

## Estimación de error en dinámica de sólidos deformables

Luis M. Lacoma

Dpto. de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras  
ETSI de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Madrid  
Profesor Aranguren s/n, 28040 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 5232; Fax: 34-91-336 6702  
e-mail: ll@mecanica.upm.es

Ignacio Romero

Dpto. de Mecánica Estructural  
ETSI Industriales, Universidad Politécnica de Madrid  
José Gutiérrez Abascal 2, 28006 Madrid, España  
Tel.: 34-91-336 3130; Fax: 34-91-336 3130  
e-mail: iromero@etsii.upm.es

### Resumen

En este artículo se desarrollan dos nuevos estimadores de error para ser utilizados en problemas de dinámica de sólidos y dinámica estructural. Más concretamente, se presenta una formulación de ambos estimadores para ser empleados junto con el método de Newmark. Sin embargo, siguiendo el mismo proceso y con ligeras modificaciones, se pueden construir estimadores equivalentes a los desarrollados para muchos otros métodos de integración temporal. Además se estudia el comportamiento de los dos nuevos estimadores comparándolos con otros existentes en la literatura, comprobándose su correcto funcionamiento incluso en problemas, donde las fuerzas externas son poco suaves y en los que fallan varios de los estimadores existentes.

**Palabras clave:** *estimación de error, dinámica de sólidos, dinámica estructural, elementos finitos.*

### ERROR ESTIMATION IN DEFORMABLE SOLID DYNAMICS

### Summary

In this article two new error estimators are developed to be used in solid and structural dynamic problems. Specifically, they are formulated for the Newmark method. However, equivalent estimators can be built for many other time integration methods following a similar approach and with minor changes. Moreover, the behaviour of both new estimators is analyzed and they are compared to estimators proposed in literature. This study shows that the new estimators work correctly even in problems where external load are not smooth and in which several existing estimators fail.

**Keywords:** *error estimation, solid dynamics, structural dynamics, finite elements.*

## INTRODUCCIÓN

Los problemas de dinámica de sólidos y dinámica estructural son abordados, en la gran mayoría de casos, mediante un proceso denominado de semidiscretización. Primeramente se procede discretizando las variables espaciales con un método numérico, normalmente el método de los elementos finitos, resultando un sistema de ecuaciones diferenciales de orden dos, en el que la variable temporal sigue siendo todavía una variable continua. En las referencias 1, 9 y 12 se explica detalladamente este proceso de semidiscretización.

Posteriormente, el sistema de ecuaciones diferenciales es integrado a lo largo del tiempo utilizando algún método de integración temporal. En la literatura matemática existe una gran cantidad de métodos para la resolución numérica de ecuaciones diferenciales, como los métodos Runge-Kutta, Adams, y BDF (para más detalles, consultar las monografías<sup>5,6</sup>). Sin embargo, para resolver los problemas de dinámica estructural se han diseñado métodos específicos, entre los que destacan el método de Newmark<sup>11</sup>, el método HHT<sup>7</sup> y el  $\alpha$ -generalizado<sup>4</sup>. En las referencias 1 y 9 se puede encontrar un análisis detallado de algunos de estos métodos.

Al estar empleando un método numérico para integrar las ecuaciones del movimiento es inevitable la aparición de errores. Salvo en el caso de problemas muy simples no es posible obtener exactamente estos errores, ya que ello implicaría un conocimiento de la solución exacta del problema. Sin embargo, puede ser muy interesante para el analista tener una idea de la magnitud de dichos errores para así conocer la precisión de los resultados obtenidos. Además, la estimación de error puede ser utilizada para construir métodos adaptativos, es decir, que a partir del conocimiento del error permiten seleccionar automáticamente el tamaño del paso de tiempo<sup>2,10</sup>.

Diversos han sido los estimadores de error propuestos en la literatura<sup>2,3,10,14-16</sup> para los distintos métodos de integración temporal utilizados en los problemas de dinámica estructural. Todos estos estimadores, que son obtenidos siguiendo un proceso similar, funcionan correctamente en problemas, donde la respuesta del sistema es suficientemente suave. Sin embargo, en aquellos casos donde el sistema sigue una respuesta “brusca” (poco suave), por ejemplo, en sistemas sometidos a cargas externas de tipo escalón o tipo triangular, se ha comprobado que algunos de los estimadores comúnmente empleados sobreestima en exceso el error real, produciendo unas cotas de error de poca utilidad práctica.

Por esto el objetivo de este trabajo es desarrollar estimadores de error que, por un lado pueden ser fácilmente incorporados en programas de elementos finitos ya existentes y que, por otro presentan un comportamiento correcto ante cualquier tipo de respuesta del sistema.

El presente artículo comienza con el planteamiento del problema de valores iniciales que gobierna el comportamiento dinámico de sólidos y estructuras para posteriormente describir uno de los métodos de integración temporal más utilizado en este tipo de problemas, que es el método de Newmark. A continuación se presentan diversos conceptos sobre la estimación de error, que son necesarios conocer para, en la siguiente sección, desarrollar dos nuevos estimadores. Seguidamente se realizan diversas simulaciones numéricas que ponen de manifiesto las ventajas de estos dos nuevos estimadores frente a los existentes en la literatura. Finalmente se termina el artículo con las conclusiones más importantes de este trabajo.

## ECUACIONES QUE GOBIERNAN LA ELASTODINÁMICA

En este artículo se pretende estudiar el error, que se comete al resolver numéricamente el problema de la elastodinámica y de la dinámica de estructuras. Para ello se comienza presentando las ecuaciones, que gobiernan dicho problema y que constituyen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de orden dos. Éste se obtiene por medio de una

discretización de las variables espaciales mediante algún método numérico, en la mayoría de los casos el método de los elementos finitos. Consultar las referencias 1, 9 y 12 para una explicación detallada de este proceso. Así las ecuaciones semidiscretas quedan

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K}\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t), & t \in [0, T] \\ \mathbf{U}(0) = \mathbf{U}_0 \\ \dot{\mathbf{U}}(0) = \mathbf{V}_0 \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\mathbf{M}$  es la matriz de masa,  $\mathbf{C}$  la matriz de amortiguamiento y  $\mathbf{K}$  la matriz de rigidez, todas simétricas y de dimensión  $n_{\text{gdl}} \times n_{\text{gdl}}$ , siendo gdl el número de grados de libertad del problema. La matriz  $\mathbf{M}$  es definida-positiva, mientras que  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{K}$  son semidefinida-positivas. El vector  $\mathbf{F}(t)$  denota las fuerzas externas aplicadas sobre el sistema y es de dimensión  $n_{\text{gdl}}$ . Los vectores  $\mathbf{U}(t)$ ,  $\dot{\mathbf{U}}(t)$  y  $\ddot{\mathbf{U}}(t)$  son los vectores de desplazamientos, velocidades y aceleraciones respectivamente, donde el símbolo  $\dot{\phantom{x}}$  indica derivada respecto del tiempo. Por último, los vectores  $\mathbf{U}_0$  y  $\mathbf{V}_0$  son respectivamente el desplazamiento y velocidad iniciales.

## MÉTODO DE NEWMARK

Se ha visto en la sección anterior, que el problema de la elastodinámica queda reducido a un problema de valores iniciales, definido mediante un sistema de ecuaciones diferenciales lineales de orden dos. Generalmente la resolución analítica de este problema sería muy cara y es necesario recurrir a la utilización de algún método numérico. Uno de los métodos más ampliamente utilizado y que está especialmente diseñado para la resolución de este tipo de problemas es el método de Newmark<sup>11</sup>.

