

UN MODELO DE HORMIGON BASADO EN PLASTICIDAD NO ASOCIADA Y FRACTURA

ALBERTO M. CUITIÑO
GUSTAVO GIOIA
y
EDUARDO N. DVORKIN

*Instituto de Materiales y Estructuras,
Facultad de Ingeniería,
Universidad de Buenos Aires,
Buenos Aires, Argentina*

RESUMEN

Se presenta un modelo para el análisis de estructuras de hormigón mediante el método de elementos finitos. El modelo se basa en la teoría de plasticidad no asociada y en la teoría de la fisura difusa. La implantación numérica en un programa general no lineal de elementos finitos motivó desarrollos específicos en el esquema de integración de las relaciones constitutivas y en el uso de matrices de rigidez simétricas.

SUMMARY

A model for the analysis of concrete structures by the finite element method is presented. The model is based on the non-associated plasticity theory and the smeared crack approach. The numerical implantation in a general purpose nonlinear finite element program led to developments in the scheme for the integration of the constitutive relation and to the use of symmetric stiffness matrices.

INTRODUCCION

El desarrollo y la implantación eficiente en programas de elementos finitos de modelos capaces de describir correctamente el comportamiento del hormigón en todos los posibles estados de tensión y deformación, es un campo de investigación muy activo en la actualidad.

El hormigón presenta tres regímenes de comportamiento distintos:

- el régimen de prefalla
- el régimen de postfalla dúctil
- el régimen de postfalla frágil

donde la falla se caracteriza por ser la situación de carga máxima alcanzable. Para el estudio y modelado de cada uno de estos regímenes existen modelos teóricos adecuados.

Recibido: Marzo 1989

Para los regímenes de prefalla y postfalla dúctil, la teoría de plasticidad, en particular la teoría de flujo no asociativo, ha demostrado ser especialmente adecuada.

En cuanto al régimen de postfalla frágil, son utilizables las teorías de fractura basadas en el modelo de fisura difusa.

Especial atención han despertado los regímenes de postfalla debido a su característico "ablandamiento" por deformación, esto es a la disminución de las tensiones a deformaciones crecientes. Bazant¹¹ demostró que este comportamiento no es posible en un continuo y que debe atribuirse necesariamente a efectos de localización. Ottosen¹², basándose en consideraciones termodinámicas, demostró que una relación tensión-deformación de ablandamiento sólo es válida si se consideran valores medios representativos de una porción finita del material, en lugar de valores puntuales.

Nuestro modelo para el régimen de postfalla frágil se basa, tal como consignáramos, en el concepto de fisura difusa, introduciendo la energía específica de fractura como nueva propiedad del material⁸. Este modelo es ampliamente aceptado por sus sólidos fundamentos teóricos, pero es necesario mejorar su implementación en elementos finitos a efectos de obtener resultados confiables aún en mallas distorsionadas²⁶.

Considerando las conclusiones de Bazant y Ottosen, se acepta la existencia de localización en el régimen de postfalla dúctil. Pero a diferencia de lo que ocurre en la postfalla frágil, donde la zona de localización es muy estrecha, en la postfalla dúctil el tamaño de la zona de localización aún no ha sido determinada con claridad. En caso de tratarse de un tamaño menor al de los elementos finitos utilizados en el modelo, aparecerá una nueva propiedad material del tipo de la energía específica de fractura. En cambio, si el tamaño de la zona de localización fuera mayor que la dimensión de los elementos finitos esta propiedad sería innecesaria, pudiendo basarse el modelo en la teoría de plasticidad convencional.

La evidencia experimental, tal como adelantáramos, no es concluyente. Por ejemplo, para especímenes de dimensiones standard, Shah y otros¹³ no observaron localización alguna en las deformaciones. Utilizando probetas de similares características Van Mier¹⁴, detectó una fuerte localización de deformaciones en una serie de ensayos triaxiales.

Teniendo en cuenta los resultados teóricos obtenidos por Willam y otros¹⁵ (que evaluaron en el orden de metros el tamaño de la zona de localización) y el tamaño usual de los elementos finitos utilizados en la práctica, y dada la ausencia de resultados experimentales concluyentes, nuestro modelo introduce el ablandamiento por deformación a través de la teoría de la plasticidad no asociada.

Hemos implantado nuestro modelo en el elemento bidimensional del programa general no lineal NONSAP¹⁹ y calibrado con los resultados experimentales de Kupfer y otros¹⁸.

Los aspectos de esta implementación que destacaremos en este trabajo son la integración de las relaciones tensión-deformación y el uso de matrices simétricas en el análisis iterativo incremental.

Para integrar de las relaciones tensión-deformación utilizamos un esquema implícito y estable basado en los algoritmos de las referencias [3] y [21].

La plasticidad no asociada introduce matrices de rigidez no simétricas. Este problema ha determinado que se viera excluida de muchos programas generales de

elementos finitos. Pero los materiales friccionales exigen una descripción no asociada, y deben buscarse entonces implementaciones que simetrien el problema en forma eficiente.

Hemos verificado que la utilización directa de la parte simétrica de la matriz de rigidez resulta en comportamientos numéricos altamente ineficientes. En la referencia [16] sugerimos la utilización de la componente no simétrica de la matriz a modo de cargas desbalanceadas; este esquema es también ineficiente.

En una reciente publicación²² Pande y Pietruszczak propusieron una matriz de rigidez tangente simétrica para problemas de plasticidad no asociada. Aunque este método exhibe un comportamiento numérico aceptable, en nuestras experiencias la utilización de la matriz actualizada por la técnica BFGS³ ha demostrado ser la estrategia más eficiente.

