

El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras

William Taylor Matias

Departamento de Engenharia Civil
Faculdade de Tecnologia
Universidade de Brasília – UnB
Campus Darcy Ribeiro, 70910-900 Brasília, Brazil
Tel.: 55-61-274 15 17, Fax: 55-61-273 46 44
e-mail: taylor@unb.br

Resumen

En el análisis no lineal el método de control del desplazamiento estándar es adecuado para simular las respuestas estructurales en *snap-through*. Sin embargo, dicho método falla cuando la respuesta de la estructura presenta en la trayectoria de equilibrio el rebote hacia atrás (*snap-back*), puntos de retorno (*returning points*) y lazos (*loopings*). Por lo tanto, la elección del parámetro a ser controlado es de fundamental importancia para la obtención de la trayectoria del equilibrio. En el presente estudio se propone como parámetro de control la componente de mayor valor absoluto del incremento de desplazamiento en un proceso incremental-iterativo. En las simulaciones numéricas se muestra la capacidad del método aquí propuesto para obtener las trayectorias de equilibrio con altas no linealidades geométricas de distintas tipologías estructurales.

NON-LINEAR ANALYSIS OF THE ELASTIC FRAME USING VARIABLE DISPLACEMENT CONTROL

Summary

Usual displacement control works well to trace the equilibrium path of non-linear structures with snap-through. It often breaks down, however, in a snap-back situation, when a turning point of the controlled displacement occurs accidentally on the path. The selection of the controlling parameter is, therefore, of vital importance in displacement control. The present study proposes a way to overcome the turning points by choosing the current largest component in tangent vector as the control parameter.

INTRODUCCIÓN

El método de control del desplazamiento convencional falla en la obtención de las respuestas estructurales que presentan en la trayectoria del equilibrio el rebote hacia atrás (*snap-back*) y lazos (*looping*). Dichos fallos han sido comentados en la referencia 9. La razón de ello se adviene del modo intuitivo o empírico, de elegir la componente del desplazamiento que se controlará durante el análisis. Por otra parte, se mantienen fijos la dirección y el valor de dicha componente durante todo el proceso de carga. Se puede ver en la Figura 1 la respuesta no lineal de un sistema estructural. En dicha figura se observa que el valor de una determinada componente del desplazamiento puede incrementarse o sufrir decrementos a lo largo de la trayectoria de equilibrio. Por ello, el método de desplazamiento estándar falla cuando ocurren puntos de retorno o lazos en la respuesta de la estructura. Aún en la misma figura se pueden identificar los puntos *límite* y los puntos de *retorno*. En el punto límite la estructura pierde su capacidad portante presentando un rebote hacia atrás. En el comportamiento postcrítico se observan los puntos de retorno donde el desplazamiento sufre decrementos o incrementos.

Donde ψ representa la densidad de energía de deformación, $\mathbf{E} = 1/2(\mathbf{F}^T\mathbf{F} - \mathbf{I})$ es el tensor de deformación de Green-Lagrange, $\rho\mathbf{b}$ son las fuerzas de volumen y $\bar{\mathbf{t}}$ describe las fuerzas de superficie que actúan en ∂B_σ . De la derivada direccional de Π respecto al campo de desplazamientos virtuales $\boldsymbol{\eta}$ se obtiene la ecuación de Euler-Lagrange

$$D\Pi \cdot \boldsymbol{\eta} = \int_B \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}} \cdot \delta \mathbf{E} dv - \int_B \rho \mathbf{b} \cdot \boldsymbol{\eta} dv - \int_{\partial B_\sigma} \bar{\mathbf{t}} \cdot \boldsymbol{\eta} da = 0 \quad (2)$$

con

$$\mathbf{S} = \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{E}}$$

$$\delta \mathbf{E} = \frac{1}{2}(\mathbf{F}^T \text{GRAD} \boldsymbol{\eta} + \text{GRAD}^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{F}) \quad \mathbf{F} = \mathbf{I} + \text{GRAD} \mathbf{u}$$

que es la base para la discretización en elementos finitos. En función del problema analizado se elige la función ψ correspondiente. Para el caso de deformaciones infinitesimales se puede adoptar ψ correspondiente al material de Saint Venant

$$\psi = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu)I_E^2 - 2\mu II_E \quad (3a)$$

$$I_E = \text{tr}(\mathbf{E}) \quad II_E = \frac{1}{2}[\text{tr}(\mathbf{E}^2) - \text{tr}(\mathbf{E})^2] \quad (3b)$$

de la cual se obtiene el segundo tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E}) + 2\mu \mathbf{E}$. En situaciones donde ocurren deformaciones finitas se puede considerar otras formas de ψ .⁸

Discretización por elementos finitos

Se discretiza el sólido en n_e elementos del modo siguiente

$$B^h = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega_e$$

Se interpolan el campo de desplazamientos $\mathbf{u}$ y su variación virtual $\boldsymbol{\eta}$, en el elemento Ω_e , de la siguiente manera

$$\mathbf{u}^h = \mathbf{N} \mathbf{v}_e \quad \boldsymbol{\eta}^h = \mathbf{N} \delta \mathbf{v}_e \quad (4)$$

donde $\mathbf{N}$ contiene las funciones de forma, $\mathbf{v}_e$ y $\delta \mathbf{v}_e$ representan los desplazamientos nodales y sus variaciones virtuales, respectivamente. Por otro lado, la interpolación del campo de deformaciones y de sus variaciones virtuales se expresan como

$$\mathbf{E}^h = (\mathbf{B}^l + \frac{1}{2}\mathbf{B}^{nl})\mathbf{v}_e \quad \delta \mathbf{E}^h = (\mathbf{B}^l + \mathbf{B}^{nl})\delta \mathbf{v}_e \quad (5)$$

donde las matrices $\mathbf{B}^l$ y $\mathbf{B}^{nl}$ contienen las derivadas de las funciones de forma.

A través de las ecuaciones (4) y (5) la forma débil (2) se expresa como

$$D\Pi \cdot \delta \mathbf{v} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \delta \mathbf{v}_e^T \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega - \int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega - \int_{\partial \Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d(\partial \Omega) \right) = \mathbf{0} \quad (6)$$

Aplicándose el lema fundamental del análisis variacional en la ecuación (6) se obtiene el sistema de ecuaciones algebraico $\mathbf{R}(\mathbf{v}) - \bar{\mathbf{P}} = \mathbf{0}$, donde

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) = \bigcup_{e=1}^{n_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{B}^T \mathbf{S} d\Omega \quad \text{y} \quad \bar{\mathbf{P}} = \bigcup_{e=1}^{n_e} \left(\int_{\Omega_e} \mathbf{N}^T \rho \mathbf{b} d\Omega + \int_{\partial\Omega_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d(\partial\Omega) \right) \quad (7)$$

representan los vectores de fuerzas internas y externas, respectivamente. Suponiendo que las fuerzas externas son proporcionales, se introduce un escalar tal que

$$\mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (8)$$

donde λ es el factor de carga.

MÉTODOS DE CONTROL DE LA RESPUESTA

El sistema de ecuaciones (8) es no lineal en $\mathbf{v}$. El grado de no linealidad depende de la teoría que se utilice para describir el problema en particular. En el análisis de no linealidad geométrica del sólido $\mathbf{R}$ es una función cúbica de $\mathbf{v}$. Por otro lado, por ejemplo, en el análisis no lineal de láminas, placas y vigas, la dependencia de $\mathbf{R}$ respecto a $\mathbf{v}$ se describe a través de polinomios de grado superior¹⁶.

Los métodos que se basan en los procedimientos incrementales-iterativos con control de la carga fallan cuando la matriz de rigidez tangente se torna singular. Por otro lado, los métodos de continuación de la respuesta son capaces de superar dicho problema^{11,12}. Puesto que los métodos de longitud de arco son esenciales en la obtención de la respuesta de los sistemas estructurales en la fase postcrítica, se describe a continuación, de manera sucinta, la formulación general de dichos métodos.

Formulación general

En la Figura 1a se muestran algunos casos en los que los procedimientos incrementales-iterativos no interceptan la curva carga-desplazamiento a través del control de la carga o de una componente del vector de desplazamiento. Por ejemplo, esto puede ocurrir para un dado factor de carga $\lambda = c$ o para un desplazamiento prescrito $v = v_a$. Para superar dicho problema se adopta una ecuación de restricción que se añade al sistema de ecuaciones de equilibrio (8) cuya representación geométrica se muestra en la Figura 1b. De esta manera, se escribe un sistema *aumentado* de ecuaciones del modo siguiente

$$\mathbf{G}(\mathbf{v}, \lambda) = \mathbf{R}(\mathbf{v}) - \lambda \mathbf{P} = \mathbf{0} \quad (9a)$$

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = 0 \quad (9b)$$

Mediante la linealización de (9) en una configuración de equilibrio conocida $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_v & \mathbf{G}_\lambda \\ \mathbf{f}_v^T & f_\lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{v} \\ \Delta \lambda \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{G} \\ f \end{Bmatrix} \quad (10)$$

cuyas derivadas direccionales se expresan como

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_v \cdot \Delta \mathbf{v} &= \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})] |_{\epsilon=0} \\
\mathbf{G}_\lambda \cdot \Delta \lambda &= \frac{d}{d\epsilon} [\mathbf{G}(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda} + \epsilon \Delta \lambda)] |_{\epsilon=0} \\
\mathbf{f}_v^T \cdot \Delta \mathbf{v} &= \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{v}} + \epsilon \Delta \mathbf{v}, \bar{\lambda})] |_{\epsilon=0} \\
f_\lambda \cdot \Delta \lambda &= \frac{d}{d\epsilon} [f(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda} + \epsilon \Delta \lambda)] |_{\epsilon=0}
\end{aligned} \tag{11}$$

En la literatura ingenieril $\mathbf{G}_v$ se conoce como la matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}_T$, mientras $\mathbf{G}_\lambda$ describe un sistema de cargas que se define como $\mathbf{G}_\lambda = -\mathbf{P}$.

