

# Solución numérica de la ecuación de advección empleando mallas estructuradas sobre regiones planas irregulares utilizando un esquema de diferencias finitas

G. Tinoco Guerrero

F. J. Domínguez Mota\*

J. G. Tinoco Ruiz\*

\*Facultad de Ciencias Físico Matemáticas, U.M.S.N.H

Diciembre, 2015

## Resumen

Hoy en día nos encontramos con el problema de resolver las ecuaciones de cuerpos de agua poco profundas en regiones irregulares; estas ecuaciones son muy importantes para poder modelar el comportamiento de líquidos que tengan la característica de que su extensión es mucho mayor que su profundidad. Uno de los bloques importantes para lograr resolver estas ecuaciones, es la ecuación de advección. En este trabajo, se proponen algunos esquemas para aproximar la solución de la ecuación de advección en regiones irregulares en el plano, utilizando una variación del método de diferencias finitas en mallas convexas y estructuradas.

## 1 Introducción

Consideremos el problema de obtener una aproximación en diferencias finitas a la solución del problema de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad [0, T] \times \Omega, \quad a, b \in \mathbb{R},$$

$$u(x, y, 0) = g(x, y),$$

$$u(x, y, t)|_{S_1} = h(x, y, t),$$

donde  $\Omega$  es un dominio plano simplemente conexo y  $\partial\Omega$  es un polígono de Jordan orientado de manera positiva, de tal manera que  $\partial\Omega = S_1 \cup S_2$  donde  $S_1$  y  $S_2$  están conectados.

En especial, a nosotros nos interesa aproximar la solución en regiones  $\Omega$  que cumplan con ser irregulares, no rectangulares y no simétricas, para las cuales es necesario generar mallas convexas minimizando un funcional adecuado. Los funcionales armónicos y de área [1, 2], implementados

en UNAMalla [3], pueden ser usados para generar mallas estructuradas de una gran variedad de dominios simplemente conexos en el plano.

## 2 Esquema de Lax-Wendroff propuesto

Para aproximar el operador lineal básico de segundo orden

$$L = Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + F \quad (1)$$

en el punto  $p_0$  utilizando aproximaciones a los valores de  $u$  en algunos puntos vecinos  $p_1, \dots, p_q$  de  $p_0$ , utilizamos un esquema de diferencias finitas en  $p_0$ , el cual se puede escribir como la combinación lineal

$$L_0 = \Gamma_0 u(p_0) + \Gamma_1 u(p_1) + \dots + \Gamma_q u(p_q). \quad (2)$$

Consideramos que este esquema es consistente si

$$[Lu]_{p_0} - L_0 \rightarrow 0$$

cuando  $p_1, \dots, p_q \rightarrow p_0$  [4]. Utilizando los primeros seis términos de la expansión en series de Taylor hasta segundo orden, de la condición de consistencia se obtiene el sistema

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ 0 & \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ 0 & (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ 0 & \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ 0 & (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_0 \\ \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F(p_0) \\ D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Debemos notar que el sistema definido en (3) tiene 6 ecuaciones y  $q + 1$  incógnitas, por lo que, en la mayoría de los casos, resulta estar mal determinado, y una manera de resolverlo es utilizando mínimos cuadrados. Si consideramos únicamente las últimas 5 ecuaciones de (3), obtenemos el sistema de ecuaciones reducido

$$\begin{pmatrix} \Delta x_1 & \dots & \Delta x_q \\ \Delta y_1 & \dots & \Delta y_q \\ (\Delta x_1)^2 & \dots & (\Delta x_q)^2 \\ \Delta x_1 \Delta y_1 & \dots & \Delta x_q \Delta y_q \\ (\Delta y_1)^2 & \dots & (\Delta y_q)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_1 \\ \Gamma_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \Gamma_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} D(p_0) \\ E(p_0) \\ 2A(p_0) \\ B(p_0) \\ 2C(p_0) \end{pmatrix}, \quad (4)$$

