

ELEMENTOS FLUIDOS EN 2D Y 3D PARA ANALISIS DINAMICO CON INTERACCION FLUIDO-ESTRUCTURA

ANTONIO J. SALMONTE

*Iberduero, S.A.
Avda. de América, 32
28028 MADRID*

RESUMEN

Se presenta un elemento finito, formulado en desplazamientos, para análisis de interacción fluido-estructura, incluso en el caso de fluido con superficie libre. Dicha formulación requiere, para su buen comportamiento, el conjugarla con integración reducida, lo que en principio conduce a matrices de rigidez deficientes en rango. Se deduce una componente de la rigidez, que es función de la posición y a la que se denomina, por tanto, geométrica, que al tiempo que elimina la deficiencia en rango, permite obtener modos de oleaje (de baja frecuencia), a volumen constante. La formulación obtenida se generaliza a 3D donde es preciso eliminar modos espúreos adicionales, penalizando no sólo las rotaciones, como en 2D, sino también sus derivadas espaciales, es decir, las componentes de la torsión.

SUMMARY

A finite element, formulated in terms of nodal displacements, for analysis of fluid-structure interaction problems, is presented. Such formulation, in the case of unconfined fluid, i.e., with a free surface, requires, for a correct behaviour of the element, to be used in conjunction with reduced integration, which leads to a rank deficient stiffness matrix. A position dependent component of the stiffness is obtained which, in addition to eliminating rank deficiencies, allows for calculation of low frequency, constant volume, sloshing modes. This formulation is generalized to 3D, where additional spurious modes have to be restricted, which can be accomplished by penalizing not only the displacement rotational components as in 2D, but also their space derivatives, i.e., the displacement torsional components.

INTRODUCCION

La resolución de problemas dinámicos con interacción fluido-estructura ha despertado gran interés desde tiempo atrás. En principio, y durante largos años, la consideración de una masa añadida en la superficie de contacto sólido-fluido se consideró adecuada para la resolución del problema¹.

Las hipótesis simplificadoras introducidas en la teoría de Westergaard (fluido incompresible, longitud infinita de embalse, muro de contacto vertical, etc) hacen del

Recibido: Octubre 1987.

procedimiento una herramienta útil pero ciertamente conservadora. Con el desarrollo de los métodos de elementos finitos, el empleo de una masa añadida en representación del líquido parece incongruente con la sofisticación del resto del modelo, en el que incluso se modeliza el suelo con vistas a la consideración de la interacción de éste con la estructura.

Al tratar de desarrollar y formular elementos finitos adecuados para modelizar el comportamiento del fluido, la tendencia mayoritaria ha sido la de expresar el comportamiento del fluido en términos de la presión como incógnita en los nodos (formulación euleriana), con el grave inconveniente de su incompatibilidad con los elementos representativos de la estructura, formulados en función de los desplazamientos nodales (formulación lagrangiana).

El acoplamiento de los sistemas de ecuaciones planteadas independientemente para el fluido (incógnitas: las presiones) y la estructura (incógnitas: los desplazamientos) resulta en mayores esfuerzos de cálculo y, en cualquier caso, no es de fácil introducción en un programa general de elementos finitos.

Recientemente, Olson y Bathe² y Wilson³, acometieron la tarea de desarrollar una formulación en desplazamientos, con vistas a obtener elementos fácilmente incluibles en la biblioteca de elementos de cualquier programa de cálculo estructural. Mientras los primeros reconocen las dificultades encontradas en la resolución de problemas cuando el líquido no está confinado, es decir, cuando presenta una superficie libre, lo que les hace pasar en un artículo posterior a la formulación basada en potencial de velocidades⁴, el segundo³ afirma haber tenido éxito. Sin embargo, la exposición del método conduce a una formulación claramente deficiente en rango en 2D. La expansión a 3D, justificada en base a unas consideraciones teóricas pero no desarrolladas, resulta asimismo en matrices singulares con las que el problema, o bien es irresoluble, o bien —si para obtención de frecuencias se dispone de un algoritmo que permita saltar sobre las frecuencias nulas⁵— resulta caro de ejecución y con el riesgo de polución de la respuesta por los modos de vibración espúreos, asociados a dichas frecuencias nulas.

En el presente artículo, y siguiendo la senda iniciada por Wilson y Bathe, se desarrollan paso a paso y con rigor matemático elementos isoparamétricos de 4 nodos en 2D y de 8 en 3D válidos para análisis tanto de interacción fluido-estructura como para problemas de oleaje en dominios fluidos. Se emplea formulación en desplazamientos y se recurre definitivamente a integración reducida y penalización de deformaciones, obteniéndose unos elementos no singulares y que superan con éxito el criterio de la parcela (patch-test).

FORMULACION EN 2D

Sea el elemento isoparamétrico de 4 nodos, representado en la Figura 1. Siguiendo la notación estándar en teoría de elementos finitos⁶ se tiene que, dentro del elemento, el campo de desplazamientos se puede expresar:

$$\mathbf{u} = \mathbf{H} \mathbf{u}_0 \quad (1)$$

donde $\mathbf{u}^T = (u, v)$ es el vector desplazamiento en un punto genérico y $\mathbf{u}_0^T =$

$\{u_1 \ v_1 \ u_2 \ \dots \ v_4\}$, el vector de desplazamientos en los nodos.