En la i -ésima iteración se resuelve el sistema de ecuaciones no simétrico (10) particionándolo de tal modo que se obtienen dos ecuaciones para $\Delta \mathbf{v}_i$ y $\Delta \lambda_i$, respectivamente¹³

$$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi} \tag{12}$$

$$\Delta \lambda_i = - \frac{f_i + \mathbf{f}_{vi}^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{f_{\lambda i} + \mathbf{f}_{vi}^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}} \tag{13}$$

con

$$\Delta \mathbf{v}_{Pi} = \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{P} \quad \Delta \mathbf{v}_{Gi} = \mathbf{K}_{Ti}^{-1} \mathbf{G}_i$$

Se obtiene convergencia cuadrática si se realiza la linealización de la ecuación de restricción (9b) de manera consistente¹³.

En general esta formulación tiene validez sólo en la fase de corrección. En la literatura técnica se describen diferentes ecuaciones de restricción. Por ejemplo, se pueden mencionar ecuaciones de coacción cuyo proceso de iteración se da en *hiperplanos normales*¹⁰, en *hiperplanos normales actualizados*⁹, en *hiperplanos tangentes*⁵ o en *superficies esféricas*². En los apartados siguientes se muestra que el método del *control variable* del desplazamiento es un caso particular de las ecuaciones de restricción en *hiperplanos*.

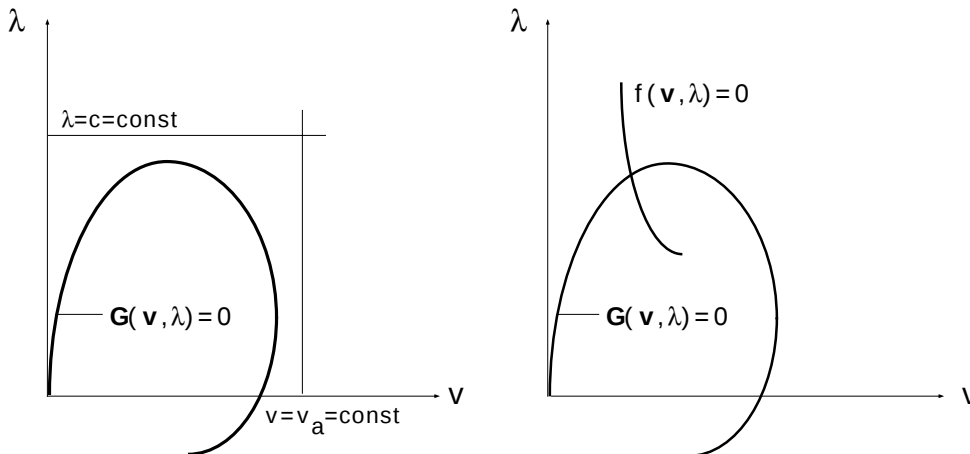


Figura 2. Curvas carga–desplazamiento

Paso predictor mediante parametrización

En este apartado se describe un método alternativo para el cálculo del incremento de carga $\Delta\lambda$ en el paso predictor. Con ese fin se parametriza el campo de desplazamiento y el factor de carga, tal que $\mathbf{v} = \mathbf{v}(s)$ y $\lambda = \lambda(s)$, respectivamente. El parámetro s expresa la longitud de arco. De esta manera se reescribe el sistema *aumentado* (9) de ecuaciones del modo siguiente

$$\hat{\mathbf{G}}(s) = \begin{Bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{v}(s), \lambda(s)) \\ f(\mathbf{v}(s), \lambda(s), s) \end{Bmatrix} \quad (14)$$

Predictor lineal con el control variable del desplazamiento

En este apartado se hace la predicción de los incrementos de desplazamientos y del incremento del factor de carga a través del control variable del desplazamiento.

Al inicio de cada paso de carga se resuelve el sistema $\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}_P = \mathbf{P}$. Una vez calculado el vector $\Delta \mathbf{v}_P$, se elige la mayor componente $\Delta v_P^{\max}$, en valor absoluto, de este vector. Se define $k_{\max}$ como la posición de $\Delta v_P^{\max}$ en el vector $\Delta \mathbf{v}_P$. Se controla dicho grado de libertad en las fases predictor y corrector, respectivamente. Con $\Delta v_P^{\max}$ se calcula el vector $\Delta \mathbf{v}_0$ y el factor de carga $\Delta \lambda_0$.

Por lo tanto, en la fase predictor sólo se utiliza un grado de libertad ($k_{\max}$) para calcular los incrementos de desplazamientos y del factor de carga. Sin embargo, si se utiliza cualquiera de las ecuaciones de restricción mencionadas anteriormente, se controlan el vector de los desplazamientos y el factor de carga.

Para obtener las expresiones del método de control variable del desplazamiento se adopta dos ecuaciones de restricciones. La primera, aquí denominada de *restricción en hiperplanos* está descrita en la referencia 10, mientras que la segunda, denominada *restricción cilíndrica*, se encuentra detallada en la referencia 1.

De la linealización de (14) respecto al parámetro s en una configuración de equilibrio conocida $(\bar{\mathbf{v}}, \bar{\lambda})$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} \mathbf{G}_v & \mathbf{G}_\lambda \\ \mathbf{f}_v^T & f_\lambda \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ f_s \end{Bmatrix} \quad (15)$$

con $\dot{\mathbf{v}} = \partial \mathbf{v} / \partial s$, $\dot{\lambda} = \partial \lambda / \partial s$ y $f_s = \partial f / \partial s$. La longitud del paso predictor es gobernado por la ecuación de restricción f . En primer lugar se describe la ecuación de *restricción en hiperplanos*, que en forma matricial se expresa como

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \dot{\mathbf{v}}^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) + \dot{\lambda} (\lambda - \bar{\lambda}) - \Delta s$$

$$f = \mathbf{t}^T \mathbf{x} - \Delta s \quad (16)$$

con

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \\ \lambda - \bar{\lambda} \end{Bmatrix} \quad \Delta s = s - \bar{s}$$

En la Figura 3 se muestra la interpretación geométrica de la ecuación (16). Las derivadas de dicha ecuación se expresan como

$$\mathbf{f}_v = \dot{\mathbf{v}}^T \approx \frac{\Delta \mathbf{v}^T}{\Delta s} \quad f_\lambda = \dot{\lambda} \approx \frac{\Delta \lambda}{\Delta s} \quad f_s = -1 \quad (17)$$

Sustituyendo los valores dados en (17) en la ecuación (15), se obtienen las predicciones del factor de carga y de los desplazamientos, conforme se muestra en el Cuadro 1. Por otra parte, se obtienen dichas predicciones por medio del control variable del desplazamiento, reemplazando el vector $\Delta \mathbf{v}_P$ por su componente $\Delta v_P^{\max}$ en la expresión correspondiente a la *restricción en hiperplanos* (ítem 2 del Cuadro 1).

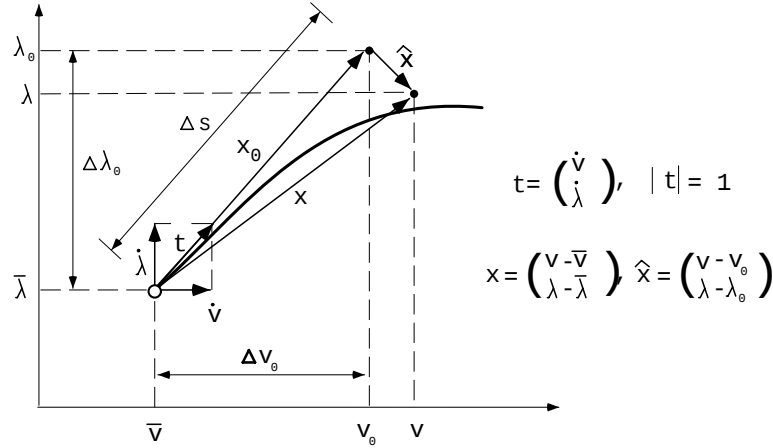


Figura 3. Interpretación geométrica de la ecuación de restricción en el paso predictor

Se considera, ahora, la ecuación de *restricción cilíndrica* para deducir la expresión del control variable del desplazamiento, con la cual se calcula la predicción de los desplazamientos y el factor de carga. La forma matricial de la ecuación de *restricción cilíndrica* se escribe como

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \dot{\mathbf{v}}^T (\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}) - \Delta s$$

$$f = \mathbf{t}^T \mathbf{x} - \Delta s \quad (18)$$

con

$$\mathbf{t} = \begin{Bmatrix} \dot{\mathbf{v}} \\ \dot{\lambda} \end{Bmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Delta s = s - \bar{s}$$

Nótese, que en este caso sólo se controlan los desplazamientos a través del vector $\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}}$. En la Figura 2 se muestra la interpretación geométrica de la ecuación (18). Las derivadas de dicha ecuación se expresan como

$$\mathbf{f}_v = \dot{\mathbf{v}}^T \approx \frac{\Delta \mathbf{v}^T}{\Delta s} \quad f_\lambda = 0 \quad \dot{\lambda} \approx \frac{\Delta \lambda}{\Delta s} \quad f_s = -1 \quad (19)$$

Sustituyendo los valores dados en (19) en la ecuación (15), se obtienen las predicciones del factor de carga y de los desplazamientos, conforme se muestra en el Cuadro 1. Como se ha comentado anteriormente, se calculan $\Delta \mathbf{v}_0$ y $\Delta \lambda_0$ con el control variable del desplazamiento simplemente reemplazando el vector $\Delta \mathbf{v}_P$ por su componente $\Delta v_P^{\max}$ en la ecuación correspondiente a la *restricción cilíndrica*, (ítem 2 del Cuadro 1).