NUESTRA RELACION CONSTITUTIVA BASADA EN PLASTICIDAD NO ASOCIADA

Para la descripción de los comportamientos previo a la falla y posterior a la falla en régimen dúctil nos basamos en la teoría de la plasticidad no asociada. En esta teoría se definen 2 funciones;

La función F

En publicaciones anteriores^{1,16,17} presentamos la siguiente función F , que utilizamos aquí;

$$F(I_1, J_2, \theta, h) = \left\{ \alpha J_2 + \beta(\theta, h) \sqrt{J_2} + \gamma(h) I_1^2 + \delta I_1 \right\} S(h) - 1 = 0 \quad (1)$$

donde I_1 es el primer invariante del tensor de tensiones, J_2 es el segundo invariante del tensor de tensiones desviadoras y θ es el ángulo de Lode.

El parámetro de endurecimiento, h , es un número que cuantifica la magnitud del daño plástico acumulado por el material en un punto dado. En nuestro modelo toma un valor $h = 0$ sobre la superficie de comienzo de plasticidad y $h = 1$ sobre la superficie de falla.

En términos del parámetro de endurecimiento definimos,

$$\alpha = \text{cte}$$

$$\beta(\theta, h) = K_1(h) \cos \left\{ \frac{1}{3} \cos^{-1} [K_2(h) \cos 3\theta] \right\} \quad \cos 3\theta \geq 0$$

$$\beta(\theta, h) = K_1(h) \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \cos^{-1} [-K_2(h) \cos 3\theta] \right\} \quad \cos 3\theta < 0$$

$$K_1(h) = \sqrt{\beta(0^\circ)^2 + \frac{4}{3} [\beta(60^\circ, h) - \beta(0^\circ)/2]^2} \quad h \geq 0$$

$$K_2(h) = \cos \left\{ 3 \cos^{-1} \left[\frac{\beta(0^\circ)}{K_1(h)} \right] \right\} \quad h \geq 0$$

$$\beta(60^\circ, h) = \beta(60^\circ, 1) + [\beta(60^\circ, 0) - \beta(60^\circ, 1)] (1 - h)^{2.5} \quad 0 \leq h < 1$$

$$\beta(60^\circ, h) = \beta(60^\circ, 1) \quad h \geq 1$$

$$\beta(0^\circ) = \text{cte}$$

$$\gamma(h) = \gamma(0)(1 - h)^3 \quad 0 \leq h < 1$$

$$\gamma(h) = 0 \quad h \geq 1$$

$$\delta = \text{cte}$$

La función $S(h)$ introduce la contracción de la superficie de fluencia durante el comportamiento posterior a la falla de régimen dúctil. Hemos mejorado su definición respecto al que diéramos en^{16,17}, resultando;

$$S(h) = 1 \quad h < 1 \quad (2.a)$$

$$S(h) = 1 + 0.764 (h - 1)^{1.5} \quad h > 1 \quad (2.b)$$

En publicaciones anteriores mostramos el buen ajuste de nuestras curvas $F(h = \text{cte}) = 0$ a grupos de puntos de igual daño acumulado obtenidos en forma experimental. Este ajuste es particularmente bueno a lo largo de los meridianos de comprensión sobre el plano ($I_1 - J_2$):

La definición del parámetro de endurecimiento también ha sufrido modificaciones. Nuestra definición anterior era:

$$t_h = \left[\frac{t_{\bar{\epsilon}^p}}{\bar{\epsilon}_R^p(-1/0)} \right]^{\frac{1}{3}} = \left[\frac{\int_0^t \sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon^p d\epsilon^p}{\bar{\epsilon}_R^p(-1/0)} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (3)$$

donde $\bar{\epsilon}^p$ es la deformación plástica equivalente, $(-1/0)$ identifica al ensayo uniaxial de comprensión, y el subíndice R identifica la falla.

En un intento por mejorar esta definición, hemos procesado los resultados de Kupfer y otros calculando los valores de deformación plástica equivalente en falla ($\bar{\epsilon}_R^p$) para las diferentes direcciones radiales de carga en el espacio de las tensiones. Asumiendo que este valor es independiente del ángulo de Lode, lo graficamos en función de $\frac{J_2}{I_1}$ en la Figura 1. Puede verse que ($\bar{\epsilon}_R^p$) depende fuertemente del camino de cargas. La única forma de tener $h = 1$ al alcanzar la falla para cualquier camino de carga radial es definir:

$$t_h = \left[\int_0^t \frac{\sqrt{\frac{2}{3}} d\epsilon^p d\epsilon^p}{\bar{\epsilon}_R^p(I_1/\sqrt{J_2})} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (4)$$

Un mismo incremento en la deformación plástica equivalente determina entonces una variación del parámetro de endurecimiento dependiente de la dirección de carga. Desde este punto de vista, puede interpretarse a $1/\bar{\epsilon}_R^p$ como una "sensibilidad a la deformación plástica".