La matriz

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & h_2 & 0 & h_3 & 0 & h_4 \end{pmatrix} \quad (2)$$

tiene por elementos las funciones de interpolación bilineal h_i , funciones bilineales que cumplen

$$h_i(P_j) = \delta_{ij} \quad i, j = 1, \dots, 4 \quad (3)$$

donde P_j representa al vértice j del elemento.

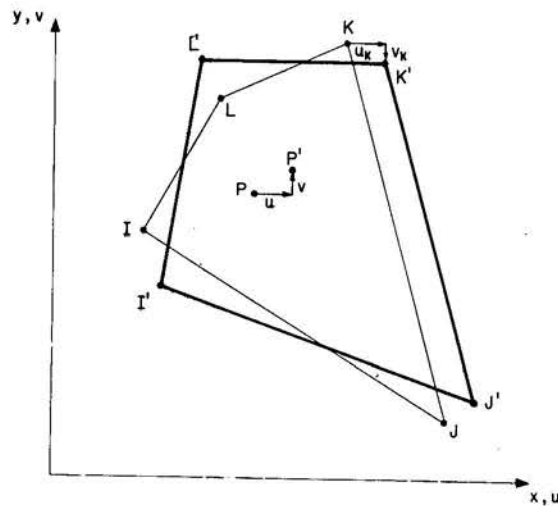


Figura 1. Elemento isoparamétrico de 4 nodos ($IJKL$, indeformado; $I'J'K'L'$, deformado)

Es bien sabido que la matriz de rigidez de este elemento viene dada por la expresión

$$\mathbf{K} = \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{B} \, t \, d\Omega \quad (4)$$

en la que Ω y t son el área y espesor del elemento, \mathbf{C} es la matriz constitutiva que relaciona tensiones σ y deformaciones ϵ :

$$\sigma = \mathbf{C} \, \epsilon \quad (5)$$

y \mathbf{B} , es el resultado de aplicar a \mathbf{H} el operador diferencial matricial \mathbf{L} que liga las deformaciones ϵ con los desplazamientos \mathbf{u} , es decir:

$$\epsilon = \mathbf{L} \, \mathbf{u} = \mathbf{L} \, \mathbf{H} \, \mathbf{u}_0 = \mathbf{B} \, \mathbf{u}_0 \quad (6)$$

En un fluido compresible sabemos que se cumple la relación

$$k_B = - \frac{\Delta p}{\Delta V/V} \quad (7)$$

donde k_B , módulo de deformación volumétrica, es una constante; p es la presión, V el volumen y Δ significa variación.

Como el objetivo del elemento que tratamos de desarrollar es analizar el comportamiento dinámico de un fluido inicialmente en reposo, podemos añadir en este caso el siguiente condicionante que ha de cumplir su campo de desplazamientos⁷:

$$\nabla \times \mathbf{u} = 0 \quad (8)$$

Las dos relaciones anteriores nos permiten configurar una ley constitutiva inicial. En efecto, en 2D:

$$\frac{\Delta V}{V} = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = e \quad (9)$$

y llamando simplemente p al incremento de presión (considerado positivo al aumentar ésta) de (7) se obtiene:

$$p = k_B \cdot e \quad (10)$$

además,

$$|\nabla \times \mathbf{u}| = \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right| = r_z \quad (11)$$

donde hemos introducido el símbolo r_z para la componente rotacional de la deformación elemental. La condición (8) nos dice que r_z debe ser nula. Hemos de recurrir a una formulación tal que penalice este tipo de deformaciones. Para ello, suponiendo que existe una cierta componente de la tensión m_z , sobre cuya naturaleza no especulamos por el momento, que es causa de r_z , entre ellas habrá una relación.

$$m_z = C r_z \quad (12)$$

donde C es una constante. Pues bien, se se adopta un valor de C suficientemente grande (teóricamente infinito), el valor de r_z se constriñe automáticamente a cero⁸. Esto es lo que en la literatura especializada se conoce como método de penalización⁸. Es bien sabido que en elementos finitos valores muy altos pueden causar problemas. Como a nosotros lo que nos interesa es no tanto que r_z sea 0 como que sea algunos órdenes de magnitud inferior a e , necesitamos una constante C grande *relativamente* a k_B . Por ello, y siguiendo a Wilson³, hacemos

$$C = p_e \cdot k_B \quad (13)$$

donde p_e es un valor suficientemente grande y, haciendo

$$\sigma = \begin{Bmatrix} p \\ m_z \end{Bmatrix} \quad (14)$$

y

$$\varepsilon = \begin{Bmatrix} e \\ r_z \end{Bmatrix} \quad (15)$$

hemos conseguido una ley constitutiva del tipo (5), donde

$$C = \begin{Bmatrix} k_B & 0 \\ 0 & p_e k_B \end{Bmatrix} \quad (16)$$

Es fácil ver que para la ε adoptada (ver (9) y (11)) el operador diferencial L se podrá expresar

$$L = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (17)$$

y, de (6) se deduce, entrando con (17) y (2)

$$B = \begin{pmatrix} h_{1x} & h_{1y} & h_{2x} & h_{2y} & \dots & h_{4x} & h_{4y} \\ h_{1y} & -h_{1x} & h_{2y} & -h_{2x} & \dots & h_{4y} & -h_{4x} \end{pmatrix} \quad (18)$$

con lo que ya se podría obtener K por aplicación de (4).