1. Resuélvase el sistema	$\mathbf{K}_T \Delta \mathbf{v}_P = \mathbf{P}$
2. Evalúese el incremento del factor de carga	
• Por medio de la restricción en hiperplanos	$\Delta \lambda_0 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{1 + \Delta \mathbf{v}_P^T \Delta \mathbf{v}_P}}$
$\Rightarrow$ Con el control variable del desplazamiento	$\Delta \lambda_0 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{1 + \Delta v_P^{\max} \Delta v_P^{\max}}}$
• Por medio de la restricción cilíndrica	$\Delta \lambda_0 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta \mathbf{v}_P^T \Delta \mathbf{v}_P}}$
$\Rightarrow$ Con el control variable del desplazamiento	$\Delta \lambda_0 = \pm \frac{\Delta s}{\sqrt{\Delta v_P^{\max} \Delta v_P^{\max}}} = \pm \frac{\Delta s}{ \Delta v_P^{\max} }$
3. Evalúese el incremento de desplazamiento	$\Delta \mathbf{v}_0 = \Delta \lambda_0 \Delta \mathbf{v}_P$
4. Calcúlense las predicciones	$\lambda_0 = \bar{\lambda} + \Delta \lambda_0$ $\mathbf{v}_0 = \bar{\mathbf{v}} + \Delta \lambda_0 \Delta \mathbf{v}_P$

Cuadro 1. Predicción del factor de carga y de los desplazamientos

En el paso predictor es necesario determinar en qué sentido avanza la solución. En cada punto de la trayectoria de equilibrio el vector tangente $\Delta \mathbf{v}_0$ determina dos sentidos distintos. Se calcula el signo de $\Delta \lambda_0$ imponiendo la siguiente condición³

$$\Delta \bar{\mathbf{v}}^T \Delta \mathbf{v}_0 > 0 \implies \Delta \lambda_0 \Delta \bar{\mathbf{v}}^T \Delta \mathbf{v}_P > 0 \quad (20)$$

donde $\Delta \bar{\mathbf{v}}$ es el incremento de desplazamientos del paso $n - 1$ al paso n . Por tanto, el signo de $\Delta \lambda_0$ queda determinado a través del signo del término $\Delta \bar{\mathbf{v}}^T \Delta \mathbf{v}_P$.

Paso corrector con el control variable del desplazamiento

Como en el paso predictor, aquí se toman dos ecuaciones de restricción durante el proceso iterativo para deducir la expresión correspondiente al método de control variable del desplazamiento. En primer lugar se adopta la ecuación de restricción que describe el proceso de iteración en *hiperplanos normales* cuya expresión viene dada por

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \Delta \mathbf{v}_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) + \Delta \lambda_0 (\lambda - \lambda_0) = 0$$

$$f = \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{x}} = 0 \implies \mathbf{x}_0 \perp \hat{\mathbf{x}} \quad (21)$$

con

$$\mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{v}_0 \\ \Delta \lambda_0 \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \\ \lambda - \lambda_0 \end{Bmatrix}$$

donde $\Delta \mathbf{v}_0$ y $\Delta \lambda_0$ son las predicciones de los incrementos de desplazamientos y del factor de carga, respectivamente. Por otra parte, el vector $\hat{\mathbf{x}}$ contiene las correcciones de dichas variables. En la Figura 3 se muestra la interpretación geométrica de la ecuación (21). Las derivadas de esta ecuación se calculan como

$$\mathbf{f}_v^T = \Delta \mathbf{v}_0^T \quad f_\lambda = \Delta \lambda_0 \quad (22)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (12) y (13), se obtienen las correcciones del factor de carga y de los desplazamientos correspondientes a la i -ésima iteración. Se detallan

estos cálculos en el Cuadro 2. Por otra parte, se obtienen dichas correcciones por medio del control variable del desplazamiento, reemplazando los vectores $\Delta \mathbf{v}_0$, $\Delta \mathbf{v}_{Pi}$ y $\Delta \mathbf{v}_{Gi}$ por sus componentes $\Delta v_0^{k_{\max}}$, $\Delta v_{Pi}^{k_{\max}}$ y $\Delta v_{Gi}^{k_{\max}}$, respectivamente, en la expresión correspondiente a la restricción en *hiperplanos normales*, (ítem 3 del Cuadro 2). Nótese que el grado de libertad controlado $k_{\max}$ se mantiene fijo durante el proceso iterativo de la fase correctora.

En segundo lugar, se considera la ecuación de restricción que describe el proceso de iteración en *superficies cilíndricas* cuya expresión viene dada por

$$f(\mathbf{v}, \lambda) = \Delta \mathbf{v}_0^T (\mathbf{v} - \mathbf{v}_0) = 0$$

$$f = \mathbf{x}_0^T \hat{\mathbf{x}} = 0 \quad \implies \quad \mathbf{x}_0 \perp \hat{\mathbf{x}} \quad (23)$$

con

$$\mathbf{x}_0 = \begin{Bmatrix} \Delta \mathbf{v}_0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{Bmatrix} \mathbf{v} - \mathbf{v}_0 \\ 0 \end{Bmatrix}$$

Nótese que en la restricción *cilíndrica* sólo se controlan los desplazamientos. Las derivadas de esta ecuación se calculan como

$$\mathbf{f}_v^T = \Delta \mathbf{v}_0^T \quad f_\lambda = 0 \quad (24)$$

Sustituyendo estos valores en las ecuaciones (12) y (13), se obtienen las correcciones del factor de carga y de los desplazamientos correspondientes a la i -ésima iteración. Se detallan estos cálculos en el Cuadro 2. Por otra parte, se obtienen dichas correcciones por medio del control variable del desplazamiento, reemplazando los vectores $\Delta \mathbf{v}_0$, $\Delta \mathbf{v}_{Pi}$ y $\Delta \mathbf{v}_{Gi}$ por sus componentes $\Delta v_0^{k_{\max}}$, $\Delta v_{Pi}^{k_{\max}}$ y $\Delta v_{Gi}^{k_{\max}}$, respectivamente, en la expresión correspondiente a la restricción *cilíndrica* (ítem 3 del Cuadro 2).

1. Calcúlense	$\mathbf{K}_{Ti}, \mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i), \mathbf{P}$
2. Resuélvanse los sistemas	$\mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{v}_{Pi} = \mathbf{P}$ $\mathbf{K}_{Ti} \Delta \mathbf{v}_{Gi} = -\mathbf{G}(\mathbf{v}_i, \lambda_i)$
3. Evalúese el incremento del factor de carga	
• Por medio de hiperplanos normales	$\Delta \lambda_i = -\frac{\Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{\Delta \lambda_0 + \Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}}$
$\implies$ Con el control variable del desplazamiento	$\Delta \lambda_i = -\frac{\Delta v_0^{k_{\max}} \Delta v_{Gi}^{k_{\max}}}{\Delta \lambda_0 + \Delta v_0^{k_{\max}} \Delta v_{Pi}^{k_{\max}}}$
• Por medio de la restricción cilíndrica	$\Delta \lambda_i = -\frac{\Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_{Gi}}{\Delta \mathbf{v}_0^T \Delta \mathbf{v}_{Pi}}$
$\implies$ Con el control variable del desplazamiento	$\Delta \lambda_i = -\frac{\Delta v_{Gi}^{k_{\max}}}{\Delta v_{Pi}^{k_{\max}}}$
4. Evalúese el incremento de desplazamiento	$\Delta \mathbf{v}_i = \Delta \lambda_i \Delta \mathbf{v}_{Pi} + \Delta \mathbf{v}_{Gi}$
5. Actualícense las variables	$\lambda_{i+1} = \lambda_i + \Delta \lambda_i$ $\mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \Delta \mathbf{v}_i$
6. Verifíquese la convergencia	Si $\ \mathbf{G}(\mathbf{v}_{i+1}, \lambda_{i+1})\ \leq \text{TOL} \Rightarrow \text{Fin}$ Si no, $i \leftarrow i + 1$ Retórnese a 1

Cuadro 2. Algoritmo iterativo para la corrección del factor de carga y de los desplazamientos

Normalización de las unidades

Cuando se utilizan elementos finitos de lámina, placas y vigas, en las distintas ecuaciones de coacción que se utilizan en los métodos de longitud de arco aparecen mezcladas cantidades con diferentes significados físicos, como por ejemplo, desplazamientos, rotaciones y cargas. Por ello se hace necesario normalizar dichas cantidades. La referencia 15 propone la siguiente expresión

$$f(\mathbf{v}_s, \lambda_s) = \sqrt{\Delta \mathbf{v}^T \mathbf{V}_s \Delta \mathbf{v} + \beta^2 \Delta \lambda^2} - s = 0 \quad (25)$$

donde β es un factor de escala, $\mathbf{V}_s$ representa una matriz diagonal cuyos componentes V_i son factores de escala. La expresión de dicha matriz viene dada por

$$\mathbf{V}_s = \begin{bmatrix} V_1 & & & \\ & V_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & V_n \end{bmatrix}_{n \times n} \quad (26)$$

Se puede obtener una familia de métodos de longitud de arco al asignar valores arbitrarios a los factores de escala V_i y β ¹³. En este trabajo se adopta el control solamente de las componentes de desplazamientos traslacionales del vector de desplazamientos, es decir, $V_{dis} = 1$, $V_{rot} = \beta = 0$.

