

## ESTUDIO DEL COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO DE ESTRUCTURAS METALICAS DE ENTRAMADO

JOSE RAMON ATIENZA\*

y

RAMON IRLES\*\*

*E.T.S. de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
de la Universidad Politécnica de Valencia*

### RESUMEN

El propósito de este artículo es describir los principios teóricos que han servido de base para el desarrollo de un programa de análisis estructural en rigidez, con el que se puede hacer un estudio completo del comportamiento elastoplástico de entramados metálicos planos solicitados por cargas contenidas en su plano medio.

### SUMMARY

This paper describes the theoretical principles which have formed the basis of a computer program. With this program, that uses the stiffness method, it is possible to make a complete study of the elastoplastic behaviour of plane steel frameworks loaded on its middle plane.

### INTRODUCCION

Para predecir el comportamiento resistente de los entramados metálicos en situaciones próximas a su agotamiento es necesario considerar dos tipos de efectos no lineales:

- a) Las no linealidades mecánicas asociadas al comportamiento dúctil del acero.
- b) Las no linealidades geométricas asociadas al cambio de geometría inducido por las solicitaciones.

Existen diversos modelos de análisis estructural que permiten tener en cuenta estos efectos no lineales. El que nosotros vamos a exponer considera sólo las no linealidades de tipo mecánico. Sus características más importantes son:

- a) Es un método matricial en rigidez y, por consiguiente, válido para abordar el estudio de cualquier tipo de entramado.
- b) Estudia el proceso de "plastificación real" de las barras de entramado partiendo del diagrama ( $\sigma$ - $\epsilon$ ) con el que se caracteriza el comportamiento elastoplástico del acero estructural.
- c) Como veremos en un artículo posterior, es posible su ampliación con el fin de incorporar al análisis las no linealidades de tipo geométrico.

\* Catedrático de Estructuras y Puentes Metálicos.

\*\* Becario del Plan de Formación de Personal Investigador.

Así pues, en este artículo se pretende exponer la forma de plantear y resolver el conjunto de ecuaciones no lineales que rigen el comportamiento elastoplástico de un entramado metálico solicitado por un sistema de cargas que, en principio, puede evolucionar de una forma arbitraria. Para ello se va a aplicar una técnica incremental iterativa con iteraciones del tipo Newton-Raphson modificado en cada uno de los saltos de carga. Esta forma de operar requiere caracterizar el comportamiento elastoplástico del entramado mediante dos tipos de matrices: las matrices de rigidez secante correspondientes al salto entre dos estados de equilibrio y las matrices de rigidez tangente asociadas a los distintos estados de equilibrio. Estas matrices se deducen a partir de las matrices de rigidez secante y tangente de las barras que componen el entramado. Y éstas, a su vez, de las matrices de rigidez secante y tangente de las rebanadas que componen dichas barras. Todos estos conceptos son los que se van a revisar en los apartados que siguen.

## COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO DEL ACERO ESTRUCTURAL

Los modelos simplificados con los que se viene “idealizando” el comportamiento resistente del acero estructural se han representado en la Figura 1.

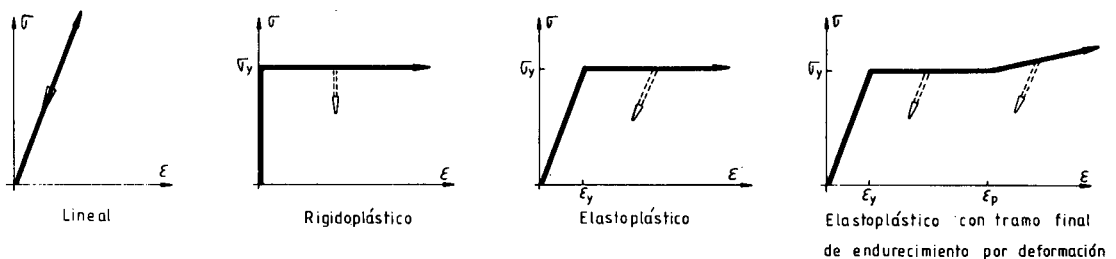


Fig. 1.— Modelos simplificados del comportamiento resistente del acero estructural.

Como es sabido, el modelo lineal desprecia las deformaciones plásticas frente a las elásticas y, por consiguiente, sólo es útil para predecir el comportamiento de las estructuras en situaciones próximas a la de servicio. Por el contrario, el modelo rigidoplástico desprecia las deformaciones elásticas frente a las plásticas y, consecuentemente, conduce a teorías que sólo son útiles para predecir las cargas de agotamiento de los sistemas estructurales. Siendo los modelos elastoplásticos los únicos que permiten predecir fielmente dicho comportamiento en todas las etapas del proceso de carga, es decir, desde el inicio de la sollicitación hasta que se produce el agotamiento resistente del sistema estructural.

## MATRICES DE RIGIDEZ DE LA REBANADA

El comportamiento elastoplástico de la rebanada se caracteriza, como ya hemos adelantado, mediante dos matrices: la matriz de rigidez secante correspondiente al salto entre dos estados genéricos de equilibrio J y K, y la matriz de rigidez tangente correspondiente a un estado J. Estas matrices se van a deducir en este apartado en base a las siguientes hipótesis simplificadoras:

- a) No se consideran los fenómenos de inestabilidad local.
- b) Se supone que la sección transversal de la rebanada es simétrica con respecto a un eje que está contenido en el plano medio del entramado.
- c) Se considera que la plastificación de la rebanada se debe únicamente a las tensiones normales longitudinales inducidas por el esfuerzo axial y el momento flector.
- d) Se admite la hipótesis de Navier-Bernoulli.
- e) Se supone que estamos en una teoría de pequeñas deformaciones, es decir, se admite que las deformaciones generalizadas de la rebanada  $(\epsilon_g, \phi)$  son despreciables en comparación con la unidad.

