

Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en deformaciones finitas. Modelos elastoplásticos

M. Dolores G. Pulido

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en Ingeniería
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte, Edificio C1, 08034 Barcelona, España
Tel.: 34 93 401 6473; Fax: 34 93 401 1048
E-mail: pulido@cimne.upc.edu

Javier Oliver

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en Ingeniería
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos
Universidad Politécnica de Cataluña
Campus Norte, Edificio C1, 08034 Barcelona, España
Tel.: 34 93 401 6490; Fax: 34 93 401 1048
E-mail: oliver@cimne.upc.edu

Resumen

Partiendo de la Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA) como marco para modelar el fenómeno de localización de deformaciones y discontinuidades del campo de desplazamientos, el presente artículo extiende resultados previos obtenidos por los autores empleando cinemáticas de deformación infinitesimal y finita en modelos degradables. Mediante el análisis de discontinuidad fuerte, y adoptando un modelo continuo (tensión-deformación) elastoplástico isótropo, se deriva el modelo constitutivo discreto proyectado (vector tracción versus salto del campo de desplazamiento), junto con las condiciones de discontinuidad fuerte que restringen los estados tensionales en el régimen discontinuo. Se establece una comparación entre los modelos constitutivos discretos proyectados obtenidos con ambas cinemáticas (deformaciones infinitesimales y finitas). Al final del artículo se expone una serie de ensayos numéricos con objeto de corroborar la teoría del modelo propuesto y de enfatizar el papel que desempeña la cinemática de grandes deformaciones en los resultados obtenidos.

Palabras clave: *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes, fallo material, localización, fractura, elastoplasticidad, grandes deformaciones.*

CONTRIBUTIONS TO MATERIAL FAILURE NUMERICAL SIMULATION IN FINITE DEFORMATION SETTINGS. ELASTOPLASTIC MODELS

Summary

Taking the Continuum strong discontinuity approach (CSDA) as a framework for modeling displacement discontinuities and strain localization phenomena, this work extends previous results of the authors for infinitesimal and finite strain settings using damage models. By means of the strong discontinuity analysis, and for elastoplasticity continuum (stress-strain) constitutive models, projected discrete (tractions-displacement jumps) constitutive models are derived, together with the strong discontinuity conditions that restrict the stress states at the discontinuous regime. The projected discrete constitutive models obtained for both strain settings (infinitesimal and large) are compared. Finally, some numerical experiments display the theoretical issues, and emphasize the role of the large strain kinematics in the obtained results.

Keywords: *Continuum strong discontinuity approach, material failure, localization, fracture, elastoplasticity, finite strains.*

INTRODUCCIÓN

En el presente artículo se emplea la denominada *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA)* para modelar el fenómeno de localización de deformaciones. Su análisis e implicaciones en modelos degradables han sido analizados por los autores en¹⁸ (empleando una cinemática de deformación infinitesimal) y en¹⁹ empleando una cinemática de grandes deformaciones.

En este trabajo se analiza un segundo grupo de modelos constitutivos con cinemática de grandes deformaciones, basado en modelos elastoplásticos isotropos considerando la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación \mathbf{F} en parte elástica, \mathbf{F}^e , y parte plástica, \mathbf{F}^p : $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$.

CINEMÁTICA DE PLASTICIDAD MULTIPLICATIVA

La descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación en parte elástica y plástica ya ha sido empleada por diversos autores^{8,9,22,23,24}. Dicha descomposición viene motivada, desde un punto de vista micromecánico, por la fenomenología observada en cristales simples, extendiéndose al caso de sólidos policristalinos^{2,5,27}.

La descomposición multiplicativa adoptada $\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p$ (Figura 1), que introduce el concepto de configuración intermedia $\tilde{\Omega}$, descrita mediante una aplicación en \mathbb{R}^3 cuyo gradiente de deformación es \mathbf{F}^p , permite deducir las siguientes expresiones:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^p \quad (1)$$

$$\mathbf{l} = \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} = \underbrace{\dot{\mathbf{F}}^e \cdot \mathbf{F}^{e-1}}_{\mathbf{l}^e} + \underbrace{\mathbf{F}^e \cdot \dot{\mathbf{F}}^p \cdot \mathbf{F}^{p-1} \cdot \mathbf{F}^{e-1}}_{\mathbf{l}^p} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p \quad (2)$$

$$\mathbf{d} = \mathbf{l}^s = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p; \quad \mathbf{d}^e = (\mathbf{l}^e)^s; \quad \mathbf{d}^p = (\mathbf{l}^p)^s \quad (3)$$

$$\mathbf{w} = \mathbf{l}^{skw} = \mathbf{w}^{skw} + \mathbf{w}^p; \quad \mathbf{w}^e = (\mathbf{l}^e)^{skw}; \quad \mathbf{w}^p = (\mathbf{l}^p)^{skw} \quad (4)$$

donde \mathbf{l} es el tensor gradiente de la velocidad, \mathbf{l}^e la componente elástica del tensor gradiente de la velocidad, \mathbf{l}^p la componente plástica del tensor gradiente de la velocidad, \mathbf{d} el tensor velocidad de deformación, \mathbf{d}^e la componente elástica del tensor velocidad de deformación, \mathbf{d}^p la componente plástica del tensor velocidad de deformación, \mathbf{w} el tensor spin, \mathbf{w}^e la componente elástica del tensor spin y \mathbf{w}^p la componente plástica del tensor spin.

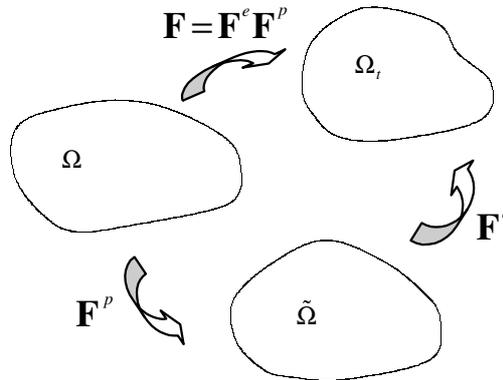


Figura 1. Descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación en modelos elastoplásticos

CINEMÁTICA DE MEDIOS DISCONTINUOS

Junto a la cinemática de plasticidad multiplicativa del apartado anterior, se emplea la misma cinemática de grandes deformaciones de medios discontinuos detallada en¹⁹ para modelos de daño isótropo en la familia de modelos elastoplásticos que se analiza en el presente trabajo.

DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. ECUACIONES DE GOBIERNO

Las ecuaciones que gobiernan el equilibrio local de un cuerpo que exhibe superficies materiales de discontinuidad fuerte empleando modelos constitutivos elastoplásticos con cinemática de grandes deformaciones son las mismas que las definidas en el problema de deformación finita con modelos constitutivos de daño¹⁹.

Empleando los mismos razonamientos allí expuestos, la condición de continuidad del vector tracción exige el carácter acotado del tensor de tensiones de Cauchy en el interior de la interfaz de discontinuidad, $\boldsymbol{\sigma}_S$, así como de la derivada temporal $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$.

El principal objetivo del análisis de discontinuidad fuerte (desarrollado en el apartado *Análisis de discontinuidad fuerte*) es, precisamente, determinar los ingredientes que deben introducirse en un modelo constitutivo continuo con objeto de garantizar dicho carácter acotado *incluso en presencia de deformaciones no acotadas*.

Del mismo modo que en teoría infinitesimal¹⁸ y en daño continuo con cinemática de grandes deformaciones¹⁹, para definir completamente el problema se necesitan establecer las ecuaciones constitutivas y las relaciones cinemáticas en todo el dominio. La relación constitutiva adoptada en la línea de discontinuidad \mathcal{S} es la misma que la empleada en el resto del sólido $\Omega \setminus \mathcal{S}$.

MODELO CONSTITUTIVO ELASTOPLÁSTICO ISÓTROPICO

Un modelo constitutivo particular perteneciente a la familia de los modelos elastoplásticos hiperelásticos isótropos es el de plasticidad J_2 con ablandamiento isótropo^{22,25}, el cual se describe a continuación.

Se adopta como expresión de la energía libre la siguiente función:

$$\psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \alpha) = \psi^e(\mathbf{b}^e) + \mathbf{H}^p(\alpha) \quad (5)$$

$$\psi^e(\mathbf{b}^e) = \frac{1}{2} \lambda \operatorname{tr}^2(Ln \sqrt{\mathbf{b}^e}) + \mu Ln \sqrt{\mathbf{b}^e} : Ln \sqrt{\mathbf{b}^e} \quad (6)$$

$$\mathbf{H}^p(\alpha) = \frac{1}{2} \mathcal{H} \alpha^2 \quad (7)$$

$$\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT} \quad (8)$$

donde $\psi^e(\mathbf{b}^e)$ y $\mathbf{H}^p(\alpha)$ son, respectivamente, la parte elástica y plástica de la función de energía libre, α es una variable interna escalar tipo tensión, $\mathcal{H} < 0$ es el parámetro continuo de ablandamiento y \mathbf{b}^e es la parte elástica del tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green.

Los diferentes tensores de tensión pueden derivarse de la ecuación (5) de la forma:

$$\mathbf{P} = \partial_{\mathbf{F}} \psi = \partial_{\mathbf{F}^e} \psi \Rightarrow \boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{b}^e \cdot \partial_{\mathbf{b}^e} \psi^e = \lambda \operatorname{tr}(Ln \sqrt{\mathbf{b}^e}) \mathbf{1} + 2\mu(Ln \sqrt{\mathbf{b}^e}) \quad (9)$$

$$L_v^e \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d}^e = \mathbf{c}^e : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p) \quad (10)$$

siendo $L_v^e(\cdot)$ la derivada de Lie asociada al movimiento representado por \mathbf{F}^e , $\boldsymbol{\tau}$ el tensor de tensiones de Kirchhoff y \mathbf{c}^e el tensor constitutivo elástico que relaciona el término $L_v^e(\boldsymbol{\tau})$ con la parte elástica del tensor velocidad de deformación \mathbf{d}^e , cuya expresión se detalla en el Anexo 1.

El modelo constitutivo presentado se complementa con la regla de flujo plástico, la ecuación de evolución de la variable interna escalar tipo tensión α , el criterio de fluencia, las condiciones de carga-descarga y la ley de ablandamiento:

$$\mathbf{d}^p = \gamma \mathbf{m} ; \quad \mathbf{m} = \partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{\text{dev}(\boldsymbol{\tau})}{\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|} \quad (11)$$

$$\dot{\alpha} = \gamma \quad \begin{cases} \alpha \in [0, \infty) \\ \alpha|_{t=0} = 0 \end{cases} \quad (12)$$

$$\phi(\boldsymbol{\tau}, q) \equiv \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) - (\tau_y + q) ; \quad \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \sqrt{\frac{3}{2}} \|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| \quad (13)$$

$$\gamma \geq 0 \quad \phi \leq 0 \quad \gamma \phi = 0 \quad (14)$$

$$q = \partial_{\alpha} \mathbf{H}^p(\alpha) ; \quad \dot{q} = \partial_{\alpha\alpha} \mathbf{H}^p(\alpha) \dot{\alpha} = \mathcal{H} \dot{\alpha} ; \quad \begin{cases} q \in [0, \tau_y] \\ q|_{t=0} \stackrel{\text{not}}{=} q_0 = \tau_y \end{cases} \quad (15)$$

donde $\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})$ es la tensión uniaxial equivalente de Kirchhoff y, por tanto, el tensor de flujo plástico $\mathbf{m} = \partial_{\boldsymbol{\tau}} \hat{\phi}$ es adimensional y acotado, $\text{dev}(\boldsymbol{\tau})$ es la parte desviadora del tensor $\boldsymbol{\tau}$, q es una variable interna escalar de endurecimiento tipo tensión y τ_y y γ son, respectivamente, la tensión de fluencia y el multiplicador plástico. La expresión $\text{dev}(\boldsymbol{\tau})$ representa la componente desviadora del tensor $\boldsymbol{\tau}$ ($\text{dev}(\cdot) = (\cdot) - \frac{1}{n_{\text{dim}}} \text{tr}(\cdot) \mathbf{1}$), siendo n_{dim} la dimensión del problema y $\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\|$ una norma definida de la forma: $\|\text{dev}(\boldsymbol{\tau})\| = \sqrt{\text{dev}(\boldsymbol{\tau}) : \text{dev}(\boldsymbol{\tau})}$.

