de incógnitas y funciones de ponderación o variaciones admisibles, respectivamente; el espacio de funciones  $\mathcal{W}_0 = \mathcal{V}_0 \times \mathcal{Q}$ , donde  $\mathcal{V}_0$  y  $\mathcal{Q}$  son los espacios de los desplazamientos y presiones. Utilizando la notación compacta definida en (12), la forma variacional del problema (7)-(8) se puede escribir como

$$(\mathcal{L}(\mathbf{U}), \mathbf{W}) = (\mathcal{F}, \mathbf{W}) \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \tag{15}$$

Mediante la integración por partes se obtiene la correspondiente expresión compacta del problema en forma débil como

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W} \in \mathcal{W}_0 \tag{16}$$

donde

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}, \mathbf{W}) = \begin{bmatrix} (\nabla^s \mathbf{w}, \mathbf{s}) + (\nabla \cdot \mathbf{w}, p) + l(\mathbf{w}) \\ (q, \nabla \cdot \mathbf{u}) - (q, \frac{1}{\kappa} p) \end{bmatrix} \tag{17}$$

donde se ha definido el operador  $l(\mathbf{w}) := (\mathbf{w}, \mathbf{b}) + (\mathbf{w}, \bar{\mathbf{t}})_{\partial\Omega}$ . Los espacios  $\mathcal{V}_0$  y  $\mathcal{Q}$  quedan definidos por los requisitos de integrabilidad de las ecuaciones en (15), respectivamente,

$$\mathcal{V}_0 = \{ \mathbf{w} \in \mathbf{H}^1(\Omega) \mid \mathbf{w} = \mathbf{0} \text{ en } \partial\Omega_u \} \text{ y } \mathcal{Q} = L^2(\Omega) \tag{18}$$

### Discretización

El planteamiento canónico por elementos finitos implica definir una partición regular del dominio  $\mathcal{P}_h(\Omega)$  en  $n_{elm}$  subdominios  $\Omega_e$  y construir los correspondientes espacios de dimensión finita asociados a esta para las aproximaciones. Estos espacios son:  $\mathcal{V}_h \in \mathcal{V}$ ,  $\mathcal{Q}_h \in \mathcal{Q}$  y  $\mathcal{W}_h = \mathcal{V}_h \times \mathcal{Q}_h$ . Las funciones en  $\mathcal{V}_h$  son continuas, mientras que las funciones en  $\mathcal{Q}_h$  no necesariamente. Asimismo los correspondientes polinomios de aproximación pueden ser de diferente orden. De esta manera en notación compacta el problema discretizado consiste en hallar  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_{h,0}$  tal que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \tag{19}$$

La formulación mixta permite evaluar la presión como una variable independiente. Esta flexibilidad adicional con respecto a la formulación irreducible en desplazamientos no es ilimitada; existen restricciones de compatibilidad entre los campos de interpolación de las formulaciones mixtas fuera de las cuales no cabe esperar de estas un buen comportamiento. Concretamente, para garantizar la respuesta estable de la presión en esta formulación mixta se debe verificar la condición de Babuška-Brezzi<sup>1</sup>. Las interpolaciones de desplazamientos y presión de igual orden, en particular la interpolación lineal/lineal, no cumplen esta condición y como consecuencia no ofrecen un buen comportamiento. Con la finalidad de eludir esta condición y obtener una adecuada respuesta de la presión, los métodos de estabilización modifican la forma débil (19) e introducen términos dependientes de la malla, generalmente sin sustento físico claro.

En la siguiente sección se plantea el problema en el marco del método de las subescalas, aplicado como técnica de estabilización con el objetivo de obtener elementos mixtos con interpolaciones lineal/lineal con comportamiento estable.

## FORMULACIÓN EN MULTIESCALAS

### Planteamiento en multiescalas

La solución de un problema por el método de elementos finitos consiste en buscar en un espacio de funciones de dimensión finita  $\mathcal{W}_{h,0} \subset \mathcal{W}_0$  una aproximación a la solución de un problema en un medio continuo. La idea fundamental que introduce el *método de las subescalas* es que al definir una malla de elementos finitos quedan establecidas dos *escalas* o *niveles de resolución*, una que corresponde a la malla y será captada mediante la aproximación de elementos finitos y otra más fina, que corresponde a la parte que no se logra captar mediante la malla, que se denominará *subescala* (“sub-scale” o “sub-grid scale”)<sup>12,13</sup>. De acuerdo con este punto de vista, si bien se admite que existe una componente, no resuelta de la solución que no se puede captar, se debería al menos aproximar de alguna manera *el efecto* de la subescala sobre la componente que se resuelve numéricamente. Diversos problemas de estabilidad numérica tendrían como origen el no considerar los efectos de las subescalas en la escala de la malla de elementos finitos. El objetivo del método de estabilización es mejorar el comportamiento de la formulación teniendo en cuenta una aproximación *adecuada* de estos efectos.

En este contexto, al considerar que además de la componente aproximada por la solución de elementos finitos  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_h$  existe una componente no resuelta  $\tilde{\mathbf{U}}$ , la solución exacta se puede expresar como

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}$$

donde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ p \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{u}_h \\ p_h \end{bmatrix}}_{\mathbf{U}_h} + \underbrace{\begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{u}} \\ 0 \end{bmatrix}}_{\tilde{\mathbf{U}}} \quad (20)$$

La componente  $\mathbf{U}_h$  se puede entender como la proyección de la solución exacta sobre el espacio de elementos finitos, mientras que la componente  $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}$ , donde  $\tilde{\mathcal{W}}$  se denomina *espacio de las subescalas*. De esta manera el espacio en que se busca la solución exacta del problema se concibe como

$$\mathcal{W} = \mathcal{W}_h \oplus \tilde{\mathcal{W}}$$

Es decir,  $\tilde{\mathcal{W}}$  es un espacio complementario a  $\mathcal{W}_h$  en  $\mathcal{W}$ , en el que se buscan las subescalas de la solución. Ésta es la clave del método de las subescalas, en cuyo marco se diseñan los elementos finitos propuestos.

El planteamiento en multiescalas del problema expresado en (15) se escribe como hallar  $\mathbf{U}_h \in \mathcal{W}_h$  y  $\tilde{\mathbf{U}} \in \tilde{\mathcal{W}}$  tales que

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \quad (21)$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{0} \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}} \quad (22)$$

A partir de la ecuación (21) se obtendrá una relación aproximada entre la subescala  $\tilde{\mathbf{U}}$  y la solución por elementos finitos  $\mathbf{U}_h$  con la finalidad de considerar los efectos de  $\tilde{\mathbf{U}}$  en la ecuación correspondiente al espacio de elementos finitos (20).