Denominando B_i ($i = 1, 2$) a la fila i de B será

$$B = \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} \quad (19)$$

y

$$K = \int_{\Omega} [B_1^T \cdot B_2^T] \cdot \begin{pmatrix} k_B & 0 \\ 0 & p_e k_B \end{pmatrix} \begin{Bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{Bmatrix} d\Omega \quad (20)$$

(hemos supuesto $t = 1$, como es normal en problemas de deformación plana).

Desarrollando (20), podemos escribir

$$K = k_B \int_{\Omega} B_1^T \cdot B_1 d\Omega + p_e k_B \int_{\Omega} B_2^T \cdot B_2 d\Omega = K_C + p_e K_R \quad (21)$$

donde hemos denominado K_C (matriz de rigidez a compresión) a

$$K_C = k_B \int_{\Omega} B_1^T \cdot B_1 d\Omega \quad (22)$$

y K_R (rigidez a rotación) a

$$\mathbf{K}_R = k_B \int_{\Omega} \mathbf{B}_2^T \cdot \mathbf{B}_2 d\Omega \quad (23)$$

En adelante utilizaremos la notación \mathbf{K}_j^i para designar a estas matrices, donde j representa el tipo de matriz (compresión, rotación, etc) e i el orden de integración a emplear ($i=1$ ó 2). En Tabla I se refleja \mathbf{K}_C^i ($i=1, 2$) y en Tabla II \mathbf{K}_R^i ($i=1, 2$) para elementos de forma cuadrada, salvo un factor constante. Para analizar el rango de dichas matrices se emplea una base ortogonal de vectores de 8 dimensiones. Son los siguientes (Figura 2):

Nombre	Coordenadas								Carácter
ϕ_u	1	0	1	0	1	0	1	0	Traslación pura u
ϕ_v	0	1	0	1	0	1	0	1	Traslación pura v
ϕ_s	-1	-1	-1	1	1	1	1	-1	Cortante
ϕ_{oy}	0	-1	0	1	0	-1	0	1	Oscilación v
ϕ_{ox}	1	0	-1	0	1	0	-1	0	Oscilación u
ϕ_{cv}	1	-1	-1	-1	-1	1	1	1	Def. a vol. constante
ϕ_r	-1	1	-1	-1	1	-1	1	1	Rotación
ϕ	1	1	-1	1	-1	-1	1	-1	Compresión

Es inmediato comprobar que:

- ϕ_c es el único modo de energía no nula para \mathbf{K}_C^1
- ϕ_r es el único modo de energía no nula para \mathbf{K}_R^1
- $\phi_{oy}, \phi_{ox}, \phi_c$ son los modos de energía no nula para \mathbf{K}_C^2
- $\phi_{oy}, \phi_{ox}, \phi_r$ son los modos de energía no nula para \mathbf{K}_R^2

Por consiguiente, la combinación $\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \mathbf{K}_R^1$ produce un elemento deficiente en rango (rango 2) que, consecuentemente, será inestable desde el punto de vista de cálculo.

La introducción de orden de integración 2 en cualquiera de las rigideces componentes (o en ambas) elimina los modos ϕ_{oy} y ϕ_{ox} de oscilación, pero con el grave inconveniente de que ello equivale a una "solidificación" del líquido dado que, en la realidad, esos modos presentan una energía de deformación mucho más baja que la asociada con ϕ_c y, en mayor medida, con el artificialmente penalizado ϕ_r .

Es decir, combinaciones del tipo

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \cdot \mathbf{K}_R^2$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^2 + p_e \cdot \mathbf{K}_R^1$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^2 + p_e \cdot \mathbf{K}_R^2$$

que disminuirían la deficiencia de rango, no son admisibles para fluidos con una superficie libre, que debe presentar modos de oleaje u oscilación con frecuencia muy

baja. Queda, por tanto, como rigidez inicial del elemento la definida por

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \cdot \mathbf{K}_R^1 \quad (24)$$

con el problema de la deficiencia en rango, que será subsanada en la sección siguiente.