Se parte del intervalo de tiempo  $[0, T]$ , que es dividido en  $N$  subintervalos  $[t_n, t_{n+1}]$ . Dado un paso de tiempo  $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n$  y conocidos los valores del desplazamiento, velocidad y aceleración en el tiempo  $t_n$ , la solución en el instante  $t_{n+1}$  se obtiene resolviendo el siguiente sistema lineal de ecuaciones

$$\begin{cases} \mathbf{M}\mathbf{A}_{n+1} + \mathbf{C}\mathbf{V}_{n+1} + \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{F}_{n+1} \\ \mathbf{U}_{n+1} = \mathbf{U}_n + \Delta t_n \mathbf{V}_n + \frac{\Delta t_n^2}{2} [(1 - 2\beta)\mathbf{A}_n + 2\beta\mathbf{A}_{n+1}] \\ \mathbf{V}_{n+1} = \mathbf{V}_n + \Delta t_n [(1 - \gamma)\mathbf{A}_n + \gamma\mathbf{A}_{n+1}] \end{cases} \quad (2)$$

donde  $\mathbf{U}_{n+1}$ ,  $\mathbf{V}_{n+1}$  y  $\mathbf{A}_{n+1}$  son las aproximaciones numéricas del desplazamiento  $\mathbf{U}$ , la velocidad  $\dot{\mathbf{U}}$  y la aceleración  $\ddot{\mathbf{U}}$  en el tiempo  $t_{n+1}$  respectivamente; y  $\mathbf{F}_{n+1} = \mathbf{F}(t_{n+1})$  es el vector de fuerzas externas, que actúan sobre el sistema en dicho instante  $t_{n+1}$ .

En el instante inicial  $t = 0$  el valor del desplazamiento y velocidad se conocen exactamente, ya que son  $\mathbf{U}_0$  y  $\mathbf{V}_0$  respectivamente. La aceleración en este instante se calcula resolviendo el siguiente sistema

$$\mathbf{A}_0 = \mathbf{M}^{-1}[\mathbf{F}(0) - \mathbf{C}\mathbf{V}_0 - \mathbf{K}\mathbf{U}_0] \quad (3)$$

El método depende de dos parámetros,  $\beta$  y  $\gamma$ , que dan lugar a los distintos algoritmos, que forman la familia de integradores de Newmark (consultar la referencia 9 para una descripción detallada de los valores que pueden adoptar los parámetros).

## ESTIMACIÓN DE ERROR

Al resolver el problema (1) mediante algún método numérico, como el método de Newmark explicado en la sección anterior, es inevitable la aparición de ciertos errores. Sería interesante el poder cuantificar el tamaño de estos errores para así tener una idea de la precisión, con que se han obtenido los resultados.

El objetivo de esta sección es la definición de los diversos tipos de errores, así como de algunos conceptos sobre la estimación de error, que serán necesarios para el posterior desarrollo de estimadores.

El primer concepto que aparece de forma natural y que es el valor que se desearía conocer al resolver numéricamente el problema (1), es la diferencia entre la solución exacta y la solución numérica obtenida. Esta cantidad es lo que se denomina *error global* y que se define como

$$\mathbf{e}_G(t_n) := \boldsymbol{\varphi}(t_n) - \boldsymbol{\varphi}_n \quad (4)$$

donde  $\boldsymbol{\varphi}(t) = \langle \mathbf{U}(t), \dot{\mathbf{U}}(t) \rangle$  es la solución exacta al problema (1), y  $\boldsymbol{\varphi}_n = \langle \mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n \rangle$  es la solución aproximada obtenida utilizando algún método numérico, ambas en el instante de tiempo  $t_n$ .

Como se ha comentado anteriormente, el *error global* es la cantidad que nos informa más claramente de la precisión de los resultados obtenidos. Sin embargo, en la mayoría de los casos es muy difícil de calcular y debe ser aproximado a partir de lo que se denomina *error local*.

Este *error local* se define como el error cometido en un solo paso de tiempo, es decir, es el error que se comete al resolver numéricamente el siguiente problema de valores iniciales, denominado problema local,

$$\begin{cases} \mathbf{M}\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) + \mathbf{C}\dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) + \mathbf{K}\tilde{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{F}(t), & t \in [t_n, t_{n+1}] \\ \tilde{\mathbf{u}}(t_n) = \mathbf{U}_n \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n) = \mathbf{V}_n \end{cases} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{U}_n$  y  $\mathbf{V}_n$  constituyen las condiciones iniciales y son el desplazamiento y la velocidad en el instante de tiempo  $t_n$  obtenidas numéricamente. Por tanto, si se denota con  $\tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t) = \langle \tilde{\mathbf{u}}(t), \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t) \rangle$  a la solución exacta del problema local (5), el *error local* en  $t_{n+1}$  queda

$$\mathbf{e}(t_{n+1}) := \tilde{\boldsymbol{\varphi}}(t_{n+1}) - \boldsymbol{\varphi}_{n+1} \quad (6)$$

Para poder comparar la magnitud de los distintos errores obtenidos es necesario medirlos mediante alguna norma. En este trabajo se utilizará la norma de la energía, que se define como sigue

$$\begin{aligned} \|\boldsymbol{\varphi}(t)\|_E^2 &:= \frac{1}{2} \boldsymbol{\varphi}(t) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M} \end{bmatrix} \boldsymbol{\varphi}(t) \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{U}(t) \cdot \mathbf{K}\mathbf{U}(t) + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}(t) \cdot \mathbf{M}\dot{\mathbf{U}}(t) \end{aligned} \quad (7)$$

y que es la norma natural en los problemas de elastodinámica teniendo un claro significado físico, ya que es la suma de la energía cinética más la energía interna de deformación. En la referencia 12 se puede consultar más detalles sobre esta norma.

A partir del conocimiento de los *errores locales* es posible obtener una cota del *error global* utilizando el siguiente teorema.

**Teorema 1** *El error global en instante de tiempo  $t \in [0, T]$ , medido en la norma de la energía, está acotado por la suma de la norma de la energía de los errores locales, es decir*

$$\|\mathbf{e}_G(t_n)\|_E \leq \sum_{i=1}^n \|\mathbf{e}(t_i)\|_E \quad (8)$$

DEMOSTRACIÓN: Consultar la referencia 13 ■

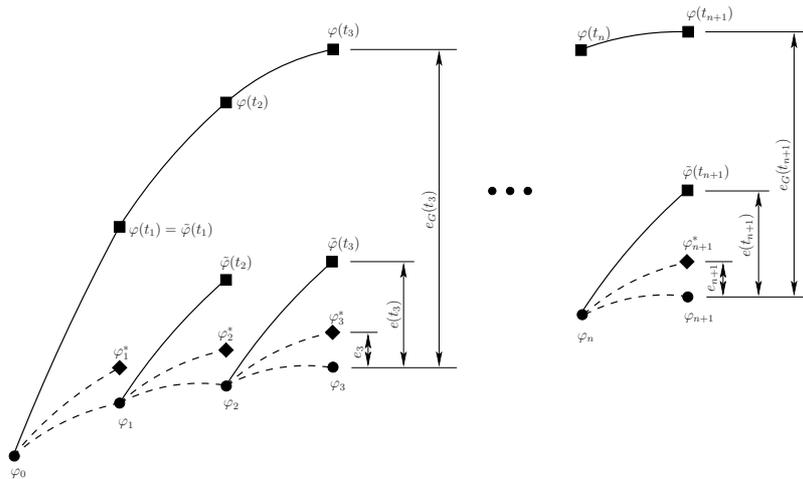
Hasta ahora, tanto el error global como el error local que han sido definidos son cantidades exactas, que no pueden ser calculadas salvo en el caso de problemas muy sencillos. A continuación se va a presentar el concepto de estimación de error, que permitirá aproximar convenientemente el valor de estos errores exactos.