Junto a las ecuaciones (5) a (15), la ley de evolución del término \mathbf{w}^p puede escribirse como:

$$\mathbf{w}^p = \gamma \hat{\mathbf{w}}(\boldsymbol{\tau}) \Rightarrow \mathbf{l}^p = \mathbf{d}^p + \mathbf{w}^p = \gamma \underbrace{(\mathbf{m} + \hat{\mathbf{w}})}_{\stackrel{\text{not}}{=} \hat{\mathbf{l}}} = \gamma \hat{\mathbf{l}} \quad (16)$$

Para este tipo de familia de modelos isotrópos con variable interna escalar, la ley de evolución de la ecuación (16) no representa ningún papel en el modelo constitutivo, resultando $\boldsymbol{\tau}$ independiente de \mathbf{w}^p y, por tanto, de $\hat{\mathbf{w}}$ (adoptando $\hat{\mathbf{w}} = \mathbf{0}$, el modelo expuesto coincide con el presentado en^{22,25}). Por simplicidad, se selecciona un valor arbitrario no nulo, pero acotado, para $\hat{\mathbf{w}}$.

En el Anexo 1 se pueden encontrar detalles adicionales del modelo constitutivo presentado.

ANÁLISIS DE DISCONTINUIDAD FUERTE

De modo similar al caso de modelos de daño, tanto en deformaciones infinitesimales¹⁸ como finitas¹⁹, se analizarán las condiciones que debe verificar el modelo elastoplástico presentado en el apartado *Modelo constitutivo elastoplástico isotropo*, con objeto de compatibilizarlo con la cinemática de discontinuidades fuertes empleada y con el carácter acotado de $\boldsymbol{\sigma}_s$ y de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_s$. Se hace notar que tan sólo se realizará el estudio para el caso de deformación plana, no considerando la hipótesis de tensión plana.

El análisis se basa en las siguientes identidades algebraicas²⁶:

- De las expresiones $L_v \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\tau}} - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l}^T$ y $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$, tras operaciones triviales, se deduce:

$$L_v \boldsymbol{\tau} = L_v (J \boldsymbol{\sigma}) = J \left[tr(\mathbf{1}) \boldsymbol{\sigma} + \dot{\boldsymbol{\sigma}} - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{l}^T \right] \quad (17)$$

- Partiendo de la identidad $L_v \boldsymbol{\tau} = L_v^e \boldsymbol{\tau} - \mathbf{l}^p \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l}^{pT}$, y teniendo en cuenta la ecuación constitutiva (10) ($L_v^e \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d}^e = \mathbf{c}^e : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p)$), la regla de flujo plástico (11) ($\mathbf{d}^p = \gamma \mathbf{m}$) y la ecuación (16) se obtiene:

$$\begin{aligned} L_v \boldsymbol{\tau} &= L_v^e \boldsymbol{\tau} - (\mathbf{l}^p \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{l}^p) \\ &= \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \gamma \left[\mathbf{c}^e : \mathbf{m} + J \hat{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + J \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{l}}^T \right] \end{aligned} \quad (18)$$

Consideremos los siguientes tiempos específicos dentro del régimen de discontinuidad fuerte ($t \geq t_{DF}$):

- a) *Instante de inicio de la discontinuidad fuerte*, $t = t_{DF}$, caracterizado por un valor nulo del salto incremental de desplazamiento ($\Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$). Diversas identidades cinemáticas quedan expresadas de la forma:

$$\begin{aligned} J &= \bar{J} \text{ (acotado)} \Rightarrow \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k J = 0 \\ \mathbf{l} &= \bar{\mathbf{l}} + \frac{\mu_S}{h} ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) \Rightarrow \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k \mathbf{l} = \mu_S ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) \\ \lim_{k \rightarrow 0} k \mathbf{d} &= \lim_{k \rightarrow 0} k \mathbf{l}^s = \mu_S ([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s \\ \lim_{k \rightarrow 0} k tr(\mathbf{l}) &= \lim_{k \rightarrow 0} \mu_S tr([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) = \mu_S ([\dot{\mathbf{u}}] \cdot \bar{\mathbf{n}}) \end{aligned} \quad (19)$$

Considerando las expresiones de (19), e igualando las ecuaciones (17) y (18) para un punto de la superficie material de discontinuidad \mathcal{S} , se obtiene, multiplicando ambos lados de la igualdad por $\bar{\mathbf{n}}$ y tomando límite para el régimen de discontinuidad fuerte ($h \equiv k \rightarrow 0$), la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \underbrace{[\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^e \cdot \bar{\mathbf{n}} + \bar{J} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \bar{\mathbf{n}})]}_{\mathbf{Q}^e} \cdot [\dot{\mathbf{u}}] &= \mathbf{Q}^e \cdot [\dot{\mathbf{u}}] = \left(\lim_{k \rightarrow 0} k \gamma \right) \mathbf{r} \\ \mathbf{r} &= \left[\mathbf{c}^e : \mathbf{m} + \bar{J} \hat{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\sigma} + \bar{J} \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{l}}^T \right] \cdot \bar{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (20)$$

donde se ha considerado el carácter acotado de $\boldsymbol{\sigma}_S$ y de $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$ (y, por tanto, $\lim_{k \rightarrow 0} k \boldsymbol{\sigma}_S = \lim_{k \rightarrow 0} k \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S = \mathbf{0}$). El tensor \mathbf{r} es acotado, pues lo son \mathbf{c}^e , \mathbf{m} , $\bar{\mathbf{n}}$, \bar{J} , $\boldsymbol{\sigma}$ y, por tanto, $\hat{\mathbf{l}}$. Para la mayoría de los casos, el tensor \mathbf{Q}^e es definido positivo¹ ($\det \mathbf{Q}^e > 0$), pudiéndose considerar las dos siguientes opciones en la ecuación (20):

¹Representa una hipótesis razonable, para la mayoría de materiales, suponer que la magnitud de las tensiones (caracterizada por el valor de la tensión de fluencia τ_y) es mucho menor comparada con los valores de los parámetros λ y μ , por lo que puede suponerse que el tensor $\mathbf{Q}^e = \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^e \cdot \bar{\mathbf{n}} + \bar{J} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}$ es definido positivo.

- 1) $\lim_{k \rightarrow 0} k\gamma = 0$ (γ acotado). Al ser \mathbf{r} acotado, la ecuación (20) se transforma en la expresión $\mathbf{Q}^e \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{0}$ y, por tanto, $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{0}$, no evolucionando el vector salto de desplazamiento en el instante del inicio de la discontinuidad fuerte t_{DF} (ni, consiguientemente, el estado de bifurcación). En consecuencia, esta opción debe descartarse, resultando *únicamente viable la siguiente*:
- 2) $\lim_{k \rightarrow 0} k\gamma = \bar{\gamma} \neq 0$ ($\gamma = O(\frac{1}{k}) =$ no acotado). Aunque, de acuerdo con los razonamientos previos, esta condición se requiere tan sólo en el instante de inicio de la discontinuidad fuerte ($t = t_{DF}$), se extenderá a todo el régimen de discontinuidad fuerte pues, como se demostrará en secciones posteriores, dicha condición se verifica siempre:

$$\lim_{k \rightarrow 0} k\gamma = \bar{\gamma} \neq 0 \quad \forall t \geq t_{DF} \quad (21)$$

- b) *Instante posterior al inicio de la discontinuidad fuerte*, $t_{DF} < t < \infty$. Para cualquier instante de tiempo posterior al inicio de la discontinuidad fuerte se pueden producir dos posibilidades, atendiendo a la componente normal del salto incremental de desplazamientos ($\Delta[u]_n = \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}$):

Caso b-1: $\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \neq 0$. A continuación se detallan algunas identidades que se verifican para este tipo de cinemática:

$$\begin{aligned} J &= \bar{J} \left[1 + \mu_S \frac{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}}{h} \right] \quad (\text{no acotado}) \Rightarrow \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k J = \bar{J} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ \mathbf{l} &= \bar{\mathbf{l}} + \frac{\mu_S}{h + \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}} \mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}} \quad (\text{acotado}) \Rightarrow \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} (k \mathbf{l}) = \mathbf{0} \\ \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k \mathbf{d} &= \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k \mathbf{l}^s = \mathbf{0}; \quad \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k \text{tr}(\mathbf{l}) = 0 \end{aligned} \quad (22)$$

Igualando las ecuaciones (17) y (18), multiplicando ambos lados de la igualdad por k^2 , tomando límite para el régimen de discontinuidad fuerte ($h \equiv k \rightarrow 0$) y teniendo en cuenta las expresiones (21)^{II} y (22), se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} k^2 L_v \boldsymbol{\tau}_S &= \lim_{k \rightarrow 0} \underbrace{k J}_{\bar{J} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}} \underbrace{k [\text{tr}(\mathbf{l}) \boldsymbol{\sigma}_S + \dot{\boldsymbol{\sigma}}_S - \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S - \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \mathbf{l}^T]}_{= \mathbf{0}} \\ &= 0 = \lim_{k \rightarrow 0} \left(\underbrace{k^2 \mathbf{c}^e : \mathbf{d}}_{= \mathbf{0}} - \underbrace{k \gamma}_{= \bar{\gamma}} \underbrace{[k \mathbf{c}^e : \mathbf{m}]}_{= \mathbf{0}} + \right. \\ &\quad \left. + \underbrace{k J}_{\bar{J} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}} (\hat{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S + \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \hat{\mathbf{l}}^T) \right) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\underbrace{\bar{J} (\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}})}_{\neq 0} \bar{\gamma} (\hat{\mathbf{l}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_S + \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \hat{\mathbf{l}}^T) = \mathbf{0} \quad (24)$$

^{II}Al ser $J = \bar{J} \left[1 + \mu_S \frac{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}}{h} \right]$ no acotado, $\boldsymbol{\tau}$ presenta la misma naturaleza no acotada, pues $\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}$ es acotado. Analizando la estructura de $\boldsymbol{\tau}$ en la ecuación (9) se deduce la naturaleza no acotada de \mathbf{b}^e y, por tanto, la de \mathbf{F}^e y, a su vez, la del tensor \mathbf{d}^e . Como $\mathbf{d} = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$ es acotado, $\mathbf{d}^p = \gamma \mathbf{m}$ debe ser no acotado, deduciéndose la relación $\gamma = \frac{1}{k} \bar{\gamma}$.

$$(\hat{\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{1}}^T) = \mathbf{0} \quad (25)$$

Considerando la expresión (16), la ecuación (25) puede reescribirse de la forma:

$$\hat{\mathbf{1}} \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_s \cdot \hat{\mathbf{1}}^T = [\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_s) + \hat{\mathbf{w}}] \cdot \boldsymbol{\sigma}_s + \boldsymbol{\sigma}_s \cdot [\mathbf{m}(\boldsymbol{\sigma}_s) + \hat{\mathbf{w}}]^T = \mathbf{0} \quad \forall \hat{\mathbf{w}} \quad (26)$$

donde se ha enfatizado el hecho de que $\boldsymbol{\sigma}_s$ sea independiente de \mathbf{w}^p a través de $\hat{\mathbf{w}}$. El valor arbitrario que puede adoptar $\hat{\mathbf{w}}$ en la ecuación (26) hace de $\boldsymbol{\sigma}_s = \mathbf{0}$ la única solución posible de dicha ecuación, concluyéndose, por tanto, que la hipótesis $\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \neq 0$ debe ser descartada, quedando como única solución posible la presentada en el caso siguiente.

Caso b-2: $\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$. Por ser $\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \forall t \geq t_{DF}$, se deduce la expresión:

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dt}(\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}) = L_v \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} + \Delta[\mathbf{u}] \cdot \underbrace{L_v \bar{\mathbf{n}}}_{= \mathbf{0}} \\ &\Rightarrow \boxed{L_v \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0 \quad \forall t \geq t_{DF}} \end{aligned} \quad (27)$$

que indica la imposibilidad del desarrollo de la componente normal del vector salto incremental. Por tanto, *al emplear modelos elastoplásticos de la familia detallada en el apartado Modelo constitutivo elastoplástico isótropo, sólo pueden ser modeladas discontinuidades del tipo modo II (saltos de los desplazamientos tangenciales)*. Este tipo de restricción también se ha detectado en modelos elastoplásticos tipo J2 empleando deformaciones infinitesimales^{13III}.