EJEMPLOS NUMÉRICOS

En este apartado se obtienen las trayectorias de equilibrio de distintas tipologías estructurales a través del método de *control variable del desplazamiento*. Para ello se utilizan los algoritmos descritos en los Cuadros 1 y 2 del apartado anterior. Dichos algoritmos forman parte de las técnicas numéricas de continuación de la respuesta en el análisis no lineal de la mecánica de sólidos.

Estructura articulada de dos barras con imperfección geométrica

En el primer ejemplo se considera una estructura articulada de dos barras, conforme se muestra en la Figura 4. En dicha figura se describen las características geométricas y propiedades mecánicas del modelo. Dicho ejemplo está descrito en el Capítulo 9 del libro de la referencia 18.

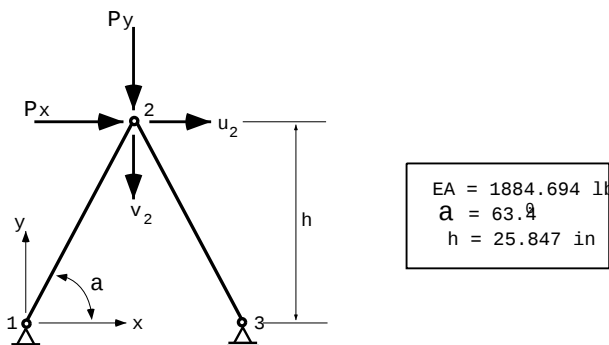


Figura 4. Estructura articulada de dos barras con imperfección geométrica

Se introduce la imperfección geométrica de la siguiente manera: en el primer modo se aplica una carga horizontal $P_x = 0,05P_y$ en el nodo 2, además de la carga vertical P_y . En el segundo se aplica una carga vertical $P_y = 0,05P_x$ en el mismo nodo, además de la carga horizontal P_x .

Para obtener las trayectorias de equilibrio (curvas $\lambda_{y2} \times u_2$, $\lambda_{y2} \times v_2$, $\lambda_{x2} \times u_2$ y $\lambda_{x2} \times v_2$) que se muestran en las Figuras 5 y 6 se ha utilizado el método de control variable del desplazamiento cuyas características se detallan en el Cuadro 3. Nótese que la respuesta del modelo para ambos tipos de imperfección geométrica presentan varios puntos límites y de retorno. Además, algunas curvas presentan lazos ($\lambda_{y2} \times v_2$ y $\lambda_{x2} \times v_2$). En dichas figuras se puede observar que en el rango de desplazamiento presentado, los valores de las variables u_2 y v_2 sufren decrementos o incrementos, al alcanzar los puntos de retorno. Nótese que la estrategia del control variable del desplazamiento ha logrado pasar por los puntos de retorno en la trayectoria de equilibrio del modelo.

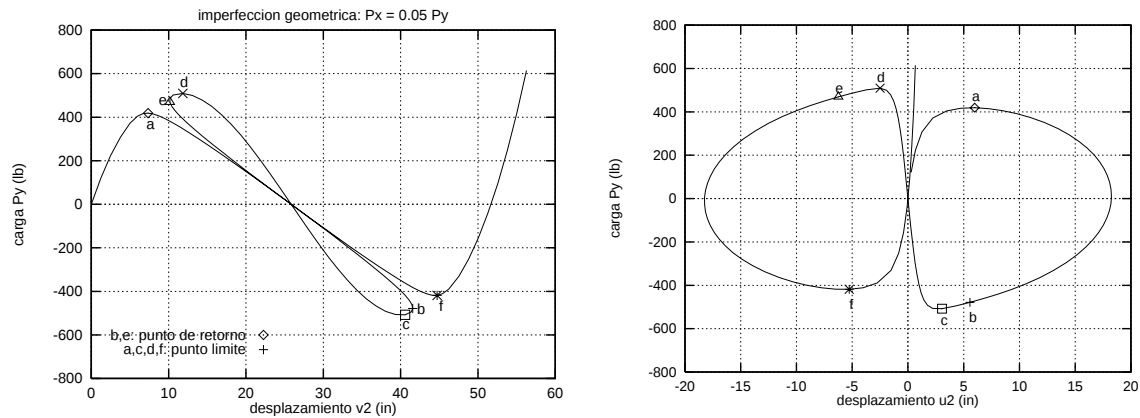


Figura 5. Trayectorias de equilibrio con imperfección geométrica: $P_x = 0,05P_y$

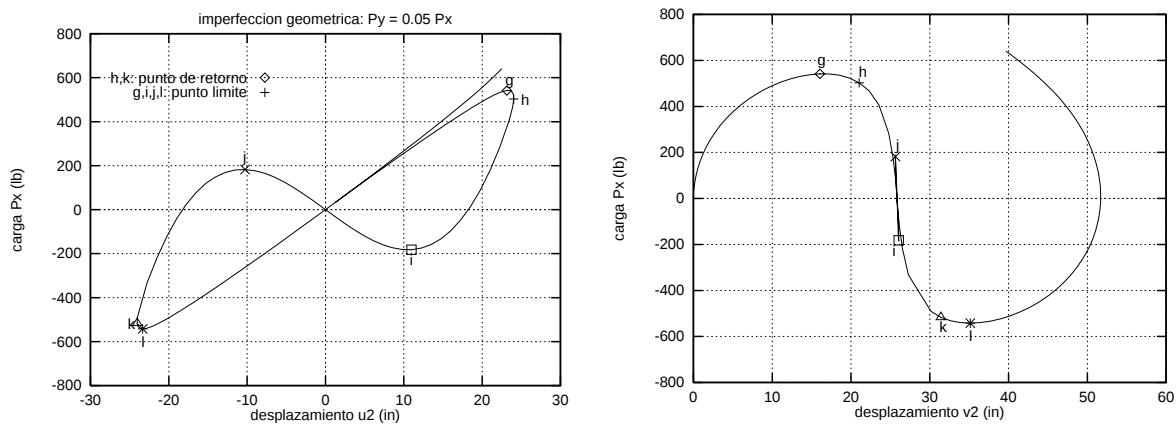


Figura 6. Trayectorias de equilibrio con imperfección geométrica: $P_y = 0,05P_x$

Nótese que en el Cuadro 3 se han definido las variables ARCMIN y ARCMAX. Ello se debe a que en un proceso incremental-iterativo se puede adoptar una longitud de arco constante o variable. Si se hace un control automático del tamaño del paso, se debe fijar un valor mínimo y máximo para la longitud del arco. En la referencia 2 se encuentra una discusión detallada respecto a los posibles valores que pueden adoptar estos parámetros.

- | |
|---|
| i. Tolerancia para la convergencia: $TOL = 10^{-5}$ |
| ii. Ecuación de coacción: Control variable del desplazamiento derivado de la restricción cilíndrica |
| iii. Longitud del arco: $ARC=1,25$
$ARCMAX=5,0$
$ARCMIN=0,01$ |
| iv. Número de incrementos de carga: $NLOAD = 109$ |
| v. Promedio de iteraciones por paso ($NITER/NLOAD$): $300/109 = 2,75$ |

Cuadro 3. Características del método de control de la respuesta – estructura articulada de dos barras con imperfección geométrica

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dirección	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dirección
1 - 4	nodo 2	y	66 - 73	nodo 2	x
5 - 13	nodo 2	x	74 - 94	nodo 2	y
14 - 33	nodo 2	y	95 - 102	nodo 2	x
34 - 41	nodo 2	x	103 - 109	nodo 2	y
42 - 65	nodo 2	y			

Tabla I. Nodos bajo control durante el análisis – estructura articulada con imperfección geométrica: $P_x = 0,05P_y$

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dirección	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dirección
1 - 15	nodo 2	x	66 - 77	nodo 2	y
16 - 28	nodo 2	y	78 - 106	nodo 2	x
29 - 65	nodo 2	x	107 - 109	nodo 2	y

Tabla II. Nodos bajo control durante el análisis — estructura articulada con imperfección geométrica: $P_y = 0,05P_x$

En las Tablas I y II se especifican los grados de libertad que han sido automáticamente controlados para la obtención de las trayectorias de equilibrio presentadas en las Figura 5 y 6. Nótese que se han controlado ambas direcciones x y y del nodo 2 a largo del análisis.

Elemento articulado 2D con resortes

En este ejemplo se considera un elemento de barra articulado cuyas extremidades se apoyan en resortes lineales, conforme se muestra en la Figura 7a. Las características geométricas y propiedades mecánicas del modelo están descritas en dicha Figura. Dicho ejemplo está descrito en el Capítulo 9 del libro de la referencia 2. Se estudia la respuesta del modelo para las siguientes rigideces del resorte K_1 : $K_1 = 1,0$; $K_1 = 0,75$ y $K_1 = 0,5$.