Supóngase que se puede calcular una solución al problema local (5), que tenga al menos un orden más de precisión que la solución numérica. Esta solución, que se va a denotar  $\varphi_{n+1}^*$  y se denominará *solución mejorada*, debe poder ser calculada con un coste computacional bajo. Si el método numérico utilizado tiene orden  $k$ , utilizando la *solución mejorada* se puede plantear que

$$\begin{aligned} \mathbf{e}(t_{n+1}) &= \tilde{\varphi}(t_{n+1}) - \varphi_{n+1} = \underbrace{\tilde{\varphi}(t_{n+1}) - \varphi_{n+1}^*}_{\mathcal{O}(\Delta t^{k+2})} + \underbrace{\varphi_{n+1}^* - \varphi_{n+1}}_{\mathcal{O}(\Delta t^{k+1})} \\ &\approx \varphi_{n+1}^* - \varphi_{n+1} = \mathbf{e}_{n+1} \end{aligned} \quad (9)$$

La cantidad  $\mathbf{e}_{n+1}$  es una aproximación al error local exacto y, por tanto constituye una estimación de dicho error local. Además es una cantidad que puede ser calculada, ya que no es preciso conocer la solución exacta.

Por tanto, para el diseño de un estimador suficientemente preciso, únicamente es necesario obtener una solución mejorada  $\varphi_{n+1}^*$ , cuyo orden sea mayor que el de la solución numérica. Es decir, en el caso de que se esté empleando un método de orden dos (por ejemplo, Newmark con  $\gamma = \frac{1}{2}$ ), cuyo error local es de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$ , la *solución mejorada* debe ser al menos de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ .



**Figura 1.** Esquema de las distintas soluciones y de los distintos errores (con trazo continuo se representan soluciones exactas, mientras que el trazo discontinuo indica soluciones numéricas)

Conocida una estimación para los errores locales, se puede obtener una estimación del error global exacto a partir de la suma de dichos errores locales<sup>13</sup>, es decir

$$\|\mathbf{e}_G(t_{n+1})\|_E \approx \sum_{i=1}^{n+1} \|\mathbf{e}_i\|_E \quad (10)$$

En la referencia 13 se presenta una demostración rigurosa de la validez de esta aproximación.

Como resumen de esta sección y con el objetivo de aclarar la notación empleada en este artículo se presenta la Figura 1, donde se describen los distintos errores que han sido definidos a lo largo de esta sección.

## DISEÑO DE ESTIMADORES DE ERROR

En esta sección se presentan dos nuevos estimadores de error para el problema de la dinámica estructural y de sólidos. Ambos se desarrollan para el método de Newmark. Sin embargo, siguiendo un proceso similar al presentado en este trabajo y realizando mínimos cambios se pueden construir estimadores de error para otros métodos de integración temporal como el HHT<sup>7</sup> o el  $\alpha$ -generalizado<sup>4</sup>.

El primer estimador, que se denominará *tipo 1*, se contruye empleando un proceso similar al seguido en las referencias 10, 14 y 16 y que concretamente está basado en calcular una solución mejorada al problema local (5) a partir de desarrollos en series de Taylor.

El segundo estimador (llamado *tipo 2*) se obtiene calculando una aproximación a la solución exacta del problema local empleando una cuadratura de tipo Gauss-Lobatto.

### Estimador tipo 1

Como se ha explicado anteriormente, la estrategia que se va a seguir para la construcción de este nuevo estimador es la de calcular una solución al problema local (5) que tenga un orden de precisión mayor que el orden del método numérico que esté siendo utilizado.

En el caso que nos ocupa, el objetivo es desarrollar un estimador de error para el método de Newmark. Esta familia da lugar a métodos de orden uno (cuando  $\gamma \neq \frac{1}{2}$ ) y métodos de orden dos (cuando  $\gamma = \frac{1}{2}$ ). Aunque sería conveniente construir distintos estimadores según fuera el orden del método, por simplicidad sólo se va a construir un estimador para el caso de estar empleando un método de orden dos. Hay que resaltar que este estimador también será válido en el caso de utilizar un método de la familia de Newmark de orden uno.

La solución exacta en el instante de tiempo  $t_{n+1}$  al problema local (5),  $\tilde{\varphi}(t_{n+1})$ , puede ser expresada mediante un desarrollo en serie de Taylor en función de valores evaluados en el instante  $t_n$

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}(t_{n+1}) &= \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(t_{n+1}) \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_{n+1}) \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} \tilde{\mathbf{u}}(t_n) + \Delta t_n \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n) + \frac{\Delta t_n^2}{2} \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n) + \frac{\Delta t_n^3}{6} \dot{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}}(t_n) + \frac{\Delta t_n^4}{24} \ddot{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}}(\xi) \\ \dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n) + \Delta t_n \ddot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n) + \frac{\Delta t_n^2}{2} \dot{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}}(t_n) + \frac{\Delta t_n^3}{6} \ddot{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}}(t_n) + \frac{\Delta t_n^4}{24} \dot{\ddot{\ddot{\tilde{\mathbf{u}}}}}(\eta) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (11)$$

donde  $\xi, \eta \in [t_n, t_{n+1}]$  y  $\tilde{\mathbf{u}}(t_n)$ ,  $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n)$  son las condiciones iniciales del problema local (5), que valen  $\mathbf{U}_n$  y  $\mathbf{V}_n$  respectivamente.

Partiendo de (11) y despreciando el último término en cada una de las dos expresiones, se obtiene una aproximación a la solución exacta del problema local de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ . Se ha resaltado en el párrafo anterior, que el valor de  $\tilde{\mathbf{u}}(t_n)$  y  $\dot{\tilde{\mathbf{u}}}(t_n)$  se conoce exactamente. Por el

contrario, esto no es así para  $\ddot{\mathbf{u}}(t_n)$ ,  $\dot{\ddot{\mathbf{u}}}(t_n)$  y  $\ddot{\ddot{\mathbf{u}}}(t_n)$ . Sin embargo, no es necesario conocer el valor exacto de estas derivadas para obtener una aproximación de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ , sino que es suficiente con calcular unas aproximaciones de orden tres, dos y uno a los valores de la segunda, tercera y cuarta derivada, respectivamente<sup>13</sup>. Es decir, si se denomina mediante  $\mathbf{A}_n^*$ ,  $\mathbf{S}_n^*$  y  $\mathbf{R}_n^*$  a estas aproximaciones, es suficiente con que

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n^* &= \ddot{\mathbf{u}}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^3) \\ \mathbf{S}_n^* &= \dot{\ddot{\mathbf{u}}}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t^2) \\ \mathbf{R}_n^* &= \ddot{\ddot{\mathbf{u}}}(t_n) + \mathcal{O}(\Delta t)\end{aligned}\tag{12}$$

Utilizando estas aproximaciones, ya se puede definir una *solución mejorada*  $\varphi_{n+1}^*$  al problema local, que es de un orden mayor que la solución obtenida empleando el método de Newmark. Así

$$\varphi_{n+1}^* = \begin{Bmatrix} \mathbf{U}_n + \Delta t_n \mathbf{V}_n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{A}_n^* + \frac{\Delta t_n^3}{6} \mathbf{S}_n^* \\ \mathbf{V}_n + \Delta t_n \mathbf{A}_n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{S}_n^* + \frac{\Delta t_n^3}{6} \mathbf{R}_n^* \end{Bmatrix}\tag{13}$$

Para poder determinar una expresión para el estimador de error únicamente queda encontrar unas expresiones válidas para  $\mathbf{A}_n^*$ ,  $\mathbf{S}_n^*$  y  $\mathbf{R}_n^*$ . En este caso se proponen las siguientes

$$\begin{aligned}\mathbf{A}_n^* &:= \mathbf{A}_n \\ \mathbf{S}_n^* &:= \mathbf{M}^{-1}[\dot{\mathbf{F}}_n - \mathbf{C}\mathbf{A}_n^* - \mathbf{K}\mathbf{V}_n] \\ \mathbf{R}_n^* &:= \mathbf{M}^{-1}[\ddot{\mathbf{F}}_n - \mathbf{C}\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}\mathbf{A}_n]\end{aligned}\tag{14}$$

donde  $\dot{\mathbf{F}}_n$  y  $\ddot{\mathbf{F}}_n$  son respectivamente la primera y segunda derivada del vector de fuerzas externas respecto al tiempo y evaluadas en el instante  $t_n$ .