Considerando la expresión (21)^{IV}, la ecuación (12) puede reescribirse de la forma:

$$\lim_{k \rightarrow 0} k \dot{\alpha} = \bar{\gamma} \neq 0 \quad \forall t \geq t_{DF} \quad (28)$$

De modo análogo al llevado a cabo en los modelos de daño isótropo, tanto con cinemática infinitesimal como finita, la condición de la ecuación (28) se verifica si la estructura de la evolución de la variable interna α se expresa como:

$$\begin{aligned} \dot{\alpha} &= \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{h} \Rightarrow \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k \dot{\alpha} = \bar{\gamma} = \dot{\bar{\alpha}} \\ \alpha &= \underbrace{\int_0^{t_{DF}} \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{h} dt}_{\stackrel{def}{=} \bar{\alpha}_{DF}} + \int_{t_{DF}}^t \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{k} dt = \bar{\alpha}_{DF} + \frac{1}{k} \underbrace{(\bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_{DF})}_{\stackrel{def}{=} \Delta \bar{\alpha}} \end{aligned} \quad (29)$$

^{III}Según los razonamientos precedentes, la conclusión obtenida no se ve afectada por la regla de flujo seleccionada (verificándose para cualquier definición del tensor de flujo \mathbf{m}). Por tanto, y a diferencia del caso infinitesimal, en grandes deformaciones este resultado no está restringido sólo a modelos de plasticidad tipo J₂.

^{IV}Al ser $J = \bar{J}$, $\boldsymbol{\tau}$ presenta naturaleza acotada, pues σ lo es ($\boldsymbol{\tau} = J \boldsymbol{\sigma}$). Analizando la estructura de $\boldsymbol{\tau}$ en la ecuación (9) se deduce la naturaleza acotada de \mathbf{b}^e y, por tanto, la de \mathbf{F}^e y, a su vez, la del tensor \mathbf{d}^e . Como $\mathbf{d} = \bar{\mathbf{d}} + \frac{\mu_s}{h} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^S = \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p$, la naturaleza de \mathbf{d}^p es no acotada. Al ser $\mathbf{d}^p = \gamma \mathbf{m}$, con \mathbf{m} acotado, la implicación $\gamma = \frac{1}{k} \bar{\gamma}$ es obvia.

siendo $\bar{\alpha}$ y $\dot{\bar{\alpha}}$ acotados y diferentes de cero para $t > t_{DF}$. Aplicando el resultado de (29) a la ley de evolución de la variable interna q^V (15):

$$\underbrace{\dot{q}_S}_{\text{acotado}} = \mathcal{H} \underbrace{\dot{\alpha}}_{= \frac{\dot{\bar{\alpha}}}{k}} = \mathcal{H} \frac{1}{k} \underbrace{\dot{\bar{\alpha}}}_{\text{acotado}} \Rightarrow \mathcal{H} \frac{1}{k} = \bar{\mathcal{H}} \quad (\text{acotado}) \quad (30)$$

$$\dot{q}_S = \bar{\mathcal{H}} \dot{\bar{\alpha}} \quad (31)$$

donde $\bar{\mathcal{H}}$ representa el *parámetro de ablandamiento discreto o intrínseco*, deduciéndose, del mismo modo que en los modelos de daño con deformaciones infinitesimales y finitas, la condición de regularización del parámetro de ablandamiento como una condición *suficiente* para hacer consistente todo análisis precedente:

$$\boxed{\mathcal{H} = h \bar{\mathcal{H}}} \quad (32)$$

Considerando las ecuaciones (12) y (29) y la condición de regularización del parámetro de ablandamiento, el multiplicador plástico puede regularizarse de la forma:

$$\gamma = \dot{\alpha} = \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{h} \bar{\gamma} \quad (33)$$

Operando del mismo modo que en los casos anteriores, se igualan las ecuaciones (17) y (18), multiplicando ambos lados de la igualdad por k , tomando límite para el régimen de discontinuidad fuerte ($h \equiv k \rightarrow 0$) y teniendo en cuenta la ecuación (27), se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow 0} k L_v \tau_S &= \bar{J} \underbrace{(L_v \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}})}_{= 0} \sigma_S \\ &\quad - \underbrace{\bar{J} (L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}} \cdot \sigma_S + \sigma_S \cdot \bar{\mathbf{n}} \otimes L_v \Delta[\mathbf{u}])}_{2 \bar{J} (L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \sigma_S \cdot \bar{\mathbf{n}})^s} \\ &= \mathbf{c}^e : (L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s \\ &\quad - \underbrace{k \gamma}_{= \bar{\gamma}} \left[\mathbf{c}^e : \mathbf{m} + \bar{J} (\hat{\mathbf{1}} \cdot \sigma_S + \sigma_S \cdot \hat{\mathbf{1}}^T) \right] \end{aligned} \quad (34)$$

y, reordenando términos:

$$(L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s = \bar{\gamma} \mathbf{m} - \mathbf{c}^{e-1} : \underbrace{2 \bar{J} [(L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \sigma_S \cdot \bar{\mathbf{n}})^s - \bar{\gamma} (\hat{\mathbf{1}} \cdot \sigma_S)^s]}_{\mathbf{p}} \quad (35)$$

$$(L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s = \bar{\gamma} \mathbf{m} - \mathbf{c}^{e-1} : \mathbf{p} \quad (36)$$

Sustituyendo la ecuación (33) en (36) se tiene:

$$(L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s = \dot{\bar{\alpha}} \mathbf{m} - \mathbf{c}^{e-1} : \mathbf{p} \quad (37)$$

En la mayor parte de los casos, los valores de los parámetros elásticos son sensiblemente superiores a los de las tensiones, $(\mu, \lambda) \gg \sigma$, pudiendo prescindirse del término $\mathbf{c}^{e-1} : \mathbf{p}$ en la ecuación (37), reescribiéndose de la forma:

$$(L_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s = \dot{\bar{\alpha}} \mathbf{m} \quad (38)$$

^VEl carácter acotado de q_S emerge de la condición $q \in [0, \tau_y]$ y el de \dot{q}_S de la naturaleza acotada de σ_S y $\dot{\sigma}_S$ (y, por tanto, de $\tau_S = \bar{J} \sigma_S + \hat{\tau}_S$) y de la condición de consistencia: $\dot{\phi}(\tau_S) = 0 \Rightarrow \dot{q}_S = \mathbf{m}(\tau_S) : \hat{\tau}_S = (\text{acotado})$

Junto a las ecuaciones (27) y (38), se analizan a continuación las siguientes propiedades de diversas entidades cinemáticas de las interfaces materiales de discontinuidad \mathcal{S} :

- 1) Igualando las expresiones para el tensor velocidad de deformación \mathbf{d} de la cinemática de discontinuidades fuertes en grandes deformaciones¹⁹ ($\mathbf{d} = \mathbf{l}^s = \bar{\mathbf{d}} + \frac{1}{h} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s$; $\bar{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{l}}^s$) y de la cinemática de plasticidad multiplicativa de la ecuación (3) se deduce, para el régimen de discontinuidad fuerte ($t > t_{DF}$ y, por tanto, $h \equiv k \rightarrow 0$):

$$\begin{aligned} \mathbf{d} &= \bar{\mathbf{d}} + \tilde{\mathbf{d}} = \bar{\mathbf{d}} + \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s \\ &= \mathbf{d}^e + \mathbf{d}^p = \mathbf{d}^e + \frac{1}{k} \bar{\gamma} \mathbf{m}_s = \mathbf{d}^e + \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s \end{aligned} \quad (39)$$

$$\mathbf{d}^e = \bar{\mathbf{d}} \quad (\text{acotado}) \quad (40)$$

$$\mathbf{d}^p = \tilde{\mathbf{d}} = \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s$$

lo cual establece que *el flujo plástico \mathbf{d}^p se desarrolla enteramente debido al salto de desplazamiento*. Esta conclusión representa una extensión a la cinemática de grandes deformaciones de un resultado similar obtenido en modelos elastoplásticos basados en deformaciones infinitesimales¹³.

- 2) La condición $\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ y, en consecuencia $J = \bar{J} \tilde{J} = \bar{J}$, establecen *el carácter acotado del tensor de tensiones de Kirchhoff*, (pues $\boldsymbol{\tau}_s = J \boldsymbol{\sigma}_s = \bar{J} \boldsymbol{\sigma}_s$, y tanto \bar{J} como $\boldsymbol{\sigma}_s$ son entidades acotadas) *y también el de $\dot{\boldsymbol{\tau}}_s$ en régimen de discontinuidad fuerte*. Este resultado, combinado con la siguiente identidad:

$$L_v^e \boldsymbol{\tau}_s = \underbrace{\dot{\boldsymbol{\tau}}_s}_{\text{acotado}} - \mathbf{l}^e \cdot \boldsymbol{\tau}_s - \boldsymbol{\tau}_s \cdot \mathbf{l}^{eT} = \underbrace{\mathbf{c}^e : \mathbf{d}^e}_{\text{acotado}} \Rightarrow \mathbf{l}^e = \text{acotado} \quad (41)$$

establece el carácter acotado del término elástico del tensor gradiente de la velocidad \mathbf{l}^e . Igualando ahora las expresiones $\mathbf{l} = \mathbf{l}^e + \mathbf{l}^p$ y $\mathbf{l} = \bar{\mathbf{l}} + \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})$:

$$\mathbf{l} = \underbrace{\mathbf{l}^e}_{\text{acotado}} + \mathbf{l}^p = \underbrace{\bar{\mathbf{l}}}_{\text{acotado}} + \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) \quad (42)$$

se deduce:

$$\mathbf{l}^p = \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) \quad (43)$$

La ecuación (43), combinada con la (16) ($\mathbf{w}^p = \gamma \hat{\mathbf{w}}$) y (33) ($\gamma = \frac{1}{k} \bar{\gamma}$) establece:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}^p &= (\mathbf{l}^p)^{skw} = \frac{1}{k} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^{skw} = \gamma \hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{k} \bar{\gamma} \hat{\mathbf{w}} \Rightarrow \\ &\hat{\mathbf{w}} = \frac{1}{\bar{\gamma}} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}})^{skw} \end{aligned} \quad (44)$$

donde la expresión $(\cdot)^{skw}$ representa el término antimétrico de (\cdot) , $(\cdot)^{skw} = 0,5 [(\cdot) - (\cdot)^T]$. La ecuación (44) establece un valor determinado para el inicialmente indeterminado término plástico del tensor spin, \mathbf{w}^p , en la interfaz de discontinuidad \mathcal{S} , en términos del salto incremental $\Delta[\mathbf{u}]$ y del vector $\bar{\mathbf{n}}$.

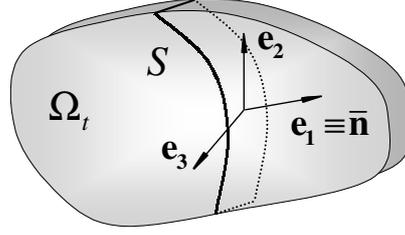


Figura 2. Base ortonormal en la superficie de discontinuidad

- 3) La expresión (38) constituye un conjunto de seis ecuaciones algebraicas (debido a la simetría). Empleando la base local ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de la Figura 2, dichas ecuaciones se expresan de la forma (teniendo en cuenta la igualdad $(\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_1 = \mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} = 0$ de la ecuación (27)):

$$\begin{bmatrix} \underbrace{(\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_1}_{=0} & \frac{(\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_2}{2} & \frac{(\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_3}{2} \\ \frac{(\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_2}{2} & 0 & 0 \\ \frac{(\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_3}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{\bar{\gamma}}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{12} & m_{22} & m_{23} \\ m_{13} & m_{23} & m_{33} \end{bmatrix}_S \quad (45)$$

de donde se obtiene la siguiente ley de evolución del salto incremental:

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_1 &= 0 \\ (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_2 &= \frac{2\bar{\gamma}}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} m_{12} \\ (\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}])_3 &= \frac{2\bar{\gamma}}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} m_{13} \end{aligned} \quad (46)$$

junto con las denominadas *condiciones de discontinuidad fuerte* en el campo de tensiones de Kirchhoff:

$$\boxed{m_{11}(\boldsymbol{\tau}_S) = m_{22}(\boldsymbol{\tau}_S) = m_{33}(\boldsymbol{\tau}_S) = m_{23}(\boldsymbol{\tau}_S) = 0 \quad \forall t \geq t_{DF}} \quad (47)$$

La definición del tensor de flujo plástico ($\mathbf{m} = \partial_{\boldsymbol{\tau}}\phi$) en la ecuación (11), junto con las condiciones de discontinuidad fuerte (47), permiten obtener:

$$\left. \begin{aligned} m_{11}(\boldsymbol{\tau}_S) &= \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_{11}} = 0 \\ m_{22}(\boldsymbol{\tau}_S) &= \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_{22}} = 0 \\ m_{23}(\boldsymbol{\tau}_S) &= \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_{23}} = 0 \\ m_{33}(\boldsymbol{\tau}_S) &= \frac{\partial \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})}{\partial \tau_{33}} = 0 \end{aligned} \right\} \quad \forall t \geq t_{DF} \quad (48)$$

Se puede expresar la tensión uniaxial equivalente de Kirchhoff $\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})$ de la forma:

$$\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \hat{F}(\tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{13}) = \hat{F}\left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} \mathcal{T}\right) = \hat{F}\left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} \mathcal{T}\right) \quad (49)$$

donde la función \hat{F} hace hincapié en que la tensión uniaxial equivalente está expresada en función del vector tracción \mathcal{T} .