En este trabajo el método de las subescalas se emplea específicamente como técnica de estabilización de la formulación mixta con la finalidad de obtener elementos mixtos  $\mathbf{u}/p$  con interpolaciones lineales y continuas que ofezcan comportamiento estable. La condición de Babuška-Brezzi, que descarta los elementos con estas interpolaciones, indica que la

interpolación del campo de desplazamientos debe ser más fina para garantizar estabilidad. Esto sugiere que para lograr una formulación estabilizada el refinamiento de la solución  $\mathbf{U} = \mathbf{U}_h + \tilde{\mathbf{U}}$  es indispensable específicamente en el campo de los desplazamientos. Como se comprobará mediante los resultados obtenidos en las simulaciones, el refinamiento en el campo de desplazamientos es suficiente para lograr una formulación con comportamiento estable. De acuerdo con lo anterior, en este trabajo no se considera la subescala en el campo de la presión y se adopta  $\tilde{p} = 0$ .

### Consideraciones acerca de las subescalas y el flujo plástico

Si se tiene en cuenta que el efecto de las subescalas es de orden<sup>7</sup>  $\tilde{\mathbf{u}} \sim \mathcal{O}(h^2)$ , se puede introducir en la formulación una aproximación a la componente desviadora de las tensiones  $\mathbf{s}(\mathbf{u})$  mediante un desarrollo en serie de Taylor alrededor de  $\mathbf{u}_h$ , en el que se han de considerar despreciables los términos de orden del cuadrado de las subescalas y mayores, es decir,

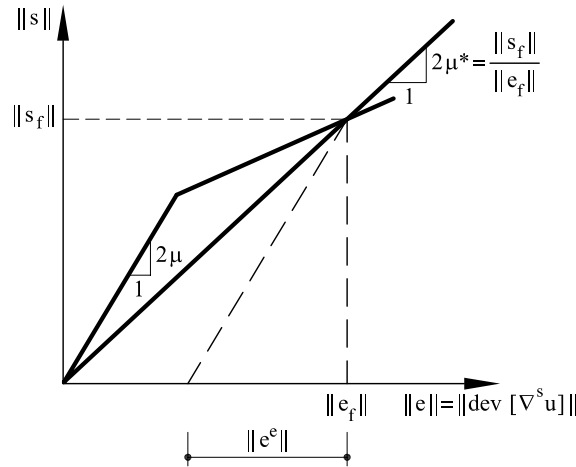
$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) = \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} + \mathcal{O}(\tilde{\mathbf{u}})^2$$

donde  $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h}$  es el tensor constitutivo tangente desviador evaluado en  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$ . Este tensor relaciona las tensiones desviadoras y las deformaciones totales. El producto tensorial  $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}}$  representa un incremento  $\tilde{\mathbf{s}}$  de las tensiones desviadoras por efecto de las subescalas. Desde este punto de vista las subescalas se pueden considerar como una perturbación superpuesta a  $\mathbf{u}_h$ . El producto tensorial anterior involucra en forma efectiva sólo la componente desviadora de las deformaciones debido a que el tensor  $\bar{\mathbf{c}}_s$  es desviador. Es decir  $\tilde{\mathbf{s}} = \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \nabla^s \tilde{\mathbf{u}} = \bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev}[\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$ . El incremento de tensiones desviadoras correspondiente a las deformaciones desviadoras totales asociadas a las subescalas se puede estimar de manera sencilla si se hace una aproximación al módulo de  $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h}$  en función de  $2\mu$ , que según (4) representa la relación entre tensiones desviadoras y la componente elástica de las deformaciones desviadoras. Efectivamente, a partir del valor de  $2\mu$  dado por (5), la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras totales se puede estimar mediante el coeficiente  $2\mu^*$ , calculado como

$$\left. \frac{\|\mathbf{s}\|}{\|\text{dev}[\nabla^s \mathbf{u}]\|} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} = \left. \frac{2\mu \|\text{dev}[\varepsilon^e]\|}{\|\text{dev}[\nabla^s \mathbf{u}]\|} \right|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} = 2\mu^* \quad (23)$$

El coeficiente  $2\mu^*$ , que podría denominarse módulo de cizallamiento efectivo, se puede interpretar en la curva de tensiones desviadoras y deformaciones desviadoras como el módulo secante en  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h$ , tal como se puede apreciar en la Figura 1. Este coeficiente  $2\mu^*$  representa el efecto del flujo plástico en la relación entre las tensiones desviadoras y las deformaciones desviadoras totales, por lo tanto debe considerarse cuando se desarrolle el régimen plástico. Cuando se desarrolla el flujo plástico, las deformaciones desviadoras totales, particularmente las plásticas, crecen con respecto a las tensiones desviadoras en forma sustancialmente mayor que en régimen elástico, por consiguiente, este efecto se debe considerar en la aproximación. Sólo si las deformaciones plásticas son relativamente pequeñas en comparación con las elásticas, se pueden obtener resultados aceptables y comportamiento estable de la presión utilizando simplemente el módulo de cizallamiento  $\mu$ . En fase de carga o descarga elástica el módulo de cizallamiento debe tomarse igual al valor elástico, es decir igual a  $\mu$ . De esta manera el módulo de cizallamiento es

$$\mu' = \begin{cases} \mu & \text{en carga o descarga elástica} \\ \mu^* & \text{si se desarrolla flujo plástico} \end{cases} \quad (24)$$



**Figura 1.** Gráfico de tensiones desviadoras vs. deformaciones desviadoras en modelo elastoplástico con plasticidad J2

Con estos resultados el producto tensorial  $\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$  se puede aproximar como

$$\bar{\mathbf{c}}_s|_{\mathbf{u}=\mathbf{u}_h} : \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}] = \tilde{\mathbf{s}} \cong 2\mu' \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]$$

De esta manera, si bien es cierto que  $\mathbf{s}(\cdot)$  es no lineal, es posible descomponerla en la suma de dos contribuciones. Por un lado  $\mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h)$ , proveniente del efecto inducido por el campo estándar de elementos finitos y por otro  $\tilde{\mathbf{s}}$ , correspondiente al efecto de las subescalas, es decir,

$$\mathbf{s}(\mathbf{u}_h + \tilde{\mathbf{u}}) \cong \mathbf{s}_h(\mathbf{u}_h) + \tilde{\mathbf{s}}(\mathbf{u}_h, \tilde{\mathbf{u}}) \tag{25}$$

**Descomposición en escala de malla y subescalas**

De acuerdo con lo anterior la expresión (15) se puede separar en

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \mathbf{0} \quad \forall \mathbf{W}_h \in \mathcal{W}_{h,0} \tag{26}$$

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \tilde{\mathbf{W}}) + \mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \tilde{\mathbf{W}}) = \mathbf{0} \quad \forall \tilde{\mathbf{W}} \in \tilde{\mathcal{W}}_0 \tag{27}$$