Finalmente se llega a una expresión cerrada para el estimador de error

$$\mathbf{e}_{n+1} = \varphi_{n+1}^* - \varphi_{n+1} = \begin{Bmatrix} \beta \Delta t_n^2 (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n+1}) + \frac{\Delta t_n^3}{6} \mathbf{S}_n^* \\ \gamma \Delta t_n (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n+1}) + \frac{\Delta t_n^2}{2} \mathbf{S}_n^* + \frac{\Delta t_n^3}{6} \mathbf{R}_n^* \end{Bmatrix}\tag{15}$$

### Observaciones:

- i) Para el cálculo del estimador propuesto es necesario resolver dos sistemas lineales de ecuaciones (16) y (17), donde la matriz de coeficientes es siempre la matriz de masa  $\mathbf{M}$ . Si se utiliza un método directo (por ejemplo LU), sólo es necesario factorizar una vez esta matriz, al principio del análisis, con lo que es relativamente barata la resolución de ambos sistemas de ecuaciones.
- ii) Otra posible alternativa es utilizar una matriz de masa diagonal, con lo que la resolución de los sistemas de ecuaciones se convierte en una tarea trivial.  $\square$

Conocida la solución numérica calculada por el método de Newmark  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{A}_n$  y  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}$  en los instantes de tiempo  $t_n$  y  $t_{n+1}$  respectivamente:

1. Calcular  $\mathbf{S}_n^*$

$$\mathbf{S}_n^* = \mathbf{M}^{-1}[\dot{\mathbf{F}}_n - \mathbf{C}\mathbf{A}_n^* - \mathbf{K}\mathbf{V}_n] \quad (16)$$

2. Calcular  $\mathbf{R}_n^*$

$$\mathbf{R}_n^* = \mathbf{M}^{-1}[\ddot{\mathbf{F}}_n - \mathbf{C}\mathbf{S}_n^* - \mathbf{K}\mathbf{A}_n] \quad (17)$$

3. Calcular el estimador de error

$$\mathbf{e}_{n+1} = \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{e}_{n+1}^d \\ \mathbf{e}_{n+1}^v \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \beta \Delta t_n^2 (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n+1}) + \frac{\Delta t_n^3}{6} \mathbf{S}_n^* \\ \gamma \Delta t_n (\mathbf{A}_n - \mathbf{A}_{n+1}) + \frac{\Delta t_n^2}{2} \mathbf{S}_n^* + \frac{\Delta t_n^3}{6} \mathbf{R}_n^* \end{array} \right\} \quad (18)$$

4. Calcular el error en la norma de la energía

$$\|\mathbf{e}_{n+1}\|_E := \left[ \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n+1}^v \cdot \mathbf{M} \mathbf{e}_{n+1}^v + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n+1}^d \cdot \mathbf{K} \mathbf{e}_{n+1}^d \right]^{1/2} \quad (19)$$

**Tabla I.** Algoritmo para calcular el error mediante el estimador tipo 1

## Estimador tipo 2

En esta segunda sección se presenta un segundo estimador de error, cuya metodología puede servir para formular otros estimadores de error válidos para cualquier método de integración temporal, que esté siendo utilizado.

La solución exacta al problema local definido en (5), en el instante de tiempo  $t_{n+1}$ ,  $\tilde{\varphi}(t_{n+1})$ , se puede expresar mediante la utilización del teorema fundamental del cálculo de la siguiente manera

$$\tilde{\varphi}(t_{n+1}) = \tilde{\varphi}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\tilde{\varphi}}(\tau) d\tau \quad (20)$$

Se recuerda que el objetivo es calcular una aproximación a la solución del problema local de al menos un orden mayor que el del método numérico, que esté siendo utilizado. Por tanto el objetivo es aproximar el valor de la integral (20).

Sea  $\mathbf{Q}_n^{n+1}$  una aproximación de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$  a la integral definida en (20), es decir

$$\mathbf{Q}_n^{n+1} = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \dot{\tilde{\varphi}}(\tau) d\tau + \mathcal{O}(\Delta t^4) \quad (21)$$

Si se define la *solución mejorada* del problema local como

$$\varphi_{n+1}^* := \tilde{\varphi}(t_n) + \mathbf{Q}_n^{n+1} \quad (22)$$

es inmediato comprobar que dicha *solución mejorada* es una aproximación de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$  a la solución exacta definida en (20).

Ya que  $\tilde{\varphi}(t_n) = \langle \mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n \rangle$  es el vector que agrupa a las condiciones iniciales del problema local y por tanto es conocido, sólo queda por calcular el término  $Q_n^{n+1}$  para encontrar la *solución mejorada*, que permitirá construir el estimador de error. Si se utiliza una cuadratura de tipo Gauss-Lobatto\* con tres puntos, se obtiene una expresión para el término  $Q_n^{n+1}$

$$Q_n^{n+1} = \frac{\Delta t_n}{2} \left[ \frac{1}{3} \dot{\tilde{\varphi}}(t_n) + \frac{4}{3} \dot{\tilde{\varphi}}(t_{n+1/2}) + \frac{1}{3} \dot{\tilde{\varphi}}(t_{n+1}) \right] \quad (23)$$

El primer término en la expresión (23)  $\dot{\tilde{\varphi}}(t_n)$  se conoce exactamente, ya que no es más que la velocidad y la aceleración inicial del problema local. Por tanto

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t_n) = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{A}_n \end{array} \right\} \quad (24)$$

Los otros dos términos de (23) no es necesario conocerlos exactamente. Basta con calcular sendas aproximaciones de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$  para que  $Q_n^{n+1}$  siga teniendo una precisión de tamaño  $\mathcal{O}(\Delta t^4)$ . De esta manera, al estar utilizando el método de Newmark, la solución numérica en el instante  $t_{n+1}$  ( $\mathbf{U}_{n+1}$ ,  $\mathbf{V}_{n+1}$  y  $\mathbf{A}_{n+1}$ ) ya es una aproximación de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$  a la solución exacta del problema local. Por tanto se puede reemplazar  $\dot{\tilde{\varphi}}(t_{n+1})$  por  $\langle \mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1} \rangle$  con lo que

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t_{n+1}) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_{n+1} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1} \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{n+1} \\ \mathbf{A}_{n+1} \end{array} \right\} \quad (25)$$

El término que resta por conocer en (23) es el valor de la solución exacta del problema local en el instante intermedio del intervalo,  $t_{n+1/2}$ . A partir de los valores del desplazamiento, velocidad y aceleración en  $t_n$  y  $t_{n+1}$ , obtenidos con el método de Newmark, y utilizando desarrollos en series de Taylor, es posible obtener una aproximación de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^3)$  a  $\dot{\tilde{\varphi}}(t_{n+1/2})$ , es decir

$$\dot{\tilde{\varphi}}(t_{n+1/2}) = \left\{ \begin{array}{c} \dot{\mathbf{u}}_{n+1/2} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{n+1/2} \end{array} \right\} \approx \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{V}_{n+1/2}^* \\ \mathbf{A}_{n+1/2}^* \end{array} \right\} \quad (26)$$

quedando definidos  $\mathbf{V}_{n+1/2}^*$  y  $\mathbf{A}_{n+1/2}^*$  por las siguientes expresiones