Tomando como punto de partida el vector $\partial_{\mathcal{T}} \hat{F}$, la ley de evolución del salto incremental de la ecuación (46) puede expresarse:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{m}} \stackrel{def}{=} \partial_{\mathcal{T}} \hat{F} &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} \left[\partial_{\tau_{11}} \hat{F}, \partial_{\tau_{12}} \hat{F}, \partial_{\tau_{13}} \hat{F} \right] \\ &= \frac{1}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} \left[\underbrace{m_{11}}_{=0}, 2 m_{12}, 2 m_{13} \right]^T \end{aligned} \quad (50)$$

$$\boxed{\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] = \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} ; \quad \bar{\mathbf{m}} = \partial_{\mathcal{T}} \hat{F} \left(\frac{1}{\|\bar{\mathbf{n}}\|} \mathcal{T} \right)} \quad (51)$$

La expresión (51) constituye una *ecuación constitutiva discreta* para el salto incremental $\Delta[\mathbf{u}]$ en términos del vector tracción \mathcal{T} .

Finalmente, y del mismo modo que el llevado a cabo para el modelo de daño en grandes deformaciones¹⁹, se recupera el concepto de energía libre discreta partiendo de las ecuaciones (5), (6), (7) y (8):

$$\begin{aligned} \bar{\psi}(\Delta[\mathbf{u}], \bar{\alpha}) &= \lim_{h \equiv k \rightarrow 0} k \psi(\mathbf{F}, \mathbf{F}^p, \alpha) \\ &= \lim_{k \rightarrow 0} k \underbrace{\psi^e(\mathbf{b}^e)}_{\bar{\psi}^e=0} + \lim_{k \rightarrow 0} k \underbrace{\frac{1}{2} \mathcal{H} \alpha^2}_{\bar{H}^p(\bar{\alpha}) = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{H}} \bar{\alpha}^2} = \frac{1}{2} \bar{\mathcal{H}} \bar{\alpha}^2 \end{aligned} \quad (52)$$

donde se han considerado el carácter acotado de $\psi^e(\mathbf{b}^e)$ ^{VI} y las ecuaciones (30) y (31).

Los diferentes ingredientes del modelo constitutivo elastoplástico discreto obtenido se detallan a continuación:

Energía libre	$\bar{\psi}(\Delta[\mathbf{u}], \alpha) = \underbrace{\bar{\psi}^e}_{=0} + \underbrace{\frac{1}{2} \bar{\mathcal{H}} \alpha^2}_{\bar{H}^p(\bar{\alpha})}$	
Regla de flujo plástico	$\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] = \bar{\gamma} \bar{\mathbf{m}} ; \quad \bar{\mathbf{m}} = \partial_{\mathcal{T}} \hat{F} \left(\frac{1}{\ \bar{\mathbf{n}}\ } \mathcal{T} \right)$	
Ley de evolución	$\dot{\bar{\alpha}} = \bar{\gamma}$	
Criterio de fluencia	$F \left(\frac{1}{\ \bar{\mathbf{n}}\ } \mathcal{T}, q_S \right) \equiv \hat{F} \left(\frac{1}{\ \bar{\mathbf{n}}\ } \mathcal{T} \right) - q_S$	(53)
Condiciones carga-descarga	$\bar{\gamma} \geq 0 \quad F \leq 0 \quad \bar{\gamma} F = 0$	
Ley de ablandamiento	$\dot{q}_S = \bar{\mathcal{H}} \dot{\bar{\alpha}} \begin{cases} q_S \in [0, q_{DF}] \\ q_S _{t=t_{DF}} \stackrel{not}{=} q_{DF} \end{cases}$	

^{VI}El carácter acotado del tensor \mathbf{b}^e puede establecerse de la ecuación constitutiva (9) ($\boldsymbol{\tau}_s = \lambda \text{tr}(Ln\sqrt{\mathbf{b}^e}) \mathbf{1} + 2\mu(Ln\sqrt{\mathbf{b}^e})$), considerando el hecho de que $\boldsymbol{\tau}_s$ es una entidad acotada. A partir de aquí, la deducción del carácter acotado de la energía libre elástica (6) ($\psi^e(\mathbf{b}^e) = \frac{1}{2} \lambda \text{tr}^2(Ln\sqrt{\mathbf{b}^e}) + \mu Ln\sqrt{\mathbf{b}^e} : Ln\sqrt{\mathbf{b}^e}$) para $t > t_{DF}$ es trivial.

Se observa que el modelo constitutivo (53) es un modelo *rígido-plástico*, pues el término elástico, $\bar{\psi}^e$, de la energía libre discreta resultante es nulo. Esta característica también se podría haber deducido de la regla de flujo plástico en la ecuación (53b), donde la descarga, caracterizada por $\bar{\gamma} = 0$, se corresponde con $\mathcal{L}_v \Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$, no evolucionando el salto total de desplazamiento como correspondería a un modelo con rigidez elástica instantánea infinita (rígido). Esta propiedad representa una extensión al entorno de las grandes deformaciones de la observada en los modelos plásticos discretos inducidos en deformaciones infinitesimales¹³.

El modelo constitutivo discreto de la ecuación (53), inducido por la cinemática de discontinuidad fuerte de grandes deformaciones, presenta la misma estructura que el modelo discreto elastoplástico correspondiente en deformaciones infinitesimales (desarrollado por Manzoli y Oliver¹¹) en el formato de grandes deformaciones. Ello hace suponer que cuando los saltos de desplazamientos dentro de la discontinuidad sean pequeños en comparación con el tamaño del problema analizado, el modelo discreto en grandes deformaciones colapsará en el de deformaciones infinitesimales, constituyendo una diferencia notable con los modelos constitutivos discretos degradables analizados en^{18,19}, donde, independientemente del rango de valores del salto de desplazamiento alcanzado en la discontinuidad, los modelos discretos *proyectados* son diferentes según el tipo de cinemática empleada. En el apartado *Ejemplos numéricos* se analizará este aspecto en mayor detalle.

CONDICIÓN DE LOCALIZACIÓN

El análisis de localización para modelos elastoplásticos en grandes deformaciones, basado en un análisis de bifurcación discontinua con el que se obtienen las condiciones de bifurcación de un campo de deformación inicialmente suave en uno de discontinuidad débil compatible con el equilibrio del cuerpo^{6,10,15,16,17,20,21,28}, contempla la misma metodología que la empleada para modelos de daño isótropo en pequeñas y grandes deformaciones^{18,19}. En el instante de bifurcación se inicia un campo tasa de la deformación no suave. Mediante el mencionado análisis se obtiene la dirección de propagación de la discontinuidad.

Análisis de bifurcación discontinua

Siguiendo la metodología desarrollada para el caso de deformación infinitesimal¹⁸ y para grandes deformaciones¹⁹, se exponen a continuación los principales puntos que constituyen el análisis de bifurcación discontinua.

La condición de continuidad del vector tracción, a través de la superficie de discontinuidad \mathcal{S} , requiere que el salto de la tasa del vector tracción sea cero:

$$[[\dot{\mathcal{T}}]] = [[\dot{\mathbf{P}}]] \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} = \dot{\mathbf{P}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{N} - \dot{\mathbf{P}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (54)$$

representando $[[\dot{\mathcal{T}}]]$ el salto del vector tracción (tasa) a través de la superficie de discontinuidad, y $\dot{\mathbf{P}}_{\mathcal{S}}$ y $\dot{\mathbf{P}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ el primer tensor de tensión de Piola-Kirchhoff (tasa) en la línea de discontinuidad \mathcal{S} y en el dominio regular $\Omega \setminus \mathcal{S}$, respectivamente.

La expresión de $\dot{\mathcal{T}}$ se detalla a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{T}} &= \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} = (\mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S}) \cdot \mathbf{N} = (\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{N} \\ &= (\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \end{aligned} \quad (55)$$

donde \mathbf{S} representa el segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff y se ha considerado la naturaleza material de la línea de discontinuidad \mathcal{S} ($\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$).

En el instante de inicio de la bifurcación, t_B , la cinemática exhibe las propiedades $\Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ y $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$, verificándose las siguientes identidades:

$$t = t_B \Leftrightarrow \begin{cases} \mathbf{F}_S^{-T} = \mathbf{F}_{\Omega \setminus S}^{-T} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \\ \boldsymbol{\tau}_S = \boldsymbol{\tau}_{\Omega \setminus S} \\ \mathbf{l}_{\Omega \setminus S} = \bar{\mathbf{l}} \\ \mathbf{l}_S = \bar{\mathbf{l}} + \frac{1}{h} [[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n} \\ \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}_{\Omega \setminus S} = \mathbf{c}_{\Omega \setminus S}^{ep} : \mathbf{d}_{\Omega \setminus S} = \mathbf{c}_{\Omega \setminus S}^{ep} : \bar{\mathbf{d}} \\ \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}_S = \mathbf{c}_S^{ep} : \mathbf{d}_S = \mathbf{c}_S^{ep} : \left[\bar{\mathbf{d}} + \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s \right] \end{cases} \quad (56)$$

Suponiendo condiciones de carga en la discontinuidad \mathcal{S} y carga neutra en el dominio $\Omega \setminus \mathcal{S}$ (un análisis previo demuestra que esta situación determina la primera posible bifurcación²¹), se verifica la igualdad $\mathbf{c}_{\Omega \setminus S}^{ep} = \mathbf{c}_S^{ep} = \mathbf{c}^{ep}$, donde \mathbf{c}^{ep} es el tensor constitutivo espacial tangente elastoplástico, detallado en el Anexo 1, reescribiéndose la ecuación (54) de la forma:

$$\begin{aligned} [[\dot{\mathcal{T}}]] &= [[\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}]] \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} = ([[\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}]] + [[\mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}]]) \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= \left(\frac{1}{h} \mathbf{c}^{ep} : ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s + \frac{1}{h} [[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= \frac{1}{h} \underbrace{[\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}]}_{\mathbf{Q}^L} \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \frac{1}{h} \mathbf{Q}^L \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Como se demostró en^{18,19}, el vector tracción (y su tasa) presentan naturaleza acotada, deduciéndose la siguiente relación

$$\mathbf{Q}^L \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] = \mathbf{0} \quad (58)$$

donde $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ pertenece al núcleo de la transformación $\mathbf{Q}^L \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]]$ inducida por el tensor $\mathbf{Q}^L = \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}$. Por analogía al análisis de localización en teoría infinitesimal y de grandes deformaciones llevados a cabo en los modelos de daño isótropo^{18,19}, se denomina a \mathbf{Q}^L *tensor de localización*.

El criterio para determinar el inicio de la bifurcación se basa en la detección de la singularidad del tensor de localización \mathbf{Q}^L , obteniéndose una solución no trivial para el vector velocidad del salto de desplazamientos ($[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$) en la ecuación (58):

$$\det [\mathbf{Q}^L(\bar{\mathbf{n}}, \mathcal{H}_B)] = 0 \quad \text{para } t = t_B \quad (59)$$

que constituye la denominada *condición de localización*, representando \mathcal{H}_B un valor del módulo de ablandamiento compatible con la ecuación (59). El instante en el que dicha ecuación se verifica por primera vez, para un punto material dado, determina el instante de bifurcación t_B para ese punto, además de permitir obtener el vector normal $\bar{\mathbf{n}}$, el cual define la dirección de propagación de la interfaz de la discontinuidad \mathcal{S} . El valor del parámetro de ablandamiento en el instante de bifurcación es el máximo de todos los valores \mathcal{H}_B posibles²¹.