Este nuevo sistema puede resolverse utilizando la factorización de Cholesky de sus ecuaciones normales para conseguir los valores de  $\Gamma_1, \dots, \Gamma_q$ . Después, para calcular  $\Gamma_0$  utilizamos la primera ecuación del sistema (3)

$$\Gamma_0 = -\Gamma_1 \dots - \Gamma_q + F(p_0). \quad (5)$$

De esta forma obtenemos el conjunto de coeficientes necesarios para definir el esquema (2) [5]. Para poder aplicar esta aproximación al esquema de Lax-Wendroff para la ecuación de advección

$$\frac{\partial u}{\partial t} + a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} = 0, \quad (6)$$

aplicamos la regla de la cadena a

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -a \frac{\partial u}{\partial x} - b \frac{\partial u}{\partial y}$$

para obtener

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

después, sustituimos las derivadas parciales en el desarrollo en serie de Taylor

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \frac{\partial u}{\partial t} \Delta t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} (\Delta t)^2 + \dots$$

lo que arroja [6]

$$u(x, t + \Delta t) = u(x, t) + \left[ -\Delta t \left( a \frac{\partial u}{\partial x} b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \right] + \dots$$

Observemos que el esquema definido por las ecuaciones (4) y (5) se puede aplicar al operador

$$-\Delta t \left( a \frac{\partial u}{\partial x} + b \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{(\Delta t)^2}{2} \left( a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2ab \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + b^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right);$$

los coeficientes  $\Gamma_0, \dots, \Gamma_q$  obtenidos definen el esquema modificado de Lax-Wendroff

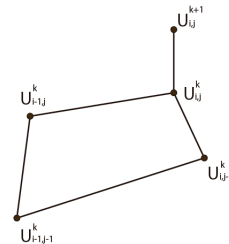
$$u_0^{k+1} = u_0^k + \sum_{l=0}^q \Gamma_l(u_0, \dots, u_q) u_l^k, \quad (7)$$

donde  $k$  representa el nivel de tiempo.

El esquema (7) puede ser usado tanto en mallas estructuradas como en mallas no estructuradas. Como nosotros estamos interesados en mallas estructuradas, podemos aprovechar la estructura lógica dada por el par de índices en la malla  $G = \{p_{i,j} | 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  y utilizaremos un parche “upwind” que utiliza, para cada nodo de la malla, tres de sus vecinos, (fig 1) para obtener,

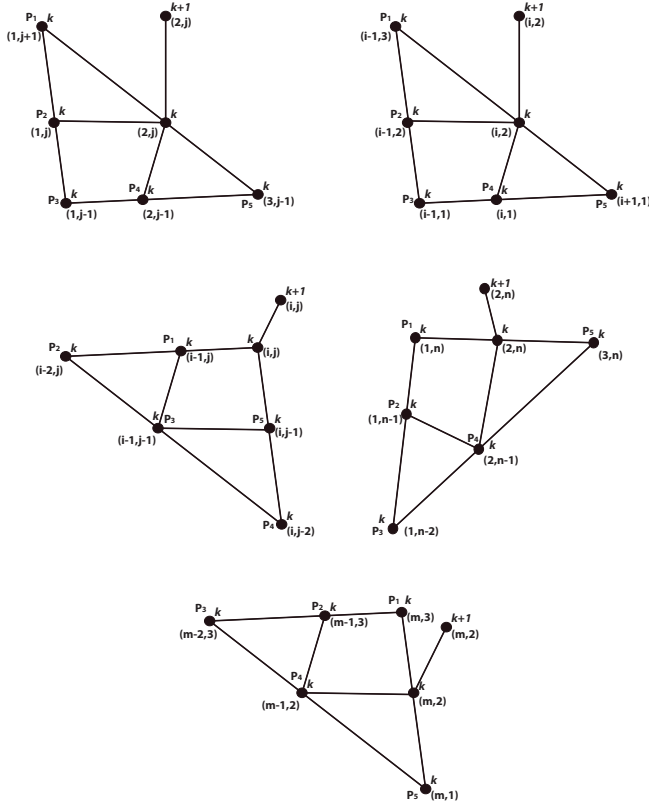
$$u_0^{k+1} = u_0^k + \Gamma_0 u_0^k + \Gamma_1 u_1^k + \Gamma_2 u_2^k + \Gamma_3 u_3^k, \quad (8)$$