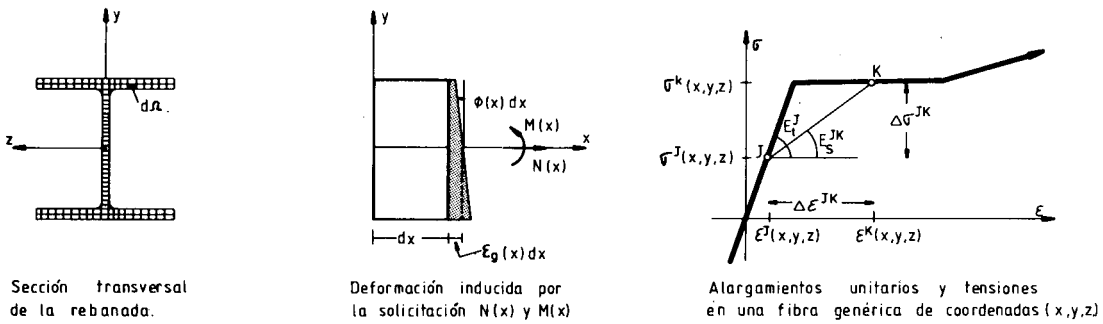


Fig. 2.— Esfuerzos, deformaciones y tensiones en una rebanada de abscisa  $x$ .

Estas simplificaciones nos permiten afirmar que el alargamiento unitario de una fibra de coordenadas  $(y,z)$ , perteneciente a una rebanada de abscisa  $x$ , viene dado (Figura 2) por:

$$\epsilon(x,y,z) = \epsilon_o(y,z) + \epsilon_g(x) - y\phi(x) \quad (1)$$

siendo  $\epsilon_g(x)$  y  $\phi(x)$  el alargamiento unitario y la curvatura de la fibra de la rebanada que coincide con el eje de referencia de la pieza prismática (línea que contiene los centros de gravedad de todas sus secciones transversales). En la expresión (1) se ha supuesto que, aparte de las deformaciones  $\epsilon_g(x)$  y  $\phi(x)$  provocadas por los esfuerzos  $N(x)$  y  $M(x)$ , existe una deformación previa  $\epsilon_o(y,z)$  motivada por las tensiones residuales inducidas en los procesos de laminación o soldadura de la pieza prismática.

Particularizando para los estados de equilibrio J y K, se obtiene:

$$\begin{aligned} \epsilon^J(x,y,z) &= \epsilon_o(y,z) + \epsilon_g^J(x) - y\phi^J(x) \\ \epsilon^K(x,y,z) &= \epsilon_o(y,z) + \epsilon_g^K(x) - y\phi^K(x) \end{aligned}$$

de donde

$$\Delta\epsilon^{JK}(x,y,z) = \Delta\epsilon_g^{JK}(x) - y\Delta\phi^{JK}(x) \quad (2)$$

Las tensiones  $\sigma^J(x,y,z)$  y  $\sigma^K(x,y,z)$  asociadas a las deformaciones  $\epsilon^J(x,y,z)$  y  $\epsilon^K(x,y,z)$  se obtienen directamente del diagrama  $(\sigma-\epsilon)$  del acero. Definiendo el módulo

de elasticidad secante de la fibra como el cociente entre el incremento de la tensión normal y el incremento del alargamiento unitario, (Figura 2), se llega a:

$$\Delta\sigma^{\text{JK}}(x,y,z) = E_s^{\text{JK}}(x,y,z) \Delta\epsilon^{\text{JK}}(x,y,z) \quad (3)$$

y planteando el equilibrio de la sección, se obtiene:

$$\begin{aligned} \Delta N^{\text{JK}}(x) &= \iint_{\Omega} \Delta\sigma^{\text{JK}}(x,y,z) d\Omega \\ \Delta M^{\text{JK}}(x) &= - \iint_{\Omega} y \Delta\sigma^{\text{JK}}(x,y,z) d\Omega \end{aligned} \quad (4)$$

sustituyendo (3) y (2) en (4) y agrupando matricialmente las expresiones que resultan, obtenemos.

$$\begin{Bmatrix} \Delta N^{\text{JK}}(x) \\ \Delta M^{\text{JK}}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \iint_{\Omega} E_s d\Omega & - \iint_{\Omega} y E_s d\Omega \\ - \iint_{\Omega} y E_s d\Omega & \iint_{\Omega} y^2 E_s d\Omega \end{bmatrix}_{\text{JK}} \begin{Bmatrix} \Delta\epsilon_g^{\text{JK}}(x) \\ \Delta\phi^{\text{JK}}(x) \end{Bmatrix} \quad (5)$$

o más abreviadamente:

$$\bar{\Delta f}_{\text{JK}}^{\text{r}}(x) = \bar{\bar{K}}_{\text{JK}}^{\text{r}}(x) \bar{\Delta d}_{\text{JK}}^{\text{r}}(x) \quad (6)$$

donde  $\bar{\bar{K}}_{\text{JK}}^{\text{r}}(x)$  es la matriz de rigidez secante de la rebanada correspondiente al salto entre los estados de equilibrio J y K. (Nota: En este artículo se identificarán los vectores y las matrices con una y dos rayas, respectivamente, sobre letras en negrilla).