En la resolución de la ecuación (59), que se corresponde con la condición clásica de pérdida de elipticidad del tensor de localización (estudio llevado a cabo, entre otros, por Rice²⁰), se tiene en cuenta la especial característica que presenta el tensor de localización $\mathbf{Q}^L = \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}$, pues para valores estándares de las propiedades de los materiales (parámetros de Lamé, tensión de rotura o de fluencia, etc.), se constata que el término $(\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}$ es muy pequeño en comparación con $\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}}$, pudiendo eliminarse al

no afectar de modo significativo a la resolución de la ecuación (59). Por tanto, la condición de localización se transforma del siguiente modo:

$$\det \mathbf{Q}^L = 0 = \det [\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}] \simeq \det [\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}}] \quad (60)$$

El tensor constitutivo tangente espacial elastoplástico \mathbf{c}^{ep} se ha deducido en el Anexo 1. El valor de \mathbf{Q}^L vendría representado, por lo tanto, de la forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}^L &= \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^{ep} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{n}} \cdot \left[\mathbf{c}^e - \frac{\mathbf{m}:\mathbf{a}^e \otimes \mathbf{a}^e:\mathbf{m}}{\mathbf{m}:\mathbf{a}^e:\mathbf{m} - \mathcal{H}} \right] \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= \underbrace{\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^e \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{\mathbf{Q}_L^e} - f_L [\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m} : \mathbf{a}^e \otimes \mathbf{a}^e : \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{n}}] \\ &= \mathbf{Q}_L^e [\mathbf{1} - f_L \mathbf{T}] \end{aligned} \quad (61)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{Q}_L^{e-1} \cdot [\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m} : \mathbf{a}^e \otimes \mathbf{a}^e : \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{n}}] \\ f_L &= \frac{1}{\mathbf{m}:\mathbf{a}^e:\mathbf{m} - \mathcal{H}} \end{aligned} \quad (62)$$

y el resto de coeficientes y tensores empleados se definen en el Anexo 1.

Considerando la naturaleza definida positiva del tensor acústico elástico \mathbf{Q}^e (por presentarla \mathbf{c}^e), su determinante exhibe valor no nulo y positivo, transformándose la condición de localización en la siguiente expresión:

$$\det \mathbf{Q}^L = 0 = \underbrace{\det \mathbf{Q}_L^e}_{\neq 0} \det [\mathbf{1} - f_L \mathbf{T}] \Rightarrow \det [\mathbf{1} - f_L \mathbf{T}] = 0 \quad (63)$$

El determinante del tensor $\mathbf{1} - f_L \mathbf{T}$ se define de la forma:

$$\begin{aligned} \det [\mathbf{1} - f_L \mathbf{T}] &= 1 - f_L T_L = 1 - \frac{1}{\mathbf{m}:\mathbf{a}^e:\mathbf{m} - \mathcal{H}} T_L \\ T_L &= [(\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{m} : \mathbf{a}^e) \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot (\mathbf{a}^e : \mathbf{m} \cdot \bar{\mathbf{n}})] \end{aligned} \quad (64)$$

e introduciendo la ecuación (64) en la condición de localización (63) se obtiene la expresión analítica que determina el parámetro de ablandamiento \mathcal{H} , función del vector $\bar{\mathbf{n}}$, que verifica la condición de localización. Los valores de \mathcal{H} que verifiquen dicha condición se representan por el término \mathcal{H}_B , de valor:

$$\boxed{\mathcal{H}_B = -T_L + \mathbf{m} : \mathbf{a}^e : \mathbf{m}} \quad (65)$$

De entre todos los valores \mathcal{H}_B , el máximo de ellos, \mathcal{H}_{cr} , determinará la dirección de propagación de la discontinuidad²¹, $\mathbf{N}_{cr} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{n}}_{cr}$:

$$\boxed{\mathcal{H}_{cr} = \text{máx} [\mathcal{H}_B(\bar{\mathbf{n}})] \Rightarrow \bar{\mathbf{n}}_{cr} \Rightarrow \mathbf{N}_{cr} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{n}}_{cr}} \quad (66)$$

De acuerdo con lo expuesto, el análisis de bifurcación puede formularse de la siguiente manera:

$$\det \mathbf{Q}^L(\mathcal{H}, \bar{\mathbf{n}}) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_{cr} = \text{máx} [\mathcal{H} \in \mathcal{P}] \quad (67)$$

donde \mathcal{P} es el conjunto constituido por todos los valores del parámetro \mathcal{H} que verifican las siguientes condiciones:

$$\mathcal{P} = \{ \mathcal{H} \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} ; \|\mathbf{N}\| = 1 ; \det \mathbf{Q}^L(\mathcal{H}, \bar{\mathbf{n}}) = 0 \} \quad (68)$$

siendo n_{dim} la dimensión del problema objeto de estudio y $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N}$.

Si el conjunto \mathcal{P} es no vacío, las direcciones \mathbf{N}_{cr} que cumplen $\det(\mathbf{Q}^L) = 0$ para $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cr}$ se corresponden con las posibles orientaciones de la banda de localización:

$$\mathbf{N}_{cr} \in \left\{ \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}} ; \|\mathbf{N}\| = 1 ; \det [\mathbf{Q}^L(\mathcal{H}_{cr}, \bar{\mathbf{n}})] = 0 ; \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} \right\} \quad (69)$$

FORMACIÓN DE DISCONTINUIDAD FUERTE. TRANSICIÓN ENTRE DISCONTINUIDAD DÉBIL Y FUERTE

Del mismo modo que los modelos constitutivos de daño continuo isótropo (en deformaciones infinitesimales¹⁸ y finitas¹⁹), los modelos elastoplásticos que exhiben cinemática de discontinuidades fuertes en grandes deformaciones permiten simular el comportamiento de sólidos sometidos a procesos de carga exhibiendo bifurcación discontinua.

Las diferentes etapas que pueden presentarse a lo largo de todo el proceso de carga son las siguientes: régimen elástico inicial, régimen de plastificación sin bifurcación discontinua, régimen de bifurcación discontinua débil y régimen de bifurcación discontinua fuerte. Las características que definen cada etapa son similares a las detalladas en^{18,19}, remitiéndonos a dichos artículos para su estudio.

La fase de transición entre el régimen de discontinuidad débil y el de discontinuidad fuerte viene caracterizada por las mismas leyes de variación del parámetro h contempladas en los modelos de daño.

Al final del presente artículo se detallan diversos ejemplos numéricos donde se pueden apreciar las diferentes etapas del proceso de carga de medios continuos elastoplásticos que exhiben bifurcación discontinua y las leyes de transición del ancho de banda h empleadas en la simulación de la fase de transición.

DISIPACIÓN. ENERGÍA DE FRACTURA

Consideremos la energía consumida en la formación de una discontinuidad material durante el intervalo de tiempo $(0, t_{\infty}]$, donde t_{∞} representa el instante en el que tiene lugar la total decohesión de la fisura o discontinuidad.

En virtud del teorema de la fuerzas vivas, y considerando un problema cuasiestático donde la energía cinética puede despreciarse frente a la potencia tensional, la potencia introducida en un sistema por las fuerzas externas es equivalente a la potencia tensional¹⁴:

$$\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, d\Omega \quad (70)$$

donde \mathbf{P} es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y $\dot{\mathbf{F}}$ el tensor tasa gradiente de la deformación.

El último término de la ecuación (70) puede reescribirse de la forma:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, d\Omega &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \dot{\mathbf{F}} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \left(\dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{F}^{-1} \right) \, d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{1} \, d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \mathbf{d} \, d\Omega \end{aligned} \quad (71)$$

Definiendo la fracción de la potencia externa consumida en la formación del salto $[[\dot{\mathbf{u}}]]$ en la superficie de discontinuidad \mathcal{S} como \mathcal{P}_S^{int} , la energía total consumida en la formación de la discontinuidad fuerte, \mathcal{W}_S , se puede expresar como:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{P}_S^{int} dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \boldsymbol{\tau}_S : (\mathcal{L}_v \Delta[[\mathbf{u}]] \otimes \bar{\mathbf{n}})^s d\mathcal{S} dt \quad (72)$$

Empleando la expresión (38) en (72), se obtiene la siguiente expresión de \mathcal{W}_S :

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \dot{\bar{\alpha}} \boldsymbol{\tau}_S : \mathbf{m} d\mathcal{S} dt \quad (73)$$

Para el modelo elastoplástico concreto presentado en el apartado *Modelo constitutivo elastoplástico isotropo* se tiene $\mathbf{m} = \partial_{\boldsymbol{\tau}} \hat{\phi}$, y al ser $\hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})$ una función homogénea de grado uno en las tensiones puede aplicarse el teorema de Euler ($\boldsymbol{\tau} : \partial_{\boldsymbol{\tau}} \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) = \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau})$), transformándose la expresión de la energía total consumida en la formación de la discontinuidad fuerte del siguiente modo:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \dot{\bar{\alpha}} \hat{\phi}(\boldsymbol{\tau}) d\mathcal{S} dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \dot{\bar{\alpha}} (\tau_y + q) d\mathcal{S} dt \quad (74)$$

donde se han considerado procesos de carga plástica ($\gamma = 0$), es decir $\phi = 0$.

La energía consumida en la formación de una unidad de área de discontinuidad fuerte, energía de fractura G_f , viene definida por la expresión:

$$\begin{aligned} G_f &= \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{T}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} (\tau_y + q) \dot{\bar{\alpha}} dt \\ &= \int_{t_{DF}}^{\infty} (\tau_y + q) \frac{\dot{q}}{\bar{H}} dt = \int_{q_{DF}}^0 \frac{(\tau_y + q)}{\bar{H}} dq \end{aligned} \quad (75)$$

en la que se ha tenido en cuenta la ley de endurecimiento de la ecuación (53f).

Es necesario resaltar que la energía de fractura así obtenida sólo contempla el desarrollo del régimen de discontinuidad fuerte, no considerando la energía consumida en la parte de discontinuidad débil de su régimen de formación.

Para el caso concreto de parámetro de ablandamiento discreto lineal, $\bar{H} = cte.$, y considerando que la discontinuidad fuerte se produce desde el instante de bifurcación (no se produce discontinuidad débil), coincidiendo este último con el instante final del régimen elástico, la energía de fractura se expresa de la forma:

$$G_f|_{\bar{H}=cte} = \int_{q_{DF}}^0 \frac{(\tau_y + q)}{\bar{H}} dq = \frac{1}{2} \frac{\tau_{pico}^2}{\bar{H}} ; \quad \tau_{pico} = \tau_y + q_{DF} \quad (76)$$

La energía total consumida en la formación de toda la discontinuidad fuerte, \mathcal{W}_S , se puede formular, por tanto, de la forma:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{T}_S \cdot [[\dot{\mathbf{u}}]] d\mathcal{S} dt = \int_{\mathcal{S}} G_f d\mathcal{S} = \int_{\mathcal{S}} \int_{q_{DF}}^0 \frac{(\tau_y + q)}{\bar{H}} dq d\mathcal{S} \quad (77)$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS

En los siguientes ejemplos se emplea el modelo de plasticidad J2 para grandes deformaciones, presentado en el presente artículo, en el contexto de la aproximación de discontinuidades fuertes.

En todos ellos el análisis comienza adoptando un material elastoplástico perfecto y, tras alcanzar un nivel de deformación dado, se impone una cantidad significativa de ablandamiento con objeto de inducir la localización.

Localización en un problema homogéneo

El presente ensayo ha sido extraído de las referencias^{1,3}. En ellas, el análisis se ha llevado a cabo introduciendo explícitamente un modelo constitutivo elastoplástico discreto en la interfaz de discontinuidad, sin tener en cuenta las condiciones de discontinuidad fuerte.

La probeta de ensayo es una placa rectangular sometida a estiramiento en uno de sus bordes (imponiendo un desplazamiento d uniforme), manteniendo el borde opuesto fijo (Figura 3a).