donde  $u_{i,j}^k$  es la aproximación a  $u$  en el punto  $i, j$  de la malla en el nivel de tiempo  $k$ , con  $1 < i \leq m$ ,  $1 < j \leq n$ ,  $0 < k$ .



**Figura 1:** Parche “Upwind”.

Otra elección posible es elegir, para cada nodo de la malla, 5 de sus vecinos (fig. 2)



**Figura 2:** Diferentes stencils del esquema de seis puntos.

lo cual, para cada uno de los casos nos arroja

$$u_0^{k+1} = u_0^k + \Gamma_0 u_0^k + \Gamma_1 u_1^k + \dots + \Gamma_5 u_5^k$$

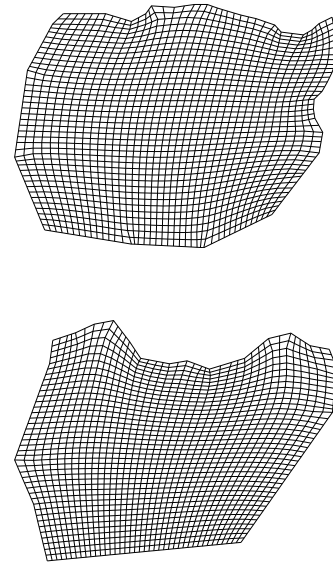
### 3 Pruebas Numéricas

Para las pruebas numéricas fueron seleccionadas dos regiones irregulares, se denotan como MIC y UCH. Todas ellas fueron escaladas y trasladadas al rectángulo  $[0, 1] \times [0, 1]$ . Para estas regiones se generaron mallas con 21 y 41 puntos por lado, utilizando el software UNAMALLA (fig. 3). Las siguientes funciones fueron seleccionadas para las pruebas como las condiciones inicial y de frontera en  $S_2$

$$\text{MIC: } u(x, y, t) = 0,2e^{((-x-0,4-0,3t)^2 - (y-0,25-0,3t)^2)/,01)},$$

$$\text{UCH: } u(x, y, t) = 0,2e^{((-x-0,45-0,3t)^2 - (y-0,5-0,3t)^2)/,01)},$$

el intervalo de tiempo  $[0, 1]$  se dividió uniformemente en 2023 subintervalos. Utilizando estos valores, ambos esquemas de Lax-Wendroff fueron aplicados en las mallas generadas.



**Figura 3:** Mallas de  $41 \times 41$  para las regiones MIC y UCH respectivamente.

En un tiempo dado  $k$ , los valores de las normas de los errores cuadráticos son calculados como la función de la malla

$$\|e^k\|_2 = \sqrt{\sum_{i,j} (u_{i,j}^k - U_{i,j}^k)^2 \mathcal{A}_{i,j}},$$

donde  $U_{i,j}^k$  y  $u_{i,j}^k$  son el valor aproximado y el valor exacto, respectivamente, de la solución calculado en el elemento  $i, j$ , y  $\mathcal{A}_{i,j}$  es el área del polígono definido por  $\{P_{i+1,j}, P_{i,j+1}, P_{i-1,j}, P_{i,j-1}\}$ . En las tablas (1) y (2) se muestran las comparaciones de los errores cuadráticos calculados para cada uno de los esquemas, calculados en diferentes niveles de tiempo .