El cálculo de las integrales de superficie de la expresión (5) se suele realizar dividiendo la sección transversal de la rebanada en porciones elementales (Figura 2), las cuales se definen mediante su área, coordenadas de su centro geométrico y alargamiento unitario residual de los procesos de laminación o soldadura. Así, estas integrales de área se convierten en sencillos sumatorios de fácil programación.

Por otra parte, si en las integrales de superficie de la expresión (5) sustituimos  $E_s^{\text{JK}}(x,y,z)$  por  $E_t^{\text{J}}(x,y,z)$ , Figura 2, se obtiene la rigidez tangente de la rebanada correspondiente al estado de equilibrio J.

$$\begin{Bmatrix} \delta N^{\text{J}}(x) \\ \delta M^{\text{J}}(x) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \iint_{\Omega} E_t d\Omega & - \iint_{\Omega} y E_t d\Omega \\ - \iint_{\Omega} y E_t d\Omega & \iint_{\Omega} y^2 E_t d\Omega \end{bmatrix}_{\text{J}} \begin{Bmatrix} \delta\epsilon_g^{\text{J}}(x) \\ \delta\phi^{\text{J}}(x) \end{Bmatrix} \quad (7)$$

que de forma abreviada puede anotarse:

$$\delta \bar{f}_{\text{J}}^{\text{r}}(x) = \bar{\bar{K}}_{\text{J}}^{\text{r}}(x) \delta \bar{d}_{\text{J}}^{\text{r}}(x) \quad (8)$$

donde se utiliza el símbolo ( $\delta$ ) para indicar que se trata de incrementos diferenciales de la magnitud a la que se asocia.

El significado físico de las matrices de rigidez secante y tangente de la rebanada se ilustra en la Figura 3. En la misma figura se esquematiza el proceso iterativo del tipo Newton-Raphson que, como parte integrante del proceso de análisis global del entramado, permite, para cada una de las rebanadas que componen sus barras, deducir

la rigidez secante correspondiente al salto entre dos estados de equilibrio consecutivos A y B, definidos, el primero, por los esfuerzos y las deformaciones de la rebanada, y, el segundo, únicamente por los esfuerzos. Obsérvese que en dicho proceso iterativo se pasa por varios estados de equilibrio intermedios en los que es necesario calcular las matrices de rigidez tangente  $\bar{K}_J^r (\bar{K}_A^r, \bar{K}_1^r, \dots)$  y secante  $\bar{K}_{JK}^r (\bar{K}_{A1}^r, \bar{K}_{A2}^r, \dots)$  de la rebanada.

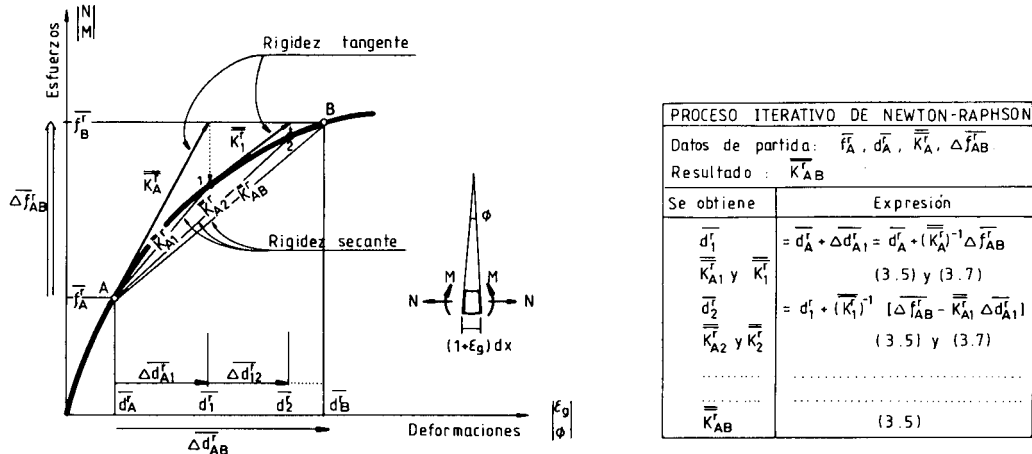


Fig. 3.— Deducción de la matriz de rigidez secante  $\bar{K}_{AB}^r$  de la rebanada.

## MATRICES DE RIGIDEZ DE LA PIEZA PRISMÁTICA

Para deducir las expresiones de las matrices de rigidez secante y tangente de la pieza prismática postulamos las siguientes hipótesis simplificadoras:

- Se supone que la pieza prismática tiene al menos un plano de simetría y que se deforma en este plano por la acción de cargas concentradas aplicadas en sus dos nudos extremos.