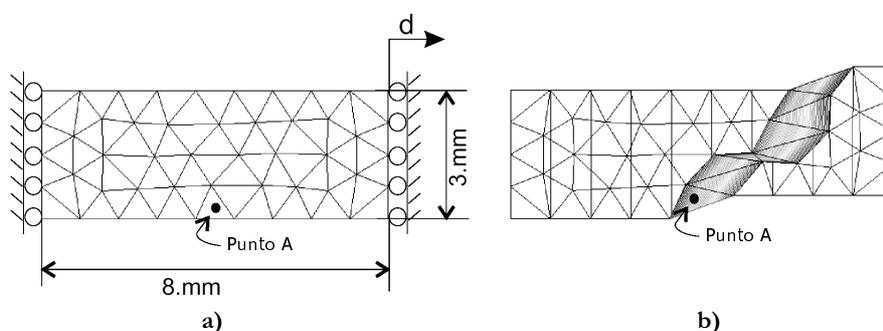


Figura 3. Localización en un problema homogéneo: a) geometría, malla de elementos finitos y cargas aplicadas y b) malla deformada y contornos de desplazamiento horizontal

Las características del material empleado son las siguientes (correspondientes al modelo elastoplástico para el caso de deformación plana del apartado *Modelo constitutivo elastoplástico isótropo*): $\lambda = 110,7 \text{ GPa}$, $\mu = 80,2 \text{ GPa}$ y $\tau_y = 450 \text{ MPa}$.

La ley de endurecimiento/ablandamiento considerada consta de dos tramos rectos: la tensión uniaxial pico vale $\tau_y = 450 \text{ MPa}$ y la pendiente inicial de la curva $\tau_y - \alpha$ (primer tramo recto) viene definida por un módulo de endurecimiento muy pequeño, $\mathcal{H} = 0,1 \text{ GPa}^{\text{VII}}$. A partir de un cierto valor (*impuesto*) α_{bif} , de la variable interna α , el módulo de endurecimiento/ablandamiento se modifica adoptando el valor $\mathcal{H} = -12 \text{ GPa}$ (segundo tramo recto con pendiente negativa) con objeto de inducir una bifurcación inmediata y la correspondiente localización de la banda de elementos cruzados por la interfaz de discontinuidad S^{VIII} . Por tanto, variando el valor de α_{bif} puede inducirse una bifurcación temprana (para valores pequeños de α_{bif}) o tardía (para valores grandes de α_{bif}).

Una vez más, el propósito de la presente simulación es destacar el papel que desempeñan las condiciones de discontinuidad fuerte y mostrar que, incluso aunque los resultados numéricos puedan, en determinadas ocasiones, ocultar dicho papel, las condiciones de discontinuidad fuerte no pueden ser, en general, ignoradas.

^{VII}A efectos prácticos puede considerarse dicho tramo horizontal (*plasticidad perfecta*).

^{VIII}Debido a la geometría y a las propiedades del material, el problema a analizar (y el campo de tensiones antes de producirse la localización) es homogéneo, forzándose a que la posición de la interfaz de discontinuidad atraviese un punto determinado (punto A de la Figura 3a).

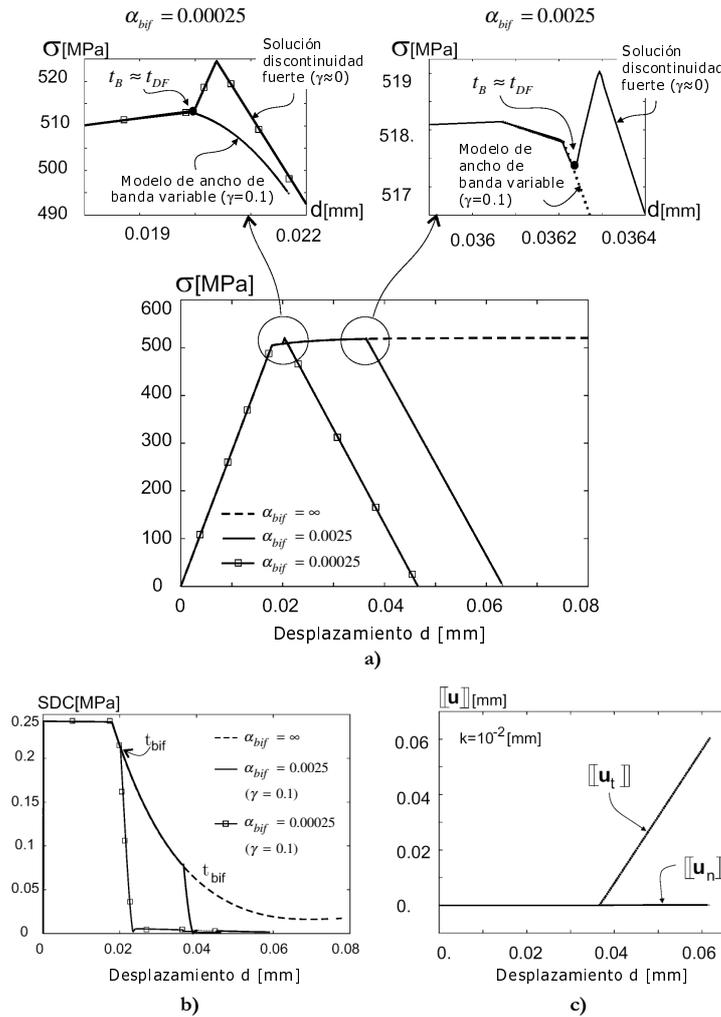


Figura 4. Localización en un problema homogéneo: a) curvas tensión de Cauchy horizontal en el dominio regular *versus* desplazamiento horizontal del borde de la placa para diferentes longitudes del tramo de plasticidad perfecta; b) evolución de las condiciones de discontinuidad fuerte y c) salto de desplazamiento normal y tangencial para un punto A *versus* desplazamiento horizontal del extremo

En la Figura 4a se representan las curvas tensión de Cauchy horizontal $\sigma_{\Omega/S}$ (en el dominio regular Ω/S) *versus* desplazamiento horizontal d para diferentes valores de α_{bif} :

- 1) Un valor pequeño de α_{bif} ($\alpha_{bif} = 0,00025$) equivale, a efectos prácticos, a no considerar ningún tramo de plasticidad perfecta antes de producirse la bifurcación, la cual es inducida inmediatamente después de alcanzar la superficie de fluencia (*yielding*).
- 2) Un valor grande de α_{bif} ($\alpha_{bif} = 0,0025$) equivale a considerar un tramo relativamente grande de plasticidad perfecta, como se referencia en¹.

Se consideran dos valores diferentes para el factor de transición γ en el modelo de ancho de banda variable:

- a) Un valor muy pequeño del factor de transición ($\gamma = 0,001$) representa, a efectos prácticos, una imposición inmediata de la cinemática de discontinuidad fuerte tras la

bifurcación. Los resultados correspondientes se denominan, en las curvas de la Figura 4a, *solución discontinuidad fuerte* y equivale a imponer la ecuación constitutiva discreta inducida inmediatamente después de producirse la bifurcación, como se especifica en la referencia¹.

- b) Un valor no despreciable del factor de transición ($\gamma = 0,1$) equivale a introducir un *régimen de discontinuidad débil* inmediatamente después de la bifurcación, durante aproximadamente el primer 10 % de la respuesta en ablandamiento, para gradualmente inducir la discontinuidad fuerte. Los resultados correspondiente se identifican en la Figura 4a como *modelo de ancho de banda variable*.

En la misma Figura 4a se detallan gráficas amplificadas de zonas de estas curvas próximas a la bifurcación. Resulta interesante hacer notar la respuesta no física obtenida en el caso de discontinuidad fuerte $\gamma = 0,001$, pues se producen cargas elásticas inesperadas (*reloading*) inmediatamente después de la bifurcación, traducándose en picos angulosos en las curvas. Aunque la cantidad de “carga elástica” es más pequeña para el tramo grande de plasticidad perfecta ($\alpha_{bif} = 0,0025$) y se encuentra, de algún modo, *escondido* en la curva global, la amplificación muestra claramente que dicho problema existe y, por tanto, los mismos tipos de inconsistencias que los detectados en el ejemplo de tramo corto de plasticidad perfecta. Por el contrario, este problema no aparece en los resultados obtenidos con el modelo de ancho de banda variable $\gamma = 0,1$, los cuales son suaves, sin efecto de “cargas elásticas” como puede comprobarse en la Figura 4a.

La explicación para tales efectos puede encontrarse en las condiciones de discontinuidad fuerte, de modo similar a ejemplos mostrados en¹⁹. Las condiciones de discontinuidad fuerte, para el caso de deformación plana, pueden expresarse, según el análisis de discontinuidad fuerte llevado a cabo en el apartado *Análisis de discontinuidad fuerte* (ecuación (47)), en términos de las componentes desviadoras de las tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}^{dev}$ de la forma:

$$\tau_{11}^{dev} = \tau_{22}^{dev} = \tau_{33}^{dev} = 0 \quad (78)$$

donde se ha considerado un sistema cartesiano de ejes coordenados con la tercera dirección ortogonal al plano de análisis.

Para evaluar el grado de cumplimiento de las ecuaciones (78) en una variable escalar, se ha calculado el valor $SDC = \sqrt{(\tau_{11}^{dev})^2 + (\tau_{22}^{dev})^2 + (\tau_{33}^{dev})^2}$ a lo largo del proceso de deformación, dibujándose en la Figura 4b. Para el caso de plasticidad perfecta ($\alpha_{bif} = \infty$), el valor SDC tiende asintóticamente a cero, por lo que *las condiciones de discontinuidad fuerte nunca se verificarán en plasticidad perfecta, independientemente de la longitud del tramo horizontal*.

Este hecho explica el pico “carga elástica” (*reloading*) observado en la Figura 4a como consecuencia de la falta de cumplimiento de las condiciones de discontinuidad fuerte en el instante de la bifurcación, combinado con la imposición inmediata de la cinemática de discontinuidad fuerte. Sin embargo, si se contempla el modelo de ancho de banda variable tras la bifurcación, las condiciones de discontinuidad fuerte son verificadas rápida, pero suavemente, al finalizar el régimen de transición, como puede comprobarse en la Figura 4b para un valor del factor de transición $\gamma = 0,1$, explicando así la ausencia de un pico de “carga elástica” no física (*reloading*).

Finalmente, en la Figura 4c se detallan las curvas salto de desplazamiento normal ($[[u_n]]$) y tangencial ($[[u_t]]$) en el punto A *versus* desplazamiento del borde de la probeta (d). Se constata que el salto de desplazamiento normal es nulo a lo largo de todo el proceso de deformación, como se predijo teóricamente en el análisis de discontinuidad fuerte para modelos elastoplásticos con cinemática de grandes deformaciones.

Es interesante resaltar que la condición $[[u_n]] = 0$ no se impone explícitamente en el formato continuo del modelo constitutivo, y su verificación en la simulación numérica constituye una prueba de que la ecuación constitutiva discreta predicha en el análisis teórico es inducida, de hecho, durante la simulación.

Como se ha comentado en el presente artículo, tanto el modelo constitutivo continuo como el discreto elastoplástico en grandes deformaciones presentan la misma estructura, aunque en formato de deformaciones finitas, que los modelos continuo y discreto en deformaciones infinitesimales (desarrollado por Manzoli y Oliver¹¹). Ello hace suponer que cuando los saltos de desplazamientos dentro de la discontinuidad sean pequeños en comparación con la dimensión del problema analizado, el modelo discreto en grandes deformaciones colapsará en el de deformaciones infinitesimales, constituyendo una diferencia notable con los modelos constitutivos discretos degradables analizados en los trabajos^{18,19}, donde, independientemente del rango de valores del salto de desplazamiento alcanzado en la discontinuidad, los modelos discretos *proyectados* son diferentes según el tipo de cinemática empleada.

Con objeto de contrastar dicha hipótesis, se ha simulado la misma probeta de la Figura 3 empleando el modelo elastoplástico equivalente en deformaciones infinitesimales.

En la Figura 5 se puede apreciar la curva tensión horizontal *versus* desplazamiento horizontal del borde de la placa obtenida en dicha simulación, coincidiendo prácticamente con la obtenida en el modelo de grandes deformaciones (Figura 4a), hecho esperable si se compara el desplazamiento experimentado por la probeta con el tamaño de la misma para el modelo de deformaciones finitas (del orden del 1%, tratándose, por tanto, de deformaciones reales infinitesimales).

