

Análisis multifractal de procesos autosimilares: imágenes de satélite e inestabilidades baroclínicas

José M. Redondo, Joan Grau*, Alexei Platonov y Germán Garzón

Universitat Politècnica de Catalunya
Departamento de Física Aplicada

* Departamento Mecánica de fluidos, EUETIB-CEIB

Campus Nord UPC, Modul B5, E-08034, Barcelona, España

e-mail: redondo@fa.upc.edu; Joan.grau@upc.edu; alexei@fa.upc.edu; garzon@fa.upc.edu

Resumen

La interacción entre escalas múltiples en distintos fenómenos naturales, sobre todo en flujos turbulentos, genera estructuras fractales. El análisis multifractal es una herramienta que nos permite evaluar cuantitativamente la topología de distintas propiedades físicas de los fenómenos observados e incluso predecir algunos aspectos dinámicos relacionados con la mezcla y la difusión. En este trabajo se muestra como el método de conteo de cajas (*Box-Counting*) se utiliza para calcular la dimensión multifractal de diferentes imágenes de satélites y de este modo distinguir distintos fenómenos como la estratificación en nubes de distintos tipos en la Atmósfera, el tiempo de residencia de derrames de crudo o filamentos naturales en la superficie del Océano. También se presentan algunos resultados del método en experimentos y simulaciones numéricas para las inestabilidades de Rayleigh-Taylor y de Richtmyer-Meshkov. Estas dos inestabilidades hidrodinámicas son parte fundamental en el análisis de la Fusión por Confinamiento Inercial (ICF), pues son las principales responsables del proceso de mezcla. Se usa un modelo turbulento Large Eddy Simulation (LES) para resolver las ecuaciones de Navier-Stokes y estudiar el proceso de mezcla autosimilar. Los resultados se han parametrizado en función del número de Atwood. Se compara el avance del frente en los experimentos numéricos con medidas de laboratorio, mostrando la influencia de la malla, las perturbaciones iniciales y la bidimensionalidad del modelo. Las curvas multifractales obtenidas son un reflejo de las condiciones de fluido y nos permiten una mejor comprensión del flujo analizado y de la mezcla.

Palabras claves: *análisis multifractal, turbulencia medioambiental, número de Atwood, frente de mezcla, mezcla turbulenta, Large Eddy Simulation.*

MULTIFRACTAL ANALYSIS OF SELF-SIMILAR PROCESSES: SATELLITE IMAGES AND BAROCLINIC INSTABILITIES

Summary

The interaction between multiple scales in nature and mainly in turbulent flows produces fractals or multi-fractal structures. We use multi-fractal analysis to investigate the scales and influence of stratification in different types of clouds and well as the residence time in oil spills and slicks in the ocean surface. This method is also applied to experiments and numerical simulations of unstable mixing fronts driven by Rayleigh-Taylor and Richtmyer-Meshkov Instabilities. These hydrodynamic instabilities are a fundamental element in the analysis of Inertial Confinement Fusion since they are the main causes of mixing and regulate the fusion process. A Large Eddy Simulation turbulent model is used in order to solve the Navier-Stokes equations and to study the self-similar mixing process. The results are parameterized in terms of the Atwood number. The advance of the mixing front in the numerical experiments is compared to several laboratory measurements, showing the influence of the mesh size, the initial perturbations and the two-dimensionality of the model. The multi-fractal analysis reflects the flow conditions and allows us to understand further the mixing processes.

Keywords: *multifractal analysis, environmental turbulence, slicks and spills, Atwood number, mixing front, turbulent mixing, Large Eddy Simulation.*

INTRODUCCIÓN

En la Naturaleza se pueden observar frecuentemente estructuras complejas como, por ejemplo, las nubes, campos de hielo, redes hidrográficas, campos de oleaje y remolinos turbulentos en el océano. Algunas propiedades de estas estructuras se repiten a distintas escalas formando estructuras fractales. En estos flujos complejos, donde el número de Reynolds es alto, debido a la no-linealidad de las ecuaciones de Navier-Stokes se producen cascadas de energía y enstrofia que controlan la apariencia fractal. Las cascadas se detectan tanto en los campos de velocidad o de propagación de los frentes como en la autosimilitud de los campos escalares relacionados (temperatura, densidad, etc.). La relación entre las características geométricas de las imágenes del flujo y su dinámica es importante para poder entender los procesos de transporte y mezcla. De forma práctica, es necesario identificar el conjunto que se quiere analizar, que puede ser un campo de píxeles en una imagen de un fluido destacando sus niveles de intensidad de gris que nos interesan. El análisis multifractal permite calcular la dimensión fractal para estos distintos niveles de gris de estructuras planas y de este modo definir si dichas estructuras son fractales, en que rango y como se relacionan los distintos conjuntos de valores entre si.

En el caso de fenómenos turbulentos, el hecho de que se desarrolle una cascada de energía entre las escalas donde domina la producción y las escalas donde actúa la disipación de energía (o enstrofia), ocurre de forma distinta si el flujo dominante es tridimensional o bidimensional. En este último caso también se produce una cascada inversa de energía, que es dominante.

No tiene demasiada importancia cuál es el proceso físico que genera las escalas energéticas del flujo. De todas formas existe un rango, si el número de Reynolds es alto, donde los procesos de generación y de disipación de la energía están en equilibrio según la teoría de Kolmogorov¹. Para el campo de velocidades es posible relacionar el exponente del espectro de energía β y la dimensión fractal D del campo escalar asociado con la imagen. El proceso de advección del campo de velocidades turbulento facilita la detección de algunas propiedades escalares en una imagen sobre todo si el escalar, como temperatura, densidad o concentración de tensioactivo es advechado por la velocidad turbulenta.

A partir de la distribución espacial del escalar, podemos medir en una cierta área una señal espacial compleja que contiene distintas escalas de forma que su relación con el número de onda k es de forma potencial y suponemos que tiene la misma pendiente que el espectro de Energía²:

$$S(k) = k^{-\beta} \quad (1)$$

Si la potencia β es cero, la señal es un producto del ruido; si es 2, significa que tiene su origen asociado con un movimiento caótico de tipo Browniano. Los fenómenos de turbulencia 3D se caracterizan por un valor de β igual a 5/3 (subrango inercial). En los procesos turbulentos bidimensionales (2D) el valor de β es mayor (3 ó más).

Si la dependencia es temporal o se puede usar la hipótesis de Taylor $L=UT$, con U la velocidad media y f la frecuencia, de forma que el período $T = 1/f$, entonces la ecuación de la función de densidad espectral también puede expresarse como $S(f) = f^{-\beta}$ o como $S(k) = L^\beta$, donde $k = 2\pi/L$.

Además, si $V(L)$ es una varianza, calculada a partir de las diferencias de la señal o de las formas del campo escalar observado, siendo E la dimensión Euclidiana y D la dimensión Fractal³, entonces se cumple

$$S(L) \approx LV \approx L^{2H+1} \approx L^{2E+1-2D} \quad (2)$$

donde H es la dimensión de Hausdorff, que tiene también la propiedad de ser codimensión de la dimensión fractal: $H = E - D$. Con esta propiedad podemos obtener una relación

entre el exponente de la función de densidad espectral β y la dimensión Fractal D de la forma

$$\beta = 2E + 1 - 2D \quad (3)$$

Por lo tanto, la dimensión fractal D , en caso de que se cumplan las propiedades mencionadas se puede expresar en función de espectro de la turbulencia como

$$D = E + \frac{1 - \beta}{2} \quad (4)$$

El algoritmo de conteo de cajas usado se describe en detalle en Grau⁴ y lo aplicamos a imágenes de distintos tipos de satélite visibles, infrarrojos y de Radar de Apertura Sintética SAR, así como a experimentos de laboratorio y simulación LES de un frente de mezcla inestable que ocurre cuando existe una aceleración de una zona de un fluido de mayor densidad hacia otra de menor densidad. Si la aceleración ocurre en forma de *shock* la inestabilidad se denomina de Richtmyer-Meshkov y si la aceleración es continua, como en el caso de la gravedad, la inestabilidad se denomina de Rayleigh-Taylor. En ambos casos, la producción de vorticidad Baroclina, de distinto signo según el gradiente de densidad, es importante⁵.

En el proceso de mezcla de reactivos en Fusión por Confinamiento Inercial *ICF* dos inestabilidades hidrodinámicas básicas tienen lugar: la Inestabilidad de Rayleigh-Taylor y la Inestabilidad de Richtmyer-Meshkov. Estas inestabilidades generan turbulencia y tienen lugar en la interfase entre dos fluidos de densidades diferentes sometidos a la acción de una aceleración. La relación entre las dos densidades está adimensionalizada por medio del número de Atwood, definido como

$$A = \frac{\rho_1 - \rho_2}{\rho_1 + \rho_2} \quad (5)$$

La inestabilidad de Rayleigh-Taylor particularmente tiene lugar cuando una aceleración constante está dirigida del líquido más pesado al más ligero, de esta forma el gradiente de presiones es opuesto al gradiente de densidades. En el caso de la inestabilidad de Richtmyer-Meshkov el sistema es desestabilizado por un pulso en la aceleración, presión o simplemente una onda de choque matemáticamente representable mediante una función delta de Dirac.

Un parámetro importante en el análisis de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor es el avance del frente de mezcla, η , que ha demostrado ser una función del número de Atwood⁶, la aceleración del campo gravitacional y el tiempo transcurrido, por medio de la expresión: $\eta = 2cgAt^2$, donde c es una constante experimental, que se discute en el siguiente subapartado.