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{n+1/2}^* &:= \mathbf{U}_n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{V}_n + \frac{\Delta t_n^2}{8} \mathbf{A}_n, \\ \mathbf{V}_{n+1/2}^* &:= \mathbf{V}_n + \frac{3\Delta t_n}{8} \mathbf{A}_n + \frac{\Delta t_n}{8} \mathbf{A}_{n+1}, \\ \mathbf{A}_{n+1/2}^* &:= \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{F}(t_{n+1/2}) - \mathbf{C} \mathbf{V}_{n+1/2}^* - \mathbf{K} \mathbf{U}_{n+1/2}^* \right] \end{aligned} \quad (27)$$

Finalmente ya se puede calcular el estimador de error local como la diferencia entre la *solución mejorada* y la numérica

$$\mathbf{e}_{n+1} = \varphi_{n+1}^* - \varphi_{n+1} = \varphi_n + Q_n^{n+1} - \varphi_{n+1} \quad (28)$$

---

\*La cuadratura de Gauss-Lobatto tiene una precisión de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^{2n-2})$ , donde  $n$  es el número de puntos que define dicha cuadratura<sup>8</sup>.

Como resumen de esta sección se presenta la Tabla II, donde se detalla el algoritmo necesario para el cálculo de este nuevo estimador de error.

Conocida la solución numérica calculada por el método de Newmark  $\mathbf{U}_n, \mathbf{V}_n, \mathbf{A}_n$  y  $\mathbf{U}_{n+1}, \mathbf{V}_{n+1}, \mathbf{A}_{n+1}$  en los instantes de tiempo  $t_n$  y  $t_{n+1}$  respectivamente:

1. Calcular la solución mejorada en el tiempo  $t_{n+1/2}$

$$\begin{aligned}\mathbf{U}_{n+1/2}^* &= \mathbf{U}_n + \frac{\Delta t_n}{2} \mathbf{V}_n + \frac{\Delta t_n^2}{8} \mathbf{A}_n \\ \mathbf{V}_{n+1/2}^* &= \mathbf{V}_n + \frac{3\Delta t_n}{8} \mathbf{A}_n + \frac{\Delta t_n}{8} \mathbf{A}_{n+1} \\ \mathbf{A}_{n+1/2}^* &= \mathbf{M}^{-1} \left[ \mathbf{F}(t_{n+1/2}) - \mathbf{C}\mathbf{V}_{n+1/2}^* - \mathbf{K}\mathbf{U}_{n+1/2}^* \right]\end{aligned}\quad (29)$$

2. Calcular el valor de la integral

$$\mathbf{Q}_n^{n+1} = \frac{\Delta t_n}{6} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_n \\ \mathbf{A}_n \end{Bmatrix} + \frac{4\Delta t_n}{6} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{n+1/2}^* \\ \mathbf{A}_{n+1/2}^* \end{Bmatrix} + \frac{\Delta t_n}{6} \begin{Bmatrix} \mathbf{V}_{n+1} \\ \mathbf{A}_{n+1} \end{Bmatrix} \quad (30)$$

3. Calcular el estimador de error

$$\mathbf{e}_{n+1} = \begin{Bmatrix} \mathbf{e}_{n+1}^d \\ \mathbf{e}_{n+1}^v \end{Bmatrix} = \boldsymbol{\varphi}_n + \mathbf{Q}_n^{n+1} - \boldsymbol{\varphi}_{n+1} \quad (31)$$

4. Calcular el error en la norma de la energía

$$\|\mathbf{e}_{n+1}\|_E := \left[ \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n+1}^v \cdot \mathbf{M}\mathbf{e}_{n+1}^v + \frac{1}{2} \mathbf{e}_{n+1}^d \cdot \mathbf{K}\mathbf{e}_{n+1}^d \right]^{1/2} \quad (32)$$

**Tabla II.** Algoritmo para calcular el error mediante el estimador tipo 2

### Observaciones:

- i) Al igual que ocurría con el estimador propuesto en la sección anterior, en este caso también es necesario resolver un sistema lineal de ecuaciones para calcular la variable  $\mathbf{A}_{n+1/2}^*$ . Para reducir el coste computacional de la resolución de este sistema se puede emplear un método directo, con lo que la matriz de coeficientes sólo es factorizada una vez o bien utilizar una matriz de masa diagonal.
- ii) Nada impide emplear otro tipo de cuadratura para aproximar la integral definida en (20). Sin embargo, la elección de una cuadratura de Gauss-Lobatto presenta la ventaja de que utiliza valores que ya son conocidos ( $\mathbf{V}_n, \mathbf{A}_n, \mathbf{V}_{n+1}$  y  $\mathbf{A}_{n+1}$ ).  $\square$

## SIMULACIONES NUMÉRICAS

En esta sección se presentan varias simulaciones numéricas para estudiar el comportamiento de los dos estimadores propuestos en el presente trabajo. Estos dos nuevos estimadores son comparados con otros, que han sido propuestos en la literatura<sup>10,14</sup> y que tienen una formulación similar a otros existentes<sup>2,3,16</sup>.

El primer ejemplo es un sistema de un único grado de libertad, que permite comparar los distintos estimadores con el error exacto tanto local como global. El último ejemplo es una simulación más realista, que corresponde al análisis dinámico de un bogie ferroviario. Ambos ejemplos serán resueltos utilizando la regla trapezoidal, que corresponde al método de Newmark, utilizando  $\gamma = 1/2$  y  $\beta = 1/4$ .

### Sistema masa-muelle

La primera simulación numérica que se presenta es un sistema masa-muelle con un sólo grado de libertad y con los siguientes valores numéricos: masa  $\mathbf{M} = 1$  kg, rigidez  $\mathbf{K} = 6$  N/m y un desplazamiento inicial  $\mathbf{U}(0) = 1$  m. Este problema es descrito por el siguiente problema de valores iniciales

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{U}}(t) + 6\mathbf{U}(t) = \mathbf{F}(t), & t \in [0, 5] \\ \mathbf{U}(0) = 1 \\ \dot{\mathbf{U}}(0) = 0 \end{cases} \quad (33)$$

El comportamiento de los estimadores propuestos es estudiado en dos situaciones diferentes. Primeramente el sistema es excitado con una carga sinusoidal, que produce una respuesta suave del mismo. Posteriormente se estudia la precisión de los estimadores, cuando el sistema presenta una respuesta no suave al ser excitado con una carga de tipo triangular.