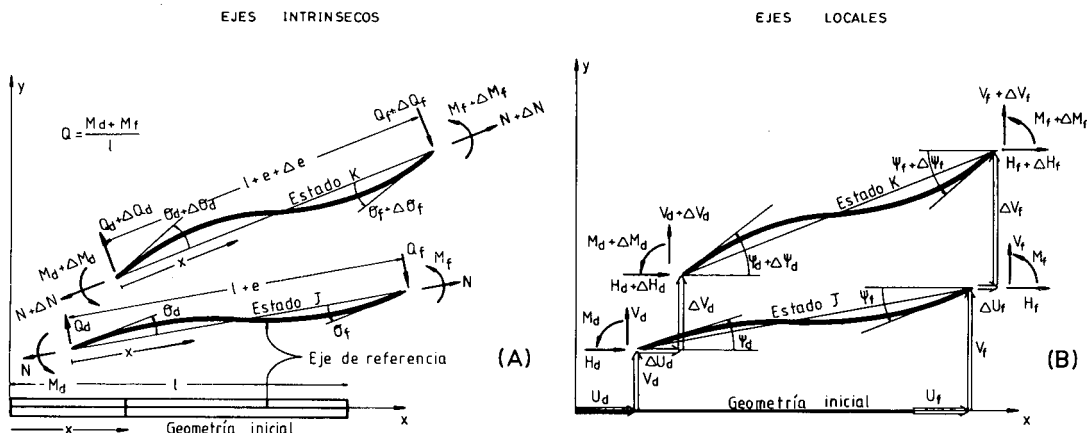


Fig. 4.— Movimientos y cargas en los extremos de una pieza prismática.

- b) Se admite que los giros experimentados por el eje de referencia al deformarse la barra son muy pequeños, de forma que el seno de estos ángulos es prácticamente cero y su coseno la unidad.

En la Figura 4 se ha representado, convenientemente ampliada, la geometría deformada del eje de la referencia de una pieza prismática en dos estados de equilibrio J y K. Estos estados de equilibrio se han referido a dos sistemas de ejes: los ejes "intrínsecos" (Figura 4-A), que acompañan a la pieza prismática en su deformación, y los ejes "locales" (Figura 4-B), que son los "intrínsecos" correspondientes a la geometría inicial de la pieza prismática.

Las hipótesis simplificadoras antes postuladas nos permiten establecer, por equilibrio, que el incremento de los esfuerzos que solicitan la rebanada de abscisa x, viene dado por:

$$\begin{Bmatrix} \Delta N(x) \\ \Delta M(x) \end{Bmatrix}^{JK} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{x}{\ell} - 1 & \frac{x}{\ell} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_d \\ \Delta M_f \end{Bmatrix}^{JK} \quad (9)$$

Por otra parte, la inversa de la expresión (5) nos permite obtener el incremento de la deformación de la rebanada motivado por el incremento del esfuerzo que la solicita:

$$\begin{Bmatrix} \Delta \epsilon_g(x) \\ \Delta \phi(x) \end{Bmatrix}^{JK} = \begin{bmatrix} s_{11}(x) & s_{12}(x) \\ s_{21}(x) & s_{22}(x) \end{bmatrix}_{JK} \begin{Bmatrix} \Delta N(x) \\ \Delta M(x) \end{Bmatrix}^{JK} \quad (10)$$

Sustituyendo (9) en (10) e integrando las deformaciones de las rebanadas obtenemos la deformación de la pieza prismática:

$$\begin{aligned} \Delta e^{JK} &= \int_0^\ell \Delta \epsilon_g^{JK}(x) dx \\ \Delta \theta_f^{JK} &= \Delta \theta_d^{JK} + \int_0^\ell \Delta \phi^{JK}(x) dx \end{aligned}$$

y como debe verificarse que:

$$\Delta \theta_d^{JK} \ell + \int_0^\ell (1-x) \Delta \phi^{JK}(x) dx = 0$$

se obtiene finalmente:

$$\begin{bmatrix} \Delta e \\ \Delta \theta_d \\ \Delta \theta_f \end{bmatrix}^{JK} = \begin{bmatrix} \int_0^\ell s_{11}(x) dx & \int_0^\ell (\frac{x}{\ell} - 1) s_{12}(x) dx & \int_0^\ell \frac{x}{\ell} s_{12}(x) dx \\ & \int_0^\ell (\frac{x}{\ell} - 1)^2 s_{22}(x) dx & \int_0^\ell \frac{x}{\ell} (\frac{x}{\ell} - 1) s_{22}(x) dx \\ \text{SIMETRICO} & & \int_0^\ell (\frac{x}{\ell})^2 s_{22}(x) dx \end{bmatrix}_{JK} \begin{bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_d \\ \Delta M_f \end{bmatrix}^{JK} \quad (11)$$

cuya inversa define la matriz de rigidez secante de la barra correspondiente al salto entre los estados J y K. Esta matriz está referida a los ejes intrínsecos de la pieza prismática. La anotaremos abreviadamente de la forma:

$$\Delta \bar{\mathbf{f}}_{JK}^b = \bar{\mathbf{K}}_{JK}^b \Delta \bar{\mathbf{d}}_{JK}^b \quad (12)$$

Para realizar las integrales referidas en (11) se opera trabajando con un número prefijado de secciones de cálculo  $x_k$  en las que se determinan los coeficientes  $s_{ij}(x_k)$ ; en el resto de las secciones de la pieza prismática se supone que  $s_{ij}(x)$  se puede obtener por interpolación lineal entre los valores correspondientes a las dos secciones de cálculo más próximas.