La inestabilidad de Rayleigh-Taylor puede describirse a través de varias etapas que van desde un crecimiento exponencial inicial hasta la descripción de la mezcla turbulenta. La teoría lineal de la inestabilidad observada por Rayleigh en 1900 fue desarrollada por Taylor en 1950 y ha sido descrita por Chandrasekar⁷. Para que la inestabilidad comience es necesaria la presencia de una perturbación que desencadene la desestabilización del sistema, bien externa o simplemente debida a la no homogeneidad de la interfase entre los dos fluidos. Si la fuente de desestabilización se expresa mediante una onda sinusoidal con longitud de onda λ , ésta sólo será efectiva a partir de un cierto valor, esto es, una longitud de onda crítica λ_c para la cual la inestabilidad es inminente; el valor crítico puede expresarse en términos de la tensión superficial, la aceleración perpendicular al plano de la interfase y la diferencia de densidades mediante la relación:

$$\lambda_c = \left(\frac{\sigma}{g(\Delta\rho)} \right)^{1/2} \quad (6)$$

Existe un valor de longitud de onda λ para el cual la interfase no sólo es inestable sino que el crecimiento de la inestabilidad es máximo; si bien hay varios criterios para definir este valor, uno de los más aceptados es función del número de Atwood, la aceleración normal a la interfase y la viscosidad cinemática media según la expresión

$$\lambda_m \approx 4\pi [\nu^2/gA]^{1/3} \quad (7)$$

a la cual corresponde una razón máxima de crecimiento $n_m = [g\pi A/\lambda_m]^{1/2}$. Otros criterios^{7,8} expresan el crecimiento máximo simplemente como $\lambda_m = \sqrt{3} \lambda$. La primera etapa de la inestabilidad es entonces dependiente de la perturbación inicial, con una longitud de onda mayor o igual a la crítica que desestabiliza el sistema; en esta primera etapa el crecimiento de la inestabilidad es exponencial de acuerdo con la forma lineal de las ecuaciones de los dos fluidos a bajo número de Reynolds. Cuando la amplitud crece hasta un valor de 0.4 a 0.5 veces la longitud de onda asociada a la perturbación inicial se observa que el crecimiento ya no sigue la teoría lineal^{7,8}. En la segunda etapa el crecimiento disminuye y aparecen estructuras de mayor tamaño, particularmente la generación de “globos” o estructuras en forma de setas de fluido ligero y estructuras en forma de filamentos elongados en el fluido más denso intercalados con los globos para números de Atwood grandes (A cercano o mayor que uno), o un sistema de globos interpenetrados para números de Atwood pequeños (A cercano a cero); cuando la inestabilidad adopta la estructura de filamentos y champiñones es común asimismo ver el desarrollo de inestabilidades secundarias adicionales tales como la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz en las partes laterales de los filamentos (ver Figura 1). En cuanto al sistema de globos se mantiene una estructura autosimilar y es fácil apreciar como las estructuras grandes crecen a expensas de las pequeñas y aumentan su velocidad. En la etapa final se presenta la ruptura de las estructuras y la interpenetración de los fluidos degenera en una mezcla turbulenta y el campo de vorticidad se presenta más activo.

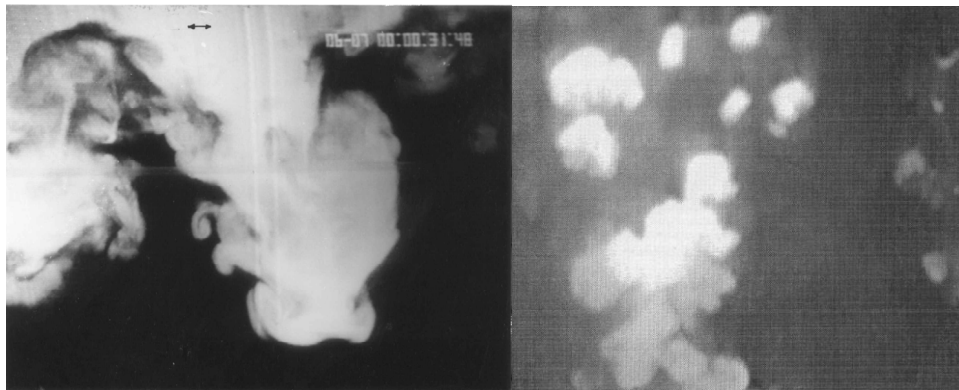


Figura 1. LIF; Vista Frontal (Izquierda), Vista Superior (Derecha)

Un modelo Large Eddy Simulation de FLUENT ha sido utilizado para describir algunos aspectos del proceso de mezcla mediante una serie de experimentos de la evolución de un flujo turbulento e inestable de Rayleigh-Taylor (RT) y de Richtmyer-Meshkov (RM). Varios modelos diferentes que permiten simular el fenómeno de mezcla por inestabilidades de RT y su dependencia con las condiciones iniciales y de contorno es discutido y comparado con los experimentos descritos⁸.

A continuación describimos el método multifractal usado; en el apartado siguiente lo aplicamos a imágenes de nubes en la atmósfera, en el próximo apartado se aplica a la detección de derrames de crudo en la superficie del océano y en el siguiente se investiga la estructura fractal de las inestabilidades de RT y RM, presentando finalmente las conclusiones.

DESCRIPCIÓN DEL MÉTODO NUMÉRICO DE ANÁLISIS MULTIFRACTAL

La llamada dimensión fractal descrita por Mandelbrot⁹ corresponde al concepto de autosimilitud de dimensiones, y puede calcularse de forma sencilla mediante el método de “*Box-Counting*”. El proceso numérico se basa en una malla de cajas de tamaño δ . La cantidad N de estas cajas depende del espacio de la imagen a analizar. Para efectuar la correspondiente caracterización de la dimensión fractal se procede a calcular $N(\delta, I)$ para diferentes escalas; la variación de escala de un paso al siguiente es de $\delta_{i+1} = \delta_i/2$. El valor de la dimensión corresponde a la pendiente de la representación $\log(N(\delta))$ frente a $-\log(\delta)$. Este método se ha implantado en forma automática para los distintos niveles de gris.

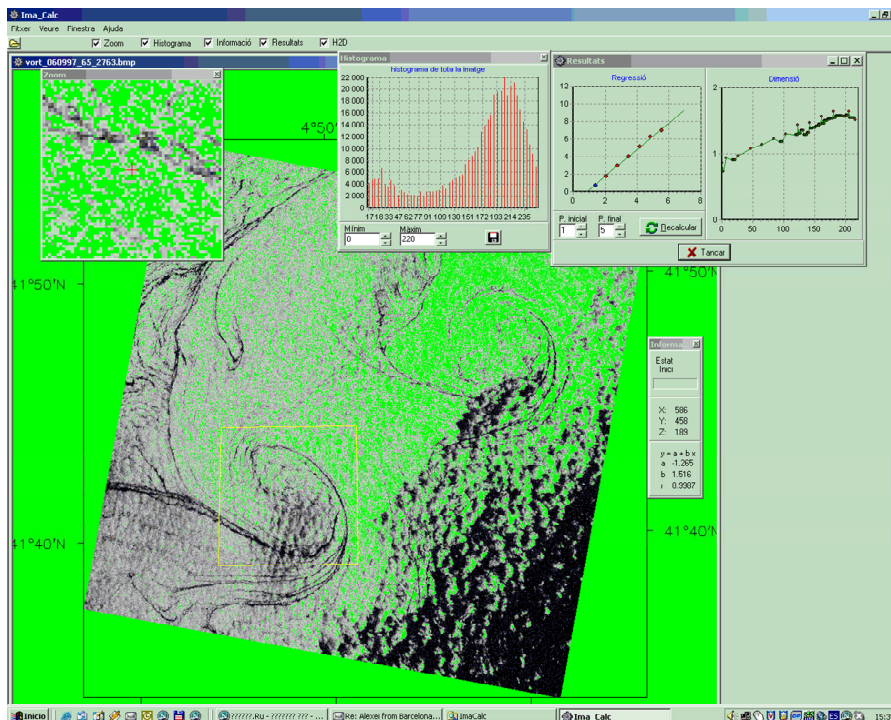


Figura 2. La presentación de algunos resultados del cálculo de la dimensión multifractal y de otras características adicionales aplicadas a una parte de la imagen del SAR de un vórtice oceánico⁴

El ejemplo mostrado en la Figura 2 corresponde a una estructura oceánica de tipo vórtice limitado por una cuadrícula. Se puede observar un valor de la dimensión de menos de 1 para los tonos de gris más oscuros (inicio de la curva) y de 1 a 2 para los tonos de gris menos oscuros. Esta última parte corresponde a fractalidad estructural que contiene los filamentos naturales y células de convección de distintos rangos.

Se necesita una puntualización en la aplicación de esta metodología para matizar el rango de valores de escala utilizables, limitados teóricamente por las dimensiones máximas de la imagen δ_{max} y el tamaño del píxel en el otro extremo δ_0 . En la práctica, el rango de escalas a estudiar se traduce a un intervalo menor, debido a la poca información que se tiene en el caso de δ_i igual o superior a la mitad del lado de la imagen y el límite inferior de δ_i corresponde a un tamaño de varios píxel para evitar una saturación en el cálculo de $N(\delta_i)$. La gran ventaja de esta metodología es el hecho de poderse aplicar de forma sistemática debido a la simplicidad en la creación del recubrimiento de cajas y el

correspondiente recuento. La dimensión fractal se calcula según la siguiente ecuación^{9,10}:

$$D = -\log(N(\delta, I)) / \log(\delta) \quad (8)$$

En primer lugar hay que seleccionar una región a analizar; después escoger los límites de la intensidad de tonos de gris $I_{min} < I < I_{max}$ a utilizar en el proceso de cálculo. El paso siguiente es la selección del incremento de intensidades de cada paso para recorrer todo el intervalo de tonos de gris escogido. La gráfica (Figura 2, arriba, derecha) muestra una secuencia de valores de la dimensión fractal calculadas para cada subintervalo de la intensidad de tonos de gris $D(I)$, lo que determina la característica multifractal de las estructuras seleccionadas en la imagen.

APLICACIONES AL ESTUDIO DE LA CUBIERTA NUBOSA

En el área de la previsión del tiempo, en los estudios de clima es importante saber distinguir distintos tipos de nubes. Es evidente que estas estructuras atmosféricas tienen un carácter completamente fractal^{9,10}. Las imágenes de satélites meteorológicos (como del METEOSAT, por ejemplo) de distintos tipos (visible, infrarrojo IR, etc.) nos dan una información gráfica bidimensional útil sobre las estructuras nubosas que en su lugar puede ser utilizada para el análisis multifractal.

Las imágenes estudiadas (Figuras 4 y 6) corresponden a escenas capturadas por el satélite Meteosat-7 con el receptor PDUS de la Universitat Rovira i Virgili correspondientes a los canales visibles ($0,3-1,05 \mu\text{m}$) e infrarrojo ($10-13,10 \mu\text{m}$). La zona está centrada en la Península Ibérica y tiene un tamaño de 512×512 píxeles, con una resolución espacial para ambos canales de 5km en el nadir (la figura corresponde a la zona de estudio mostrada en la Figura 3).