Debe resaltarse que el objetivo es obtener una estimación de los efectos de las subescalas, cuya evaluación numérica en las ecuaciones de balance sea viable, y no necesariamente calcular el valor mismo de  $\tilde{\mathbf{U}}$ . De acuerdo con esto en el desarrollo se consideran los efectos de las subescalas sólo en el *interior* de cada elemento, es decir las integrales en los contornos de los elementos se consideran nulas. De este modo  $\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h)$  y  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$  se pueden expresar, respectivamente, como

$$\mathbf{R}(\mathbf{U}_h, \mathbf{W}_h) = \left[ \begin{array}{c} (\nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h)_{\Omega'} + (\nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h)_{\Omega'} - l(\mathbf{w}_h) \\ (q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h - \frac{1}{\kappa} p_h)_{\Omega'} \end{array} \right] \tag{28}$$

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \left[ \begin{array}{c} (\nabla^s \mathbf{w}_h, 2\mu' \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}])_{\Omega'} \\ (q_h, \nabla \cdot \tilde{\mathbf{u}})_{\Omega'} \end{array} \right] \tag{29}$$



donde se ha introducido la notación  $(\cdot, \cdot)_{\Omega'} := \sum_{e=1}^{n_{elm}} (\cdot, \cdot)_{\Omega_e}$ . Obsérvese que la ecuación (26) expresa el balance de momentum, o ecuación de equilibrio, y la ecuación de la deformación volumétrica, planteadas en el espacio de elementos finitos  $\mathcal{W}_{h,0}$ ; el término  $\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h)$  en esta ecuación representa el efecto de las subescalas en la solución por elementos finitos. La integración por partes de este término con la finalidad de reducir el orden de derivación sobre  $\tilde{\mathbf{u}}$  da como resultado

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \left[ \begin{array}{c} -(\tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\mu' \text{dev} [\nabla^s \mathbf{w}_h]))_{\Omega'} \\ -(\tilde{\mathbf{u}}, \nabla q_h)_{\Omega'} \end{array} \right] \quad (30)$$

A partir de la ecuación (27), definida en el espacio  $\tilde{\mathcal{W}}_0$ , se obtiene mediante integración por partes

$$-(\tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot (2\mu' \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]))_{\Omega'} = (\tilde{\mathbf{w}}, \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \nabla p_h + \mathbf{b})_{\Omega'} \quad (31)$$

Esta expresión relaciona a través de proyecciones sobre el espacio  $\tilde{\mathcal{W}}_0$  la subescala  $\tilde{\mathbf{u}}$  con el residuo de la ecuación de balance de momentum  $\mathbf{r}_h = \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \nabla p_h + \mathbf{b}$ . Es necesario considerar en (30) alguna aproximación, como la siguiente en cada elemento

$$\|\nabla \cdot (2\mu' \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}])\| \cong \frac{\|2\mu' \text{dev} [\nabla^s \tilde{\mathbf{u}}]\|}{c_1 h_e} \cong \frac{2\mu'}{c_1 h_e} \left( \frac{\|\tilde{\mathbf{u}}\|}{c_2 h_e} \right) = \frac{1}{\tau_e} \|\tilde{\mathbf{u}}\| \quad (32)$$

a partir de la cual queda definido el parámetro  $\tau_e$  como

$$\tau_e = \frac{c h_e^2}{2\mu'} \quad (33)$$

en función de la longitud característica del elemento  $h_e$ , el módulo  $\mu'$  y una constante  $c$  a determinar mediante experimentos numéricos. El parámetro  $\tau_e$  definido en (33) se denomina *parámetro de estabilización*. Como se puede observar, queda definido en función del coeficiente  $\mu'$ , que refleja el efecto del flujo plástico en las deformaciones desviadoras (23). Este parámetro se emplea en la siguiente sección para aproximar el valor de las subescalas  $\tilde{\mathbf{u}}$  a partir de (31). Esta aproximación al parámetro de estabilización en función del módulo de cizallamiento efectivo es una contribución original<sup>22</sup>. En el caso de elementos lineales con un sólo punto de integración por elemento el valor de  $\tau_e$  es único por cada elemento.

El asunto que queda pendiente es obtener la aproximación a las subescalas. En el marco general del método de las subescalas caben diversas posibilidades para definir la aproximación a las subescalas, incluso la definición de funciones específicas. En principio el espacio  $\tilde{\mathcal{W}}_0$  podría ser cualquier espacio complementario al espacio de elementos finitos. La alternativa adoptada en este trabajo se presenta en la siguiente sección.

## LAS SUBESCALAS ORTOGONALES

Entre las diversas posibilidades del método general Codina<sup>6</sup> propuso como espacio natural para la búsqueda de las subescalas el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos. Esta definición da origen a una formulación ingeniosa y precisa denominada *método de las subescalas ortogonales*. De acuerdo con este planteamiento se adopta como aproximación para el espacio de las subescalas

$$\tilde{\mathcal{W}}_0 \approx \tilde{\mathcal{W}} \approx \mathcal{W}_{h^\perp} \quad (34)$$

donde  $\mathcal{W}_{h^\perp}$  es el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos; por lo tanto,  $\tilde{\mathbf{U}} \in \mathcal{W}_{h^\perp}$ .

De acuerdo con este planteamiento, en (31) el término del lado derecho representa la proyección del residuo de la ecuación diferencial sobre el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos  $\mathcal{W}_{h\perp}$ , que se denota  $P_{h\perp}\{\mathbf{r}_h\}$ . Teniendo en cuenta la aproximación introducida en (32) y la definición (33), se obtiene a partir de (31) en cada elemento

$$\tilde{\mathbf{u}} \cong \tau_e P_{h\perp} \{\nabla p_h + \nabla \cdot \mathbf{s}_h + \mathbf{b}\} \quad \text{en } \Omega_e \quad (35)$$

Es decir  $\tilde{\mathbf{u}}$  es la proyección del residuo  $\mathbf{r}_h$  sobre el espacio ortogonal al espacio de elementos finitos en cada elemento, ponderada por el parámetro  $\tau_e$ . En elementos lineales, como en este caso, las segundas derivadas de funciones de elementos finitos, tales como  $\nabla \cdot (\mathbf{s}_h)$  que aparece en (35), son nulas. Además, se considera que  $\mathbf{b}$  se aproxima mediante elementos del espacio de elementos finitos y, por lo tanto  $P_{h\perp}(\mathbf{b}) = 0$ . De esta manera la aproximación a la subescala en cada elemento es

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tau_e (\nabla p_h - P_h \{\nabla p_h\}) \quad (36)$$

donde  $P_{h\perp}$  se ha calculado como  $P_{h\perp} = \{\cdot\} - P_h \{\cdot\}$ ,  $\{\cdot\}$  es la identidad de una variable y  $P_h \{\cdot\}$  la proyección de la variable sobre el espacio de elementos finitos.