Orden de integración = 1

Orden de integración = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & 3 & -4 & 3 & -2 & -3 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -3 & 2 & -3 & -2 & 3 & -4 \\ -4 & -3 & 4 & -3 & 2 & 3 & -2 & 3 \\ 3 & 2 & -3 & 4 & -3 & -4 & 3 & -2 \\ -2 & -3 & 2 & -3 & 4 & 3 & -4 & 3 \\ -3 & -2 & 3 & -4 & 3 & 4 & -3 & 2 \\ 2 & 3 & -2 & 3 & -4 & -3 & 4 & -3 \\ -3 & -4 & 3 & -2 & 3 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tabla I. Matrices K_C en 2-D

Orden de integración = 1

Orden de integración = 2

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & -1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 4 & -3 & 2 & 3 & -2 & 3 & -4 & -3 \\ -3 & 4 & -3 & -4 & 3 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 4 & 3 & -4 & 3 & -2 & -3 \\ 3 & -4 & 3 & 4 & -3 & 2 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & -4 & -3 & 4 & -3 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 3 & 2 & -3 & 4 & -3 & -4 \\ -4 & 3 & -2 & -3 & 2 & -3 & 4 & 3 \\ -3 & 2 & -3 & -2 & 3 & -4 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

Tabla II. Matrices K_R en 2-D

PROBLEMATICA DEL ELEMENTO LIQUIDO

En el apartado anterior, hemos visto que 4 modos, que han de ser necesariamente restringidos (ϕ_{oy} , ϕ_{ox} , ϕ_s , y ϕ_{cv}), presentan energía de deformación nula ante la rigidez definida por (24).

Analicemos, desde un punto de vista intuitivo, lo que ocurre en realidad.

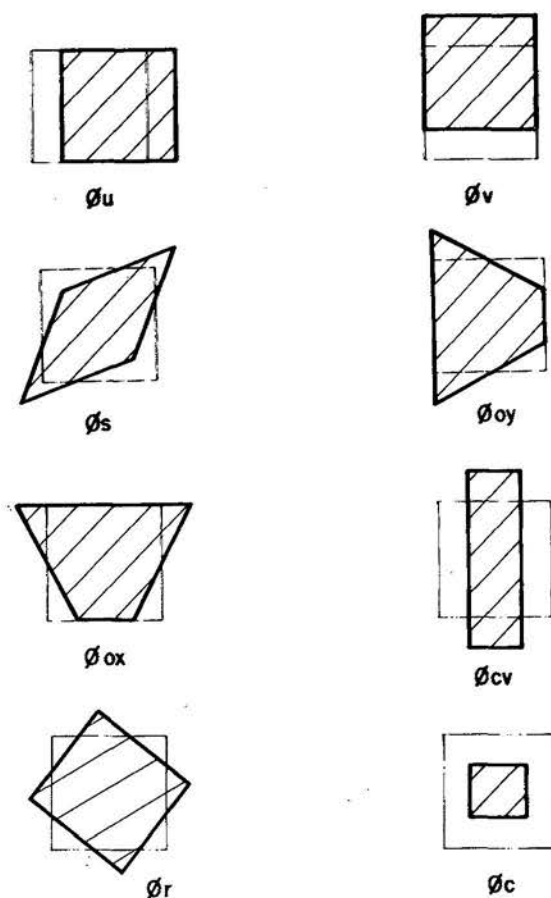


Figura 2. Base ortogonal del espacio de 8 dimensiones al que pertenece el vector deformación 2D

- La deformación a volumen constante es algo consustancial al comportamiento de un fluido. Todo fluido, por el hecho de serlo, presenta tendencia a dicha deformación, lo que fuerza a mantenerlo dentro de un recipiente.
- Una vez retenido, se imposibilita el que se produzca ese tipo de deformación. En dicho caso, el fluido presenta una superficie libre horizontal.
- Al encontrarse el fluido retenido en el interior del recipiente, se desarrolla una presión hidrostática en su interior, cuyo valor depende de la profundidad (es directamente proporcional a ella).
- La experiencia nos dice que la tendencia a deformación a volumen constante es tanto mayor cuanto más cerca nos encontramos de la superficie, es decir, cuanto menor sea la presión hidrostática.

Recordando que la deformación volumétrica en 2D es

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \quad (9)$$

e introduciendo la notación

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{cv} + \frac{\partial}{\partial x_i} \Big|_{\Delta v}$$

donde cv significa "a volumen constante" y Δv "con variación de volumen",

$$e_{cv} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{cv} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{cv} = 0 \quad (25)$$

es decir,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{cv} = -\frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{cv} = \delta_{cv} \quad (26)$$

El Principio de Pascal implica que

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Delta v} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{\Delta v} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big|_{\Delta v} \quad (27)$$

y se cumplirá, teniendo en cuenta (26) y (27)

$$\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{cv} - \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{cv} = 2\delta_{cv}$$

y, por tanto

$$\delta_{cv} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (28)$$

es una medida de la deformación a volumen constante.