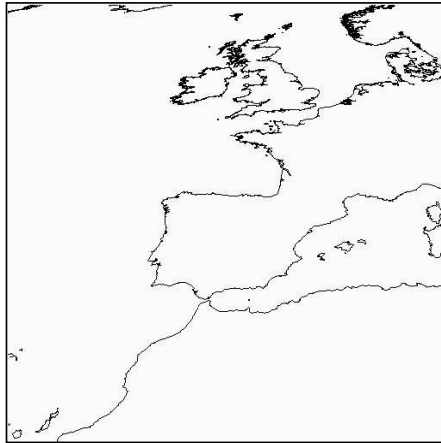


Figura 3. Zona de estudio de las imágenes del METEOSAT

Se han seleccionado dos situaciones diferenciadas que presentan nubes con una estructura cumuloforme (Figura 4) y estratiforme (Figura 6).

El análisis se ha realizado escogiendo el intervalo de niveles de gris comprendidos entre 10 y 200 y unos subintervalos con un incremento de 10 NDG. La zona de estudio para cada caso es la observada en la correspondiente figura. Los resultados obtenidos se pueden observar en la Figura 5 y la Figura 7, graficándose los valores de la dimensión fractal con una correlación mayor que 0,99.

En la Figura 4 un análisis visual denota una estructura cumuloforme, apreciándose tanto en lo visible como en el IR-Térmico. Las correspondientes caracterizaciones multifractales

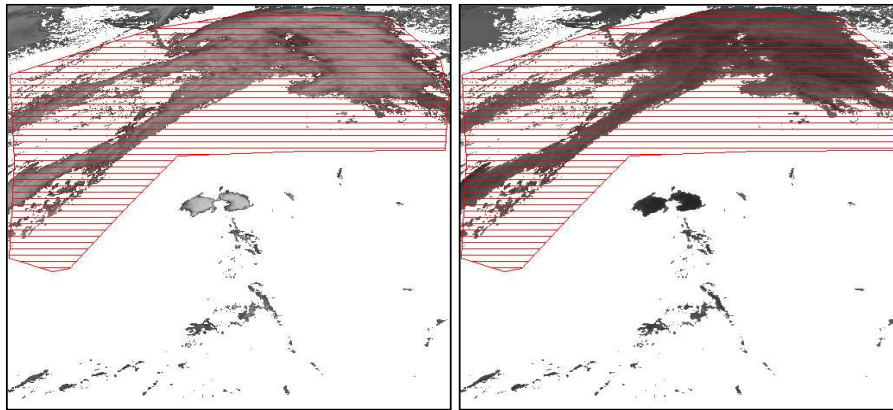


Figura 4. Imagen visible e IR de nubes cumuloformes. Aparece resaltada la zona de cálculo

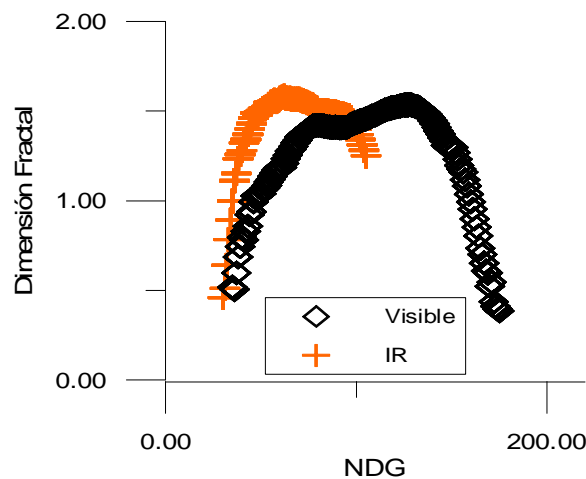


Figura 5. Representación multifractal para las imágenes de la Figura 4 a.

nos presentan un máximo y un valor promedio no muy diferenciados, dando una idea de una cierta homogeneidad en la distribución de las diferentes dimensiones observadas. Se observa con estos valores una estructura compleja, mostrando la existencia de una estructura tridimensional compleja. En la Figura 6, a diferencia de la anterior, se observa una estructura estratiforme, básicamente en la imagen del IR-Térmico. Esta estructura se caracteriza por unas dimensiones mucho más elevadas para un rango de NDG característico de la estructura y otros valores más bajos. Resultado de esta abrupta variación es la obtención de un máximo muy diferente del promedio. En este caso la estructura tridimensional de la nube es menos importante que la componente bidimensional. Las respectivas caracterizaciones multifractales en las Figuras 5 y 7 permiten apreciar los distintos comportamientos y su diferencia entre las imágenes visibles e infrarroja. La interpretación no es fácil, ya que las diferencias en dimensión fractal se corresponderían a variaciones locales de los espectros de energía turbulenta. La estratificación estable o inestable produce cascadas turbulentas de tipo 2D (estable) o 3D (inestable o convectiva), que son dominantes a distinta altura, que está caracterizada por los distintos valores de IR. Es importante comparar los resultados con experimentos de laboratorio o simulaciones tal como las descritas en el penúltimo apartado, para una mejor interpretación de los procesos turbulentos.

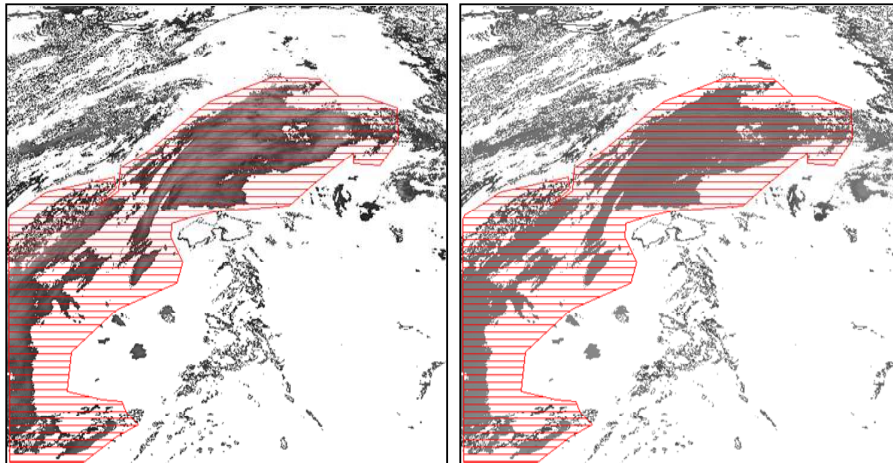


Figura 6. Imagen visible y IR de nubes estratiformes. Aparece resaltada la zona de cálculo

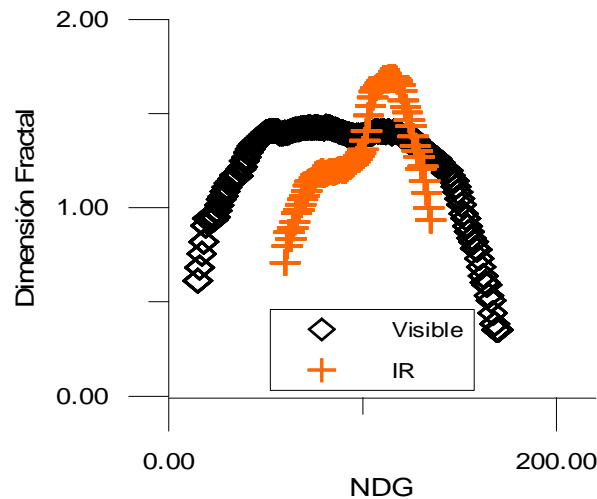


Figura 7. Representación multifractal para las imágenes de la Figura 6

APLICACIÓN AL OCÉANO

Las imágenes de satélites muestran una inmensa variedad de los procesos dinámicos y complejos en mesoescala en la superficie del mar que pueden ser detectados debido al cambio espacial de distintas propiedades de masas de agua como es por ejemplo la temperatura y rugosidad superficial. La imagen SAR de la Figura 8 muestra un campo dinámico marino de filamentos naturales, vórtices y células de convección. Estas estructuras marinas pueden ser detectadas en la imagen mediante la rugosidad distinta de pequeñas escala asociada con el efecto de Langmuir y las propiedades de la dinámica *in situ*.

El espectro de la energía cinética en una determinada región del mar puede ser numéricamente evaluado mediante el cálculo de la dimensión fractal de las estructuras superficiales que se detectan en las imágenes de satélites^{11,12}. Analizando los datos específicos es posible calcular la distribución espacial en mesoescala de los coeficientes horizontales de difusión

turbulenta $K(x, y)$, cuyo conocimiento “in situ” es imprescindible en los casos de implementación de modelos numéricos de la dinámica de cualquiera zona marítima. Estos coeficientes en función del parámetro de Coriolis f pueden ser definidos mediante la ecuación¹¹:

$$K(x, y) = l(x, y)^2 f \quad (9)$$

donde $l(x, y)$ es la escala integral espacial definida como

$$l(x, y) = \int R(x) dx \quad (10)$$

siendo $R(x)$ la correlación espacial de las intensidades de la imagen SAR; $f = 2\Omega \sin\varphi$, siendo Ω la velocidad angular de rotación de la Tierra y φ la latitud. Normalmente los valores $K(x, y)$ se obtienen de modo empírico según la relación de Einstein:

$$K = \frac{1}{2} \frac{dl^2}{dt} = l \frac{dl}{dt}, \quad (11)$$

realizando las mediciones de velocidades de difusión de colorantes o indicadores *in situ*.

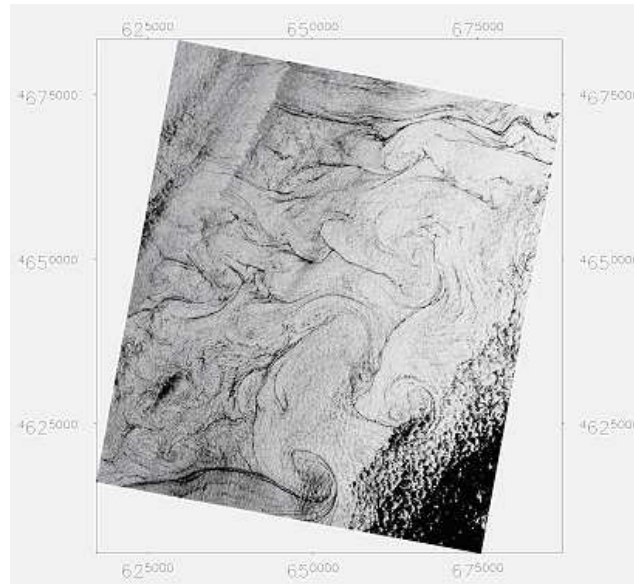


Figura 8. Imagen del SAR del satélite ERS-2 del 06.09.97 (10h30m UTC) de la zona del Mediterráneo Noroccidental frente a Marseille. Se observan los vórtices y filamentos dinámicos del tamaño de decenas de kilómetros, del orden del radio de deformación de Rossby

La Figura 9 muestra ejemplos de evaluación multifractal de distintas estructuras en la superficie del mar detectadas con ayuda de las imágenes del SAR. En las dos primeras, a) y b), se analizan unos derrames de crudo en distintos estados de la difusión en la superficie del mar. En la imagen a) se muestra un derrame reciente: la gráfica muestra que su dimensión fractal está cerca de 1, lo que significa que las estructuras multifractales asociadas con la difusión no se han formado todavía; en la imagen b), el derrame ya es bastante difuso y la gráfica muestra una curva de la distribución multifractal de tonos de gris de 1 a 1,25, lo que corresponde ya a un proceso desarrollado de la difusión. En la imagen c) de la misma figura se ve un derrame casi completamente difundido y que posee todas las características multifractales en todos los rangos de tonos de gris: la curva de la gráfica es casi una parábola que corresponde a una típica distribución multifractal para todas las escalas y niveles de gris¹³.