La expresión que acabamos de deducir está condensada a tres grados de libertad de movimiento: el alargamiento de la barra ( $e$ ) y los giros de los extremos del eje de referencia medidos con respecto a su cuerda ( $\theta_d$  y  $\theta_f$ ). Para expresarla de una forma apta para su posterior utilización por el método matricial de la rigidez es necesario realizar ciertas transformaciones. Así, con referencia a la Figura 4, es fácil establecer:

$$\begin{Bmatrix} \Delta H_d \\ \Delta V_d \\ \Delta M_d \\ \Delta H_f \\ \Delta V_f \\ \Delta M_f \end{Bmatrix}^{JK} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & \frac{1}{\ell} \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{\ell} & -\frac{1}{\ell} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta N \\ \Delta M_d \\ \Delta M_f \end{Bmatrix}^{JK} \quad (13)$$

y el principio de contradigencia nos permite afirmar que:

$$\begin{Bmatrix} \Delta e \\ \Delta \theta_d \\ \Delta \theta_f \end{Bmatrix}^{JK} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 1 & 0 & -\frac{1}{\ell} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\ell} & 0 & 0 & -\frac{1}{\ell} & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta U_d \\ \Delta V_d \\ \Delta \psi_d \\ \Delta U_f \\ \Delta V_f \\ \Delta \psi_f \end{Bmatrix}^{JK} \quad (14)$$

expresiones que pueden anotarse abreviadamente de la forma:

$$\begin{aligned} \Delta \bar{F}_{JK}^b &= \bar{B}^t \Delta \bar{f}_{JK}^b \\ \Delta \bar{d}_{JK}^b &= \bar{B} \Delta \bar{D}_{JK}^b \end{aligned} \quad (15)$$

y recordando (12) se obtiene:

$$\Delta \bar{F}_{JK}^b = \bar{B}^t \bar{K}_{JK}^b \bar{B} \Delta \bar{D}_{JK}^b \quad (16)$$

siendo  $(\bar{B}^t \bar{K}_{JK}^b \bar{B})$  la matriz de rigidez secante de la barra referida a sus ejes locales. Por último, las expresiones:

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{F}_{JK}^b)^g &= \bar{T}^t \Delta \bar{F}_{JK}^b \\ \Delta \bar{D}_{JK}^b &= \bar{T} (\Delta \bar{D}_{JK}^b)^g \end{aligned} \quad (17)$$

nos permite referir la ecuación (16) al sistema de ejes global del entramado, quedando:

$$(\Delta \bar{\mathbf{F}}_{JK}^b)^g = (\bar{\mathbf{T}}^t \bar{\mathbf{B}}^t \bar{\mathbf{K}}_{JK}^b \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{T}}) (\Delta \bar{\mathbf{D}}_{JK}^b)^g \quad (18)$$

donde  $(\bar{\mathbf{T}}^t \bar{\mathbf{B}}^t \bar{\mathbf{K}}_{JK}^b \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{T}})$  es la matriz de rigidez secante de la barra correspondiente al salto entre los estados de equilibrio J y K. Expresión que ya está preparada en la forma que se necesita para su posterior ensamble con el resto de las barras y la consiguiente obtención de la matriz de rigidez secante del entramado.

Por otra parte, la rigidez tangente de la barra correspondiente al estado de equilibrio J se obtiene siguiendo un desarrollo análogo al expuesto. Para ello basta con sustituir el símbolo  $\Delta$  (incremento finito) por  $\delta$  (incremento diferencial) y emplear la inversa de (7) en sustitución de la inversa de (5). De este modo se acaba obteniendo una expresión formalmente análoga a la (11) con la única salvedad de que, en este caso, las funciones  $s_{ij}(x)$  se deducen a partir de las rigideces tangentes de las rebanadas situadas en las secciones de cálculo de la pieza prismática. La inversa de esta expresión es la que define la rigidez tangente de la barra en el estado J. Se anota abreviadamente de la forma:

$$\delta \bar{\mathbf{f}}_J^b = \bar{\mathbf{K}}_J^b \delta \bar{\mathbf{d}}_J^b \quad (19)$$

y referida al sistema de ejes global del entramado será:

$$(\delta \bar{\mathbf{F}}_J^b)^g = (\bar{\mathbf{T}}^t \bar{\mathbf{B}}^t \bar{\mathbf{K}}_J^b \bar{\mathbf{B}} \bar{\mathbf{T}}) (\delta \bar{\mathbf{D}}_J^b)^g \quad (20)$$

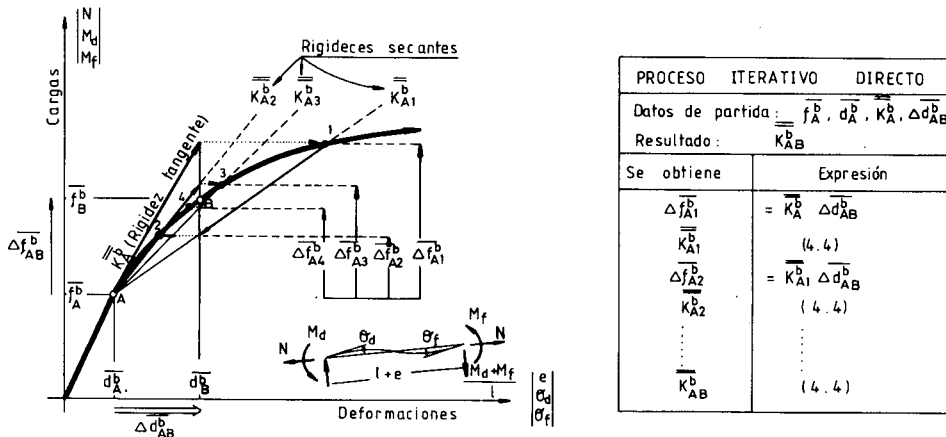


Fig. 5. — Deducción de la matriz de rigidez secante  $\bar{\mathbf{K}}_{AB}^b$  de la barra.