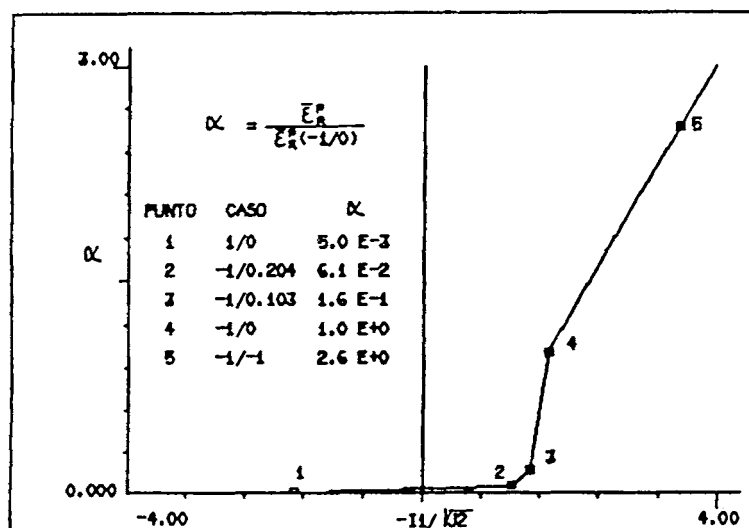


Figura 1. Valores de deformación plástica equivalente en falla.

La función G

En la referencia [16] presentamos una función G que dio lugar a resultados aceptables para algunos casos sencillos. Al intentar mejorar esa definición de G , y teniendo en cuenta que sólo nos interesan las derivadas de G con respecto a las tensiones, decidimos que sería más expeditivo interpolar directamente esas derivadas.

Asumiendo que la función G es de revolución alrededor del eje hidrostático, podemos considerar solamente las proyecciones sobre I_1 y $\sqrt{J_2}$ de todo vector normal a $G = 0$.

Proponemos entonces:

$$\frac{\partial G}{\partial I_1} = \frac{\partial G}{\partial I_1} \left(\frac{I_1}{\sqrt{J_2}} \right) \quad (5.a)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \sqrt{J_2}} = \frac{\partial G}{\partial \sqrt{J_2}} \left(\frac{I_1}{\sqrt{J_2}} \right) \quad (5.b)$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = 0 \quad (5.c)$$

Procesando los resultados experimentales de Kupfer y otros, resulta la interpolación que mostramos en la Figura 2.

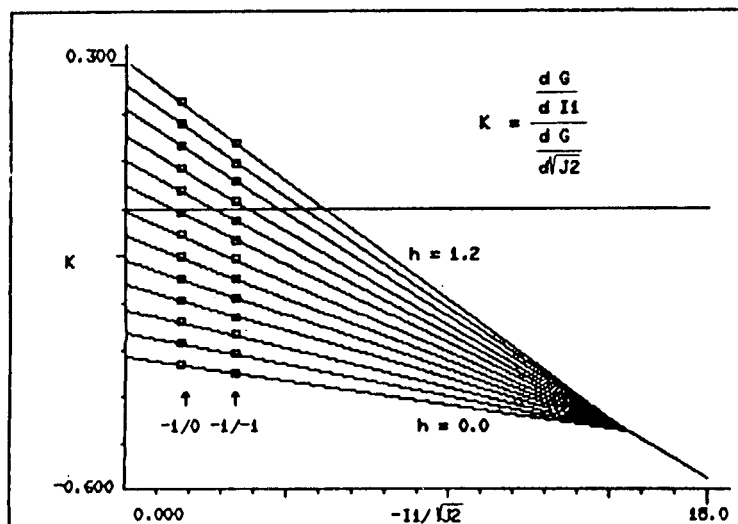


Figura 2. Direcciones de flujo plástico, extrapoladas de resultados experimentales.

RELACION CONSTITUTIVA PARA EL HORMIGON FISURADO

Al alcanzar la superficie de falla, $F(h = 1) = 0$, se presentan dos situaciones diferentes.

- Si todas las tensiones principales son de compresión, la respuesta del material sigue siendo gobernada por el modelo de plasticidad no asociada. El hormigón entra en régimen de post falla dúctil, con daño plástico creciente.
- Si existe al menos una tensión principal de tracción, el modelo de fisuración pasa a gobernar la respuesta. El daño plástico acumulado permanece constante y se abren fisuras en modo *I* en la dirección normal a las tensiones principales de tracción.

Hemos basado nuestra relación constitutiva para material fisurado en el modelo de la fisura difusa, con posibilidad de fisuras múltiples no ortogonales. Los detalles del modelo implementado puede verse en las referencias [8] a [10].

En la Figura 3 mostramos los diferentes estados (modos) en que puede encontrarse una fisura.

IMPLEMENTACION DEL MODELO EN UN PROGRAMA DE ELEMENTOS FINITOS

Hemos implementado nuestro modelo en el elemento bidimensional del programa NONSAP. De entre los aspectos importantes de esta implementación numérica nos detendremos en el análisis de:

- La integración de las relaciones tensión/deformación.
- El esquema iterativo durante el análisis incremental.

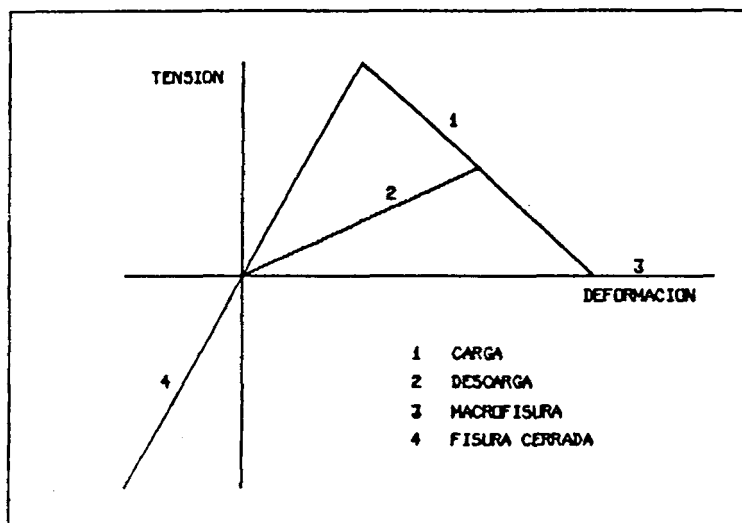


Figura 3. Estados de una fisura.