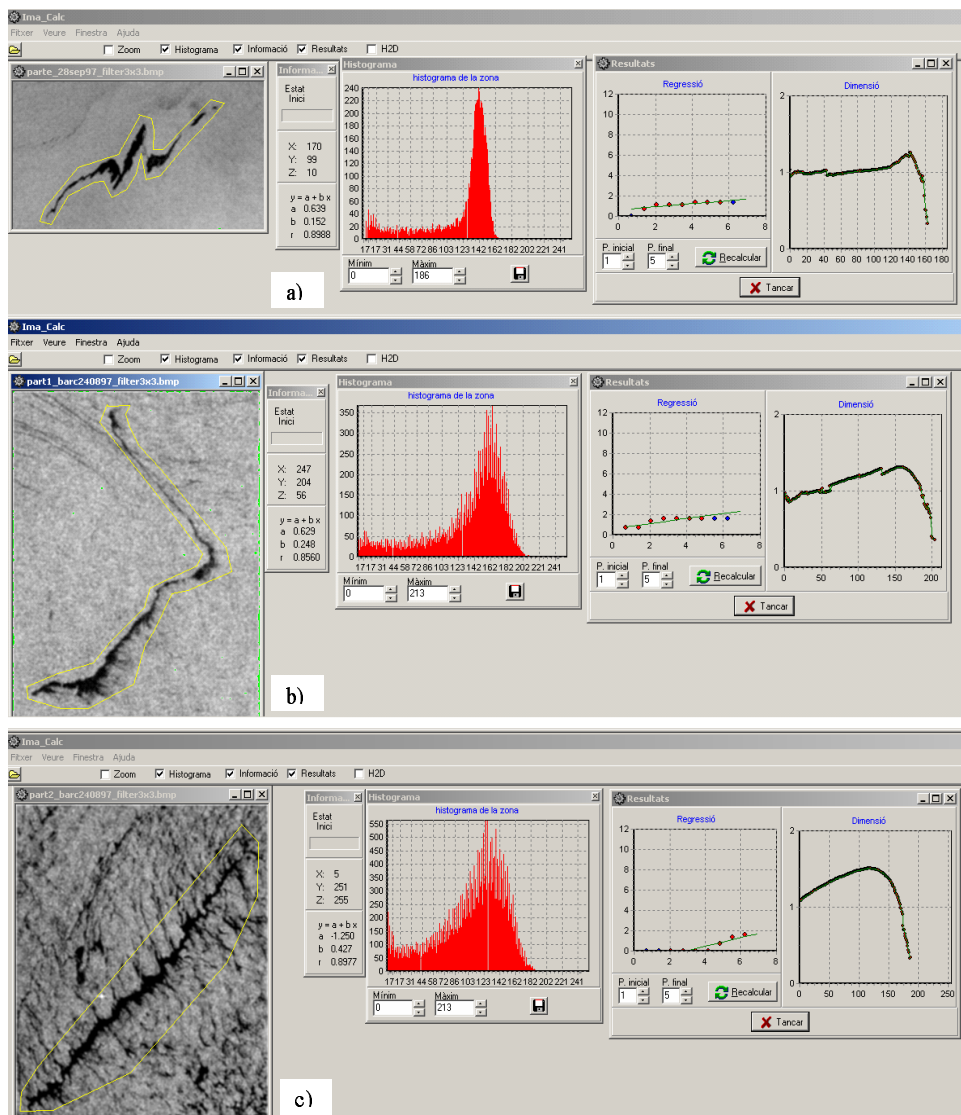


Figura 9. Dimensió multifractal D frente a distintos niveles de gris NDG de distintas imágenes del SAR

INESTABILIDADES DE RT Y RM

Descripción de los experimentos

El experimento consiste en liberar un fluido gravitatoriamente inestable en un tanque rectangular de metacrilato de altura (H) 50 cm, largo (L) 40 cm y ancho (W) 20 cm. Los dos fluidos (agua dulce y agua salada) están inicialmente separados por una hoja de acero de 1.5 mm de espesor colocada en el centro del tanque; esta hoja cuenta con un dispositivo especial que reduce las perturbaciones inducidas por la remoción de la placa. La mitad inferior del tanque se llena con agua y la hoja de acero es encajada dentro de ranuras ajustadas y sellada con grasa de silicona. Finalmente la parte superior se llena con agua salada. Sondajes de densidad y métodos cuantitativos de visualización no intrusivos fueron utilizados con el propósito de medir la evolución de los frentes inestables de RT, su comportamiento turbulento y estructura.

El experimento se inicia retirando la lámina horizontal hasta un sello que se encuentra al final de su carrera junto a la pared del estanque, como se describe en Linden y Redondo⁶. Un haz de luz láser de Argón de 0.6 W se hace pasar a través de una lente cilíndrica para producir una lámina de luz de alta intensidad de 2 mm de espesor. Se añadió tintura fluorescente a uno de los fluidos produciendo una imagen de un verde intenso al paso del láser. El filo del frente de avance fue demarcado por medio de esta técnica y así se obtienen secuencias de imágenes de la estructura de las escalas pequeñas. La fluoresceína es añadida solamente en cantidades muy pequeñas de manera que actúa como un trazador pasivo. Haciendo uso de orientaciones apropiadas de la lámina de luz láser se obtuvieron vistas de los lados, las elevaciones y planos del flujo. Este método de visualización es conocido como *Laser Induced Fluorescein*, LIF (Figura 1). Es necesario usar un número de Atwood mayor que 0.005 para asegurar que el desplazamiento de la lámina de acero no afectase de manera significativa el frente de avance de la inestabilidad. Esta perturbación inducida por la presencia de la capa límite fue reducida posteriormente haciendo uso de un sistema de tres capas antideslizamiento descrito en Dalziel¹⁴ y propuesto por Lane-Serff¹⁵. Para tener en cuenta la influencia de la diferencia de densidades se define una escala de tiempo adimensional como:

$$\tau = \sqrt{\left(\frac{Ag}{H}\right)} \cdot t \quad (12)$$

A esta escala de tiempo es necesario restar un factor corrector τ_0 en abcisas que pueda interpretarse como el tiempo asociado a las perturbaciones iniciales, obtenido a partir del uso de mínimos cuadrados, ajustando los datos del avance del frente (definido como $[h/H]^{1/2}$, donde h es la distancia entre los dos frentes que se alejan) con el del tiempo adimensional. El resultado se muestra en la Figura 10.

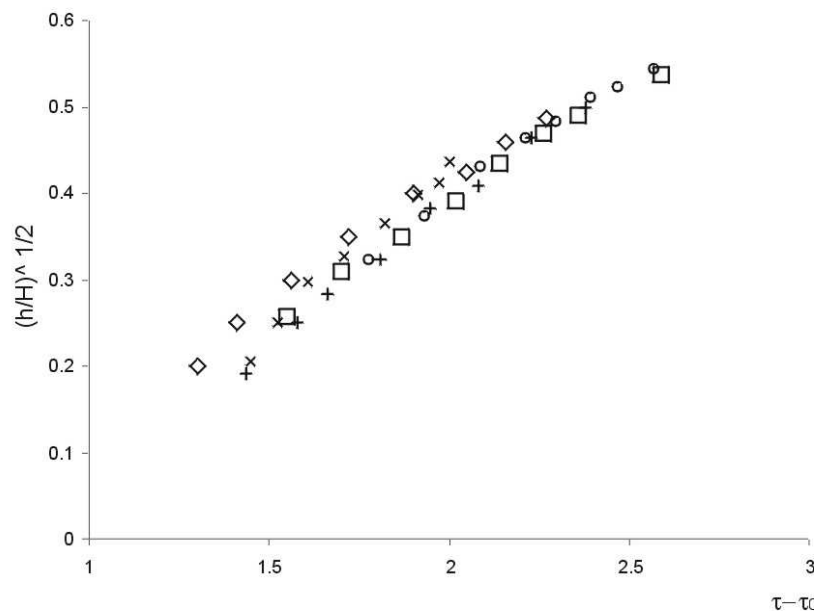


Figura 10. Resultados experimentales para el avance del frente en función del tiempo adimensional corregido; números de Atwood \diamond 4.3×10^{-2} \square 3.2×10^{-2} \circ $2.2 \times 10^{-2} + 9.5 \times 10^{-3}$ \times 3.3×10^{-3}

El avance del frente de mezcla turbulento está dado por la expresión $h = 2cgAt^2$. Mediante experimentos^{16,17,18} midieron la constante c que resulta ser poco dependiente de la relación de densidades y cuyo valor oscila entre 0.030 y 0.035. Los experimentos han constatado la fuerte influencia de las condiciones de frontera iniciales inducidas por la lámina que separa los dos fluidos. La universalidad del comportamiento cuadrático en función del tiempo (t^2) del crecimiento de la zona de mezcla entre los dos fluidos para un amplio rango de números de Atwood sugiere que el flujo desarrolla un estado de autosimilaridad. La escala de longitud inicial de la inestabilidad de RT esta determinada por la diferencia de densidades inicial y las propiedades de los fluidos a nivel molecular, pero en la fase turbulenta es la propia mezcla la que determina la aparición de nuevas escalas y controla el avance del frente.