El significado físico de las matrices de rigidez secante y tangente de la pieza prismática se indica en la Figura 5. En la misma se ha esquematizado el proceso iterativo directo que, como parte integrante del proceso de análisis global del entramado, permite determinar la rigidez secante de sus barras en el salto entre dos estados de equilibrio consecutivos A y B, de los que se conocen todas las magnitudes asociadas al estado origen A y únicamente los movimientos de los nudos correspondientes al estado B. Nótese que, análogamente a lo que ocurría con la rebanada, en este



proceso iterativo se pasa por varios estados de equilibrio intermedios en los que es necesario calcular las matrices de rigidez secante  $\bar{\mathbf{K}}_{JK}^b$  ( $\bar{\mathbf{K}}_{A1}^b$ ,  $\bar{\mathbf{K}}_{A2}^b$ , ...) de la barra.

## COMPORTAMIENTO ELASTOPLASTICO DEL ENTRAMADO

Deducidas las expresiones (18) y (19) con las que caracterizamos el comportamiento elastoplástico de las barras que componen el entramado, el paso siguiente es establecer de una forma ordenada en todos los nudos, primero, las ecuaciones de compatibilidad de movimientos y, después, las ecuaciones de equilibrio. Despreciando los movimientos de los nudos al establecer las ecuaciones de equilibrio, se obtienen las siguientes relaciones:

$$\Delta \bar{\mathbf{F}}_{JK}^e = \bar{\mathbf{K}}_{JK}^e \Delta \bar{\mathbf{D}}_{JK}^e \quad (21)$$

$$\delta \bar{\mathbf{F}}_J^e = \bar{\mathbf{K}}_J^e \delta \bar{\mathbf{D}}_J^e \quad (22)$$

donde  $\bar{\mathbf{K}}_{JK}^e$  es la rigidez secante del entramado correspondiente al salto entre dos estados genéricos de equilibrio J y K, y  $\bar{\mathbf{K}}_J^e$  es la rigidez tangente del entramado correspondiente a un estado de equilibrio J.

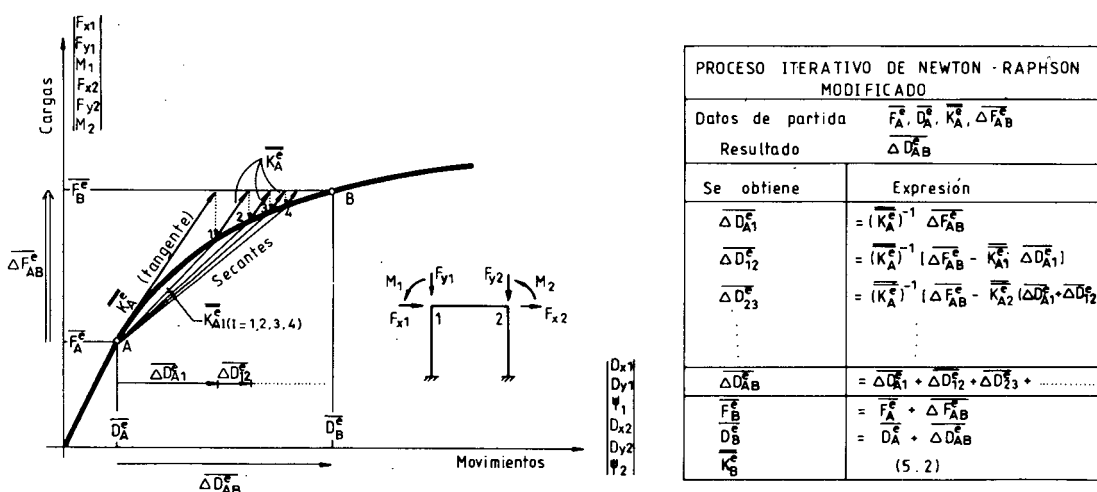


Fig. 6.— Cálculo del incremento del vector movimiento  $\Delta \bar{\mathbf{D}}_{AB}^e$  asociado al incremento del vector de carga  $\Delta \bar{\mathbf{F}}_{AB}^e$ .

El significado físico de estas matrices se ilustra en la Figura 6, así como el proceso iterativo del tipo Newton-Raphson modificado que permite pasar desde un punto del diagrama de equilibrio del entramado, en el que se conocen todas las magnitudes que caracterizan su comportamiento resistente, hasta un nuevo punto al que se llega tras un incremento conocido de la solicitación.

## EJEMPLOS NUMERICOS

Aplicando los principios teóricos que acabamos de exponer, se ha desarrollado un programa de cálculo con el que se han procesado diversas estructuras. A continuación describimos tres ejemplos sencillos que permiten obtener algunas conclusiones interesantes.

*Ejemplo 1.— Influencia de las tensiones residuales de laminación en el comportamiento elastoplástico de un perfil solicitado a tracción simple.*

Se analiza la desviación que se observa entre el ensayo a tracción simple de una probeta pequeña extraída del alma o de las alas de un perfil laminado y el ensayo realizado directamente sobre todo el perfil. En el primer caso, la respuesta de la probeta viene dada por los dos tramos rectos representados con trazo grueso en la Figura 7, mientras que, en el segundo supuesto, existe un tercer tramo curvo que se ha representado con trazo fino en la misma figura.