Para obtener las trayectorias de equilibrio (curvas $\lambda_{x1} \times u_1$) que se muestran en la Figura 7b se ha utilizado el método de control variable del desplazamiento cuyas características se detallan en el Cuadro 4. Nótese que el comportamiento del modelo presenta

un rebote hacia atrás (*snap-back*) cuando pierde su capacidad portante, es decir, cuando presenta un punto límite. Se observa que a medida que se disminuye el valor de la rigidez del resorte K_1 , el rebote hacia atrás se hace más largo. Por otra parte, en el punto límite la trayectoria de equilibrio se hace más puntiaguda.

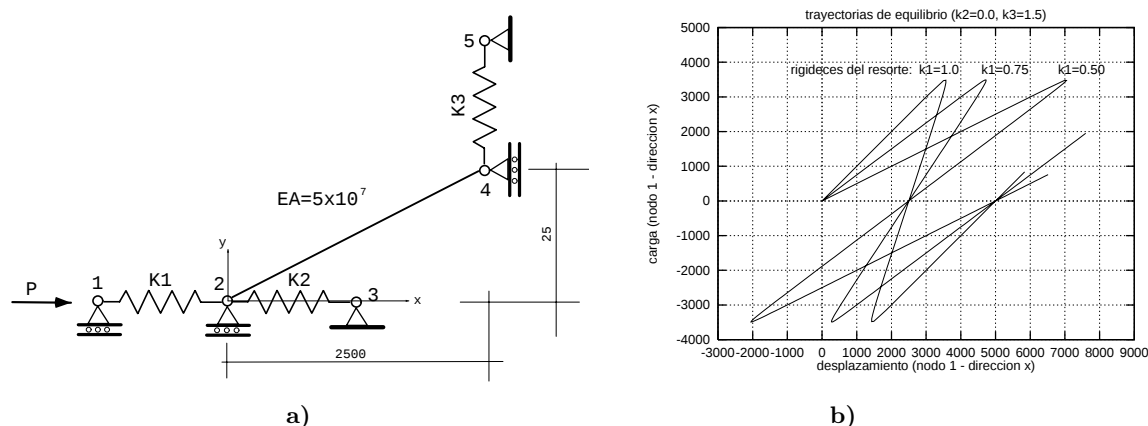


Figura 7. Elemento articulado 2D con resortes: a) características geométricas y propiedades mecánicas, b) trayectorias de equilibrio con diferentes rigideces del resorte K_1

- i. Tolerancia para la convergencia: $TOL = 10^{-5}$
- ii. Ecuación de coacción: Control variable del desplazamiento derivado de la restricción cilíndrica
- iii. Longitud del arco: $ARC = 500$
 $ARCMAX = 1500$
 $ARCMIN = 100$
- iv. Número de incrementos de carga:
 - Caso 1 $\Rightarrow k_1=1,00$: $NLOAD = 50$
 - Caso 2 $\Rightarrow k_1=0,75$: $NLOAD = 120$
 - Caso 3 $\Rightarrow k_1=0,50$: $NLOAD = 160$
- v. Promedio de iteraciones por paso (NITER/NLOAD):
 - Caso 1 $\Rightarrow 190/049=3,88$ con 1 corte automático
 - Caso 2 $\Rightarrow 344/118=2,92$ con 2 cortes automáticos
 - Caso 3 $\Rightarrow 541/158=3,42$ con 2 cortes automáticos

Cuadro 4. Características del método de control de la respuesta – estructura articulada 2D

En la Tabla III se especifican los grados de libertad que han sido automáticamente controlados para la obtención de las trayectorias de equilibrio presentadas en la Figura 7b. Nótese que para todos los casos con diferentes rigideces del resorte K_1 se han controlado solo los nodos 1, 2 y 4.

Obsérvese que en el Cuadro 4 se menciona el promedio de iteraciones por paso y el número de cortes automáticos durante el análisis. El corte automático del paso incremental se refiere a la posibilidad de manejar la velocidad de convergencia. El problema puede no converger por las siguientes razones: las superficies de coacción y de equilibrio no se interceptan o porque no se alcanza la convergencia dentro del límite máximo de iteraciones establecido. Este obstáculo puede ser superado a través del algoritmo de corte automático del paso¹.

Pasos de carga con $\kappa_1=1,0$	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga con $\kappa_1=0,75$	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga con $\kappa_1=0,5$	Nodo bajo control	Dir.
1 - 7	nodo 1	x	1 - 12	nodo 1	x	1 - 14	nodo 1	x
8 - 14	nodo 4	y	13 - 24	nodo 4	y	15 - 19	nodo 4	y
15 - 28	nodo 2	x	25 - 52	nodo 2	x	20 - 86	nodo 1	x
29 - 34	nodo 4	y	53 - 64	nodo 4	y	87 - 93	nodo 4	y
35 - 50	nodo 1	x	65 - 120	nodo 1	x	94 - 160	nodo 1	x

Tabla III. Nodos bajo control a lo largo de los pasos de carga – estructura articulada 2D

Estructura articulada 3D

En este ejemplo se presenta una estructura en 3D constituida por 12 elementos de barra articulada. Dicha estructura posee 6 apoyos de tercer género. En la Figura 8a se detallan sus características geométricas y propiedades mecánicas. Dicho ejemplo se encuentra descrito en el Capítulo 3 del libro de la referencia 18.

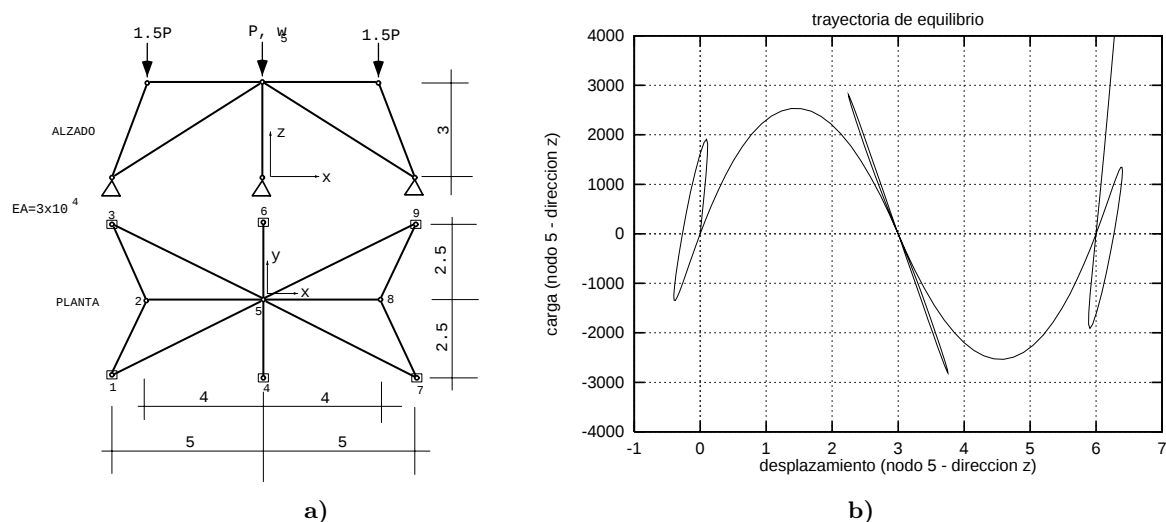


Figura 8. Estructura articulada 3D: a) características geométricas y propiedades mecánicas, b) trayectoria de equilibrio postcrítica

- i. Tolerancia para la convergencia: $TOL = 10^{-5}$
- ii. Ecuación de coacción: Control variable del desplazamiento derivado de la restricción cilíndrica
- iii. Longitud del arco: $ARC=0,15$
 $ARC_{MAX}=0,5$
 $ARC_{MIN}=0,01$
- iv. Número de incrementos de carga: $NLOAD = 135$
- v. Promedio de iteraciones por paso ($NITER/NLOAD$): $391/135 = 2,9$

Cuadro 5. Características del método de control de la respuesta – estructura articulada 3D

Para obtener la trayectoria de equilibrio (curva $\lambda_{z1} \times w_1$) que se muestra en la Figura 8b se ha utilizado el método de control variable del desplazamiento cuyas características se detallan en el Cuadro 5. En la Figura 8b se puede notar que la trayectoria de equilibrio del modelo es fuertemente no lineal, presentando tres lazos (looping) a lo largo del proceso de carga. Para obtener dicha respuesta es necesario utilizar un algoritmo de control de la respuesta muy eficiente. En este ejemplo el método aquí descrito ha sido capaz de obtener la respuesta del modelo.

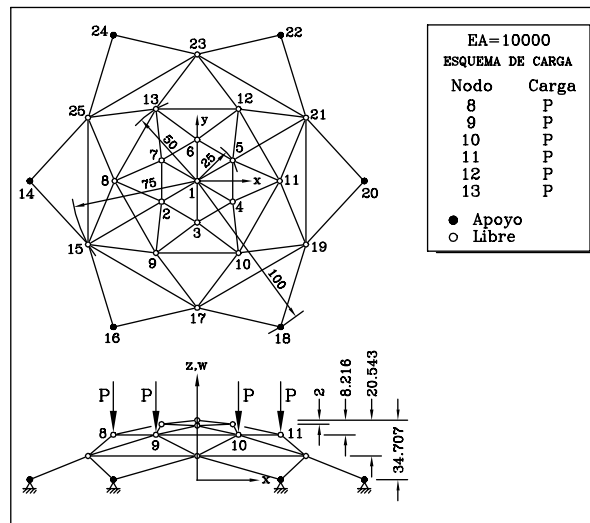
En la Tabla IV se especifican los grados de libertad que han sido automáticamente controlados para la obtención de la trayectoria de equilibrio presentada en la Figura 8b. Nótese que solamente los nodos 2, 5 y 8 han sido controlados, pero la mayor incidencia ha recaído sobre los nodos 2 y 8.