Muchos experimentos relacionados con el descrito anteriormente han sido realizados utilizando otros tipos de aceleración, teniendo especial interés los realizados por Reeds & Youngs¹⁹ con una caja impulsada por un cohete hacia abajo con el propósito de inducir la inestabilidad de RT y de RM. También compararon el avance de un frente de mezcla entre una caja tridimensional y una delgada caja bidimensional observando valores para la constante mayores en la caja tridimensional. En los experimentos^{20,21} usaron el mismo sistema y confirmaron los resultados de los experimentos anteriores. Ellos investigaron además configuraciones de tres capas de fluido y tanques inclinados. Andrews²² encontró la misma dependencia cuadrática con el tiempo del avance del frente de mezcla pero con una valor de c incluso menor (0.02); esta reducción, como se mencionará posteriormente, puede ser atribuida a la bidimensionalidad de sus experimentos y la influencia de las paredes laterales de su tanque, 36x25x0.5 cm.

Los experimentos fueron realizados siguiendo el método descrito por^{18,3} mediante la separación de una lamina que separaba inicialmente agua salada colocada encima de agua dulce (menos densa). En todos los casos se produce un frente de mezcla turbulento entre las regiones de distinta densidad. Para caracterizar la evolución de la inestabilidad, que permite observar múltiples escalas en los campos de densidad, velocidad y vorticidad entre otros se utiliza el avance del frente de mezcla, así como las características geométricas asociadas al mismo. La evolución de la eficiencia de mezcla es función de la topología del frente, que a su vez depende de la aceleración efectiva, el número de Atwood A y/o también de la gravedad reducida g' . Ya que se relacionan de la forma siguiente; si $\rho_1 - \rho_2 \ll \rho_1 + \rho_2$

$$g' = g \frac{(\rho_1 - \rho_2)}{\rho} = 2gA \quad (13)$$

siendo ρ_i la densidad de cada zona, son los parámetros utilizados para describir la evolución del frente.

Es importante analizar la geometría del frente convectivo de mezcla para averiguar si se comporta más como una inestabilidad Rayleigh-Taylor o como un conjunto de penachos (caracterizados por una velocidad vertical de descenso w , que es función del entranamiento²³). En el caso de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, el frente produce las estructuras características en forma de champiñón según se muestra en la Figura 1.

La velocidad global de avance del frente aumenta con el tiempo y mediante análisis dimensional, Linden⁸, se comprueba que la anchura del frente de mezcla, h_{RT} (definida como la zona de mezcla con densidad promediada horizontalmente entre 5% y 95% de las densidades de ambas capas), tiene un comportamiento cuadrático con el tiempo durante fase turbulenta según una expresión de la forma siguiente

$$h_{RT} \propto GgAt^2 \quad (14)$$

donde $G = 2c$ representa una medida de la mezcla o del entranamiento del frente de mezcla inestable producido por la inestabilidad de Rayleigh-Taylor.

La escala de tiempo característico usado descrita en (12) es el que tarda en descender el frente convectivo hasta el fondo de la cubeta experimental. Otro tiempo característico es el que representa el tiempo de penetración del fluido en caso de que la viscosidad ν sea importante, esto es a bajos números de Reynolds, en la escala de tiempo τ_g , cuya definición es la siguiente:

$$\tau_g = \left(\frac{\nu}{(g')^2} \right)^{1/3} \quad (15)$$

La comparación de las distintas escalas de tiempo permite plantear la relación existente entre distintos tipos de proceso. Además, permite averiguar cuándo se produce la transición entre la fase inicial del proceso de mezcla dominada por τ_g , que denominaremos como Etapa de Mezcla viscosa inestable, y cuando se produce mezcla turbulenta, entre τ_g y el tiempo 4τ , que es cuando aproximadamente llega el frente de mezcla inestable a los extremos del tanque experimental (o recinto de cálculo numérico).

Otra escala temporal viene dada por la Frecuencia de Brunt-Väisälä, que comienza a tener importancia en la fase estable del experimento. Esta frecuencia viene dada por la siguiente expresión

$$N = \left(-\frac{g}{\rho} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial z} \right)^{1/2} \quad (16)$$

Donde la variación vertical de la densidad es estable, después de que el frente de mezcla haya generado vorticidad baroclina a la escala del tanque experimental; esta fase sólo tiene lugar a partir de 8τ , y no será tenida en cuenta en el presente análisis.

Descripción del modelo turbulento usado por FLUENT y su discretización

Los flujos turbulentos se caracterizan, además de la aleatoriedad, por una gran capacidad para disipar energía. Para mantenerse, la turbulencia necesita de un continuo suministro de energía para contrarrestar el efecto de la viscosidad sobre los remolinos de pequeña escala. La turbulencia disipa la energía suministrada a través de los remolinos de escala menor hasta que la viscosidad se hace importante. Kolmogorov formalizó la llamada teoría de la cascada de la energía descrita inicialmente por Richardson, donde ésta pasa de los remolinos grandes a los pequeños de manera que si no hay ninguna fuente externa que suministre energía la turbulencia decaerá rápidamente.

Partiendo de este concepto, la simulación de la turbulencia deberá incluir todas las escalas espaciales y temporales, desde las más grandes, equivalentes al tamaño del conducto o recipiente que contiene el fluido, hasta las microescalas. Es teóricamente posible resolver todo el espectro de escalas turbulentas a través de lo que se conoce como *Direct Numerical Simulation* (DNS). Sin embargo, la aplicación de DNS no es factible para problemas prácticos de ingeniería debido al alto coste computacional de su aplicación; si se tiene en cuenta que la relación entre las escalas mayores (las que contienen energía) y las microescalas es proporcional a $Re_t^{3/4}$ (Re_t es el número de Reynolds turbulento), entonces el tamaño de malla necesario para resolver todas las escalas en tres dimensiones es proporcional a $Re_t^{9/4}$. Ahora, además del tamaño exagerado de malla que DNS requiere es importante recalcar que la simulación sería simplemente la de un transitorio; por ello hay que añadir el coste de resolver las escalas temporales a través de *time steps* muy pequeños debido a que los requerimientos de la solución temporal están gobernados por las escalas disipativas.

Algunos modelos turbulentos modelan todas las escalas turbulentas como los métodos RANS (*Reynolds Averaged Navier-Stokes equations*) con su concepto de promediar los efec-

tos de la turbulencia y resolver solamente el flujo medio. Sin embargo, los modelos de tipo *Large Eddy Simulation LES* resuelven directamente los remolinos de escalas grandes y modela aquellos de escalas menores situándose de alguna manera en un punto medio entre DNS y RANS. LES considera que el momento, masa, energía y otros escalares son transportados mayoritariamente por los remolinos más grandes; estos remolinos de gran escala dependen mucho del problema en sí; por ello, sus características están dictadas principalmente por la geometría y las condiciones de frontera. Los remolinos pequeños dependen más del tamaño de la malla y por tanto son considerados como más isotrópicos.

Las principales ecuaciones utilizadas por el modelo LES se obtienen a partir del filtrado de las ecuaciones de Navier-Stokes no estacionarias, bien sea en espacios de Fourier o en el espacio físico. El proceso de filtrado depura los remolinos cuyas escalas son menores que la amplitud de filtro (o tamaño de malla) utilizado en los cálculos. Las ecuaciones resultantes determinan por lo tanto la dinámica de los remolinos de mayor escala.

En este contexto, una variable filtrada está definida por

$$\bar{\phi} = \int_D \phi(x') G(x, x') dx \quad (17)$$

donde $\bar{\phi}$ es la variable filtrada, D el dominio y G la función que determina la escala de los remolinos que son resueltos.

En el programa utilizado, FLUENT²⁴, la discretización de volúmenes finitos provee de manera implícita el proceso de filtración

$$\bar{\phi} = \frac{1}{V} \int_V \phi(x') dx, \quad x' \in V \quad (18)$$

Donde V es el volumen de una celda computacional. La función filtro usada es

$$G(x, x') = \begin{cases} 1/V & \text{para } x' \in V \\ 0 & \text{para } x' \notin V \end{cases} \quad (19)$$

Puesto que el modelo LES para flujo compresible no está implementado en FLUENT, el programa asume que LES será aplicado únicamente a flujos incompresibles.

Al filtrar las ecuaciones de Navier Stokes para el caso incompresible se obtiene

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \bar{u}_i) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \bar{u}_i \bar{u}_j) = \frac{\partial}{\partial x_j}(\mu \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j}) - \frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} \quad (21)$$

donde τ_{ij} es el tensor de escala de la sub-malla definido por

$$\tau_{ij} \equiv \overline{\rho u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (22)$$

Los tensores a nivel sub-malla resultantes del proceso de filtrado son desconocidos y se hace entonces necesario modelarlos. El tensor de sub-malla usa un modelo de viscosidad turbulenta (*eddy viscosity*).

$$\tau_{ij} \equiv \frac{1}{3} \tau_{kk} \delta_{ij} - 2\mu_t \bar{S}_{ij} \quad (23)$$

donde μ_t es la viscosidad turbulenta de la sub-malla y S_{ij} el tensor de deformación para la escala resuelta. El modelo de sub-malla más básico fue planteado inicialmente por

Smagorinsky²⁵ y posteriormente desarrollado con mayor profundidad por Lilly²⁶; en este modelo la viscosidad turbulenta se modela como

$$\mu_t = \rho L_S^2 |\bar{S}| \quad (24)$$

$$|\bar{S}| = \sqrt{2\bar{S}_{ij}^2} \quad (25)$$

$$L_S = \text{mín} \left\{ \begin{array}{l} \kappa d \\ C_S V^{1/3} \end{array} \right. \quad (26)$$

C_S es la constante de Smagorinsky ($C_S=0.1$), κ la constante von Karman $\kappa=0.42$ y d la distancia a la pared más cercana. Esta es solo una de las formas de desarrollar el tensor de sub-malla y es además particular de FLUENT.

El programa permite elegir entre dos modelos para resolver las ecuaciones: segregado y acoplado. Usando cualquiera de éstos el programa resolverá las ecuaciones en forma integral para la conservación de la masa y el momento, y, según sea el caso, para escalares tales como energía, turbulencia, etc. En cualquiera de los dos casos el método de volúmenes finitos de control es utilizado y consiste en:

- División del dominio en volúmenes discretos haciendo uso de la malla.
- Integración de las ecuaciones individualmente en cada volumen de control para construir ecuaciones algebraicas para las variables dependientes discretas en tales como velocidades, presión, temperatura y otros escalares
- Linealización de las ecuaciones discretizadas y solución del sistema de ecuaciones lineales resultante para entregar valores actualizados a las variables dependientes.