### Carga senoidal

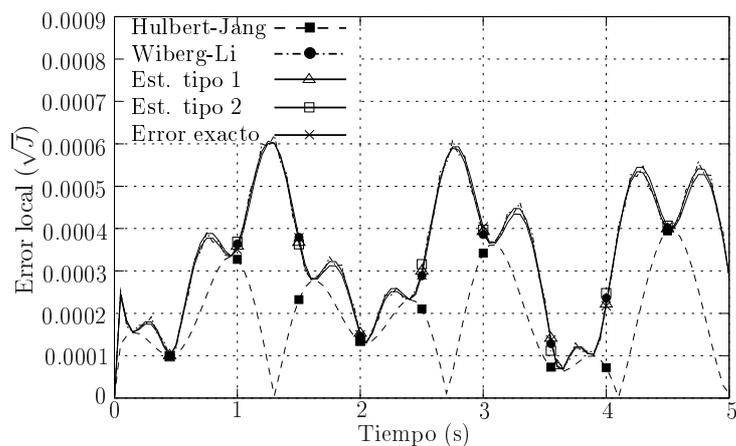
En este primer caso, la fuerza aplicada es

$$\mathbf{F}(t) = \sin(2\pi t), \quad t \in [0, 5] \quad (34)$$

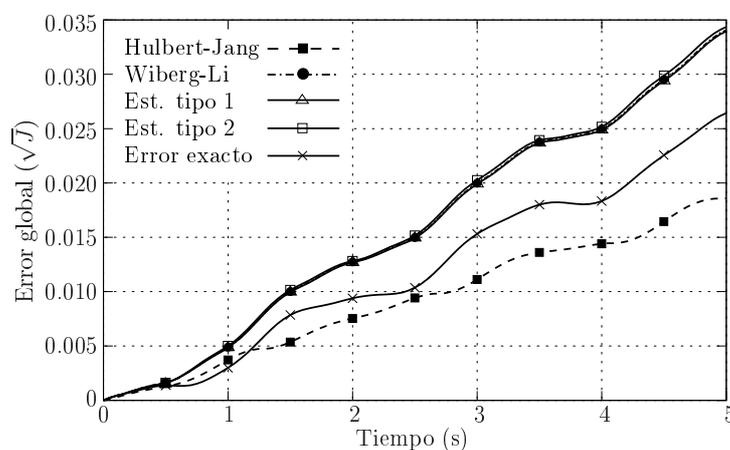
En la Figura 2 se representa la evolución del error local para un paso de tiempo fijo  $\Delta t = 0,05$  s. Tanto los dos estimadores propuestos en este trabajo como el estimador de la referencia 14 proporcionan una correcta estimación del error local exacto. Sin embargo, el estimador de la referencia 10 presenta un comportamiento deficiente, ya que subestima el error exacto. Esto lleva a que su uso sea peligroso dado que no está del lado de la seguridad, como sí que lo están los otros tres.

Al calcular el error global como suma de los errores locales estimados se observa la misma tendencia (Figura 3). Es decir, los estimadores propuestos en este artículo y el estimador de la referencia 14 predicen prácticamente el mismo error, que constituye una cota superior del error real. Por el contrario, el estimador de la referencia 10 no proporciona una cota válida.

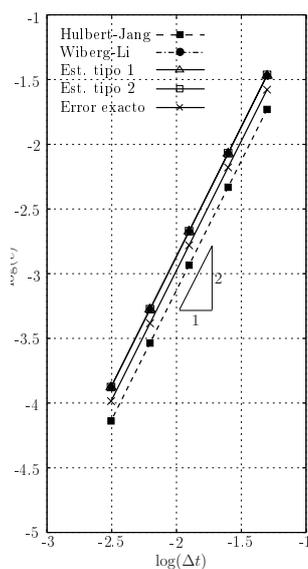
En la Figura 4 se muestra el error global para distintos pasos de tiempos. Como el problema se está resolviendo con la regla trapezoidal, que es un método de orden dos, es de esperar que el estimador refleje este mismo orden. Efectivamente, los cuatro estimadores analizados reproducen este hecho, aunque se sigue poniendo de manifiesto que el estimador de la referencia 10 subestima el error real.



**Figura 2.** Carga senoidal. Error local medido en la norma de la energía para un paso de tiempo  $\Delta t = 0,05$  s



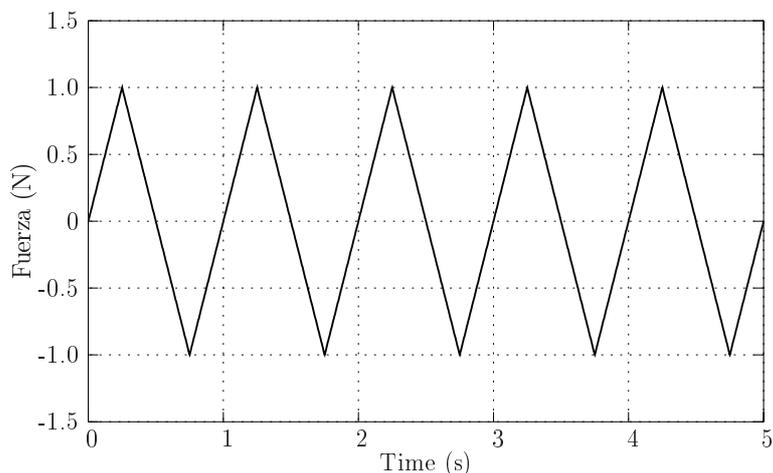
**Figura 3.** Carga senoidal. Error global medido en la norma de la energía para un paso de tiempo  $\Delta t = 0,05$  s



**Figura 4.** Carga senoidal. Error global estimado en el tiempo  $t = 5,0$  s

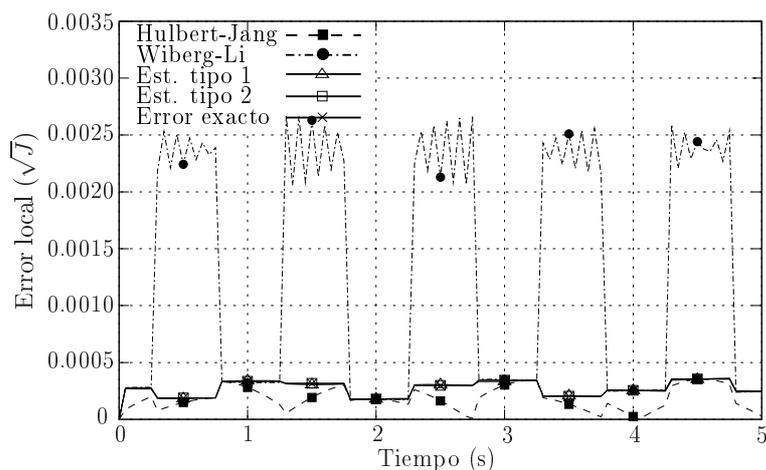
### Carga triangular

En el segundo caso se aplica sobre el sistema una carga exterior de tipo triangular de amplitud 1 N y período 1 s, como se muestra en la Figura 5. Esta fuerza provoca que la respuesta del sistema presente cambios bruscos en los instantes en los que la función que define la fuerza no es derivable.



**Figura 5.** Fuerza exterior de tipo triangular

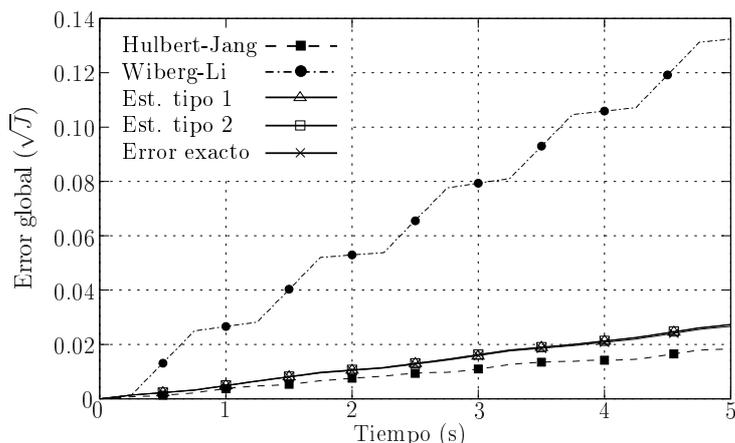
La Figura 6 presenta la evolución de los errores locales calculados por los cuatro estimadores así como el error local exacto. Se puede observar, cómo los dos estimadores presentados en este artículo estiman un error local prácticamente igual que el error exacto. Sin embargo, el estimador de la referencia 14 sufre unos cambios bruscos en aquellos instantes donde la función triangular cambia de pendiente, mientras que el estimador de la referencia 10 continúa subestimando el error real.