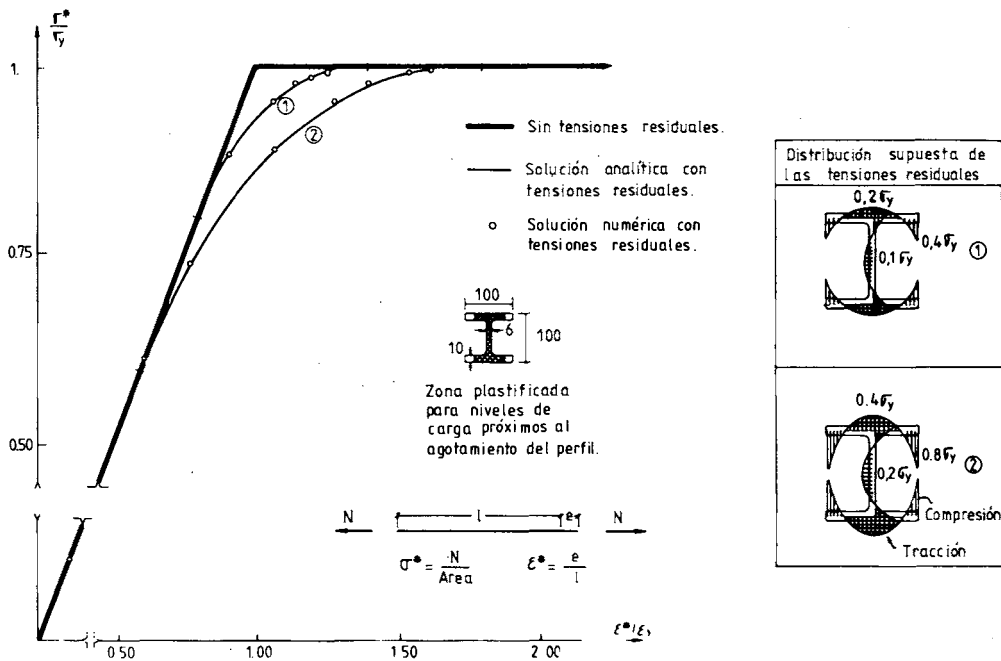


Fig. 7.— Perfil laminado solicitado a tracción simple.

Esta diferencia se debe a que en la probeta no existen tensiones residuales apreciables y, consecuentemente, todas sus fibras plastifican de forma simultánea al mismo nivel de carga. Por el contrario, en los perfiles laminados en caliente, el enfriamiento natural induce tensiones longitudinales de tracción en las fibras que se enfrían en último lugar (las zonas más masivas del perfil) y tensiones longitudinales de compresión en el resto de las fibras. Esto causa, en un ensayo a tracción de todo el perfil, la plastificación anticipada de unas fibras y retrasada de otras, con la consiguiente reducción paulatina de la rigidez del perfil a medida que progresa dicha plastificación, aunque, evidentemente, la carga última de ambos ensayos es siempre la misma, puesto

que las tensiones residuales en el perfil constituyen un sistema autoequilibrado de resultante nula.

*Ejemplo 2. — Simulación numérica del ensayo a flexión simple de una viga biapoyada.*

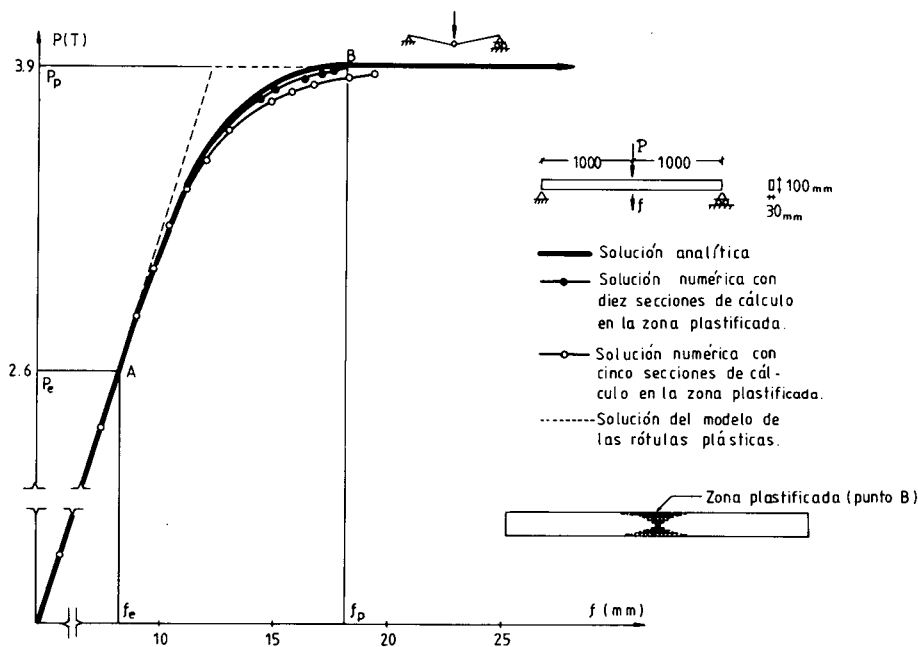


Fig. 8. — Viga biapoyada solicitada a flexión simple.