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dirección	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dirección
1	nodo 2	z	71 - 74	nodo 2	z
2 - 3	nodo 8	z	75 - 78	nodo 8	z
4	nodo 2	z	79	nodo 2	z
5 - 7	nodo 8	z	80	nodo 8	z
8	nodo 2	x	81 - 99	nodo 5	z
9	nodo 8	x	100 - 103	nodo 2	z
10 - 12	nodo 2	x	104	nodo 8	z
13	nodo 8	x	105 - 106	nodo 2	z
14 - 15	nodo 8	z	107 - 108	nodo 8	z
16	nodo 2	z	109	nodo 2	z
17 - 19	nodo 8	z	110 - 113	nodo 8	z
20 - 22	nodo 2	z	114	nodo 2	z
23 - 25	nodo 8	z	115 - 117	nodo 8	z
26	nodo 2	z	118	nodo 2	x
27	nodo 8	z	119	nodo 8	x
28 - 31	nodo 2	z	120	nodo 2	x
32 - 50	nodo 5	z	121 - 123	nodo 8	x
51	nodo 8	z	124	nodo 2	z
52	nodo 2	z	125	nodo 8	z
53 - 55	nodo 8	z	126	nodo 2	z
56 - 61	nodo 2	z	127 - 128	nodo 8	z
62 - 64	nodo 8	z	129 - 130	nodo 2	z
65 - 66	nodo 2	z	131	nodo 8	z
67	nodo 8	z	132 - 134	nodo 2	z
68 - 69	nodo 2	z	135	nodo 8	z
70	nodo 8	z			

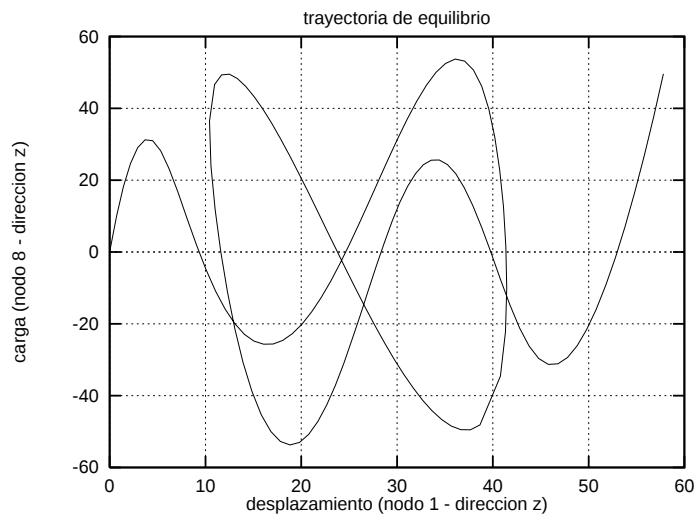
Tabla IV. Nodos bajo control durante el análisis – estructura articulada espacial

Estructura articulada 3D en forma de cúpula

En este ejemplo se presenta una estructura articulada espacial en forma de cúpula. Sus características geométricas y propiedades mecánicas se muestran en la Figura 9a. Dicha estructura está sometida a una serie de fuerzas puntuales verticales actuando sobre los nodos 8–13, posee 25 nodos y 60 elementos de barra articulada 3D. Dicha estructura se apoya en 6 vínculos de tercer género. El estudio del comportamiento postcrítico de esta estructura se encuentra detallado en la referencia 19.



a)



b)

Figura 9. Estructura articulada 3D en forma de cúpula: a) características geométricas y propiedades mecánicas, b) trayectoria de equilibrio postcrítica

Para obtener la trayectoria de equilibrio (curva $\lambda_{z11} \times w_1$) que se muestra en la Figura 9b se ha utilizado el método de control v variable del desplazamiento cuyas características se detallan en el Cuadro 6. Nótese que dicha trayectoria presenta varios puntos límite y de retorno, resultado del comportamiento postcrítico fuertemente no lineal.

- i. Tolerancia para la convergencia: $TOL = 10^{-5}$
- ii. Ecuación de coacción: Control variable del desplazamiento derivado de la restricción cilíndrica
- iii. Longitud del arco: $ARC=1,0$
 $ARCMAX=5,0$
 $ARCMIN=0,01$
- iv. Número de incrementos de carga: $NLOAD = 133$
- v. Promedio de iteraciones por paso ($NITER/NLOAD$): $405/133 = 3,05$

Cuadro 6. Características del método de control de la respuesta – estructura articulada 3D en forma de cúpula

En la Tabla V se especifican los grados de libertad que han sido automáticamente controlados para la obtención de la trayectoria de equilibrio presentada en la Figura 9b. Nótese que casi la totalidad de los nodos libres de la estructura han sido controlados.

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.
1 - 3	nodo 11	z	54	nodo 5	z	94	nodo 9	z
4 - 8	nodo 8	z	55	nodo 7	z	95 - 96	nodo 12	z
9	nodo 11	z	56	nodo 4	z	97	nodo 10	z
10	nodo 10	z	57	nodo 2	z	98	nodo 9	z
11	nodo 12	z	58	nodo 7	z	99 - 100	nodo 10	z
12 - 14	nodo 3	z	59	nodo 4	z	101	nodo 13	z
15	nodo 6	z	60	nodo 7	z	102	nodo 9	z
16	nodo 3	z	61	nodo 5	z	103	nodo 12	z
17 - 19	nodo 6	z	62	nodo 7	z	104	nodo 10	z
20 - 22	nodo 3	z	63	nodo 5	z	105	nodo 11	z
23	nodo 6	z	64 - 65	nodo 3	z	106	nodo 8	z
24 - 26	nodo 3	z	66	nodo 11	z	107	nodo 11	z
27	nodo 6	z	67	nodo 8	z	108 - 109	nodo 8	z
28 - 29	nodo 3	z	68	nodo 11	z	110 - 111	nodo 11	z
30	nodo 6	z	69	nodo 8	z	112	nodo 12	z
31 - 32	nodo 3	z	70 - 71	nodo 11	z	113 - 114	nodo 9	z
33 - 34	nodo 6	z	72	nodo 8	z	115 - 116	nodo 12	z
35 - 38	nodo 3	z	73	nodo 11	z	117 - 120	nodo 3	z
39 - 40	nodo 13	z	74 - 76	nodo 8	z	121	nodo 6	z
41	nodo 19	z	77 - 80	nodo 11	z	122 - 124	nodo 3	z
42	nodo 16	z	81	nodo 19	z	125	nodo 6	z
43	nodo 19	z	82	nodo 16	z	126	nodo 3	z
44	nodo 16	z	83 - 85	nodo 19	z	127	nodo 6	z
45 - 46	nodo 19	z	86 - 88	nodo 16	z	128	nodo 3	z
47 - 49	nodo 16	z	89	nodo 5	z	129 - 130	nodo 6	z
50	nodo 19	z	90	nodo 2	z	131 - 133	nodo 3	z
51	nodo 1	z	91	nodo 7	z			
52	nodo 4	z	92	nodo 2	z			
53	nodo 7	z	93	nodo 10	z			

Tabla V. Nodos bajo control durante el análisis – estructura articulada 3D en forma de cúpula

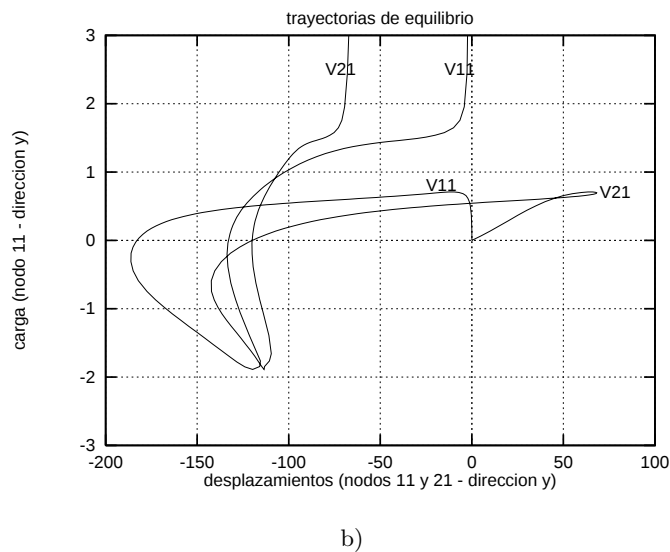
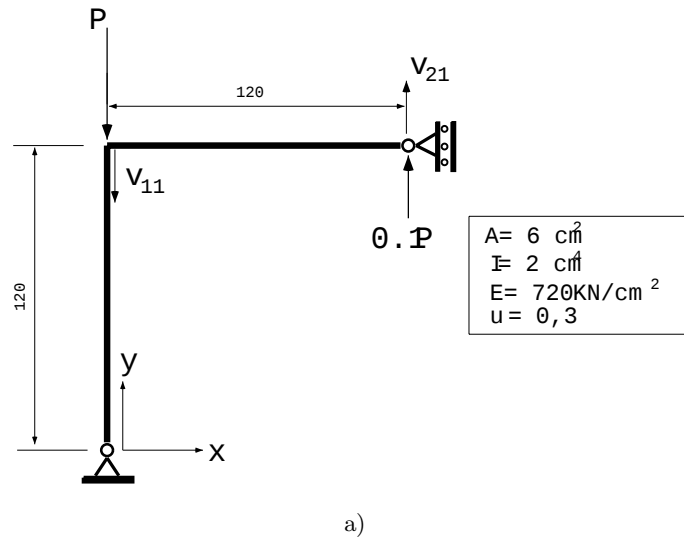