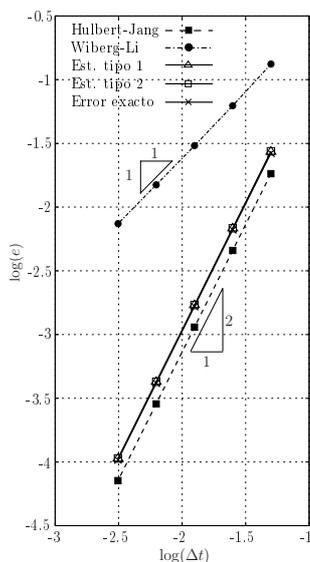
**Figura 6.** Carga triangular. Error local medido en la norma de la energía para un paso de tiempo  $\Delta t = 0,05$  s

Si se representa el error global, se aprecian las mismas características, como queda reflejado en la Figura 7. Mientras los dos nuevos estimadores calculan una cota correcta del error exacto, el estimador de la referencia 14 aunque sí que proporciona una cota del error real, lo sobreestima considerablemente. A su vez, el error global calculado por el estimador de la referencia 10 no constituye una cota aceptable.

Finalmente en la Figura 8 se muestra el orden de convergencia global para los cuatro estimadores analizados. Aquí se comprueba, que el estimador de la referencia 14 no sólo es que sobreestime los errores, sino que presenta un orden menor al que debería (orden  $\mathcal{O}(\Delta t)$  en vez de  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ ). Por el contrario, los dos nuevos estimadores presentan un orden de convergencia correcto.



**Figura 7.** Carga triangular. Error global medido en la norma de la energía para un paso de tiempo  $\Delta t = 0,05$  s



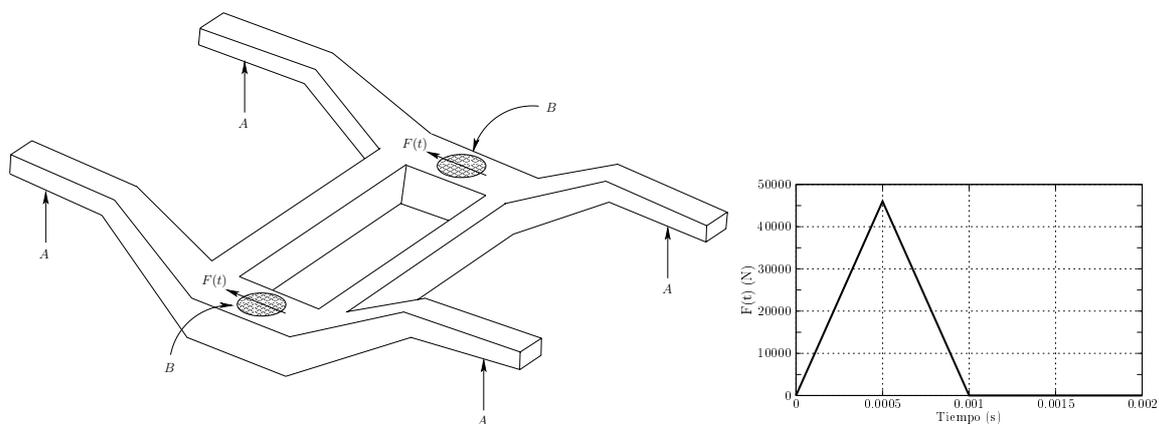
**Figura 8.** Carga triangular. Error global estimado en el tiempo  $t = 5,0$  s

### Análisis dinámico de un bogie ferroviario

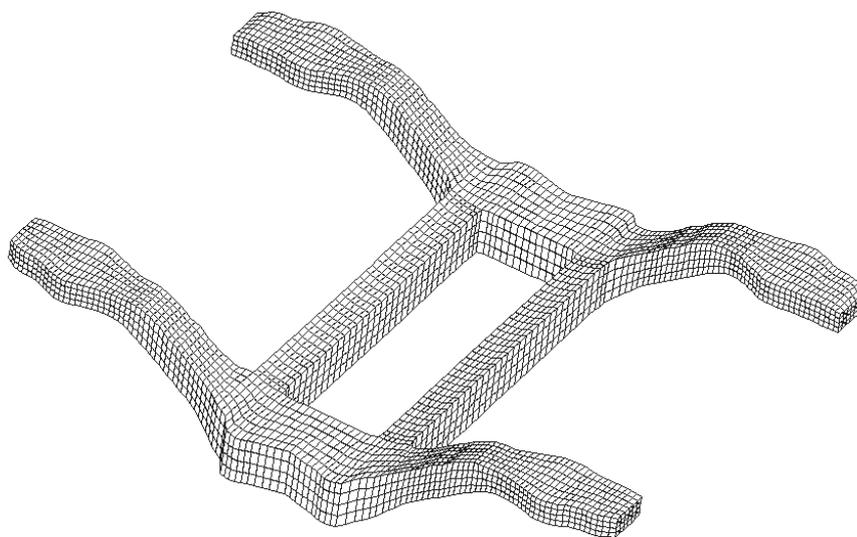
En este último caso se estudia el comportamiento de los estimadores de error en un problema más realista. Concretamente se trata del análisis dinámico de un bogie perteneciente a un tren que realiza un frenado de urgencia. En la Figura 9 se representa un esquema de la geometría del bogie, en el que se señalan las zonas, donde dicho bogie se apoya sobre las suspensiones, que lo unen a las ruedas (zona A), y las zonas, donde los vagones transmiten su carga al bogie (zona B).

El frenado de urgencia se puede simular mediante la aplicación de unas fuerzas según la dirección longitudinal del bogie, cuya magnitud se muestra en la Figura 9.

Para realizar el análisis dinámico del bogie se ha construido un modelo tridimensional de elementos finitos (Figura 10), que está formado por 10 780 nodos y 7 392 elementos, lo que se traduce en un modelo con 31 968 grados de libertad.

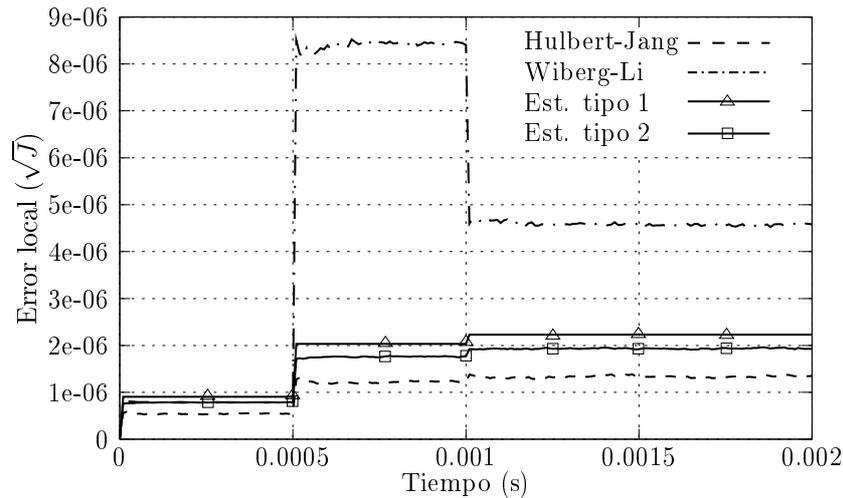


**Figura 9.** Izda: esquema de la geometría del bogie. Dcha: fuerza equivalente a un frenado de urgencia.



**Figura 10.** Malla de elementos finitos del bogie.

En la Figura 11 se muestra la evolución del error local para cada uno de los estimadores analizados utilizando un tamaño de paso de tiempo constante  $\Delta t = 10^{-6}$  s. Se puede comprobar, cómo los dos nuevos estimadores presentados en la sección anterior calculan un error muy similar. Por el contrario el estimador de la referencia 14 presenta una variación muy brusca en los instantes de tiempo  $t = 0,0005$  s y  $t = 0,001$  s, que son los instantes donde la función que define la fuerza triangular no es derivable. A su vez, el estimador de la referencia 10 proporciona un error estimado menor que el calculado por los estimadores tipos 1 y 2.