Los dos modelos emplean un proceso de discretización similar (volúmenes finitos), con distinto enfoque usado para linealizar y resolver las ecuaciones. La manera en que las ecuaciones son linealizadas puede adoptar un forma explícita o implícita con respecto a la variable (o variables) dependiente. En la formulación implícita, para una variable dada la incógnita es calculada en cada celda usando una relación que incluye los valores conocidos y desconocidos de las celdas adyacentes, de esta manera las incógnitas aparecen varias veces en el sistema y las ecuaciones deben ser resueltas de manera simultánea para determinar los valores de las incógnitas. En la formulación explícita, para un variable determinada, las incógnitas son calculadas por medio de expresiones que sólo incluyen valores conocidos; de esta manera cada variable aparecerá sólo en una ecuación del sistema resolviéndose una ecuación a la vez para obtener los valores de las incógnitas.

Las simulaciones se hicieron en dos dimensiones, con un tamaño físico de 40cmx40cm con tres mallas diferentes, 64^2 , 128^2 y 256^2 elementos, y con números de Atwood diferentes, 1×10^{-4} y 5×10^{-2} .

El método de resolución “*solver*” utilizado fue segregado pues es el único que permite hacer uso de dos fluidos diferentes. La discretización del tiempo (“*time step*”) se hizo de manera particular para cada número de Atwood de modo que cada 2500 iteraciones correspondiesen a un tiempo adimensional de 0.5; los resultados son interpretados y comparados con base en el tiempo adimensional τ descrito anteriormente, que es función de la altura del tanque, la gravedad y el número de Atwood.

Algunas otras variables relacionadas con el control de la solución fueron impuestas con los criterios dados por FLUENT: Se resolvieron las ecuaciones de flujo, fracción de volumen y velocidad de deslizamiento (velocidad relativa entre las fases). Se utilizó una formulación de Velocidad absoluta. El esquema de discretización empleó un modelo de Presión de tipo

standard. El cálculo del Momento usó el método “*First Order Upwind*”. El acoplamiento entre velocidad y presión: “*Pressure-Velocity Coupling*” fue de tipo PISO y para el cálculo del campo de densidades o “*Volume Fraction*” se usó también, al igual que para el momento: “*First Order Upwind Method*”.

Puesto que se hizo uso de un algoritmo de acoplamiento PISO (*Pressure-Implicit with Splitting of Operators*) para la presión y la velocidad, los factores de relajación se establecieron en su mayoría cercanos o iguales a uno: presión: 0.8, momento lineal: 0.8, slip velocidad 1, VOF 1, Densidad 1, fuerzas másicas o gravedad “*Body Forces*” 1.

Al iniciarse las simulaciones no se indujo ninguna condición que introdujera una perturbación inicial en el sistema que de alguna manera pueda imitar las condiciones inducidas en los experimentos. La inestabilidad se presenta después de $\tau=1$ para la malla menor y presenta un retraso progresivo a medida que la densidad de malla aumenta. Puesto que no se han inducido perturbaciones iniciales, la inestabilidad es iniciada a causa del ruido numérico presente en el código a medida que las iteraciones van teniendo lugar.

Para la convergencia de la solución se necesitaron alrededor de tres mil iteraciones para los *time steps* iniciales; sin embargo, al continuar iterando el tiempo de iteración se redujo sustancialmente hasta llegar a converger en el orden de diez iteraciones.

La Figura 11 muestra la comparación en un mismo instante de tiempo adimensional para las diferentes malla; se observa claramente como no hay diferencias importantes en la distancia recorrida por el frente de mezcla entre diferentes números de Atwood, pero sí entre distintas resoluciones de malla. Con un mayor número de elementos el avance se hace menor para el mismo instante de tiempo, tiempo real en el caso del mismo número de Atwood y adimensional para todos los casos. El desarrollo de la inestabilidad a través del tiempo y para distintos números de Atwood es mostrado en la Figura 11.

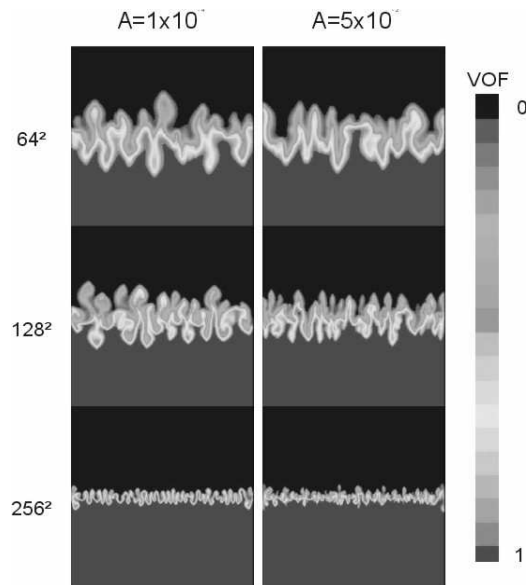


Figura 11. Comparación entre las simulaciones para los diferentes números de Atwood y densidades de malla para un mismo tiempo adimensional $\tau = 2$

Particularmente para las simulación con una malla de 128^2 elementos es posible apreciar un crecimiento inicial más rápido para el número de Atwood menor, sin embargo, hacia el tiempo adimensional $\tau=3$ el crecimiento del frente de mezcla se nivela y finalmente el avance es más rápido para el caso con el número de Atwood mayor.

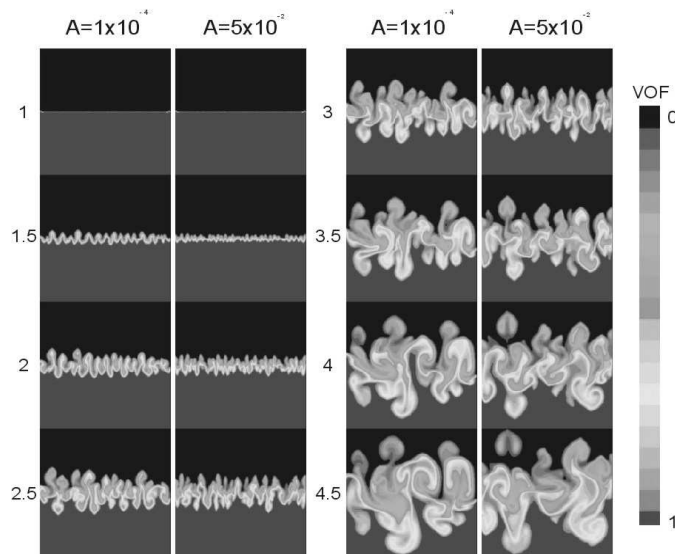


Figura 12. Inestabilidad de Rayleigh Taylor, evolución en el tiempo adimensional para dos números de Atwood diferentes con una malla de 128^2 elementos

Una vez obtenidos y comparados los resultados es importante resaltar la diferencia entre los experimentos y la simulación numérica. Se observa, primeramente, un desplazamiento en abcisas entre los dos grupos de resultados debido principalmente a las perturbaciones iniciales inducidas por la retirada de la placa, por lo que se hace necesaria la introducción de un τ_0 en los resultados experimentales que incluya, como ya se mencionó, las perturbaciones iniciales; no se fijó ninguna amplitud de perturbaciones iniciales para los experimentos numéricos, pues a diferencia de los experimentos de laboratorio no presentaban ninguna perturbación inicial.

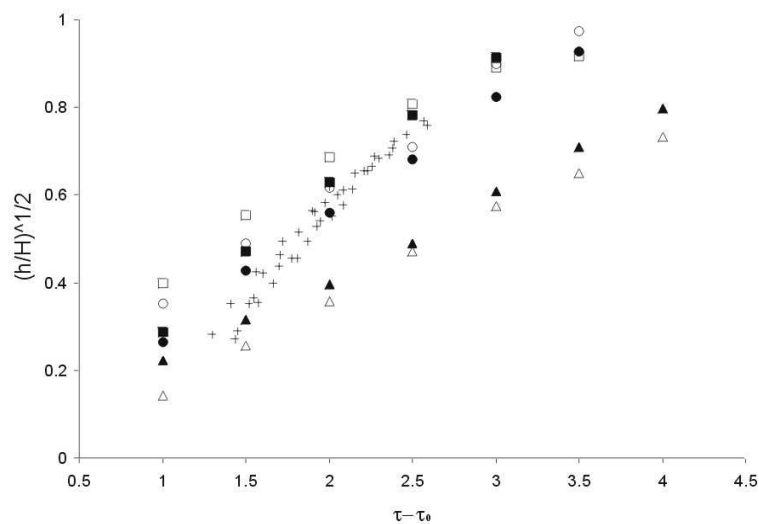


Figura 13. Comparación de resultados experimentales y las simulaciones: + Ex - perimentos, simulaciones: \square 64^2 LES $1x10^{-4}$, \blacksquare 64^2 LES $5x10^{-2}$, \circ 128^2 LES $1x10^{-4}$, \bullet 128^2 LES $5x10^{-2}$, \triangle 256^2 LES $1x10^{-4}$, \blacktriangle 256^2 LES $5x10^{-2}$

De manera particular en los resultados numéricos, las simulaciones con mallas menos densas arrojaron resultados más aproximados a los experimentales cuando su topología es la menos parecida a la de los experimentos, particularmente para la malla de 64^2 elementos. Los resultados entre las mallas de 64^2 y 128^2 son muy similares. Es importante resaltar también que aunque los resultados del avance del frente de mezcla para la malla más densa son los que, de manera paradójica, se alejan más de los experimentales, su topología es la más parecida pues reproduce con más detalle estructuras presentes en escalas menores que son calculadas directamente y no modeladas por el modelo de Smagorinski como en las mallas menos densas.