Volviendo al razonamiento intuitivo anterior, se tiene que

$$\text{si } p_H (= \gamma h) \rightarrow 0, \quad \delta_{cv} \rightarrow \infty$$

$$\text{si } p_H (= \gamma h) \rightarrow \infty, \quad \delta_{cv} \rightarrow 0 \quad (p_H \text{ simboliza presión hidrostática})$$

por lo que escribiendo

$$g = \gamma \cdot h \cdot \delta_{cv} \quad (29)$$

aparte de ser consistentes con los razonamientos anteriores, introducimos una nueva relación constitutiva. En efecto, haciendo en (5)

$$\sigma^T = \{p, m_z, g\} \quad (14')$$

y

$$\epsilon^T = \{e, r_z, \delta_{cv}\} \quad (15')$$

será la nueva \mathbf{C}

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} k_B & 0 & 0 \\ 0 & p_e k_B & 0 \\ 0 & 0 & \gamma h \end{pmatrix} \quad (16')$$

El operador \mathbf{L} se ve aumentado en una nueva fila, quedando

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} \quad (17')$$

lo que origina una tercera fila, \mathbf{B}_3 , en \mathbf{B}

$$\mathbf{B}_3 = \left(\frac{1}{2} h_{1x}, -\frac{1}{2} h_{1y}, \frac{1}{2} h_{2x}, \dots, -\frac{1}{2} h_{4y} \right) \quad (30)$$

y la rigidez del elemento resulta

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + p_e \mathbf{K}_R + \gamma h_m \mathbf{K}_G \quad (31)$$

donde

$$\mathbf{K}_G = \int_{\Omega} \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{B}_3 d\Omega \quad (32)$$

y h_m es la profundidad media del elemento. En la Tabla III se incluyen las expresiones de \mathbf{K}_G^i para órdenes de integración 1 y 2. Procediendo de modo similar a como se hizo anteriormente con \mathbf{K}_C y \mathbf{K}_R , resulta que

- ϕ_{cv} es el único modo de energía no nula para \mathbf{K}_G^1
- ϕ_{oy}, ϕ_{ox} y ϕ_{cv} son modos de energía no nula para \mathbf{K}_G^2

Orden de integración = 1	Orden de integración = 2
$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -4 & -3 & -2 & 3 & 2 & 3 \\ -3 & 2 & 3 & 4 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -4 & 3 & 4 & 3 & 2 & -3 & -2 & -3 \\ -3 & 2 & 3 & 4 & 3 & -4 & -3 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 3 & 4 & -3 & -4 & -3 \\ 3 & -2 & -3 & -4 & -3 & 4 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & -2 & -3 & -4 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & -4 & -3 & -2 & -3 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

Tabla III. Matrices \mathbf{K}_G en 2-D

Por tanto, la matriz

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \mathbf{K}_R^1 + \gamma h_m \mathbf{K}_G^2 \quad (33)$$

tiene rango 5 y no "solidifica" el fluido.

Queda un sexto modo, ϕ_s , por restringir. Sabemos que en los fluidos

$$\tau = \mu \gamma \quad (34)$$

donde

$$\gamma = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (35)$$

relación que aumenta una vez más la relación constitutiva (5). Haciendo ahora

$$\boldsymbol{\sigma}^T = \{p, m_z, g, \tau\} \quad (14'')$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^T = \{e, r_z, \delta_{cv}, \gamma\} \quad (15'')$$

con

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} k_B & 0 & 0 & 0 \\ 0 & p_e k_B & 0 & 0 \\ & & \gamma h & 0 \\ & (\text{SIM}) & & \mu \end{pmatrix} \quad (16'')$$

será por tanto

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (17'')$$

y aparece una nueva fila \mathbf{B}_4 en \mathbf{B}

$$\mathbf{B}_4 = (h_{1y} \ h_{1x} \ h_{2y} \ \dots \ h_{4x}) \quad (36)$$

y definiendo la rigidez a cortante

$$\mathbf{K}_s = \int_{\Omega} \mathbf{B}_4^T \cdot \mathbf{B}_4 \, d\Omega \quad (37)$$

podremos expresar la rigidez total

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \mathbf{K}_C^1 + \gamma h_m \mathbf{K}_G^2 + \mu \mathbf{K}_s^1 \quad (38)$$

donde se ve que introducimos directamente la rigidez a cortante con orden de integración 1 dado que, con ese orden de integración, el único modo de energía no nula es precisamente el único que quedaba por restringir, es decir, ϕ_s .

En el Apéndice A, el lector puede encontrar una deducción más rigurosa de la matriz K_G .

COMPROBACION DE LA CONVERGENCIA DEL ELEMENTO

Siguiendo a Taylor y otros⁹, la condición necesaria y suficiente para que el elemento sea convergente y que la respuesta sea única es que supere con éxito el denominado criterio de la parcela. Para que el tamaño de la parcela sea irrelevante hay que tomar como constante el valor de h en la ecuación constitutiva (16'), tal como se hizo en (31), sacando el valor de h_m (profundidad media) fuera de la integral. Hacemos hincapié en esto pues el valor de h no ha de ser necesariamente sacado fuera de la integral (32). Hecha esta salvedad, se prepara una parcela de elementos del tipo de la Figura 3. El test completo supone tres pasos sucesivos a los que Taylor y colaboradores denominan respectivamente como tests A, B y C, que consisten en:

- Si se somete a la parcela a un campo de desplazamientos lineales arbitrarios, del tipo

$$\begin{aligned} u &= Ax + By + C \\ v &= Dx + Ey + F \end{aligned} \quad (39)$$

imponiendo esos desplazamientos en todos los nodos (exteriores e interiores), en los nodos interiores se producirán fuerzas nodales *nulas* (test A).