**Figura 11.** Error local medido en la norma de la energía para un paso de tiempo  $\Delta t = 10^{-6}$  s.

Si a partir de los errores locales se calcula el error global, se sigue observando el mismo comportamiento por parte de los estimadores (Figura 12). Mientras el estimador de la referencia 14 proporciona una sobreestimación del error global, los estimadores tipo 1 y tipo 2 desarrollados en este trabajo predicen prácticamente el mismo error. Respecto al estimador de la referencia 10 ya se ha comentado en el ejemplo anterior, que proporciona una subestimación del error, por lo que no puede ser usado como una cota superior del error exacto.

Por último, en la Figura 13 se analiza el orden del error global calculado por cada uno de los estimadores. Al haber utilizado como método de integración la regla trapezoidal, que es de orden  $\mathcal{O}(\Delta t^2)$ , es de esperar que los estimadores reproduzcan este mismo orden. Así se observa, que los dos nuevos estimadores proporcionan un error global con el orden correcto, mientras que el estimador de la referencia 14 no sólo subestima dicho error global (como quedó patente en las Figuras 11 y 12), sino que presenta únicamente un orden  $\mathcal{O}(\Delta t)$ .

En esta sección se han analizado los dos estimadores propuestos en este trabajo aplicándolos en dos problemas diferentes. El primero, un problema con un sólo grado de libertad, ha permitido poder comparar el error calculado por ambos estimadores con el error exacto. Se ha comprobado su buena precisión, incluso cuando el sistema presenta una respuesta brusca o poco suave (debido a la presencia de fuerzas exteriores de tipo triangular). Sin embargo, se ha puesto de manifiesto que otros estimadores propuestos en la literatura son menos precisos y robustos en este tipo de problemas. Finalmente se han analizado los estimadores en un problema más complejo presentando un comportamiento muy similar al que han exhibido en el primer ejemplo.

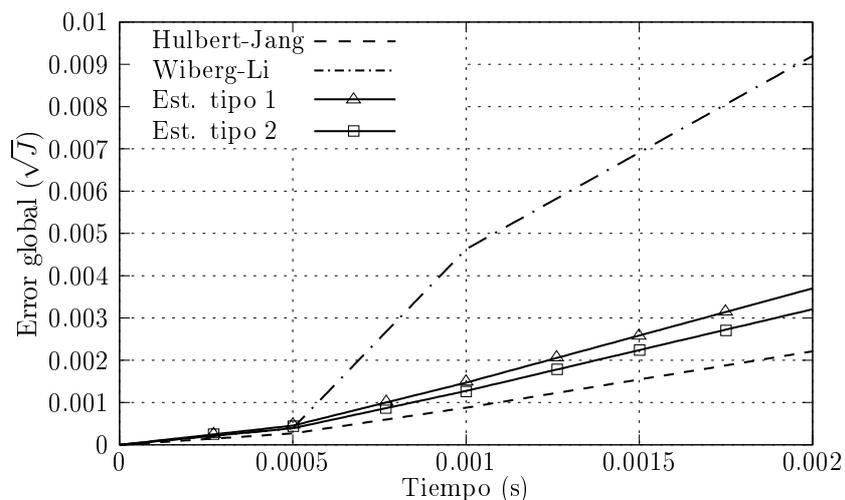


Figura 12. Error local medido en la norma de la energía para un paso de tiempo  $\Delta t = 10^{-6}$  s

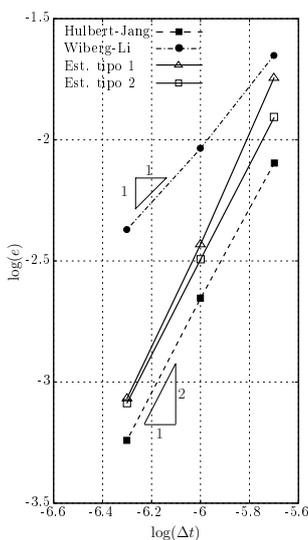


Figura 13. Error global estimado en el tiempo  $t = 0,002$  s

### CONCLUSIONES

En este trabajo se han presentado dos nuevos estimadores para problemas de dinámica de sólidos y de estructuras. Ambos han sido desarrollados para el método de Newmark, pero siguiendo un esquema muy similar al presentado es posible construir estimadores de error equivalentes para el resto de métodos de integración temporal.

Se ha comprobado que estos dos nuevos estimadores calculan unas cotas de error correctas en cualquier tipo de problema lineal incluso en aquéllos, en los que el sistema dinámico presenta un comportamiento no suave. Otra característica de ambos es que pueden ser fácilmente incorporados a programas de elementos finitos ya existentes.

## REFERENCIAS

- 1 T. Belytschko, "An overview of semidiscretization and time integration procedures", *Computational methods for transient analysis*, T. Belytschko y T.J.R. Hughes (eds.), pp. 1–65, Elsevier Science Publishers, (1983).
- 2 C.K. Choi y H.J. Chung, "Error estimates and adaptive time stepping for various direct time integration methods", *Computers & Structures*, Vol. **60**, pp. 923–944, (1996).
- 3 J. Chung, E.H. Cho y K. Choi, "A priori error estimator of the generalized- $\alpha$  method for structural dynamics", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **57**, pp. 537–554, (2003).
- 4 J. Chung y G.M. Hulbert, "A time integration algorithm for structural dynamics with improved numerical dissipation: the generalized- $\alpha$  method", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **60**, pp. 371–375, (1993).
- 5 E. Hairer, S.P. Norsett y G. Wanner, *Solving ordinary differential equation I: nonstiff problems*, Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, (1987).
- 6 E. Hairer y G. Wanner, *Solving ordinary differential equation II: stiff and differential-algebraic problems*, Springer series in computational mathematics. Springer-Verlag, (1991).
- 7 H.M. Hilber, T.J.R. Hughes y R.L. Taylor, "Improved numerical dissipation for time integration algorithms in structural dynamics", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **5**, pp. 283–292, (1977).
- 8 F.B. Hildebrand, *Introduction to Numerical Analysis*, Dover, (1987).
- 9 T.J.R. Hughe, *The finite element method: linear static and dynamic finite element analysis*, Dover, (2000).
- 10 G.M. Hulbert e I. Jang, "Automatic time step control algorithms for structural dynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **126**, pp. 155–178, (1995).
- 11 N.M. Newmark, "A method of computation for structural dynamics", *Journal of the Engineering Mechanics Division, ASCE*, pp. 67–94, (1959).
- 12 I. Romero, "On the stability and convergence of fully discrete solutions in linear elastodynamics", *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **191**, pp. 3857–3882, (2002).
- 13 I. Romero y L.M. Lacoma, "Error estimation for the semidiscrete equations of solid and structural mechanics", *Submitted to Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, (2004).
- 14 N.E. Wiberg y X.D. Li, "A post-processing technique and a posteriori error estimate for the newmark method in dynamic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **22**, pp. 465–489, (1993).
- 15 L.F. Zeng, N.E. Wiberg, X.D. Li e Y.M. Xie, "A posteriori local error estimation and adaptive time-stepping for newmark integration in dynamic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **21**, pp. 555–571, (1992).
- 16 O.C. Zienkiewicz e Y.M. Xie, "A simple error estimator and adaptive time stepping procedure for dynamic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. **20**, pp. 871–887, (1991).