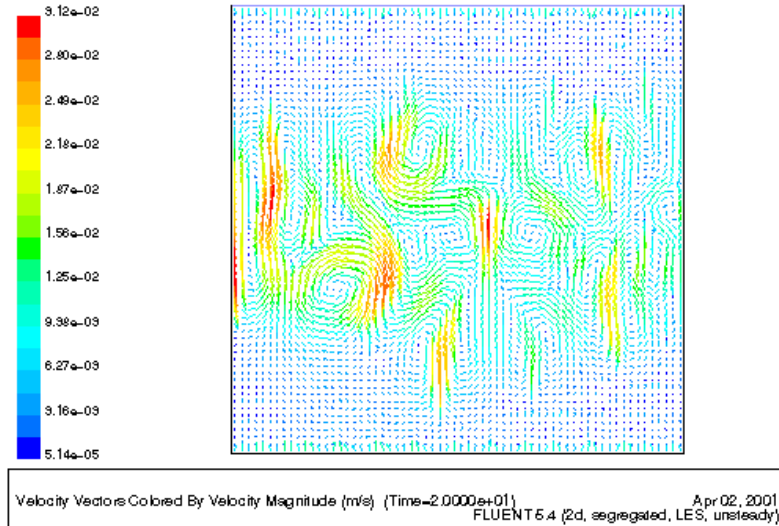


Figura 14. Modelo numérico de la inestabilidad de Rayleigh-Taylor, detalle del campo de velocidades para el tiempo adimensional $t/\tau_1=4$

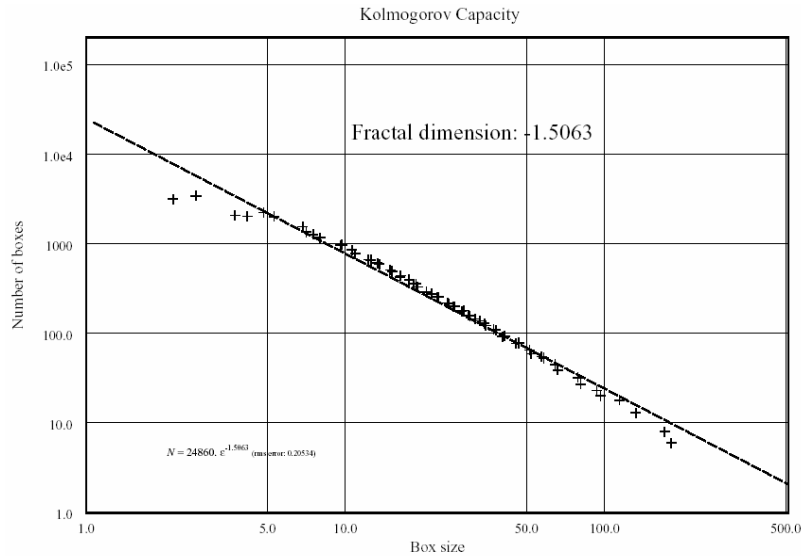


Figura 15. Rango de escalas of scales para las que existe autosimilitud, la pendiente de la curva en escala logarítmica $N(\sigma)$ *log-log* es con signo menos la dimensión fractal, en este caso $D=1.5063$ entre cajas de 50 y 100 píxeles de la imagen de densidades de la inestabilidad de RT

La herramienta del análisis fractal puede usarse tanto en las imágenes experimentales, como en las numéricas, y en éstas se puede aplicar el análisis multifractal tanto a los contornos de velocidad, de vorticidad o de fracción de volumen (o densidad). Así podemos comparar las dimensiones fractales de los conjuntos de distinta intensidad $D(I)$, siendo I , bien la velocidad o la densidad, tal como se indica en la Figura 16.

Atwood Number	Rayleigh-Taylor		Richtmyer-Meshkov	
	$t/T=2$	$t/T=3$	$t/T=2$	$t/T=3$
5×10^{-2}	1.12	1.34	1.30	1.40
10^{-2}	1.20	1.46	1.27	1.52

Tabla I. Comparación entre el valor de la máxima dimensión fractal $D(i)$ para la fracción de volumen del frente de inestabilidad de Rayleigh - Taylor

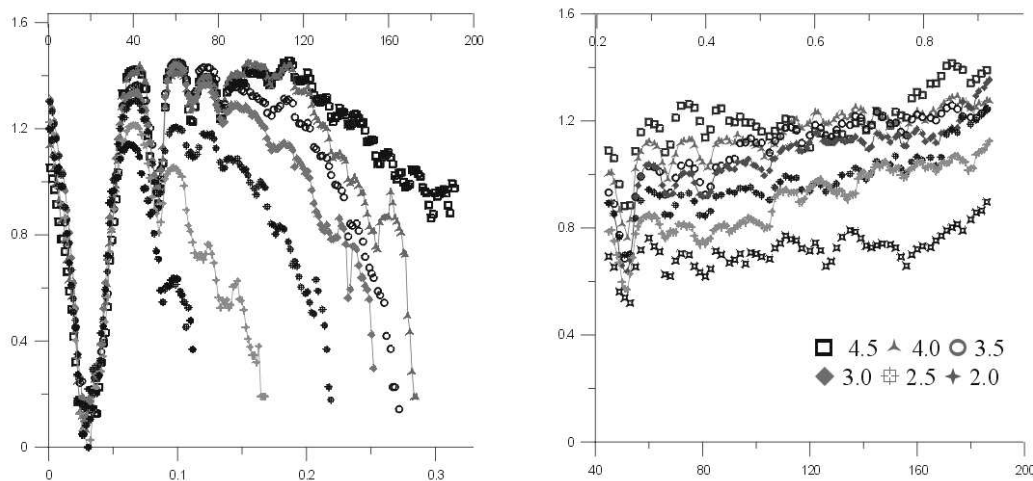


Figura 16. Evolución de la dimensión fractal para los diferentes valores de la velocidad y de la fracción de volumen (o densidad) en diversos tiempos adimensionales $t/T=2, \dots, 4.5$ para el frente de inestabilidad de Rayleigh - Taylor

DISCUSIÓN Y CONCLUSIONES

Se aprecia en todos los casos estudiados que la variabilidad multifractal de los distintos niveles de intensidad en la imagen asociada a un proceso turbulento es extremadamente complicada y de difícil interpretación. Sin embargo es posible extraer información puramente topológica de las imágenes, que puede ser muy útil en la clasificación, detección o interpretación de los fenómenos observados.

En el caso de nubes, es posible distinguir las nubes de característica cumuliforme con desarrollo vertical importante de los estratos o nubes prácticamente planas. En las primeras se aprecian valores altos de dinámica fractal para un gran rango de inestabilidades de IR, ya que a distintos niveles de altura y, por tanto, a múltiples temperaturas la estructura está dominada por una cascada tridimensional turbulenta. Sin embargo, para las nubes estratiformes (Figura 6) la estructura multifractal en IR es más baja en casi todos los

valores menos en un rango muy estrecho, correspondiente a la temperatura media del estrato nuboso. El hecho de que el valor de dicho rango de dimensiones fractales sea mayor $D \approx 1.6$ es consistente con el que la pendiente del espectro sea mayor que 3, ($\beta=3.8$, según la ecuación (4) que es típico de los procesos bidimensionales.

$$D = \frac{3 \cdot 2}{2} + \frac{1 - \beta}{2} = \frac{7 - \beta}{2} = \frac{3,2}{2} = 1,6 \quad (27)$$

En el caso de la detección de derrames de crudo en el océano, vemos que mediante esta técnica es posible distinguir los derrames recientes de los tensioactivos que llevan mucho tiempo en la superficie del mar, o que han sido producidos de forma fractal (por el plancton, por ejemplo). Para los menores valores del nivel de gris, que corresponden a menor rugosidad de la superficie del océano, cuanto menor es la dimensión fractal, menos tiempo de residencia.

En el caso de las inestabilidades convectivas, tan pronto como el frente de RT avanza, una serie de células se forman en la zona central del tanque avanzando hacia los extremos superior e inferior.

La Figura 12 muestra una serie de imágenes de la evolución del contorno de estas células o burbujas de RT, que se forman después de la desestabilización del frente inestable.

Se aprecia tanto en los experimentos como en las simulaciones que las burbujas o “champiñones” de mayor tamaño se desplazan con mayor velocidad que aquellas pequeñas; además, las estructuras pequeñas son absorbidas por las grandes. El frente muestra una aceleración constante, particularmente para los casos bidimensionales y esta es aun mayor para el avance en el caso tridimensional. El rápido avance del frente RT indica que la mezcla es menor detrás del frente de avance para que la diferencia de densidades, que es la encargada de “empujar” el fluido, se mantenga constante; de hecho, las estructuras encargadas de realizar la mezcla turbulenta se encuentran en los lados de los globos, en lo que parecen ser remolinos laterales que dan el aspecto de hongo al globo. Estas zonas se caracterizan por tener un alto valor de la dimensión fractal^{27,28}, mayor aún para las imágenes capturadas de los experimentos que para aquéllas de las simulaciones, lo que demuestra la existencia de estructuras complejas, algunas de las cuales son obviadas por el filtrado que LES hace por medio de la malla.

En los experimentos, la estructura del globo muestra una cabeza un poco pronunciada, en la mayoría de la mezcla teniendo lugar a los lados, como ya se mencionó, y apreciándose una inestabilidad cizallante similar a la inestabilidad de Kelvin-Helmholtz, tal como se observa en la Figura 1. La formación de los globos y sus correspondientes inestabilidades secundarias producen una cascada turbulenta después de un tiempo adimensional 1, tal como se aprecia en el crecimiento de la dimensión fractal a los lados del frente.

El avance del frente RT confirma los trabajos^{19,21}. Los problemas iniciales con las perturbaciones por el desplazamiento de la placa están más estudiados y son controlables. Los resultados *rms* de las medidas de la conductividad, en otros métodos de medición⁶, muestran una leve tendencia al decrecimiento a medida que se distancia de la placa, aunque hay diferencias de comportamiento si las pruebas son en una estructura ascendente o descendente o, en lo que parece ser la sección de mezcla más eficiente, las zonas laterales de los globos.

Para poder entender mejor la influencia de las perturbaciones en el posterior avance del frente de RT es interesante comparar los cambios en la evolución del frente con otros modelos numéricos y experimentos^{14,19}.

Información referente a la mezcla puede obtenerse de las series de experimentos descritos en ^{3,6}. El marcado de la mezcla debido a cambios de color de la fenoltaleína, confirma que la mayoría de la mezcla tiene lugar en los lados del frente de manera que las cabezas

exhiben unos saltos de densidad relativamente fuertes, incluso después de haber penetrado considerablemente dentro de la otra capa de fluido.

Para pruebas con menor diferencia de densidad se observa, que la vorticidad originada por la retirada de la placa incrementaba la mezcla en el centro de los vórtices que la capa limite asociada a ésta ocasionaba. Este efecto puede ser evitado usando un nuevo sistema para ensayos¹⁴, a pesar de que la lenta retirada de la placa separadora en estos casos ocasiona un situación de no homogeneidad lateral que merece un tratamiento independiente del frente RT distorsionado como consecuencia de ello.

El análisis del avance del frente RT en el tiempo muestra la influencia de la densidad de la malla en el modelo LES de FLUENT. Como un ejemplo de ello, la variación de la aceleración del frente RT con el tiempo no dimensional muestra que a mayor densidad de malla mayor es el tiempo que toma para que la inestabilidad se inicie; concluyendo de ello que las condiciones iniciales y las velocidades son extremadamente importantes para la correcta simulación de los frentes de mezcla de RT.