Tiempo	MIC6-41	MIC4-41	MIC6-81	MIC4-81
0.2	9.94689E-04	3.37870E-03	2.51720E-04	1.79819E-03
0.4	1.90578E-03	5.72534E-03	4.95780E-04	3.21863E-03
0.6	2.74889E-03	7.47673E-03	7.33288E-04	4.39042E-03
0.8	3.52592E-03	8.90078E-03	9.63062E-04	5.42054E-03
1	4.18341E-03	1.00509E-02	1.17664E-03	6.32403E-03
1.2	4.58228E-03	1.09010E-02	1.35114E-03	7.03036E-03
1.4	4.30207E-03	1.03554E-02	1.25441E-03	6.75443E-03
1.6	2.62256E-03	5.19720E-03	8.43889E-04	3.15201E-03
1.8	8.54396E-04	2.81098E-03	2.45275E-04	1.72499E-03
2	3.47884E-04	1.47913E-03	1.19442E-04	8.87659E-04

**Tabla 1:** Errores en mallas de MIC con esquema de 4 puntos y de 6 puntos.

Tiempo	UCH6-41	UCH4-41	UCH6-81	UCH4-81
0.2	7.18202E-04	2.11223E-03	1.82321E-04	1.09235E-03
0.4	1.45774E-03	3.63714E-03	3.80097E-04	1.96817E-03
0.6	2.21738E-03	4.80409E-03	5.93608E-04	2.68195E-03
0.8	2.87029E-03	5.62231E-03	7.89542E-04	3.19847E-03
1	2.69085E-03	6.05978E-03	7.90683E-04	3.52662E-03
1.2	2.08307E-03	4.28012E-03	5.93355E-04	2.36662E-03
1.4	5.52660E-04	1.34209E-03	1.71576E-04	8.26164E-04
1.6	2.42048E-04	7.73178E-04	6.84829E-05	3.72653E-04
1.8	4.05732E-05	1.87926E-04	7.67959E-06	5.47649E-05
2	2.60173E-06	2.72907E-05	2.23069E-07	3.57997E-06

**Tabla 2:** Errores en mallas de UCH con esquema de 4 puntos y de 6 puntos.

## 4 Conclusiones

Como es descrito en [7] el esquema modificado de Lax-Wendroff definido en la ecuación (8) es una opción simple y económica de aproximar la solución de la ecuación de advección en algunas regiones planas irregulares utilizando mallas estructuradas. Sin embargo, la geometría de la región sigue representando un problema muy importante ya que no siempre se pueden cumplir las condiciones para lograr estabilidad en el método. Sin embargo, el esquema de seis puntos descrito logra superar algunos de estos inconvenientes, describiendo un esquema mucho más estable que obtiene resultados numéricos más precisos que el esquema de cuatro puntos.

## Referencias

- [1] P. Barrera-Sánchez, L. Castellanos, F. J. Domínguez-Mota, G. F. González-Flores and A. Pérez-Domínguez, *Adaptive discrete harmonic grid generation*, *Math. Comput. Simulation*, 79 (2009), pp. 1792–1809.
- [2] P. Barrera-Sánchez, F. J. Domínguez-Mota, G. F. González-Flores and J. G Tinoco-Ruiz, Generating quality structured convex grids on irregular regions, *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 34 (2009), pp. 76–89.
- [3] UNAMALLA, *An Automatic Package for Numerical Grid Generation*, <http://www.matematicas.unam.mx/unamall>
- [4] M. Celia and W. Gray, *Numerical Methods for Differential Equations*, Prentice-Hall, 1992.
- [5] F. Domínguez-M., S. Mendoza and J. Tinoco, Finite Difference Schemes Satisfying an Optimality Condition, *MASCOT10 Proceedings*, (2011).
- [6] A. Iserles, *A First Course in the Numerical Analysis of Differential Equations*, Cambridge Texts in Applied Mathematics, Cambridge University Press, (2008).
- [7] F. Domínguez-M., J. Tinoco-R., G. Tinoco-G., P. Michel-F. and E. Ruiz-D., *A modified Lax-Wendroff scheme for irregular 2D space regions*, *MASCOT12 Proceedings*, (2012).