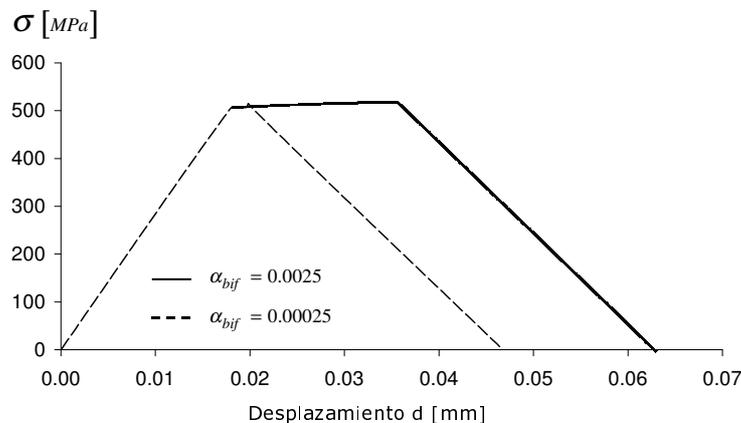


Figura 5. Localización en un problema homogéneo: curva tensión horizontal en el dominio regular *versus* desplazamiento horizontal del borde de la placa para el modelo elastoplástico en deformaciones infinitesimales

Con objeto de activar realmente las grandes deformaciones, se ha simulado una probeta cuadrada, considerando el lado del cuadrado de valor 1 mm y solicitando la probeta tan sólo uniaxialmente con una fuerza horizontal P_x , con el esquema estático de la Figura 3a. Las propiedades mecánicas del material son las mismas que las detalladas para la probeta del problema homogéneo de localización (Figura 3), pero se ha empleado un módulo de Young 100 veces menor y una tensión uniaxial pico $\tau_y = 620$ MPa.

En la Figura 6 se pueden apreciar las curvas carga aplicada P_x *versus* desplazamiento lateral δ_x para los modelos en deformaciones finitas e infinitesimales, apreciándose una respuesta diferente en cada modelo al haberse desarrollado deformaciones realmente finitas.

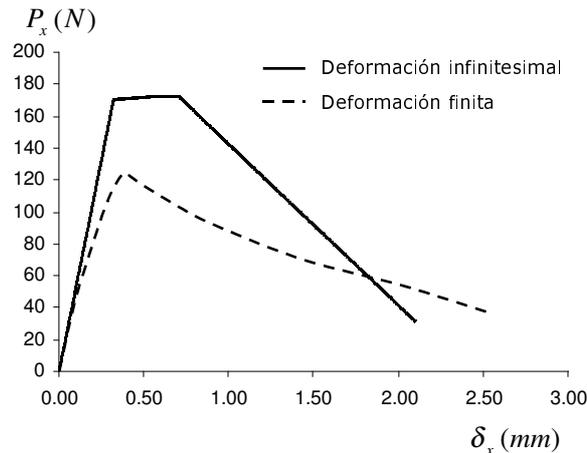


Figura 6. Carga aplicada P_x versus desplazamiento lateral δ_x en una probeta cuadrada solicitada horizontalmente considerando los modelos elastoplásticos en deformaciones finitas e infinitesimales

Bandas de corte en probeta con estricción importante

Se simula numéricamente un ensayo extraído de la referencia⁷ en el que se considera un modo de localización diferente.

El principal objetivo del ejemplo numérico es aplicar la aproximación de discontinuidades fuertes a un problema donde tienen lugar una concentración considerable de deformaciones (que producen una importante estricción en la probeta) y las correspondientes deformaciones finitas regulares antes de que la bifurcación real y la subsiguiente discontinuidad fuerte ocurran.

En la Figura 7a se detallan las características geométricas del problema presentado. La probeta, en régimen de deformación plana, es estirada aplicando un desplazamiento vertical uniforme en su extremo.

Debido a la simetría del ejemplo, tan sólo se ha modelado 1/4 de la pieza completa, empleando para ello dos mallas de elementos finitos diferentes (mallas A y B de la Figura 7b). La malla A es no estructurada, mientras que la B es estructurada con un esquema particular de triángulos con objeto de aliviar el posible bloqueo numérico debido a la incompresibilidad del flujo plástico, como ha sido reportado en la literatura clásica¹².

Se ha empleado el modelo constitutivo continuo elastoplástico J2 descrito en el apartado *Modelo constitutivo elastoplástico isótropo*. Los parámetros elásticos del material son: $\lambda = 80$ GPa y $\mu = 80$ GPa. La ley de endurecimiento/ablandamiento se detalla en la Figura 7c, donde la tensión uniaxial pico es $\tau_y = 220$ MPa y el parámetro de ablandamiento discreto vale $\bar{H} = -2515$ MPa. El factor de transición adoptado es $\gamma = 0,4$.

La Figura 7d muestra las curvas carga P versus desplazamiento d obtenidas con las mallas A y B. Se constata que ambas curvas exhiben similares resultados antes de producirse el ablandamiento abrupto. La ligera diferencia que aparece antes del inicio de la bifurcación puede deberse a los efectos de bloqueo de la malla A. Sin embargo, en el régimen posbifurcación ambas mallas muestran respuestas similares, evidenciando que el posible bloqueo en la prebifurcación no afecta de modo crucial al desarrollo del régimen de discontinuidad fuerte.

El estado final de la malla deformada se detalla en la Figura 7e, mostrando una estricción importante. A diferencia de lo que ocurre cuando las deformaciones en la prebifurcación son pequeñas, la concentración de las deformaciones en una zona de ancho de banda no nulo distribuye los contornos de desplazamientos de la banda de elementos atravesados por la interfaz de la discontinuidad S (Figura 7f).

En cualquier caso, se percibe claramente la clásica orientación de la banda de localización formando unos 45° con la horizontal.

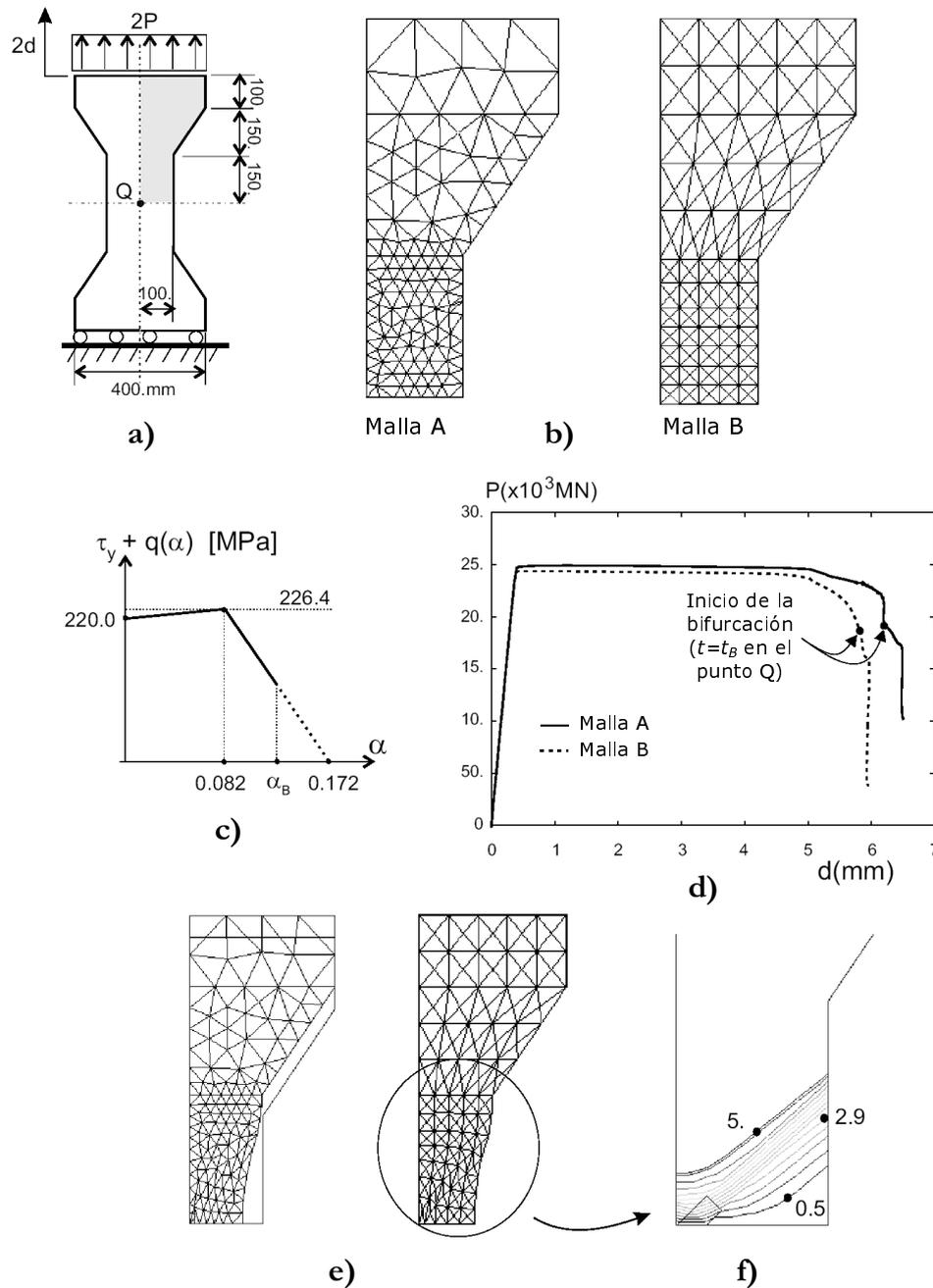


Figura 7. Probeta con estricción: a) geometría del modelo y cargas aplicadas; b) mallas de elementos finitos; c) ley de endurecimiento/ablandamiento; d) curvas carga *versus* desplazamiento; e) mallas deformadas en la etapa final del análisis y f) contornos de desplazamiento vertical

CONCLUSIONES

A lo largo de las secciones previas se ha explorado la *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA)* para un modelo elastoplástico continuo isótropo en régimen de grandes deformaciones. Aunque esta aproximación ya había sido estudiada por los autores empleando modelos degradables con cinemáticas infinitesimal y finita^{13,18,19}, se han extendido aquí los resultados obtenidos al caso de modelos elastoplásticos en grandes deformaciones. Como principal resultado se muestra que el análisis de discontinuidad fuerte empleado en los modelos degradables (con ambas cinemáticas)^{18,19} puede extenderse perfectamente a modelos elastoplásticos en régimen de grandes deformaciones tan sólo considerando la descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación en su parte elástica y plástica propia de los modelos elastoplásticos (ecuación (1)), obteniéndose las mismas conclusiones generales que en^{18,19}, a saber:

- La aproximación de continuo de discontinuidades fuertes constituye un método eficaz, desde el punto de vista computacional, en la simulación numérica de fenómenos de localización, considerando tanto la cinemática de deformaciones infinitesimales como la de deformaciones finitas.

Del análisis de discontinuidad fuerte se extrae información sobre los modelos discretos (tracción-salto desplazamiento) que gobiernan el comportamiento de la línea de discontinuidad. Estos modelos *emergen* de modo natural de los continuos de los que proceden al aplicar una cinemática de discontinuidad fuerte, pero no se implementan explícitamente en el algoritmo, constituyendo una característica específica frente a otro tipo de aproximaciones, pues un único modelo continuo, junto a la cinemática de discontinuidad fuerte, permite modelar el comportamiento de la totalidad del medio a lo largo de todo el proceso de carga. Por otro lado, la obtención de los modelos discretos puede resultar pesada en determinados modelos constitutivos continuos.

- El análisis de discontinuidad fuerte permite obtener todos los ingredientes necesarios para afirmar que los modelos discretos inducidos o proyectados por la cinemática de discontinuidad fuerte se constituyen en auténticos *modelos constitutivos*, heredando muchas de las propiedades del modelo continuo del que proceden. Es interesante resaltar una propiedad que no conservan: la isotropía del modelo continuo se transforma en anisotropía en el discreto, caracterizando el concepto direccional de la fisura o localización.
- El papel del tipo de cinemática empleada (infinitesimal o finita) se revela crucial en la aproximación de continuo de discontinuidades fuertes empleada, y es en los modelos discretos *proyectados* que gobiernan la línea de discontinuidad donde se constata de modo más claro.

Los modelos discretos elastoplásticos, a diferencia con los modelos degradables^{18,19}, presentan la misma estructura que los continuos de los que derivan, tanto en deformaciones finitas como en infinitesimales. Por tanto, los modelos discretos finitos colapsan en los infinitesimales cuando los saltos de desplazamientos son pequeños comparados con el tamaño del elemento.