Integración de las relaciones tensión/deformación

El problema de la integración de las relaciones tensión/deformación puede enunciarse de la siguiente forma: dada la configuración de equilibrio correspondiente a un tiempo (nivel de cargas) t y los desplazamientos nodales calculados para la iteración $i + 1$, hallar la configuración correspondiente al tiempo $t + \Delta t$.

Matemáticamente, debe hallarse ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)}$ donde

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)} = {}^t\sigma + \int_t^{t+\Delta t} d\sigma \quad (6)$$

Distinguimos 2 casos diferentes:

1. Daño plástico constante
2. Daño plástico creciente

En el primer caso, la relación constitutiva es lineal (elástica o elasto-fractura) y utilizamos directamente integración explícita.

$${}^{t+\Delta t}\sigma = {}^t\sigma + C^{EF} \Delta \epsilon \quad (7)$$

En el segundo caso, que es el que nos interesa, la relación es no lineal, y a los efectos de integrarla manteniéndose sobre la superficie de fluencia (condición de consistencia), utilizamos un esquema de integración implícita basado en la "regla de punto medio"²¹. Comenzamos evaluando la dirección del vector incremento de deformaciones plásticas correspondientes al estado tensional y daño plástico de un "punto medio" definido por $1 < \alpha < 0$.

$${}^\alpha\sigma = (1 - \alpha){}^t\sigma + \alpha{}^{t+\Delta t}\sigma^{(i)} \quad (8.a)$$

$${}^\alpha h = (1 - \alpha){}^t h + \alpha{}^{t+\Delta t} h^{(i)} \quad (8.b)$$

$${}^{\alpha}g = \frac{\partial G}{\partial \sigma}({}^{\alpha}\sigma + {}^{\alpha}h) \quad (8.c)$$

donde ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i)}$ y ${}^{t+\Delta t}h^{(i)}$ son los valores correspondientes a una iteración anterior (para la primera iteración serán dos predictores). El esquema será estable en la medida que $\alpha \geq 0.5$; nosotros hemos decidido tomar $\alpha = 0.5$, con lo que aseguramos integración exacta hasta el 2do. orden inclusive²¹.

$${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)}(\Delta\lambda) = {}^t\sigma + C^{BF}(\Delta\epsilon - \Delta\lambda {}^{\alpha}g) \quad (9.a)$$

$${}^{t+\Delta t}h^{(i+1)}(\Delta\lambda) = \left[t_h^3 + \Delta\lambda \frac{\sqrt{2/3} {}^{\alpha}g^T {}^{\alpha}g}{\bar{\epsilon}_R({}^tI_1/\sqrt{{}^tJ_2})} \right]^{\frac{1}{3}} \quad (9.b)$$

Tal como queda expresado, evaluando la "sensibilidad a la deformación plástica" a partir de las tensiones en el tiempo t ; con esto introducimos un error que tenderá a anularse con Δt .

A efectos de determinar $\Delta\lambda$, imponemos el cumplimiento de la consistencia:

$$F\{{}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)}(\Delta\lambda), {}^{t+\Delta t}h^{(i+1)}(\Delta\lambda)\} = 0 \quad (10)$$

Obtenido $\Delta\lambda$, podrán calcularse ${}^{t+\Delta t}\sigma^{(i+1)}$ y ${}^{t+\Delta t}h^{(i+1)}$ con los que recomenzar el proceso, que seguirá hasta obtener un vector de tensiones y un parámetro de endurecimiento iguales, dentro de ciertas tolerancias, a los de la iteración anterior.

Resta aún por aclarar el cálculo de los predictores. Nosotros hemos utilizado directamente los valores correspondientes a la aplicación directa de la matriz elasto-plasto-fisura (que en el caso general es no simétrica).

Es importante destacar que la integración implícita descripta asume la constancia de la matriz C^{BF} , o sea que:

- No se abren nuevas fisuras.
- No hay cambios en el estado de las fisuras.

Una vez obtenida la convergencia, es necesario verificar si se ha producido una discontinuidad de este tipo; de ser así será preciso evaluar, usando el esquema de bisección, el tiempo (sección de carga) correspondiente. Desde t hasta ese tiempo los resultados calculados son correctos. De ahí hasta $t + \Delta t$ debe seguirse la integración utilizando la matriz constitutiva corregida.

Esquema iterativo durante el análisis incremental

Si ${}^{t+\Delta t}\mathbf{R}$ son las fuerzas nodales externas actuantes en el tiempo $t + \Delta t$ y ${}^{t+\Delta t}\mathbf{F}$ son las fuerzas nodales equivalentes (en el sentido del principio de los trabajos virtuales) a las tensiones internas, entonces el análisis incremental implica la determinación de la configuración de equilibrio en $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} = 0 \quad (11)$$

Partiendo de la configuración de equilibrio conocida correspondiente al tiempo t .