Si se inserta esta aproximación en (30), y dado que para elementos lineales  $(\tilde{\mathbf{u}}, \nabla \cdot (2\mu' \text{dev}[\nabla^s \mathbf{w}_h]))_{\Omega_e} \equiv 0$ , se obtiene

$$\mathbf{R}(\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{W}_h) = \left[ \begin{array}{c} 0 \\ -\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e (\nabla q_h, \nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h)_{\Omega_e} \end{array} \right] \quad (37)$$

donde  $\mathbf{\Pi}_h = P_h \{\nabla p_h\}$  es la proyección del gradiente de presión sobre el espacio de elementos finitos  $\mathcal{W}_h$ .  $\mathbf{\Pi}_h \in \mathcal{T}_h = \mathbf{H}^1(\Omega)$  es una variable continua entre elementos adicional a las variables involucradas en la formulación mixta  $\mathbf{u}/p$  y se calcula como

$$(\nabla p_h, \eta_h) - (\mathbf{\Pi}_h, \eta_h) = 0 \quad \forall \eta_h \in \mathcal{T}_h \quad (38)$$

Finalmente, la versión estabilizada propuesta para resolver el problema elastoplástico incompresible en deformaciones infinitesimales mediante elementos lineales triangulares o tetraédricos es hallar  $[\mathbf{u}_h, p_h, \mathbf{\Pi}_h]^T \in \mathcal{V}_{0,h} \times \mathcal{Q}_h \times \mathcal{T}_h$  tales que

$$(\nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h) + (\nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h) - l(\mathbf{w}_h) = 0 \quad \forall \mathbf{w}_h \quad (39)$$

$$\left( q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h - \frac{1}{\kappa} p_h \right) - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e (\nabla q_h, \nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h)_{\Omega_e} = 0 \quad \forall q_h \quad (40)$$

$$(\nabla p_h, \eta_h) - (\mathbf{\Pi}_h, \eta_h) = 0 \quad \forall \eta_h \quad (41)$$

Obsérvese que en esta formulación surge un término adicional en la ecuación de la deformación volumétrica (40)  $\sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e (\nabla q_h, \nabla p_h - \mathbf{\Pi}_h)_{\Omega_e}$  denominado término de estabilización. La ecuación de momentum (39) se puede resolver tal como en la formulación mixta  $\mathbf{u}/p$ . Se advierte también que, de acuerdo con las consideraciones adoptadas, en todas las ecuaciones del desarrollo aparece el valor total de la sub-escala, no el incremental. Esto simplifica el procedimiento de cálculo en comparación con otras opciones en las que, a partir de la linealización de la ecuación de equilibrio o del tensor de tensiones, se obtiene una aproximación al valor incremental de  $\tilde{\mathbf{u}}$ . La desventaja que en principio supone la introducción de una variable adicional en el problema es mínima si se emplea una implementación robusta y eficiente, tal como se describe en la siguiente sección.

## ASPECTOS DE IMPLEMENTACIÓN

La inclusión de una variable adicional en la formulación del problema hace poco práctica la solución monolítica del sistema de ecuaciones. Obsérvese que no es posible condensar la variable  $\mathbf{\Pi}_h$  en cada elemento, puesto que esta es una variable continua. Por otro lado, el problema plástico implica la no linealidad del sistema de ecuaciones, por lo tanto la solución de (39)-(41) se efectúa mediante procedimientos de tipo incremental-iterativo. En este marco existen diversas alternativas para calcular la proyección  $\mathbf{\Pi}_h$  y reducir el impacto de esta variable adicional en el coste computacional de esta formulación. La idea básica consiste en desacoplar la proyección  $\mathbf{\Pi}_h$  y resolver el sistema  $\mathbf{u}_h/p_h$ . A partir de esta idea existen diversas posibilidades de concatenar los algoritmos de cálculo.

La estrategia adoptada en este trabajo consiste en resolver simultáneamente las ecuaciones de balance de momentum y de deformación volumétrica, (39) y (40), respectivamente, en  $t = t^{(n+1)}$ . En las iteraciones para hallar el equilibrio correspondiente a este paso de tiempo se mantiene el valor de la proyección del gradiente de presión  $\mathbf{\Pi}_h$  en  $t = t^{(n)}$ . Con este valor de  $\mathbf{\Pi}_h^n$  las ecuaciones del sistema que se resuelve en el paso de tiempo  $n + 1$  son

$$\left( \nabla^s \mathbf{w}_h, \mathbf{s}_h \left( \mathbf{u}_h^{n+1,i} \right) \right) + \left( \nabla \cdot \mathbf{w}_h, p_h^{n+1,i} \right) - l^{n+1}(\mathbf{w}_h) = 0 \quad (42)$$

$$\left( q_h, \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i} - \frac{1}{\kappa} p_h^{n+1,i} \right) - \sum_{e=1}^{n_{elm}} \tau_e \left( \nabla q_h, \nabla p_h^{n+1,i} - \mathbf{\Pi}_h^n \right)_{\Omega_e} = 0 \quad (43)$$

Una vez resuelto este sistema de ecuaciones se evalúa la variable  $\mathbf{\Pi}_h^{n+1}$  en función del valor convergido del gradiente de presión como

$$\left( \nabla p_h^{n+1}, \eta_h \right) - \left( \mathbf{\Pi}_h^{n+1}, \eta_h \right) = 0 \quad (44)$$

Si se emplea la matriz de masa aglutinada, esta ecuación se transforma en un sistema trivial. Esta estrategia ha demostrado ser muy eficaz desde el punto de vista computacional sin perjudicar la robustez y precisión del método.

## SIMULACIONES NUMÉRICAS

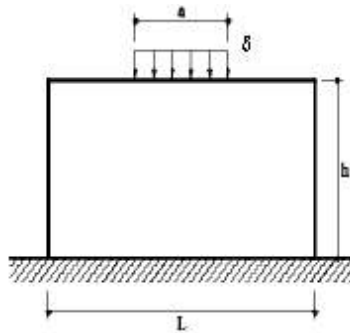
La eficacia de la formulación propuesta se muestra a continuación en un conjunto de simulaciones numéricas. Se consideran modelos de elastoplasticidad J2 tanto con régimen elástico compresible como con régimen elástico incompresible. En todos los ejemplos se ha tomado un valor  $c = 1$  para la constante de la (33).

Para la solución del sistema no lineal de ecuaciones, que resulta de la discretización espacial y temporal de la forma débil del problema estabilizado, se emplea el método de Newton-Raphson combinado con un procedimiento de búsqueda lineal (*line-search*). En las simulaciones se ha empleado el programa de elementos finitos COMET *COupled MEchanical and Thermal analysis*, desarrollado en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)<sup>3</sup>. Como pre y post-procesador se ha utilizado GiD, también desarrollado en el CIMNE<sup>11</sup>. Los resultados obtenidos con la formulación propuesta se comparan con los correspondientes a la formulación estándar en desplazamientos, la formulación mixta estándar y los elementos Q1P0.