- Imponiendo los desplazamientos (39) exclusivamente a los nodos de frontera (todos menos el nodo 5 en nuestro caso), los desplazamientos obtenidos en los nodos interiores cumplen la ley del campo (test B).
- Finalmente, para fuerzas aplicadas en los nodos frontera, consistentes con las tensiones-constantes a que dan lugar en el dominio los campos lineales de desplazamientos, los desplazamientos obtenidos en los nodos de borde e interiores cumplen con la ley del campo, sin más que suponer un mínimo de condiciones de borde esenciales para impedir las deformaciones de cuerpo rígido (test C).

Nótese que las tensiones consistentes con cada deformación son del tipo indicado en la Figura 4. Asimismo, el mínimo de condiciones esenciales a aplicar en el test C son 2: un desplazamiento x y otro desplazamiento y en el mismo o distinto nodo.

Podemos afirmar que el elemento propuesto supera con éxito el test. Sin embargo, la realización del test es importante no sólo como técnica de comprobación de que la transcripción al ordenador de la formulación es correcta, sino porque nos permitirá analizar en cada caso los problemas numéricos que presenta la aplicación práctica del elemento y que serán objeto de una sección subsiguiente.

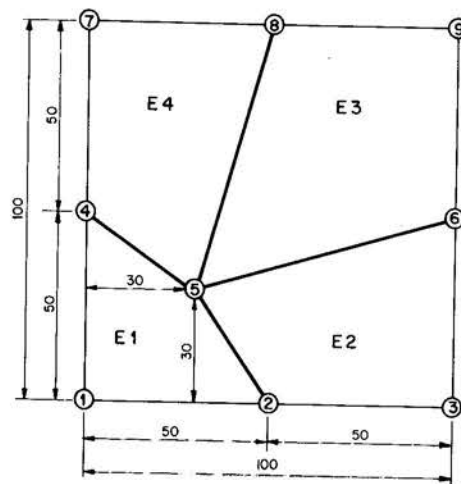


Figura 3. Malla empleada para "patch-test", en análisis de convergencia en 2D

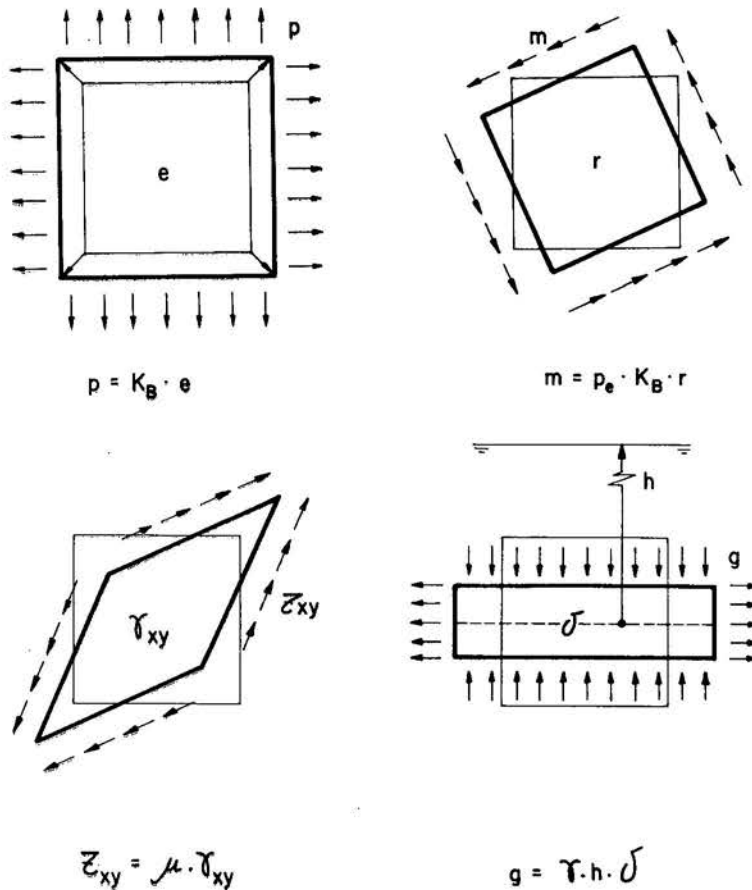


Figura 4. Tensiones consistentes con los desplazamientos para test C.

GENERALIZACION A 3 DIMENSIONES

Una vez obtenida una formulación adecuada para el elemento de 4 nodos en 2D, el

camino queda abierto para su extrapolación a 3D.

La deformación volumétrica viene ahora dada por la expresión

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \quad (40)$$

y su relación con el incremento de presión viene dado de nuevo por la expresión (10), que constituye la primera relación constitutiva.