Para lograr esto, utilizamos un esquema iterativo que, para una iteración genérica i , adopta la forma^{3,27,28}:

$${}^t\mathbf{K}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F}^{(i-1)} \quad (12.a)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}^{(i-1)} + \mathbf{U}^{(i)} \quad (12.b)$$

El proceso de iteración continua hasta alcanzar, dentro de ciertas tolerancias, el equilibrio³.

Esta formulación corresponde a procesos controlados por cargas, pero existen también procesos controlados en el espacio generalizado carga-desplazamiento²⁸.

La matriz ${}^t\mathbf{K}$, de rigidez, es diferente para los diferentes métodos utilizados.

En el caso del método de Newton-Raphson, ${}^t\mathbf{K}$ es la matriz tangente. Al utilizar plasticidad no asociada esta matriz resulta no simétrica^{5,6}, y por lo tanto inadecuada para su implementación en programas generales de elementos finitos.

Pande y Pietruszczak propusieron recientemente un método muy atractivo²² que produce matrices de rigidez simétricas para plasticidad no asociada a través de la definición de un material asociado equivalente.

Otra forma de eludir matrices no simétricas consiste en comenzar cada paso incremental utilizando la matriz elástica, cuya inversa será actualizada en cada iteración utilizando la técnica BFGS³; esto equivale a la utilización de matrices de rigidez secantes.

En la siguiente sección mostramos los resultados (número de iteraciones y tiempo de CPU) obtenidos para diversos casos de carga utilizando los siguientes métodos:

- Matriz elástica.
- Newton-Raphson modificado + Matriz de Pande-Pietruszczak
- BFGS + Matriz elástica
- Newton-Raphson modificado + Matriz no asociativa completa (no-simétrica)

Nuestras conclusiones son las siguientes:

- La matriz no simétrica completa es la solución más eficiente desde el punto de vista del número de iteraciones.
- De entre las técnicas utilizadas con matrices simétricas, la más conveniente es la elástica + BFGS, mientras que la matriz elástica sin actualización es la peor alternativa. En la referencia [1] demostramos que la técnica de la matriz de Pande-Pietruszczak + BFGS es aún más efectiva.

EJEMPLOS NUMERICOS

Comparación de esquemas iterativos

La Tabla I muestra la comparación a que hiciéramos referencia en la sección anterior, para casos planos de tensión y deformación. En los casos en que algún valor no se consigna en las corridas con la matriz de Pande y Pietruszczak, éste debe atribuirse a que no se alcanzó la convergencia.

CASOS PLANOS DE TENSION																						
NUMERO DE ITERACIONES DE EQUILIBRIO EN EL PASO NUMERO:																						
CASO	METODO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	CPU
-1/-1	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.00
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.06
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.08
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.50
-1/-0.75	A	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	1.07
	B	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1.00
	C	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	3	3	3	3	3	4	1.35
	D	1	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	2	3	1.44
-1/-0.50	A	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	1.02
	B	1	2	2	2	3	3	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	5	1.00
	C	1	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	3	3	4	4	4	1.26
	D	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	2	3	3	2	2	3	3	1.31
-1/-0.25	A	1	2	2	2	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	1.00
	B	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	5	-	-	-
	C	1	2	2	2	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	1.11
	D	1	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	1.17
-1/-0.1	A	1	1	2	2	1	3	3	4	4	4	5	5	6	7	7	8	9	9	10	11	1.59
	B	1	1	2	2	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	3	3	3	4	1.00
	C	1	1	2	2	1	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	5	6	6	1.29
	D	1	1	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1.22
-1/0	A	1	1	3	2	2	3	4	5	7	7	10	13	15	18	21	25	29	34	41	39	3.25
	B	1	1	3	2	2	3	3	4	5	5	7	8	9	10	11	11	11	11	-	-	-
	C	1	1	3	2	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	6	1.20
	D	1	1	2	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	2	1.00
-1/-1 & TAU=1	A	1	3	4	4	5	6	7	7	8	9	10	10	11	13	14	15	16	17	18	18	2.58
	B	1	3	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	1.00
	C	1	2	3	3	3	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	1.51
	D	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	1.24
-1/0.05	A	1	1	2	3	3	2	3	3	4	4	4	5	5	5	5	5	5	6	6	6	1.00
	B	1	1	2	3	3	3	3	4	4	5	5	6	6	6	6	6	5	5	5	4	1.05
	C	1	1	2	3	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	1.08
	D	1	1	2	3	2	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.08
-1/0.1	A	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	3	4	5	5	6	6	6	7	7	1.00
	B	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	3	3	4	5	6	7	7	7	7	6	1.02
	C	1	1	1	1	1	2	2	3	3	2	3	3	3	4	4	4	4	4	4	4	1.02
	D	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.15

Tabla I. A Sin reformulación + Matriz elástica (sólo se formula el primer paso).
 B Newton modificado + Matriz de Pande-Pietruszczak.
 C BFGS + Matriz elástica.
 D Newton Raphson + Matriz no asociativa completa (no simétrica).