## PROBLEMA DE COMPRESIÓN 2D NO HOMOGÉNEA EN DEFORMACIÓN PLANA

Este test tiene por objetivo mostrar la necesidad de considerar el efecto del desarrollo del flujo plástico en el cálculo del parámetro de estabilización. Se trata de un test de compresión no homogénea en deformación plana en el cual el comportamiento del material se representa mediante un modelo constitutivo elastoplástico J2 con régimen elástico compresible y régimen de plasticidad perfecta. Los parámetros del modelo son: módulo de elasticidad  $E = 1,96 \times 10^5$  MPa, coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$  y límite de fluencia  $\sigma_Y = 150$  MPa. En la Figura 2 se muestran las características geométricas del test. El bloque de  $0,60 \times 0,20$  m se somete a compresión mediante la aplicación de un desplazamiento  $\delta = 0,012$  m en la zona central de  $0,20$  m de su parte superior. Los desplazamientos horizontales son nulos en toda la superficie superior. En la base, los desplazamientos verticales se prescriben nulos y los desplazamientos horizontales son libres.

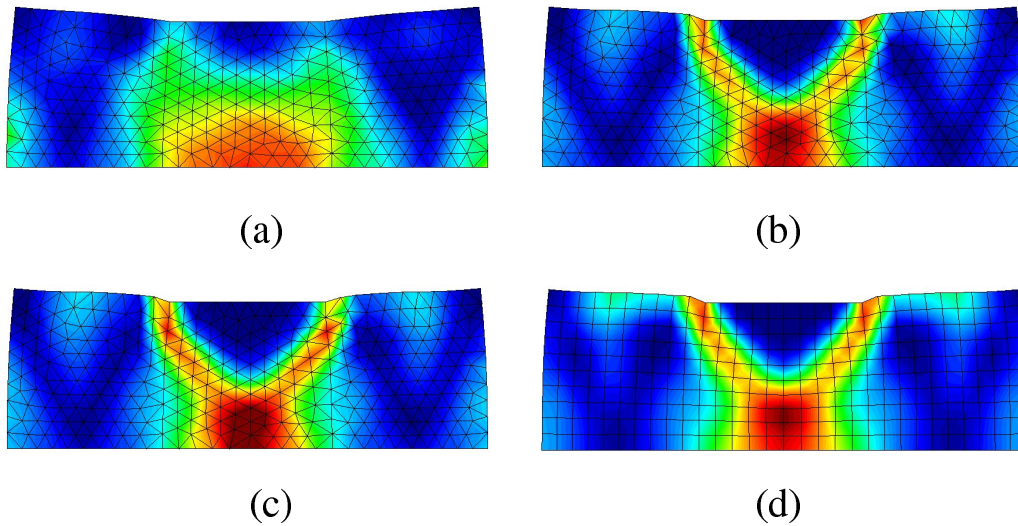
El dominio se discretiza empleando una malla de cuadriláteros Q1P0 de 341 nodos y 300 elementos. Las mallas de triángulos P1 ó P1P1-S son mallas no estructuradas de 357 nodos y 632 elementos. El desplazamiento prescrito total se aplica en 30 pasos.



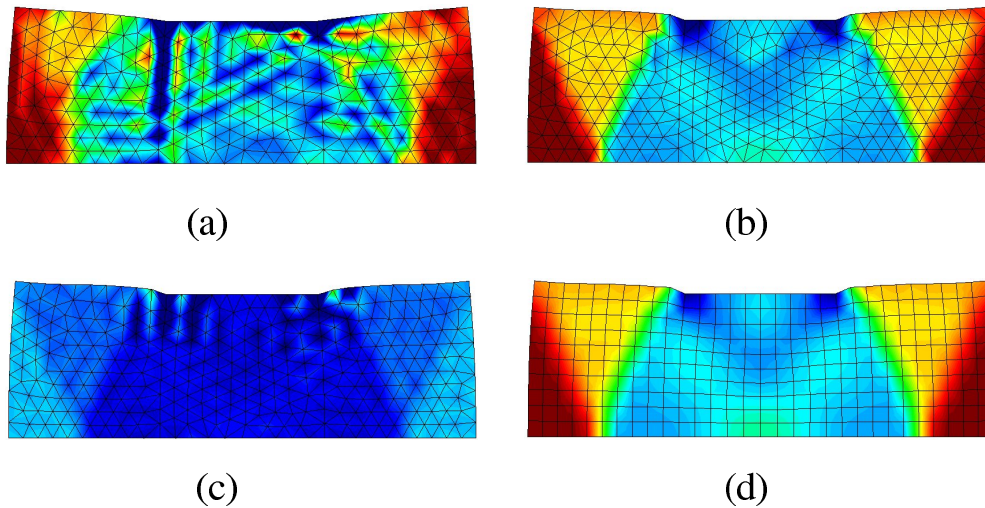
**Figura 2.** Compresión no homogénea en deformación plana. Datos geométricos:  
 $L = 0,60$  m,  $h = 0,20$  m,  $a = 0,20$  m y  $\delta = 0,012$  m

En las Figuras 3 y 4 se muestran las distribuciones de deformación plástica equivalente y presión, respectivamente, correspondientes a los elementos triangular estándar P1, cuadrilátero Q1P0 y dos triángulos P1P1-S, uno de ellos sin considerar el efecto de desarrollo del flujo plástico en el cálculo del parámetro de estabilización y el otro con la aproximación propuesta en este trabajo (33) y (23). En cuanto a las distribuciones de la deformación plástica, en la Figura 3a se puede observar la pobre respuesta que ofrece el elemento P1. En cambio en las distribuciones mostradas en las Figuras 3b, 3c y 3d se observa la localización captada por los elementos P1P1-S, sea que se considere o no el efecto del flujo plástico en el cálculo del parámetro de estabilización y por el elemento Q1P0. Con respecto a las distribuciones de presión, en la Figura 4a se aprecia claramente el efecto de bloqueo del elemento triangular estándar P1. Puesto que el material tiene comportamiento compresible en régimen elástico, la situación de incompresibilidad que origina el bloqueo en este caso es atribuible al desarrollo de deformaciones plásticas, que son isocóricas de acuerdo con la hipótesis de los modelos de plasticidad J2. La Figura 4b muestra la distribución de presión que ofrece el elemento P1P1-S con el cálculo del parámetro de estabilización en régimen plástico en función de la aproximación del módulo de cizallamiento efectivo. La Figura 4d muestra la respuesta obtenida por el elemento Q1P0, similar a la obtenida por el elemento propuesto. Tal como se aprecia ninguna de las respuestas sufre el efecto de bloqueo. La Figura 4c muestra la distribución de presión que ofrece el elemento P1P1-S, cuando no se tiene en cuenta el efecto del flujo plástico en el parámetro de estabilización. Como se puede

observar, la respuesta que se obtiene es físicamente inadmisibile. Se constata mediante estos resultados la necesidad de considerar el efecto del flujo plástico en el cálculo del parámetro de estabilización. Asimismo se aprecia la efectividad de la aproximación propuesta en este trabajo.