El rotacional tiene ahora 3 componentes

$$\begin{aligned} r_x &= \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} \\ r_y &= \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} \\ r_z &= \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \end{aligned} \quad (41)$$

Para constreñirlas —recordemos el carácter irrotacional del movimiento para estado inicial en reposo—, usamos de nuevo un penalti en las relaciones que las ligan con las correspondientes componentes tensionales m_x , m_y y m_z :

$$m_i = C \cdot r_i \quad i = x, y, z \quad (42)$$

donde C es el coeficiente de penalización o valor suficientemente grande para restringir r_i . Tal como se hizo en 2D, al interesarnos un valor C grande con relación a k_B , aplicamos de nuevo la relación (13), con lo que

$$C = p_e \cdot k_B$$

y

$$m_i = p_e \cdot k_B \cdot r_i \quad (43)$$

constituyen tres nuevas relaciones constitutivas.

La deformación por cortante presenta, asimismo, tres componentes:

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \\ i, j &= x, y, z \\ i &\neq j \end{aligned} \quad (44)$$

Las tensiones tangenciales están ligadas con las deformaciones a través de la viscosidad

$$\tau_{ij} = \mu \gamma_{ij} \quad (45)$$

lo que da lugar a tres nuevas relaciones constitutivas. Haciendo

$$\sigma^T = \{p, m_x, m_y, m_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{zx}\} \quad (46)$$

y

$$\epsilon^T = \{e, r_x, r_y, r_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{zx}\} \quad (47)$$

y teniendo presentes (10), (43) y (45), vemos que la matriz **C** de (5) es ahora

$$\mathbf{C} = \text{diag} (k_B, p_e k_B, p_e k_B, p_e k_B, \mu, \mu, \mu) \quad (48)$$

Para formar la rigidez, y habida cuenta de que para el elemento de 8 nudos en 3D es

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_1 & 0 & 0 & \dots & h_8 & 0 & 0 \\ 0 & h_1 & 0 & \dots & 0 & h_8 & 0 \\ 0 & 0 & h_1 & \dots & 0 & 0 & h_8 \end{pmatrix} \quad (49)$$

y de que, de acuerdo con (6) y (47), la matriz **L** será (ver (40), (41), y (44)):

$$\mathbf{L} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & -\frac{\partial}{\partial y} \\ -\frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \quad (50)$$

podemos aplicar (4) una vez obtenida **B** como una matriz 7×24 igual al producto **L · H**. Si la descomponemos por cajas en:

$$\mathbf{B} (7 \times 24) = \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 (1 \times 24) \\ \mathbf{B}_2 (3 \times 24) \\ \mathbf{B}_3 (3 \times 24) \end{pmatrix} \quad (51)$$

de la aplicación de (4) resulta:

$$\mathbf{K} = k_B \int_v \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{B}_1 d_v + p_e k_B \int_v \mathbf{B}_2^T \cdot \mathbf{B}_2 d_v + \mu \int_v \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{B}_3 d_v \quad (52)$$

donde, denominando

$$\text{RIGIDEZ A COMPRESION :} \quad K_C = k_B \int_v \mathbf{B}_1^T \cdot \mathbf{B}_1 d_v \quad (53)$$

$$\text{RIGIDEZ A ROTACION :} \quad K_R = k_B \int_v \mathbf{B}_2^T \cdot \mathbf{B}_2 d_v \quad (54)$$

$$\text{RIGIDEZ A CORTANTE :} \quad K_S = \int_v \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{B}_3 d_v \quad (55)$$

podemos escribir:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + p_e \cdot \mathbf{K}_R + \mu \mathbf{K}_S \quad (56)$$

La novedad introducida en el análisis en 2D, la componente geométrica de la rigidez, ha de ser evaluada. Para ello, es preciso obtener expresiones para la deformación a volumen constante. Usando la notación anteriormente introducida se tiene:

$$e = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Delta V} + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{CV} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{\Delta V} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{CV} + \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{\Delta V} + \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{CV} \quad (57)$$

donde, por definición, será:

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{CV} + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{CV} + \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{CV} = 0 \quad (58)$$

y, por el principio de Pascal,

$$\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{\Delta V} = \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{\Delta V} = \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{\Delta V} = \frac{e}{3} \quad (59)$$

de donde, dado que

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big|_{CV} = \frac{\partial u_i}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_i} \Big|_{\Delta V} \quad i = x, y, z \quad (60)$$

será

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{CV} &= \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{e}{3} = \frac{2}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{CV} &= \dots = -\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{2}{3} \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{1}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \Big|_{CV} &= \dots = -\frac{1}{3} \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{1}{3} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{2}{3} \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (60')$$

que permite generalizar a 3D la expresión (28)

$$\begin{aligned}
2\delta_{cv}^z &= \frac{\partial u}{\partial x}|_{CV} - \frac{\partial v}{\partial y}|_{CV} = \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y} \\
2\delta_{cv}^x &= \frac{\partial v}{\partial y}|_{CV} - \frac{\partial w}{\partial z}|_{CV} = \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial w}{\partial z} \\
2\delta_{cv}^y &= \frac{\partial w}{\partial z}|_{CV} - \frac{\partial u}{\partial x}|_{CV} = \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{\partial u}{\partial x}
\end{aligned} \tag{61}$$

y, estableciendo, tal como se hacía en 2D

$$g_i = \gamma h \delta_{cv}^i \quad i = x, y, z \tag{62}$$

tenemos 3 nuevas relaciones constitutivas, que aumentan **C** en 3 filas, sin dejar de ser diagonal (los elementos adicionales son iguales cada uno de ellos a γh). Asimismo, la matriz **B** pasa a ser