Por todo lo analizado en el presente trabajo, se puede concluir que la aproximación de continuo de discontinuidades fuertes, basada en modelos elastoplásticos y en deformaciones finitas e infinitesimales, provee un marco consistente, robusto y computacionalmente eficaz para el análisis del fallo material en sólidos.

REFERENCIAS

- 1 F. Armero, "Large-scale modelling of localized dissipative mechanism in a local continuum: applications to the numerical simulation of strain localization in rate-dependent inelastic solids", *Mechanics of cohesive-frictional materials*, Vol.4, pp.101–131, (1999).
- 2 R.J. Asaro, "Micromechanics of cristal and polycrystals", *Advances in Applied Mechanics*, Vol. **23**, pp. 101–115, (1983).
- 3 C.C. Celigoj, "On strong discontinuities in anelastic solids. A finite element approach taking a frame indifferent gradient of the discontinuous displacements", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **49**, pp.769–796, (2000).
- 4 M.A. Crisfield, "*Non-linear finite element analysis of solids and structures. Volume 2: Advanced topics*", John Wiley and Sons, (1998).
- 5 R. Hill, "Generalized constitutive relations for incremental deformation of metal crystals by multislip", *Journal of Mechanics and Physics of Solids*, Vol. **14**, pp. 95–102, (1966).
- 6 R. Larsson, K. Runesson y S. Sture, "Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity theory and finite element análisis", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **33**, N° 20-22, pp. 3081–3101, (1996).
- 7 R. Larsson, P. Steinmann y K. Runesson, "Finite element embedded localitation band for finite strain plasticity based on a regularized strong discontinuity", *Mechanics of Cohesive Frictional Materials*, Vol. **4**, pp. 171–194, (1998).
- 8 E.H. Lee, "Elastic-plastic deformation at finite strains", *Journal of Applied Mechanics*, pp. 1–6, (1969).
- 9 J. Lubliner, "*Plasticity theory*", Mcmillan Publishing Company, New York, (1990).
- 10 J. Mandel, "Conditions de stabilité et postulat de drucker", In J. Kravtchenko and P. Sirieys (Eds.), *Rheology and Soil Mechanics*, pp. 58–68, Springer, Berlin, (1966).
- 11 O. Manzoli, "Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos", Tesis Doctoral, Dpto. de Resistencia de Materiales de la Univerdidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1998).
- 12 A. Needleman y V. Tvergaar, "Finite elements analysis of localization in plasticity". In J.T. Oden and G.F. Carey (Eds.), *Finite elements, special problems in solid mechanics*, Vol. **V**, pp. 94–157, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, (1984).
- 13 J. Oliver, "On the discrete constitutive models induced by strong discontinuity kinematics and continuum constitutive equations", *Int. Journal Solids and Structures*, Vol. **37**, pp. 7207–7229, (2000).
- 14 J. Oliver y C. Agelet, "*Mecánica de medios continuos para ingenieros*", Edicions UPC, Barcelona, (2000).
- 15 J. Oliver, M. Cervera y O. Manzoli, "On the use of J2 plasticity models for the simulation of 2D strong discontinuities in solids", In D. Owen, E. Onate and E. Hinton (Eds.), *Computational Plasticity, CIMNE, Computational Plasticity*, Vol. **1**, pp. 38–55, (1997).
- 16 J. Oliver, M. Cervera y O. Manzoli, "On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids", in R. de Borst and E. Van der Giessen (Eds.), *Material Instabilities in Solids*, Wiley, Chichester, pp. 107–23, (1998).
- 17 G. Pijaudier-Cabot y A. Benallal, "Strain localitation and bifurcation in a nonlocal continuum", *Int. J. Solids Structures*, Vol. **30**, N° 13, pp. 1761–1775, (1993).
- 18 M.D.G. Pulido y J. Oliver, "Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en deformaciones infinitesimales. Modelos degradables", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **22**, N° 3, (2006).

- 19 M.D. G. Pulido y J. Oliver, “Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en deformaciones finitas. Modelos degradables”, *Revista Internacional de Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **22**, N° 4, (2006).
- 20 J.R. Rice, “The localization of plastic deformation”, In W. T. Koiter (Ed.), North-Holland, Amsterdam, Theoretical and Applied Mechanics, *Proc. 14th IUTAM Congress*, Vol. **1**, pp. 207–220, Delft, The Netherlands, (1976).
- 21 K. Runesson, N. S. Ottosen y D. Peric, “Discontinuous bifurcation of elasticplastic solutions at plane stress and plane strain”, *Int. J. of Plasticity*, Vol. **7**, pp. 99–121, (1991).
- 22 J.C. Simo, “Numerical analysis of classical plasticity”, In P.G. Ciarlet and J.J. Lions (Eds.), *Handbook for Numerical Analysis*, Vol. **4**, Elsevier Sc. (North-Holland), (1998).
- 23 J.C. Simo, “A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part I. Continuum formulation”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **66**, pp. 199–219, (1988).
- 24 J. C. Simo, “A framework for finite strain elastoplasticity based on maximum plastic dissipation and the multiplicative decomposition: Part II. Computational aspects”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **68**, pp. 1–31, (1988).
- 25 J.C. Simo, “Algorithm for static and dynamic multiplicative plasticity that preserve the classical return mapping schemes of the infinitesimal theory”, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. **99**, pp. 61–112, (1992).
- 26 J.C. Simó Y T. J. R. Huges, “*Computational Inelasticity*”, Springer and Verlag, (1998).
- 27 G.I. Taylor, “Analysis of plastic strain in a cubic cristal”, In J. M. Lessels (Ed.), *Stephen Timoshenko 60th Anniversary Volume*, Macmillan, New York, (1938).
- 28 K.C. Valanis, “On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **52**, pp. 649–653, (1985).

ANEXO 1

Tensores constitutivos espaciales elástico y elastoplástico tangente

Se han tenido en cuenta las siguientes hipótesis en el modelo elastoplástico isótropo en deformaciones finitas:

- La respuesta elástica es isótropa: el tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green $\mathbf{b}^e = \mathbf{F}^e \cdot \mathbf{F}^{eT}$ es colineal con el tensor de tensiones de Kirchhoff $\boldsymbol{\tau}$. Sean \mathbf{g}_i y $(\lambda_i^e)^2$ ($i = 1, 2, 3$) los autovectores y autovalores de \mathbf{b}^e ($\mathbf{b}^e = (\lambda_i^e)^2 \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i$), entonces $\boldsymbol{\tau}$ tiene los mismos autovectores ($\boldsymbol{\tau} = \tau_i \mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_i$, siendo τ_i los autovalores del tensor de tensiones de Kirchhoff).
- Plastidad isótropa: la función de plasticidad $\phi(\boldsymbol{\tau}, q)$ es una función isótropa de $\boldsymbol{\tau}$ y $\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi$ es colineal con $\boldsymbol{\tau}$. Las variables internas tipo tensión q y α , relacionadas con el mecanismo de endurecimiento isótropo, son escalares.

Empleando los autovalores de $\boldsymbol{\tau}$ y \mathbf{b}^e , la ecuación constitutiva (9) puede reescribirse de la forma:

$$\tau_i = \lambda(\varepsilon_1^e + \varepsilon_2^e + \varepsilon_3^e) + 2\mu\varepsilon_i^e \quad (79)$$

donde $\varepsilon_i^e = \ln \lambda_i^e$. El tensor constitutivo elástico espacial \mathbf{c}^e resulta^{4,22,25}:

$$\mathbf{c}^e = c_{ijkl}^e (\mathbf{g}_i \otimes \mathbf{g}_j \otimes \mathbf{g}_k \otimes \mathbf{g}_l) \quad (80)$$

donde las componentes c_{ijkl}^e se expresan de la forma:

$$\begin{aligned} c_{iijj}^e &= \lambda + 2(\mu - \tau_i)\delta_{ij} \\ c_{ijij}^e &= c_{jiji}^e = c_{jijj}^e = \frac{\lambda_j^{e2}\tau_i - \lambda_i^{e2}\tau_j}{\lambda_j^{e2} - \lambda_i^{e2}} \quad (i \neq j) \end{aligned} \quad (81)$$

Estas expresiones son significantes si los estiramientos principales son desiguales ($\lambda_i^e \neq \lambda_j^e$).

Para la obtención del tensor elastoplástico tangente espacial, \mathbf{c}^{ep} , se parte de la expresión de la derivada de Lie del tensor de tensión de Kirchhoff de la forma²²:

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = L_v^e \boldsymbol{\tau} - \mathbf{d}^p \cdot \boldsymbol{\tau} - \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d}^p \quad (82)$$

y teniendo en cuenta $L_v^e \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d}^e = \mathbf{c}^e : (\mathbf{d} - \mathbf{d}^p)$, la ecuación (82) se puede reescribir:

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - (\mathbf{c}^e : \mathbf{d}^p + \mathbf{d}^p \cdot \boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{d}^p) = \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \mathbf{a} : \mathbf{d}^p \quad (83)$$

donde el tensor de cuarto orden \mathbf{a} , expresado indicialmente, es:

$$a_{ijkl} = c_{ijkl}^e - \tau_{ik} \delta_{jl} - \tau_{il} \delta_{jk} \quad (84)$$

Considerando la ecuación (11a) en (82):

$$\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \mathbf{a} : \mathbf{d}^p = \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \gamma \mathbf{a} : \mathbf{m} \quad (85)$$

Durante el proceso de carga plástica, $\phi(\boldsymbol{\tau}, q) = 0 \Rightarrow \dot{\phi} = 0$, y teniendo en cuenta las ecuaciones (11a), (12), (15) y las expresiones de las derivadas temporales del tensor de tensiones de Kirchhoff en²², se obtiene:

$$\begin{aligned}
 \dot{\phi} &= \underbrace{\partial_{\boldsymbol{\tau}} \phi : \dot{\boldsymbol{\tau}}}_{= \mathbf{m}} + \underbrace{\partial_q \phi \dot{q}}_{= 1} = \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\tau}} + \dot{q} = \mathbf{m} : \dot{\boldsymbol{\tau}} + \gamma \mathcal{H} = 0 \\
 &= \mathbf{m} : (\mathbf{a} : \mathbf{d}^e) + \gamma \mathcal{H} = \mathbf{m} : (\mathbf{a} : [\mathbf{d} - \mathbf{d}^p]) + \gamma \mathcal{H} = 0 \quad (86) \\
 &= \mathbf{m} : (\mathbf{a} : \mathbf{d}) - \mathbf{m} : (\mathbf{a} : \mathbf{d}^p) + \gamma \mathcal{H} = 0 \\
 &= \mathbf{m} : (\mathbf{a} : \mathbf{d}) - \gamma [\mathbf{m} : \mathbf{a} : \mathbf{m}] - \mathcal{H} = 0 \\
 \gamma &= \frac{\mathbf{m} : (\mathbf{a} : \mathbf{d})}{\mathbf{m} : \mathbf{a} : \mathbf{m} - \mathcal{H}} \quad (87)
 \end{aligned}$$

En la ecuación (87) está considerado implícitamente el valor negativo del parámetro de endurecimiento \mathcal{H} . Sustituyendo el valor de γ en la expresión (85) se tiene:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \gamma \mathbf{a} : \mathbf{m} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \frac{\mathbf{m} : (\mathbf{a} : \mathbf{d})}{(\mathbf{m} : \mathbf{a} : \mathbf{m}) - \mathcal{H}} \mathbf{a} : \mathbf{m} \\
 &= \mathbf{c}^e : \mathbf{d} - \frac{\mathbf{m} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} : \mathbf{d}}{(\mathbf{m} : \mathbf{a} : \mathbf{m}) - \mathcal{H}} : \mathbf{d} = \left[\mathbf{c}^e - \frac{\mathbf{m} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} : \mathbf{m}}{(\mathbf{m} : \mathbf{a} : \mathbf{m}) - \mathcal{H}} \right] : \mathbf{d} \quad (88) \\
 &= \mathbf{c}^{ep} : \mathbf{d}
 \end{aligned}$$

La expresión del tensor constitutivo espacial tangente elastoplástico resultante es:

$$\mathbf{c}^{ep} = \mathbf{c}^e - \frac{\mathbf{m} : \mathbf{a} \otimes \mathbf{a} : \mathbf{m}}{(\mathbf{m} : \mathbf{a} : \mathbf{m}) - \mathcal{H}} \quad (89)$$