Figura 10. Pórtico de Lee: a) características geométricas y propiedades mecánicas, b) trayectorias de equilibrio postcríticas

Pórtico de Lee

Este ejemplo consiste en la unión de una viga y con una columna formando entre sí un ángulo recto. Una de sus extremidades está apoyada a través de un vínculo de segundo género, mientras que la otra extremidad se apoya a través de un vínculo de primer género. Las características geométricas y propiedades físicas se muestran en la Figura 10a. Dicho ejemplo se encuentra descrito en las referencias 6 y 7. El pórtico ha sido discretizado con 20 elementos de viga de Timoshenko C^0 . La formulación de dicho elemento se encuentra detallada en la referencia 4. La inestabilidad del equilibrio, para este caso, ocurre después que la estructura sufre grandes desplazamientos conforme se muestra en la Figura 10b. La estructura pierde su capacidad portante en el punto A. La respuesta en la fase postcrítica se caracteriza por un *rebote hacia atrás* con la presencia de un *lazo* conforme se observa en la Figura 10b. Para obtener la respuesta de la estructura se ha utilizado el método de control

variable del desplazamiento cuyas características se detallan en el Cuadro 7. En la Tabla VI se muestran los grados de libertad que han sido automáticamente controlados a lo largo del proceso de carga. En dicha Tabla se puede observar que el 65 % de los nodos de la malla han sido controlados.

- i. Tolerancia para la convergencia: $TOL = 10^{-5}$
- ii. Ecuación de coacción: Control variable del desplazamiento derivado de la restricción cilíndrica
- iii. Longitud del arco: $ARC=5$
 $ARCMAX=20$
 $ARCMIN=0,5$
- iv. Número de incrementos de carga: $NLOAD = 140$
- v. Promedio de iteraciones por paso ($NITER/NLOAD$):
 $\Rightarrow 679/127=5,35$ con 13 cortes automáticos

Cuadro 7. Características del método de control de la respuesta – pórtico de Lee

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.
1 - 12	nodo 21	y	69 - 75	nodo 14	y
13 - 14	nodo 9	x	76 - 78	nodo 13	y
15 - 17	nodo 10	x	79	nodo 14	y
18 - 19	nodo 11	x	80 - 81	nodo 17	y
20 - 23	nodo 9	y	82 - 86	nodo 11	y
24	nodo 12	y	87 - 88	nodo 9	x
25 - 28	nodo 13	y	89	nodo 8	x
29 - 30	nodo 14	y	90 - 98	nodo 7	x
31 - 43	nodo 21	y	99 - 106	nodo 6	x
44 - 48	nodo 17	y	107 - 114	nodo 8	y
49 - 56	nodo 18	y	115 - 117	nodo 7	y
57 - 59	nodo 19	y	118 - 130	nodo 11	y
60 - 61	nodo 20	y	131 - 136	nodo 6	x
62 - 64	nodo 14	x	137 - 138	nodo 7	x
65	nodo 12	y	139 - 140	nodo 16	y
66 - 68	nodo 13	y			

Tabla VI. Nodos bajo control durante el análisis — pórtico de Lee

Arco circular de gran altura biapoyado

Se trata de un arco de gran altura con directriz circular, sometido a la acción de una fuerza vertical puntual actuando en la clave. Sus extremos se encuentran simplemente apoyados. En la Figura 11a se describen las características geométricas del arco y sus propiedades mecánicas. El arco ha sido discretizado con 20 elementos de viga de Timoshenko C^0 . La formulación de dicho elemento se encuentra detallada en la referencia 4.

El comportamiento postcrítico del arco presenta varios lazos (*loopings*) en el rango de desplazamiento $[0;800]$, como se muestra en la Figura 11b. Para dicha respuesta se ha utilizado el método de control variable del desplazamiento cuyas características se detallan en el Cuadro 8.

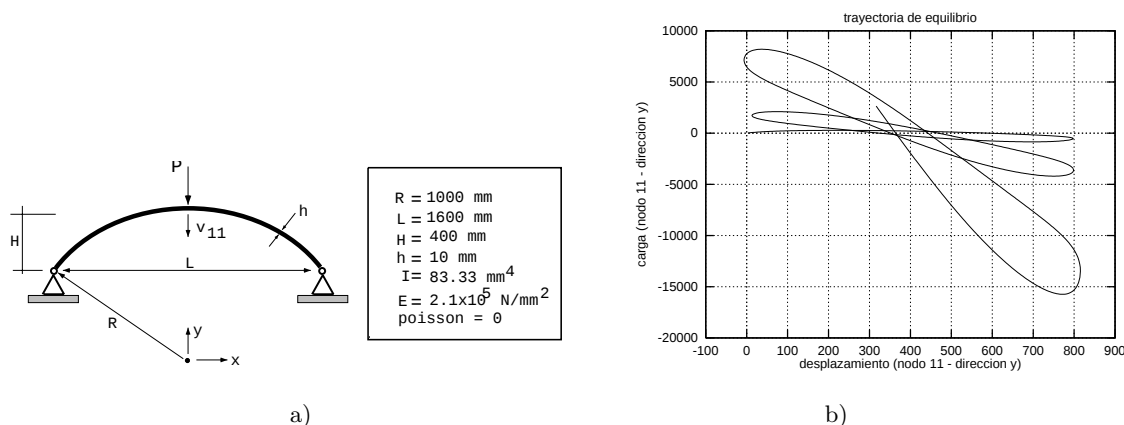


Figura 11. Arco circular de gran altura biapoyado: a) características geométricas y propiedades mecánicas, b) trayectorias de equilibrio postcríticas

- | |
|---|
| <p>i. Tolerancia para la convergencia: $\text{TOL} = 10^{-5}$</p> <p>ii. Ecuación de coacción: Control variable del desplazamiento derivado de la restricción cilíndrica</p> <p>iii. Longitud del arco: $\text{ARC}=3,15$
 $\text{ARCMAX}=15$
 $\text{ARCMIN}=0,1$</p> <p>iv. Número de incrementos de carga: $\text{NLOAD} = 1500$</p> <p>v. Promedio de iteraciones por paso ($\text{NITER}/\text{NLOAD}$):
 $\Rightarrow 3529/1499=2,35$ con 1 corte automático</p> |
|---|

Cuadro 8. Características del método de control de la respuesta – arco circular de gran altura biapoyado

En las Tablas VIIa, VIIb y VIIc se muestran los grados de libertad que han sido automáticamente controlados a lo largo del proceso de carga. En dichas tablas se puede observar que el 52,5 % de los nodos de la malla han sido controlados. Nótese en las mismas tablas que sólo los nodos ubicados en la parte central (del nodo 6 hasta el 16) fueran controlados y que sobre los nodos 10, 11 y 12 ha recaído la mayor incidencia del control automático.

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.
1 - 184	nodo 11	y	454	nodo 12	y	740	nodo 12	y
185	nodo 10	y	455	nodo 10	y	741	nodo 10	y
186	nodo 12	y	456 - 457	nodo 12	y	742	nodo 12	y
187	nodo 10	y	458	nodo 10	y	743	nodo 10	y
188	nodo 12	y	459	nodo 12	y	744	nodo 12	y
189 - 190	nodo 10	y	460 - 462	nodo 10	y	745 - 748	nodo 13	y
191 - 193	nodo 12	y	463	nodo 12	y	749 - 752	nodo 9	y
194	nodo 13	y	464	nodo 10	y	753 - 754	nodo 13	y
195 - 197	nodo 9	y	465	nodo 12	y	755 - 759	nodo 9	y
198	nodo 13	y	466 - 468	nodo 9	y	760 - 765	nodo 13	y
199	nodo 9	y	469 - 479	nodo 13	y	766	nodo 9	y
200	nodo 13	y	480	nodo 9	y	767 - 768	nodo 13	y
201 - 203	nodo 9	y	481 - 483	nodo 13	y	769	nodo 9	y
204 - 207	nodo 13	y	484	nodo 9	y	770	nodo 13	y
208	nodo 14	y	485	nodo 13	y	771 - 773	nodo 9	y
209 - 211	nodo 8	y	486 - 487	nodo 9	y	774 - 775	nodo 13	y
212	nodo 14	y	488 - 493	nodo 13	y	776	nodo 9	y
213	nodo 8	y	494	nodo 9	y	777 - 780	nodo 13	y
214	nodo 14	y	495 - 496	nodo 13	y	781 - 782	nodo 9	y
215 - 217	nodo 8	y	497	nodo 9	y	783 - 785	nodo 13	y
218 - 220	nodo 14	y	498	nodo 13	y	786 - 787	nodo 9	y
221	nodo 8	y	499	nodo 8	y	788	nodo 13	y
222	nodo 14	y	500 - 503	nodo 14	y	789	nodo 9	y
223 - 224	nodo 8	y	504 - 507	nodo 8	y	790 - 791	nodo 13	y
225 - 227	nodo 15	y	508	nodo 14	y	792 - 793	nodo 9	y
228	nodo 7	y	509 - 510	nodo 8	y	794	nodo 13	y