CASOS PLANOS DE DEFORMACION																						
NUMERO DE ITERACIONES DE EQUILIBRIO EN EL PASO NUMERO:																						
CASO	METODO	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	CPU
-1/-1	A	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.00
	B	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.07
	C	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.06
	D	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1.62
-1/-0.75	A	4	3	3	3	2	2	2	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1.16
	B	4	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.00
	C	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1.26
	D	4	1	2	2	2	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.49
-1/-0.50	A	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	5	5	5	5	6	6	6	1.31
	B	3	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	1.00
	C	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	4	1.37
	D	3	2	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.30
-1/-0.25	A	2	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	5	5	6	7	8	9	11	13	14	1.45
	B	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	1.00
	C	2	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	4	4	4	4	5	5	5	5	1.20
	D	2	2	2	2	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.22
-1/-0.1	A	1	2	2	3	4	5	6	8	10	12	16	21	27	35	42	51	62	76	95	112	4.75
	B	1	2	2	3	3	4	4	5	6	8	10	13	15	17	17	17	17	18	18	16	1.79
	C	1	2	2	3	3	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1.00
	D	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	2	3	3	3	3	3	2	1.05
-1/0	A	1	2	3	3	4	7	10	14	19	24	31	38	46	55	67	79	94	112	134	165	7.01
	B	1	2	2	3	4	5	7	10	12	14	16	18	18	19	20	19	19	19	19	19	2.27
	C	1	2	3	2	3	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	5	1.04
	D	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	3	3	1.00
-1/-1 & TAU=1	A	2	3	4	4	4	5	5	6	6	7	8	10	11	12	13	13	13	14	14	14	1.37
	B	2	3	4	5	5	5	6	6	7	7	7	7	6	2	2	5	6	6	6	6	1.00
	C	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	5	5	5	5	1.00
	D	2	2	3	3	3	4	4	4	4	5	5	6	6	6	5	5	5	5	5	5	1.45
-1/0.05	A	1	1	1	3	3	2	4	6	8	11	14	17	20	24	28	32	36	40	45	49	2.99
	B	1	1	1	3	2	3	3	5	6	8	9	10	11	12	13	13	13	13	13	13	1.62
	C	1	1	1	3	3	2	3	4	4	4	4	4	4	5	5	5	5	4	5	5	1.01
	D	1	1	1	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.00
-1/0.1	A	1	1	1	4	4	2	4	6	9	12	15	18	21	24	28	31	34	38	42	46	3.17
	B	1	1	1	4	1	2	4	5	7	8	9	10	11	11	11	12	12	12	11	11	1.63
	C	1	1	1	3	3	2	3	3	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4	5	5	1.00
	D	1	1	1	3	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	2	1.07

Tabla I. (cont.) A Sin reformulación + Matriz elástica (sólo se formula el primer paso).

B Newton modificado + Matriz de Pande-Pietruszczak.

C BFGS + Matriz elástica.

D Newton Raphson + Matriz no asociativa completa (no simétrica).

Comparación con ensayos experimentales

A modo de ejemplificación del ajuste de nuestro modelo a los resultados de ensayos experimentales, mostramos en la Figura 4 una comparación con los obtenidos por Kupfer y otros¹⁸ en probetas de hormigón sometidas a estados tensionales biaxiales.

En la referencia [1] presentamos más ejemplos para ilustrar sobre el comportamiento de nuestro modelo constitutivo.