Los resultados para densidades de malla bajas se acercan más a los resultados experimentales mientras que los de la malla de mayor densidad mejoran en la reproducción de la topología de la inestabilidad, pero se muestran deficientes en sus resultados en cuanto al avance global del frente de mezcla. Varias causas pueden ser atribuidas a este comportamiento, pero la más importante es el efecto que tiene el simular en dos dimensiones un fenómeno que claramente es tridimensional; la turbulencia es claramente rotacional y se caracteriza entre otras cosas por su tri-dimensionalidad, particularmente lo que se conoce como estiramiento de vórtices (*vortex stretching*) que no puede darse en dos dimensiones pues la cascada de energía que tiene lugar es inversa (hacia las escalas más grandes). Por otra parte, la mezcla, como ya se mencionó, tiene lugar principalmente a los lados de las estructuras coherentes, por lo que al considerar un modelo tridimensional aumenta sustancialmente la mezcla a nivel molecular y el efecto del empuje. Simulaciones previas en tres dimensiones muestran una clara diferencia con aquéllas en 2D, presentando velocidades de avance del frente mucho mayores, aunque con un coste computacional mucho más alto.

El *Proceso de Mezcla Global* que tiene lugar durante el desarrollo de los experimentos puede dividirse en tres etapas: Mezcla inestable, Mezcla estable y Mezcla difusiva. La dependencia de las escalas temporales con el número de Atwood A es:

$$\tau - \tau_0 \propto A^{-1/2} \quad (28)$$

como se describe en la ecuación (12).

Es importante resaltar que el tiempo de ajuste a las condiciones iniciales puede ser muy diferente en las simulaciones LES a distinta malla y en los experimentos. En todos los casos la fase de Mezcla estable ocurre a partir de $4(\tau - \tau_0)$; entonces interviene una escala temporal asociada a la mezcla de la frecuencia de Brunt-Väisälä, definido en (16), $\tau_1 = N^{-1}$. El tiempo durante el cual la ruptura de las ondas internas produce mezcla depende del factor de calidad de la oscilación amortiguada que produciría la medida de la densidad o la fracción de volumen.

$$\rho(t) = \frac{\partial \rho}{\partial z} e^{-\tau_2 t} \cos \tau_1 t \quad (29)$$

siendo

$$\tau_2 = \left(\frac{d}{2g} \right)^{1/2} A^{-1/2} \quad \text{si } \tau_2 > \tau_g \quad (30)$$

el tiempo característico difusivo es:

$$\tau_3 = \frac{4g^2}{D} \left(\frac{2g}{d} \right)^2 A^4 \quad (31)$$

de forma que el número de Schmidt es $S_c = \nu/D$.

En la fase turbulenta, la dependencia entre la dimensión fractal de los distintos niveles de concentración de los productos de mezcla entre las dos capas (o de densidades intermedias) y el tiempo adimensional nos ayuda a caracterizar las distintas etapas de mezcla, así como a evaluar la transferencia de energía entre las inestabilidades dominantes y las pequeñas escalas (de Kolmogorov o Batchelor) donde se produce la mezcla molecular.

En este contexto la utilización de la dimensión fractal es útil para estimar cual es la evolución geométrica de interfases de distinta concentración (o densidad) dentro del flujo turbulento. Como ejemplo de aplicación presentamos en la Figura 16 la evaluación de los valores de la dimensión fractal de las distintas isóneas de velocidad y de densidad (caracterizadas por un nivel de gris I mencionado en el segundo apartado. Al mismo tiempo se puede estudiar también la evolución de cada I cuya dimensión fractal puede aumentar o disminuir en el tiempo; aquellos I cuya dimensión fractal aumenta indican que el proceso de inestabilidad turbulento está activo en un rango de escalas, que también puede calcularse. Por el contrario, rangos donde la dimensión fractal disminuye indican que la difusión molecular a escalas temporales dadas por τ_3 produce una relaminarización local del flujo.

La aplicación de la técnica multifractal en experimentos de laboratorio y al mismo tiempo en simulaciones numéricas es muy útil, no sólo para describir las distintas influencias producidas por fenómenos turbulentos a múltiples escalas, sino para determinar como actúan los aportes o sumideros de energía, tal como la disipación viscosa o la dimensión molecular. La simulación de laboratorio de procesos turbulentos medioambientales es también muy útil porque no suele ser tan importante la escala global o el nivel de energía medio como la relación autosimilar entre la energía a diversas escalas. Muchos de los resultados de laboratorio obtenidos mediante análisis multifractal son aplicables al medio ambiente, aunque la interpretación y validación de los mismos necesite de experimentos de campo para calibrar *in situ* la información obtenida mediante satélites de observación remota. Es de resaltar la gran inversión realizada por la ESA o por la NASA para obtener información a un gran rango de escalas, sin embargo, nuevos métodos de análisis de la información geométrica o topológica aún no han sido implementados de forma satisfactoria.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo está basado en datos de los proyectos ENVA4-CT96-0334 y ISTC-1481 de la Unión Europea. Agradecemos también al Ministerio de Educación y Ciencia (RYC-2003-005700, FTN-2001-2220 y ESP2005-07551) por su ayuda financiera. Agradecimientos a EUMETSAT por las imágenes METEOSAT y ESA por las de SAR (*Project AO-ID C1P.2240*).

REFERENCIAS

- 1 A.N. Kolmogorov, "Local structure of turbulence in an incompressible fluid at very high Reynolds numbers", *Dokl. Akad. Nauk URSS*, Vol. **30**, pp. 299–303, (1941).
- 2 G.K. Batchelor, "*The Theory of Homogeneous Turbulence*", Cambridge University Press, London, (1967).
- 3 J.M. Redondo y P.F. Linden, "*Geometrical observations of turbulent density interfaces*", Institute of Mathematics and its Applications series, N° 56, pp. 61–80, Oxford University Press, Inc. New Cork, (1990).

- 4 J. Grau Barceló, “Procesado digital de imágenes aplicado al análisis de secuencias Meteosat”, Tesis doctoral, Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, (2005).
- 5 J.M. Redondo, “Fractal characteristics of reactive fronts and shock Tube”. Mixing Layers in Proceedings of 6th International Workshop on the physics of compressible turbulent mixing, G. Jourdan & L. Houas (Eds.), pp. 422 – 427, (1997).
- 6 P.F. Linden y J.M. Redondo, “Molecular Mixing in Rayleigh-Taylor Instability. Part I Global Mixing, *J. Phys. of Fluids*, Vol. **3**, N° 5, pp. 1269–1277, (1991).
- 7 S. Chandrasekhar, “*Hydrodynamics and Hydromagnetic Stability*”, Oxford University Press, (1961).
- 8 P.F. Linden, J.M. Redondo y C. Caulfield, “Molecular mixing in the Rayleigh-Taylor instability” *Proceedings Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing*, Princeton U.P., (1988).
- 9 B. Mandelbrot, “*The Fractal Geometry of Nature*”, Freeman, New York, (1983).
- 10 H.O. Peitgen, H. Jürgens y D. Saupe, “*Fractals in the Classroom: Part One. Introduction to Fractals and Chaos*”, Springer-Verlag, pp. 240–244, New York, (1992).
- 11 G.W. Jolly, A. Mangin, F. Cauneau, M. Calatuyud, V. Barale, H.M. Snaith, O.Rud, M. Ishii, M. Gade, J.M. Redondo y A. Platonov, “The Clean Seas Project (ENV4-CT96-0334) Final Report” <<http://www.satobsys.co.uk/CSeas/report.html>> DG XII/D of the European Commission under contract N° ENV4-CT96-0334. Brussels, pp. 1 -75, (2000).
- 12 J.M. Redondo, A.K. Platonov, “Aplicación de las imágenes SAR en el estudio de la dinámica de las aguas y de la polución del Mar Mediterráneo cerca de Barcelona”, *Ingeniería del Agua*, Vol. **8**, N° 1, pp. 15–23, (2001).
- 13 H.J. Castrakis y P.E. Dimotakis, “Scale Distributions and Fractal Dimensions in Turbulence”, *Physical Review Letters*, Vol. **77**, N° 18, pp. 3795–3798, (1996).
- 14 S.B. Dalziel, P.F. Linden, D.L. Youngs, “Self-similarity and internal structure of turbulence induced by Rayleigh–Taylor instability”, *J. Fluid Mech.*, Vol. **399**, pp. 1–48, (1999).
- 15 G.F. Lane-Serf, “Heat flow and air movement buildings”, PhD Thesis, DAMTP University of Cambridge, (1989).
- 16 K. Read, “Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability”, *Physica D*, Vol. **12**, pp. 45–82, (1984).
- 17 D.L. Youngs, “Numerical simulation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability”, *Physica D*, Vol. **37**, pp. 270–287, (1989).
- 18 P.F. Linden, J.M. Redondo y D.L. Youngs, “Molecular mixing in Rayleigh-Taylor instability”, *J. Fluid Mechanics*, Vol. **265**, pp. 97–124, (1994).
- 19 K.I. Read y D.L. Youngs, “Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability”, AWRE report 001/83, (1983).
- 20 K.D. Burrows, S.V. Smeeton y D.L. Youngs, “Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor Instability”, AWRE report 22/84, (1984).
- 21 S.V. Smeeton, D.L. Youngs, “Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh-Taylor Instability. Part 3”, AWRE report 35/87, (1987).
- 22 M.J. Andrews, “Turbulent mixing by Rayleigh-Taylor instability”, PhD Thesis, Imperial College of Science and Technology, London, (1986).
- 23 T. McDouglal, “Bubble plumes in stratified environments”, *Journal of Fluid Mechanics*, Vol. **85**, N° 4, pp. 655–672, (1978).

- 24 Fluent Inc, “*Fluent 5-User’s Guide*”, Fluent Inc, Lebanon-NH, USA.
- 25 J. Smagorinsky, “General circulation experiments with the primitive equations. I. The basic experiment”, *Month. Wea. Rev.*, Vol. **91**, N° 3, pp. 99-164, (1963).
- 26 D.K. Lilly, “On the Application of the Eddy Viscosity Concept in the Inertial Subrange of Turbulence”, NCAR Manuscript 123, (1966).
- 27 C. Vassilicos y H. Hunt, “Fractal dimensions and spectra in turbulence”, *Proceedings Mathematical and Physical Sciences*, Vol. **435**, N° 1895, pp. 505-534, (1991).
- 28 J.M. Redondo y G. Garzón, “Numerical and experimental study of a Rayleigh-Taylor mixing front”, *Proceedings 8th International Workshop on the Physics of Compressible Turbulent Mixing*, (2004).