Tabla VIIa. Nodos bajo control durante el análisis – arco circular de gran altura biapoyado

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.
229 - 231	nodo 15	y	511 - 514	nodo 14	y	795	nodo 9	y
232 - 235	nodo 7	y	515 - 517	nodo 8	y	796 - 800	nodo 13	y
236 - 237	nodo 15	y	518	nodo 14	y	801 - 802	nodo 9	y
238	nodo 7	y	519 - 520	nodo 8	y	803	nodo 13	y
239	nodo 15	y	521 - 522	nodo 14	y	804 - 806	nodo 9	y
240	nodo 7	y	523 - 524	nodo 8	y	807 - 988	nodo 11	y
241	nodo 15	y	525	nodo 14	y	989	nodo 12	y
242	nodo 7	y	526	nodo 8	y	990 - 992	nodo 10	y
243	nodo 15	y	527 - 528	nodo 14	y	993 - 994	nodo 12	y
244 - 245	nodo 7	y	529	nodo 8	y	995	nodo 10	y
246 - 247	nodo 15	y	530	nodo 14	y	996	nodo 12	y
248	nodo 7	y	531	nodo 8	y	997	nodo 10	y
249	nodo 6	y	532	nodo 14	y	998	nodo 12	y
250	nodo 16	y	533 - 536	nodo 8	y	999 - 1001	nodo 10	y
251	nodo 6	y	537 - 540	nodo 14	y	1002	nodo 12	y
252	nodo 16	y	541 - 543	nodo 8	y	1003 - 1004	nodo 10	y
253	nodo 6	y	544 - 716	nodo 11	y	1005 - 1006	nodo 12	y
254 - 255	nodo 16	y	717 - 718	nodo 10	y	1007	nodo 10	y
256 - 258	nodo 6	y	719	nodo 12	y	1008	nodo 12	y
259	nodo 16	y	720	nodo 10	y	1009	nodo 10	y
260 - 263	nodo 6	y	721	nodo 12	y	1010	nodo 12	y
264	nodo 16	y	722 - 723	nodo 10	y	1011 - 1013	nodo 10	y
265 - 266	nodo 6	y	724	nodo 12	y	1014 - 1015	nodo 12	y
267 - 268	nodo 16	y	725	nodo 10	y	1016 - 1019	nodo 10	y
269 - 273	nodo 6	y	726 - 730	nodo 12	y	1020 - 1022	nodo 12	y
274 - 276	nodo 16	y	731	nodo 10	y	1023 - 1027	nodo 10	y

Tabla VIIb. Nodos bajo control durante el análisis – arco circular de gran altura biapoyado

Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.	Pasos de carga	Nodo bajo control	Dir.
277	nodo 6	y	732	nodo 12	y	1028	nodo 12	y
278 - 448	nodo 11	y	733	nodo 10	y	1029	nodo 10	y
449	nodo 12	y	734 - 735	nodo 12	y	1030	nodo 12	y
450	nodo 10	y	736	nodo 10	y	1031	nodo 10	y
451	nodo 12	y	737	nodo 12	y	1032 - 1036	nodo 13	y
452 - 453	nodo 10	y	738 - 739	nodo 10	y	1037	nodo 9	y
1038	nodo 13	y	1069	nodo 13	y	1299 - 1301	nodo 10	y
1039	nodo 9	y	1070 - 1072	nodo 9	y	1302	nodo 12	y
1040	nodo 13	y	1073	nodo 13	y	1303 - 1307	nodo 10	y
1041 - 1042	nodo 9	y	1074 - 1269	nodo 11	y	1308 - 1310	nodo 12	y
1043	nodo 13	y	1270	nodo 10	y	1311 - 1313	nodo 10	y
1044	nodo 9	y	1271 - 1272	nodo 12	y	1314 - 1317	nodo 12	y
1045	nodo 13	y	1273	nodo 10	y	1318	nodo 10	y
1046	nodo 9	y	1274	nodo 12	y	1319 - 1322	nodo 12	y
1047 - 1048	nodo 13	y	1275	nodo 10	y	1323	nodo 10	y
1049 - 1050	nodo 9	y	1276	nodo 12	y	1324 - 1326	nodo 12	y
1051 - 1052	nodo 13	y	1277	nodo 10	y	1327 - 1330	nodo 9	y
1053	nodo 9	y	1278	nodo 12	y	1331	nodo 13	y
1054 - 1056	nodo 13	y	1279	nodo 10	y	1332 - 1335	nodo 9	y
1057 - 1059	nodo 9	y	1280 - 1282	nodo 12	y	1336	nodo 13	y
1060	nodo 13	y	1283 - 1285	nodo 10	y	1337	nodo 9	y
1061 - 1062	nodo 9	y	1286 - 1288	nodo 12	y	1338	nodo 13	y
1063	nodo 13	y	1289 - 1291	nodo 10	y	1339 - 1341	nodo 9	y
1064	nodo 9	y	1292 - 1293	nodo 12	y	1342	nodo 13	y
1065	nodo 13	y	1294 - 1297	nodo 10	y	1343 - 1500	nodo 11	y
1066 - 1068	nodo 9	y	1298	nodo 12	y			

Tabla VIIc. Nodos bajo control durante el análisis – arco circular de gran altura biapoyado

CONCLUSIONES

Para superar las limitaciones del método de control del desplazamiento estándar en la obtención de respuestas estructurales que presentan *snap-back*, *returning points* y *loopings* se ha presentado un nuevo método de continuación de la respuesta. Dentro de la técnica numérica de control de la respuesta se ha demostrado que el método aquí propuesto es un caso particular de las ecuaciones de coacción cuyo proceso de iteración, en la fase correctora, se da en *hiperplanos*¹¹. La elección de la componente de mayor valor absoluto del vector de incremento de desplazamiento, en la fase predictora, se ha mostrado muy efectivo en la obtención de respuestas estructurales fuertemente no lineales de diferentes tipologías estructurales.

REFERENCIAS

- 1 M.A. Crisfield, "A fast incremental/iterative solution procedure that handles snap through", *Computers & Structures*, Vol. **13**, pp. 55–62, (1981).
- 2 M.A. Crisfield, "*Non-linear finite element analysis of solid and structures Volume 1: essentials*", John Wiley & Sons, New York, (1991).
- 3 M. Fafard y B. Massicotte, "Geometrical interpretation of the arc-length method", *Computers & Structures*, Vol. **46**, N° 4, pp. 603–615, (1993).
- 4 C. Felippa, L.A. Crivelli y B. Haugen, "A survey of the core-congruent formulation for geometrically non-linear TL finite elements", *Archives of Comp. Meth. in Engng.*, Vol. **1**, N° 1, pp. 1–48, (1994).
- 5 I. Fried, "Orthogonal trajectory accession to the non-linear equilibrium curve", *Comput. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **47**, pp. 283–297, (1984).
- 6 F. Fujii, "Scheme for elasticas with snap-back and looping", *J. Engng. Mech. Div., ASCE*, Vol. **115**, N° 10, pp. 2166–2181, (1989).
- 7 F. Fujii, K.K. Choong y S.X. Gong, "Variable displacement control to overcome turning points of non-linear elastic frames", *Computers & Structures*, Vol. **44**, N° 1/2, pp. 133–136, (1992).
- 8 R.W. Ogden, *Non-linear elastic deformations*, Ellis Horwood, Chichester, (1984).
- 9 E. Ramm, "Strategies for tracing the non-linear response near limit points", in *Non-linear Finite Element Analysis in Structural Mechanics* W. Wunderlich, E. Stein y K.J. Bathe (Eds.), pp. 63–89, Springer-Verlag, (1981).
- 10 E. Ricks, "The application of Newton's method to the problem of elastic stability", *J. Appl. Mech.*, Vol. **39**, pp. 1060–1066, (1972).
- 11 E. Ricks, "Some computational aspects of the stability analysis of non-linear structures", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **47**, pp. 219–259, (1984a).
- 12 E. Ricks, "Bifurcation and stability, A numerical approach", in *Innovative Methods for Non-linear Problems*, W. K. Liu, T. Belytschko y K.C. Park, (Eds.), Pineridge Press, pp. 103–133, (1984b).
- 13 K.H. Schweizerhof y P. Wriggers, "Consistent linearization for path following methods in non-linear FE analysis", *Com. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **59**, pp. 261–279, (1986).
- 14 J.C. Simó, P. Wriggers, K.H. Schweizerhof y R.L. Taylor, "Finite deformation post-buckling analysis involving inelasticity and contact constraints", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **23**, pp. 779–800, (1986).
- 15 J.C. Simó y T.R.J. Hughes, "*Computational inelasticity*", Springer-Verlag, (1998).
- 16 E. Stein, A. Berg y W. Wagner, "Different levels of non-linear shell theory in finite element stability analysis", in *Buckling of Shells*, E. Ramm (Ed.), Springer-Verlag, (1982).
- 17 Y.B. Yang y M.S. Shieh, "Solution method for non-linear problems with multiple critical points", *AIAA J.*, Vol. **28**, N° 12, pp. 2110–2116, (1990).
- 18 Y.B. Yang y S.R. Kuo, "*Theory and analysis of non-linear framed structures*", Prentice Hall, New York.
- 19 K.K. Choong y Y. Hangai, "Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures", *Bulletin of IASS*, Vol. bf 34, N° 112, pp. 871–879, (1993).