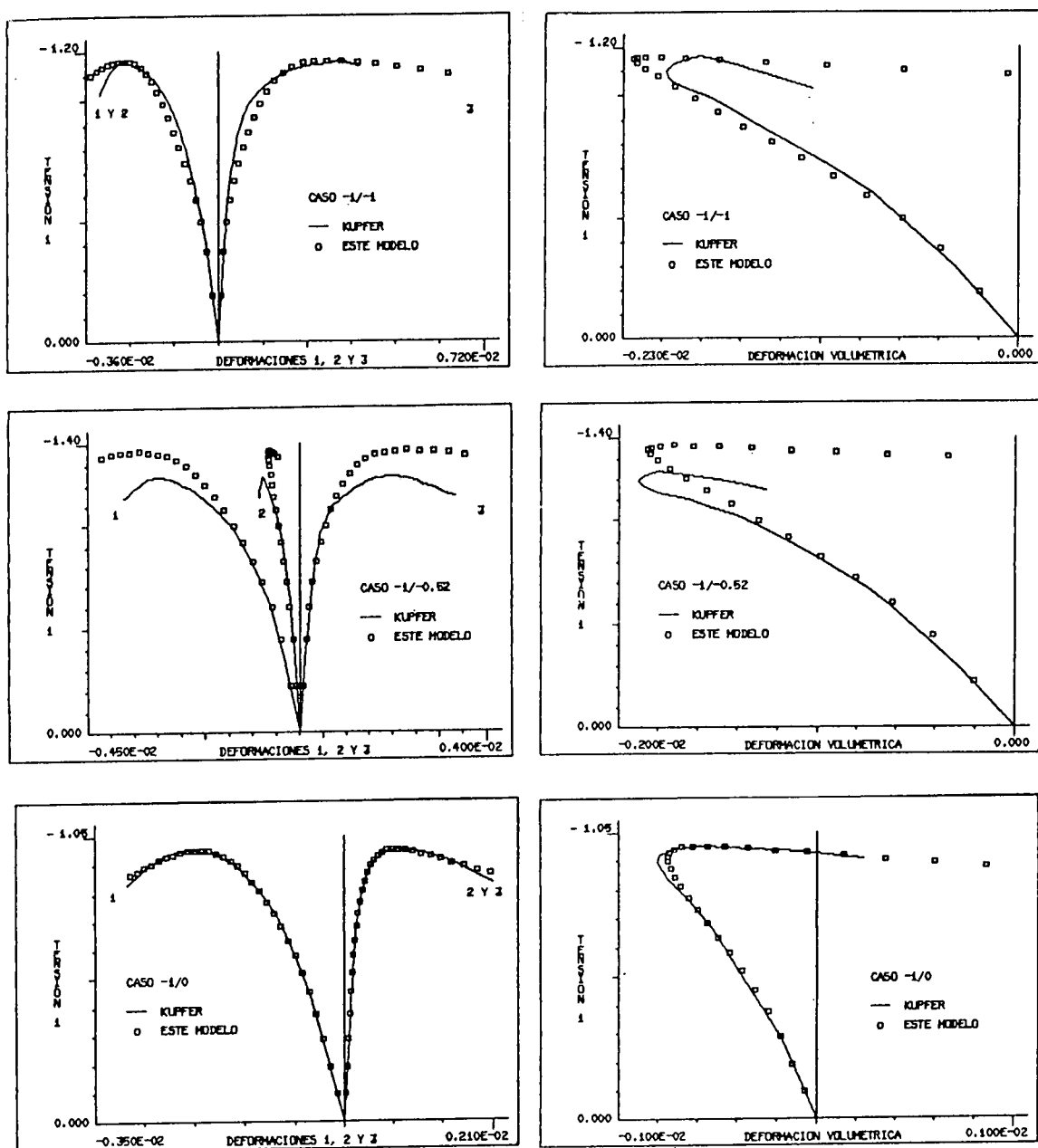


Figura 4. Comparación de resultados numéricos y experimentales.

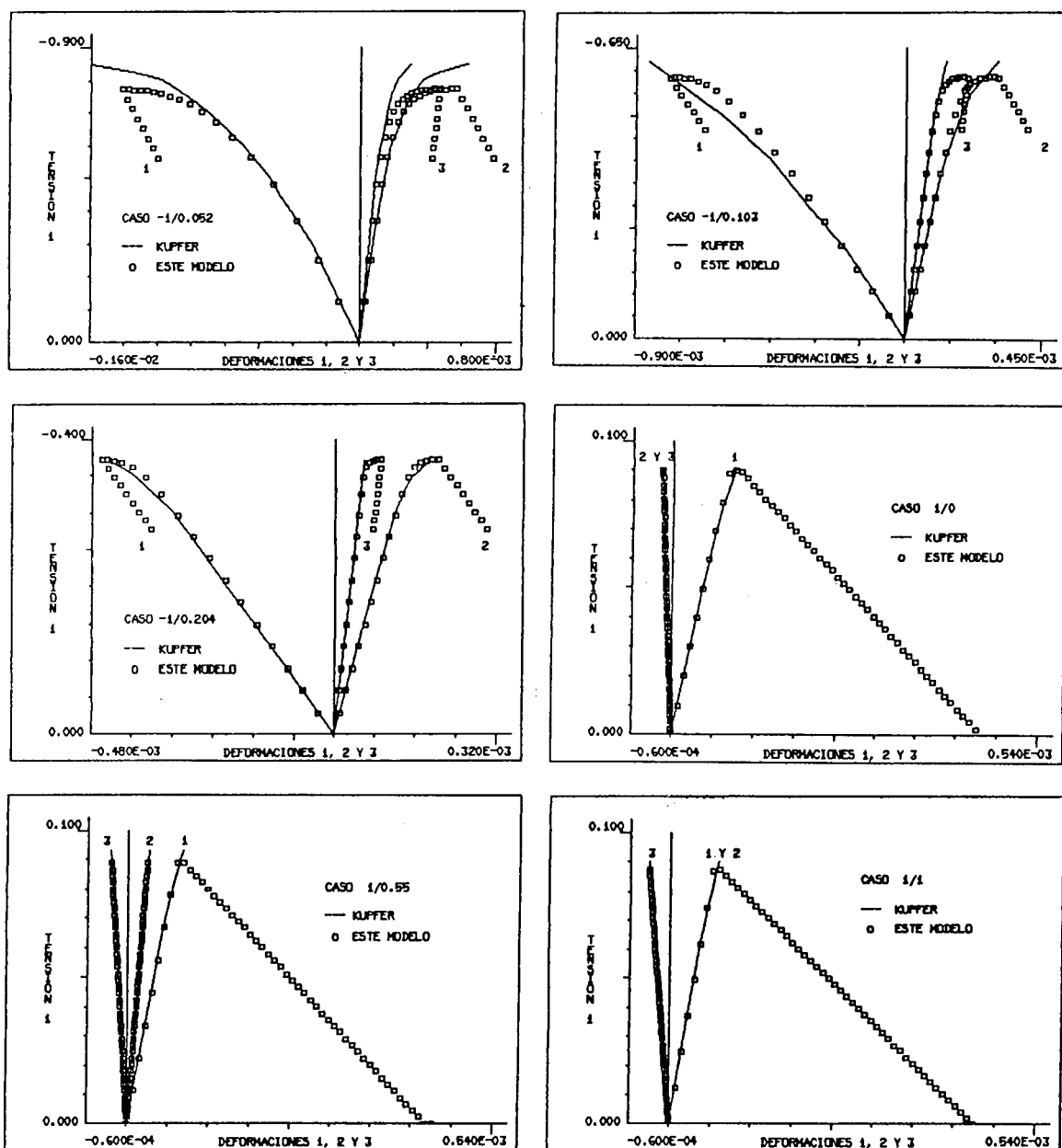


Figura 4. cont. Comparación de resultados numéricos y experimentales.