**Figura 3.** Compresión no homogénea en deformación plana. Distribuciones de deformación plástica equivalente correspondiente a: a) elemento triangular estándar P1, b) y c) elemento P1P1-S con y sin corrección del módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, respectivamente, d) elemento Q1P0

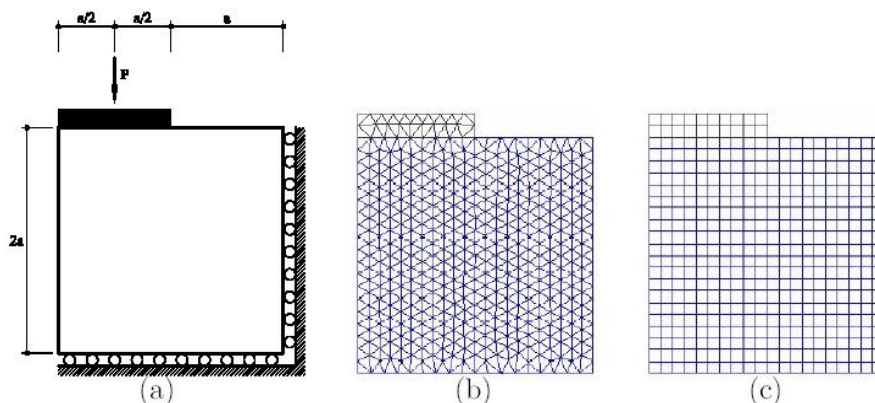


**Figura 4.** Compresión no homogénea en deformación plana. Distribuciones de presión correspondiente a: a) elemento triangular estándar P1, b) y c) elemento P1P1-S con y sin corrección del módulo de cizallamiento en el parámetro de estabilización, respectivamente, d) elemento Q1P0

## Problema de cizallamiento 2D

A continuación se presenta un problema de cizallamiento en 2D en deformación plana. Se emplea un modelo constitutivo elastoplástico con régimen de plasticidad perfecta J2 y régimen elástico incompresible. Ya que la formulación estándar y la formulación del elemento Q1P0 no admiten el valor límite del coeficiente de Poisson, este se ha fijado en  $\nu = 0,499$ . Las demás propiedades son: módulo de elasticidad  $E = 10$  MPa y tensión de fluencia  $\sigma_Y = E/1000$ . Se ha considerado el régimen de plasticidad perfecta con la finalidad de apreciar con claridad la definición de las cargas límite y el desarrollo de los mecanismos de falla.

La Figura 5a muestra las características geométricas del problema, especificadas en función de la longitud  $a = 5$  m. Se aplica una carga mediante una placa rígida (se ha considerado un espesor de 1 m); el análisis se ha realizado aplicando la carga en 50 pasos. La figura muestra también las mallas empleadas en el análisis: 5b malla no estructurada de 843 elementos triangulares lineales (463 nodos) y 5c malla estructurada de  $20 \times 20 + 20$  elementos cuadriláteros Q1P0 (462 nodos). Como se aprecia en la Figura 5b, el pre-procesador utilizado tiende a generar mallas no estructuradas de triángulos con direcciones predominantes a  $-30^\circ$ ,  $30^\circ$  y  $90^\circ$ .



**Figura 5.** Cizallamiento 2D: a) configuración geométrica, b) malla no estructurada de triángulos, c) malla estructurada de cuadriláteros

La Figura 6 muestra la gráfica carga vs. desplazamiento del punto de aplicación para las mallas de elementos a) triangulares estándar en desplazamientos P1, b) mixtos estándar P1P1, c) de la formulación propuesta P1P1-S y d) cuadriláteros Q1P0. Cabe destacar que la formulación propuesta y el elemento Q1P0 captan correctamente la carga límite correspondiente al régimen plástico, mientras que la formulación mixta estándar revela un valor ligeramente mayor y la formulación estándar en desplazamientos exhibe claramente el efecto de bloqueo tanto en régimen elástico como en régimen plástico.

La Figura 7 muestra la distribución de deformación plástica equivalente una vez desarrollado completamente el flujo plástico y permite apreciar el mecanismo de falla (desplazamiento vertical de la carga  $\delta = 0,05$  m). Se obtienen resultados muy buenos y similares con el elemento propuesto y con el Q1P0. Por otro lado, los resultados que brinda el elemento triangular estándar se ven fuertemente influenciados por el patrón de la malla, lo que no permite captar correctamente las deformaciones plásticas y el mecanismo de falla.

La Figura 8 presenta la distribución de presión obtenida al final del proceso de deformación con cada uno de los elementos. En la Figura 8a se observa el fenómeno de bloqueo del elemento estándar, mientras que la Figura 8b presenta la inestabilidad de la respuesta

del elemento mixto estándar. En la Figura 8c se puede apreciar el efecto estabilizador de la formulación propuesta, cuya respuesta es similar a la del elemento Q1P0 mostrada en la Figura 8d.

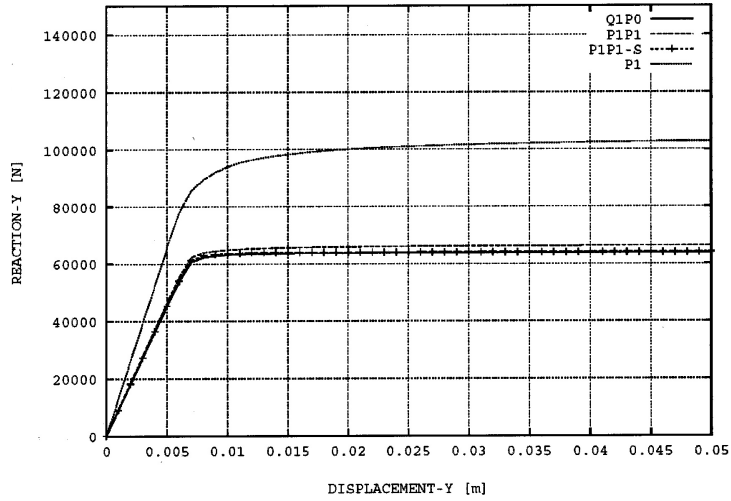


Figura 6. Cizallamiento 2D: gráfica carga vs. desplazamiento

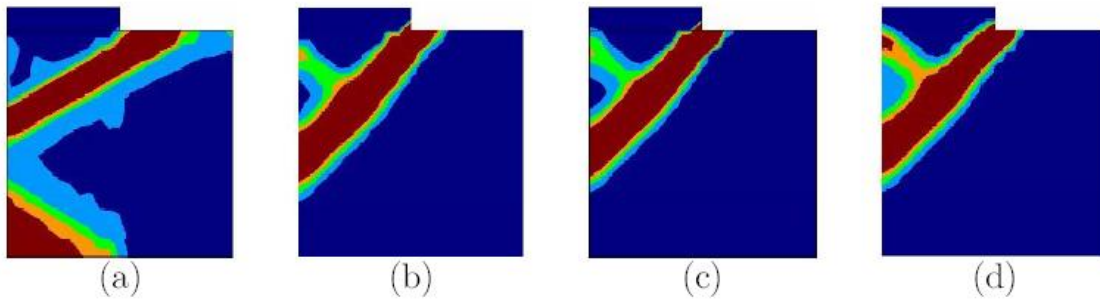


Figura 7. Cizallamiento 2D: distribución de deformación plástica equivalente con elementos: a) triangular estándar P1, b) mixto estándar P1P1, c) propuesto P1P1-S, d) Q1P0