Con este ejemplo, Figura 8, se estudia la influencia que tiene en la precisión del análisis el número de secciones de cálculo que se adopta en la zona plastificada. Recordemos que la interpolación lineal admitida para las funciones  $s_{ij}(x)$  supone sobrevalorar la flexibilidad de las secciones que no coinciden con las de cálculo y, por consiguiente, infravalorar la rigidez de la viga. Este es el motivo por el que la viga parece más deformable a medida que disminuye el número de secciones de cálculo consideradas en la zona plastificada.

*Ejemplo 3. — Estudio de un pórtico simple.*

El pórtico analizado, Figura 9, nos permite comparar la solución obtenida con el modelo aquí propuesto y la que se obtiene con el modelo de las rótulas plásticas.

Este último modelo concentra toda la deformación plástica en determinadas secciones en las que supone se forman rótulas plásticas al ir alcanzándose los esfuerzos que producen su agotamiento resistente. Se trata de un modelo muy útil, puesto que es capaz de predecir con exactitud la carga de agotamiento del entramado; no obstante, al no considerar el proceso de plastificación progresiva extendido en un tramo de la barra, rigidiza artificialmente el entramado y, por consiguiente, no sirve para predecir su deformación, particularmente para niveles de carga próximos a su carga última.

Un aspecto en el que conviene incidir es la redistribución de esfuerzos flectores a medida que aumentan las acciones solicitantes. En la Figura 9-B se ha representado esta evolución en cinco secciones características del pórtico. Puede observarse que

la estructura responde de forma lineal mientras no se alcanza el valor  $M_e$  en la sección central del dintel ( $M_e$  es el momento último resistido por la sección en régimen elástico). A partir de este momento, como consecuencia de la progresiva plastificación de dicha sección, su sollicitación a flexión  $M_1$  crece en menor medida de lo que le correspondería de subsistir la linealidad. En cambio, el resto de las secciones se ven obligadas, normalmente, a soportar más flector del que les correspondería de mantenerse la linealidad. En la figura se aprecia con claridad la “emigración paulatina” de todas las flexiones hacia el valor  $M_u$  (momento de plastificación de la sección). En las proximidades de la carga última, los cuatro esfuerzos flectores correspondientes a las secciones en las que aparecen rótulas plásticas en el modelo simplificado alcanzan de forma simultánea su valor último ( $M_u$ ), mientras que todavía están lejos de ese valor el esfuerzo flector de otras secciones, por ejemplo, la sección 5, que, según el modelo simplificado de las rótulas plásticas, permanece en régimen elástico al alcanzarse el mecanismo de rotura.

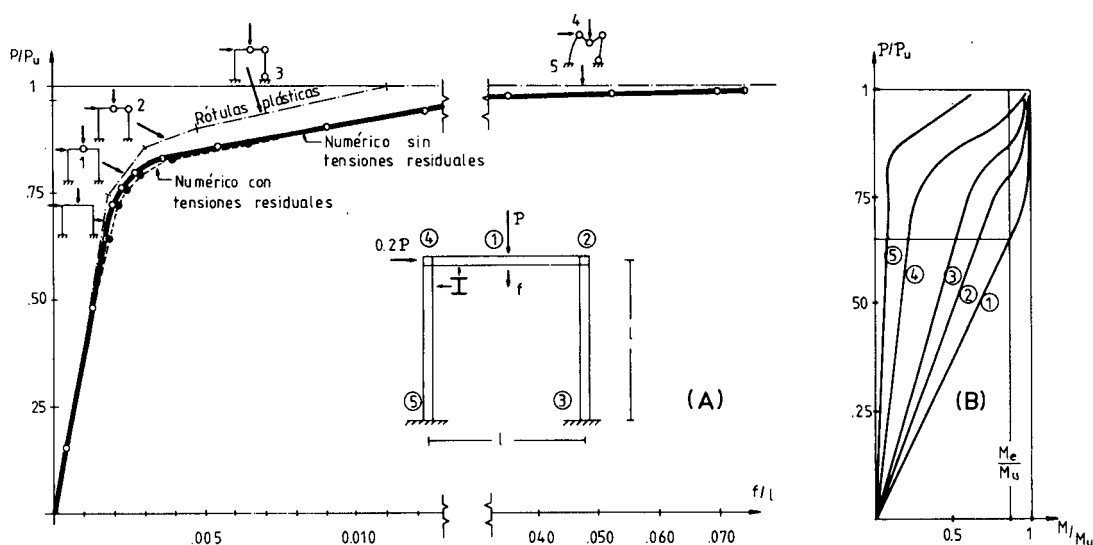


Fig. 9.— Comportamiento elastoplástico de un pórtico simple.

#### REFERENCIAS

1. C. Benito. "Nociones de Cálculo Plástico". Litoprint, Madrid (1975).
2. M. R. Horne. "Plastic Design of Low-Rise Frames". Granada, London (1981).
3. A. Morris. "Instability and Plastic Collapse of Steel Structures". Granada, London (1983).
4. Ch. Massonet y M. Save. "Cálculo Plástico en las Construcciones". Montaner y Simón, S.A., Barcelona (1966).
5. K. I. Majid. "Non-Linear Structures". Butterworths, London (1972).
6. C. Grelat. "Calcul non linéaire des ossatures en béton armé". Thèse de Docteur-Ingenieur, París (1978).