REFERENCIAS

1. E.N. Dvorkin, A.M. Cuitiño y G. Gioia, "A Concrete Material Model Based on Non-Associated Plasticity and Fracture", *Engng. Computations* (en prensa).
2. W.F. Chen, "Plasticity in Reinforced Concrete", McGraw Hill, (1982).
3. K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice Hall,

- Englewood Cliffs, New Jersey, (1982).
4. Z.P. Bazant, "Advanced Topics in Inelasticity and Failure of Concrete", Swedish Cement and Concrete Research Institute, (1979).
 5. P.A. Vermeer y R. de Borst, "Non Associated Plasticity for Soils, Concrete and Rock", *Heron*, Vol. **29**, No. 3, (1984).
 6. R. de Borst, "Non-Linear Analysis of Frictional Materials", *Tesis Doctoral*, Delft University, Holanda, (1986).
 7. D.J. Han y W.F. Chen, "Strain-Space Plasticity Formulation for Hardening-Softening Materials with Elastoplastic Coupling", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **22**, pp. 935-950, (1986).
 8. Z.P. Bazant y B. Oh, "Crack Band Theory for Fracture of Concrete", *RILEM, Mat. Structures*, Vol. **16**, pp. 155-177, (1983).
 9. J.G. Rots, P. Nauta, G.M.A. Kusters y J. Blaauwendraad, "Smeared Crack Approach and Fracture Localization in Concrete", *Heron*, Vol. **30**, No. 1, (1985).
 10. R. de Borst y P. Nauta, "Non-orthogonal Cracks in Smeared Finite Element Modelling", *Engng. Computations*, Vol. **2**, pp. 35-46, (1985).
 11. Z.P. Bazant, "Instability, Ductility and Size Effect in Strain-Softening Concrete", A.S.C.E., *J. Eng. Mech. Div.*, Vol. **102**, No. EMR, pp. 331-344, (1976).
 12. N.S. Ottosen, "Thermodynamic Consequences of Strain Softening in Tension", A.S.C.E., *J. Eng. Mech. Div.*, Vol. **112**, pp. 1152-1164, (1986).
 13. S.P. Shah y R. Sankar, "Internal Cracking and Strain Softening Response in Concrete under Uniaxial Compression", *A.C.I. Materials J.*, pp. 200-212, (1987).
 14. J.G.M. van Mier, "Multiaxial Strain-Softening of Concrete. Part I: Fracture", *RILEM, Mat. Structures*, Vol. **19**, pp. 179-190, (1986).
 15. K.J. Willam, N. Bicanic y S. Sture, "Constitutive and Computational Aspects of Strain-Softening and Localization in Solids", en "*Constitutive equations: Macro and Computational Aspects*", Ed. K.J. Willam, A.S.M.E., (1984).
 16. E.N. Dvorkin, R.J. Torrent y A.M. Alvaredo, "A Constitutive Relation for Concrete", *Proceeding 1st Int. Conf. on Computational Plasticity*, Ed. D.R.J. Owen y otros, Pineridge Press, (1987).
 17. R.J. Torrent, E.N. Dvorkin y A.M. Alvaredo, "A Model for Work-Hardening Plasticity and Failure of Concrete under Multiaxial Stresses", *Cement and Concrete Research*, Vol. **17**, pp. 939-950, (1987).
 18. H. Kupfer, H.K. Hilsdorf y H. Rush, "Behavior of Concrete under Biaxial Stresses", *A.C.I. Journal*, Vol. **66**, pp. 656-666, (1969).
 19. K.J. Bathe, E.L. Wilson y R.H. Iding, "NONSAP - A Structural Analysis Program for Static and Dynamic Response of Nonlinear Systems", *Report No. UCSESM 74-3*, Structural Engng. Lab. University of California at Berkeley, (1974).
 20. E. Oñate, S. Oller, J. Oliver y L. Lubliner, "A Constitutive Model for Cracking of Concrete Based on the Incremental Theory of Plasticity", *Proceedings 1st Int. Conference on Computational Plasticity*, Ed. D.R.J. Owen y otros, Pineridge Press, (1987).
 21. M. Ortiz y E.P. Popov, "Accuracy and Stability of Integration Algorithm for Elastoplastic Constitutive Relations", *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, Vol. **21**, pp. 1561-1576, (1985).
 22. G.N. Pande y Pietruszczak, "Symmetric Tangential Stiffness Formulation for Non-Associated Plasticity", *Computers and Geotechnics*, Vol. **2**, pp. 89-99, (1986).
 23. N.S. Ottosen, "A Failure Criterion for Concrete", A.S.C.E., *J. Engng. Mech. Div.*, Vol. **103**, No. EM4, pp. 527-535, (1977).

24. D.R.J. Owen, J.A. Figueiras y F. Damjanic, "Finite Element Analysis of Reinforced and Prestressed Concrete Structures Including Thermal Loading", *Comp. Methods in Applied Mechs. and Engng.*, Vol. **41**, pp. 323-366, (1986).
25. K.J. Bathe y S. Ramaswamy, "On Three Dimensional Nonlinear Analysis of Concrete Structures", *Nuclear Engng. and Design*, Vol. **52**, pp. 385-409, (1979).
26. J. Oliver, "A Consistent Characteristic Length for Smeared Cracking Models", *Int. J. Numer. Methods in Engng.*, Vol. **28**, pp. 461-474, (1989).
27. K.J. Bathe y A.P. Cimento, "Some Practical Procedures for the Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Comp. Methods in Applied Mechs. and Engng.*, Vol. **22**, pp. 59-85, (1980).
28. K.J. Bathe y E.N. Dvorkin, "On the Automatic Solution of Nonlinear Finite Element Equations", *Computers and Structures*, Vol. **17**, pp. 871-879, (1983).