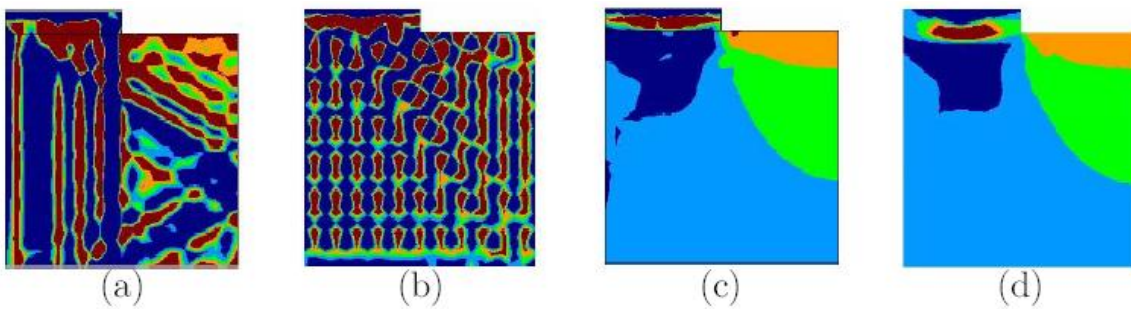
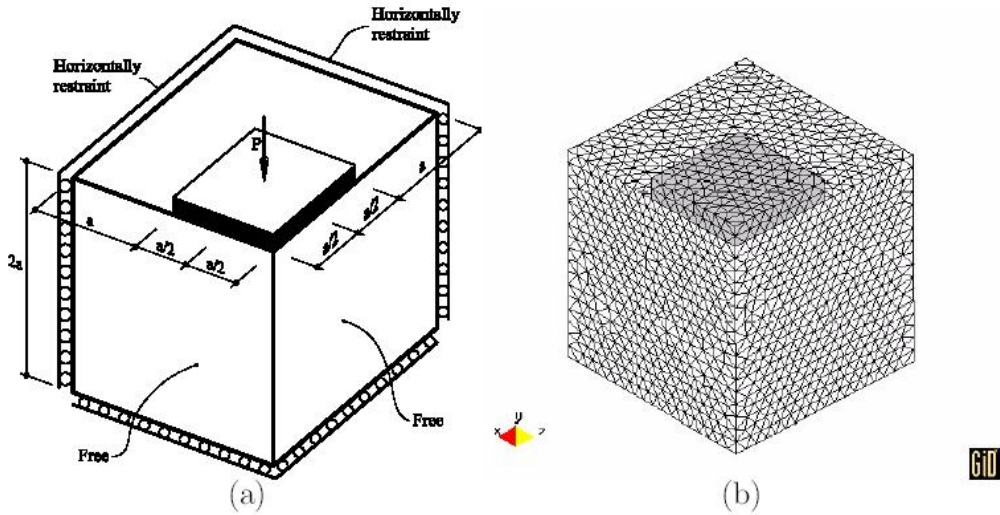


Figura 8. Cizallamiento 2D: distribución de presión con elementos: a) triangular estándar P1, b) mixto estándar P1P1, c) propuesto P1P1-S, d) Q1P0

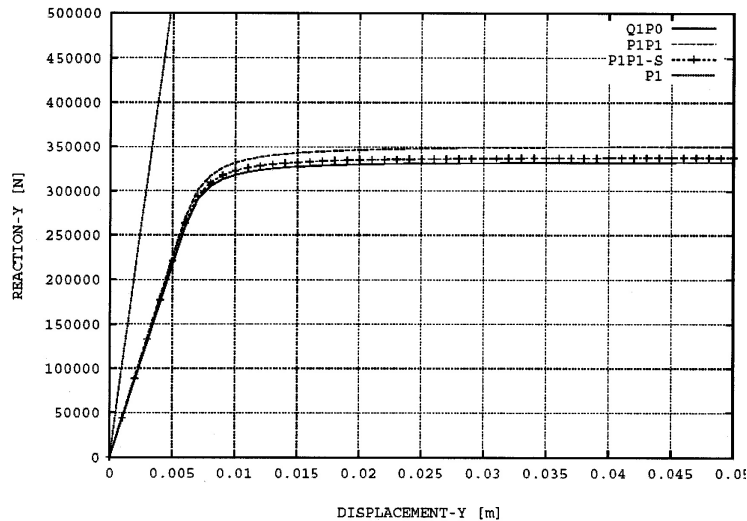
**Problema de cizallamiento 3D**

La versión 3D del problema anterior se presenta en la Figura 9a. Las dimensiones se han especificado en función de la longitud  $a = 5$  m. La Figura 9b muestra la malla no estructurada de elementos tetraédricos lineales (9 533 nodos, 50 080 elementos) utilizada en el análisis. Para la comparación con el elemento hexaédrico Q1P0 se utiliza una malla estructurada de  $20 \times 20 \times 20 + 20$  elementos (9 503 nodos) no mostrada.



**Figura 9.** Cizallamiento 3D: a) configuración geométrica, b) malla no estructurada de tetraedros

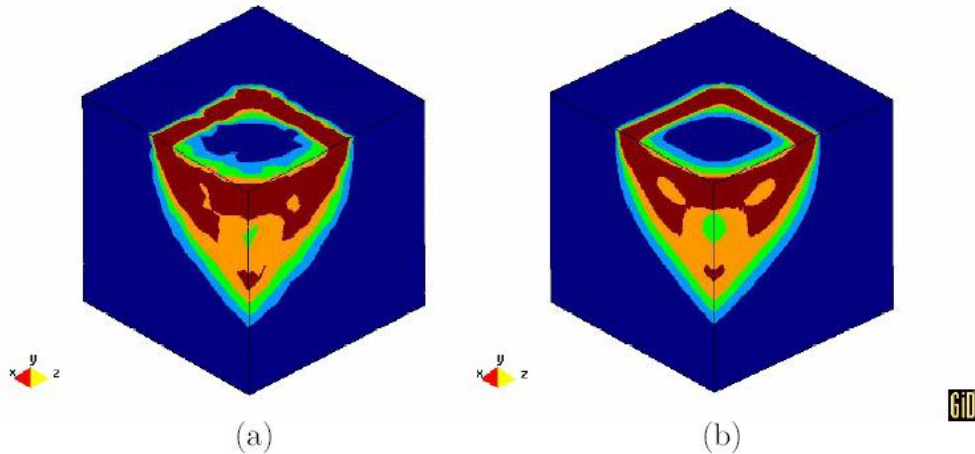
La Figura 10 muestra el gráfico de carga vs. desplazamiento del punto de aplicación para cada caso. Cabe destacar también en este caso que la formulación propuesta y el elemento Q1P0 captan correctamente el límite de carga en régimen plástico.



**Figura 10.** Cizallamiento 3D: gráfica carga vs. desplazamiento



La Figura 11 muestra la distribución de deformación plástica efectiva una vez desarrollado completamente el flujo plástico (desplazamiento vertical de la carga  $\delta = 0,05$  m). Se puede apreciar una vez más el correcto resultado obtenido con la formulación propuesta, en este caso con una malla no estructurada de tetraedros, y la similitud de la respuesta obtenida con la malla estructurada y regular de elementos hexaédricos Q1P0.



**Figura 11.** Cizallamiento 3D: distribución de deformación plástica equivalente con elementos: a) P1P1-S propuesto, b) Q1P0

## CONCLUSIONES

Se ha propuesto una nueva formulación de elementos finitos en multiescalas para elasticidad y plasticidad incompresibles en deformaciones infinitesimales, aplicable a elementos de tipo triangular y tetraédrico. Esta formulación se ha desarrollado en el marco del método de las sub-escalas ortogonales y elude la condición de estabilidad de Babuška-Brezzi sobre las formulaciones mixtas; se ha logrado de esta manera obtener elementos  $\mathbf{u}/p$  lineal/lineal con comportamiento estable. La formulación incorpora además de las variables de la formulación mixta  $\mathbf{u}/p$  estándar la proyección del gradiente de presión como variable adicional. Se ha propuesto un esquema explícito para resolver esta variable y se ha obtenido un algoritmo robusto y preciso, adecuado para aplicaciones ingenieriles en 2D y 3D. Las simulaciones numéricas muestran que la formulación propuesta está libre tanto del efecto de bloqueo como de inestabilidad en la presión y que los resultados obtenidos son comparables con los correspondientes a los elementos Q1P0. Se ha propuesto una aproximación para estimar el efecto del flujo plástico en el parámetro de estabilización en función del módulo de cizallamiento efectivo; ésta es una contribución original que ha mostrado ser eficaz. El elemento tetraédrico lineal desarrollado es de gran interés práctico para su utilización en aplicaciones realistas por su versatilidad en la generación de mallas sobre configuraciones complejas. Ésta es una ventaja de los elementos propuestos con respecto a los elementos Q1P0 y a los elementos de la formulación de deformaciones de mejora (EAS) y los que se derivan de ella. Cabe destacar también que los elementos propuestos captan correctamente la distribución de deformaciones plásticas localizadas y los mecanismos de falla sin influencia apreciable del patrón de la malla.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen el generoso apoyo brindado por el Profesor R. Codina mediante sus valiosos comentarios y sugerencias.

## REFERENCIAS

- 1 F. Brezzi y M. Fortin, “*Mixed and hybrid finite element methods*”, Springer, New York, (1991).
- 2 M. Cervera, M. Chiumenti, Q. Valverde y C. Agelet de Saracibar, “Mixed linear/linear simplicial elements for incompressible elasticity and plasticity”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **192**, pp. 5249–5263, (2003).
- 3 M. Cervera, C. Agelet de Saracibar y M. Chiumenti, “COMET: COupled MEchanical and Thermal analysis. Data input manual”, version 5.0, *Technical report IT-308*, <http://www.cimne.upc.es>
- 4 M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar y M. Cervera, “A stabilized formulation for elasticity using linear displacement and pressure interpolations”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **191**, pp. 5253–5264, (2002).
- 5 M. Chiumenti, Q. Valverde, C. Agelet de Saracibar y M. Cervera, “A stabilized formulation for incompressible plasticity using linear triangular and tetrahedra”, *International Journal of Plasticity*, Vol. **20**, pp. 1487–1504, (2004).
- 6 R. Codina, “Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.* Vol. **190**, pp. 1579–1599, (2000).
- 7 R. Codina, “Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscales”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **191**, pp. 4295–4321, (2002).
- 8 R. Codina y J. Blasco, “Stabilized finite element method for transient Navier-Stokes equations based on pressure gradient projection”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **182**, pp. 287–300, (2000).
- 9 K. Garikipati y T.J.R. Hughes, “A study of strain localization in a multiple scale framework - the one dimensional problem”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **159**, pp. 193–222, (1998).
- 10 K. Garikipati y T.J.R. Hughes, “A variational multiscale approach to strain localization - formulation for multidimensional problem”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **188**, pp. 39–60, (2000).
- 11 “GiD: The personal pre and post processor”, <http://www.gid.cimne.upc.es>
- 12 T.J.R. Hughes, “Multiscale phenomena: Green’s function, Dirichlet-to Neumann formulation, subgrid scale models, bubbles and the origins of stabilized formulations”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **127**, pp. 387–401, (1995).
- 13 T.J.R. Hughes, G.R. Feijoo, L. Mazzei y J.B. Quincy, “The variational multiscale method - a paradigm for computational mechanics”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **16**, pp. 3–28, (1998).
- 14 O. Klaas, A. Maniatty y M.S. Shephard, “A stabilized mixed finite element method for finite elasticity. Formulation for linear displacement and pressure interpolation”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **180**, pp. 65–79, (1999).
- 15 E. Oñate, J. Rojek, R.L. Taylor y O.C. Zienkiewicz, “Linear triangles and tetrahedra for incompressible problem using a finite calculus formulation”, *Proceedings of European Conference on Computational Mechanics*, ECCM, (2001).

- 16 S. Reese, M. Küssner y B.D. Reddy, “A new stabilization technique for finite elements in non-linear elasticity”, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, Vol. **44**, pp. 1617–1652, (1999).
- 17 B.D. Reddy y J.C. Simó, “Stability and convergence of a class of enhanced strain methods”, *SIAM Journal of Numerical Analysis*, Vol. **32**, pp. 1595–1638, (1995).
- 18 J.C. Simó y M.S. Rifai, “A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes”, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, Vol. **29**, pp. 1595–1638, (1990).
- 19 J.C. Simó, R.L. Taylor y K.S. Pister, “Variational and projection methods for the volume constraint in finite deformation elasto-plasticity”, *Comp. Meths. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **51**, pp. 177–208, (1985).
- 20 R.L. Taylor, “A mixed formulation for triangle and tetrahedral elements”, *Conference Proceedings, Métodos Numéricos en la Ingeniería, SEMNI*, (1999).
- 21 Q. Valverde, “Elementos estabilizados de bajo orden en mecánica de sólidos”, Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, <http://www.tdx.cesca.es/TDCat-1118102-101538>, (2002).
- 22 O.C. Zienkiewicz, J.Rojek, R.L. Taylor y M. Pastor, “Triangles and tetrahedra in explicit dynamic codes for solids”, *Int. J. Num. Meths. Engng.*, Vol. **43**, pp. 565–583, (1998).