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{B}_1 \\ \mathbf{B}_2 \\ \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{B}_4(3 \times 24) \end{Bmatrix} \tag{63}$$

donde \mathbf{B}_i ($i = 1$ a 3) son las ya definidas y

$$\mathbf{B}_4 = \mathbf{L}_4 \cdot \mathbf{H} \tag{64}$$

habiendo de ser la matriz \mathbf{L}_4 , de acuerdo con (61)

$$\mathbf{L}_4 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & -\frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\partial}{\partial z} \\ -\frac{\partial}{\partial x} & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \tag{65}$$

con lo que, aplicando (4) y recordando (56), resulta

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + p_e \mathbf{K}_R + \mu \mathbf{K}_S + \gamma h_m \cdot \mathbf{K}_G \tag{66}$$

con

$$\mathbf{K}_G = \int_v \mathbf{B}_4^T \cdot \mathbf{B}_4 dv \tag{67}$$

y, tal como se hizo en 2D, se extrae el término h fuera de la integral a base de sustituir h por su valor medio en el elemento, aunque esta sustitución no sea estrictamente necesaria.

Adoptando, en principio, los mismos órdenes de integración ya empleados en 2D, será

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \mathbf{K}_R^1 + \mu \mathbf{K}_S^1 + \gamma h_m \cdot \mathbf{K}_G^2 \tag{68}$$

Probaremos cada una de las componentes de \mathbf{K} para analizar posibles deficiencias en rango, con la base formada por los vectores de las Figuras (5a, b y c), que tienen la ventaja de tener una sola familia de coordenadas desigual a 0^{10} .

He aquí los resultados de la prueba:

a) Componente \mathbf{K}_C^1

Los únicos modos de energía no nula frente a \mathbf{K}_C^1 son $\mathbf{X}_2, \mathbf{Y}_3$ y \mathbf{Z}_1 , de los que es fácil obtener:

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_C &= \mathbf{X}_2 - \mathbf{Y}_3 - \mathbf{z}_1 & : & \text{compresión uniforme} \\ \mathbf{V}_{HG}^1 &= 2\mathbf{Y}_3 + \mathbf{x}_2 - \mathbf{Z}_1 & | & \text{volumen constante (hourglass)} \\ \mathbf{V}_{HG}^2 &= 2\mathbf{X}_2 + \mathbf{Y}_3 + \mathbf{Z}_1 & | & \text{(Figura 6)} \end{aligned}$$

que cumplen

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{V}_C \\ \mathbf{V}_{HG}^1 \\ \mathbf{V}_{HG}^2 \end{Bmatrix} \mathbf{K}_C^1 \{ \mathbf{V}_C^T; \mathbf{V}_{HG}^{1T}; \mathbf{V}_{HG}^{2T} \} = \begin{pmatrix} k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

es decir, \mathbf{K}_C^1 tiene rango 1 y constriñe (da energía) a 3 de los modos básicos del espacio de 24 dimensiones.

b) Componente \mathbf{K}_R^1

Hay 6 modos básicos de energía no nula ($\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_3, \mathbf{Y}_1, \mathbf{Y}_2, \mathbf{Z}_2, \mathbf{Z}_3$). Haciendo

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_x &= \mathbf{Z}_3 - \mathbf{Y}_1 & \mathbf{S}_x &= \mathbf{Z}_3 + \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{R}_y &= \mathbf{Z}_2 + \mathbf{X}_1 & \mathbf{S}_y &= \mathbf{Z}_2 - \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{R}_z &= \mathbf{Y}_2 + \mathbf{X}_3 & \mathbf{S}_z &= \mathbf{Y}_2 - \mathbf{X}_3 \end{aligned} \quad \text{(Figura 7)}$$

se puede ver que los \mathbf{R}_i son vectores rotación, según los 3 ejes, así como los \mathbf{S}_i son vectores de deformación a cortante, según los 3 planos coordenados. Pues bien,

$$\phi_R \cdot \mathbf{K}_R^1 \cdot \phi_R^T = \text{diag} (K, K, K, 0, 0, 0)$$

donde

$$\phi_R = (\mathbf{R}_x, \mathbf{R}_y, \mathbf{R}_z, \mathbf{S}_x, \mathbf{S}_y, \mathbf{S}_z)$$

Por tanto, \mathbf{K}_R^1 tiene rango 3 y constriñe a 6 modos básicos distintos a los 3 constreñidos por \mathbf{K}_C^1 (total de modos constreñidos: 9).

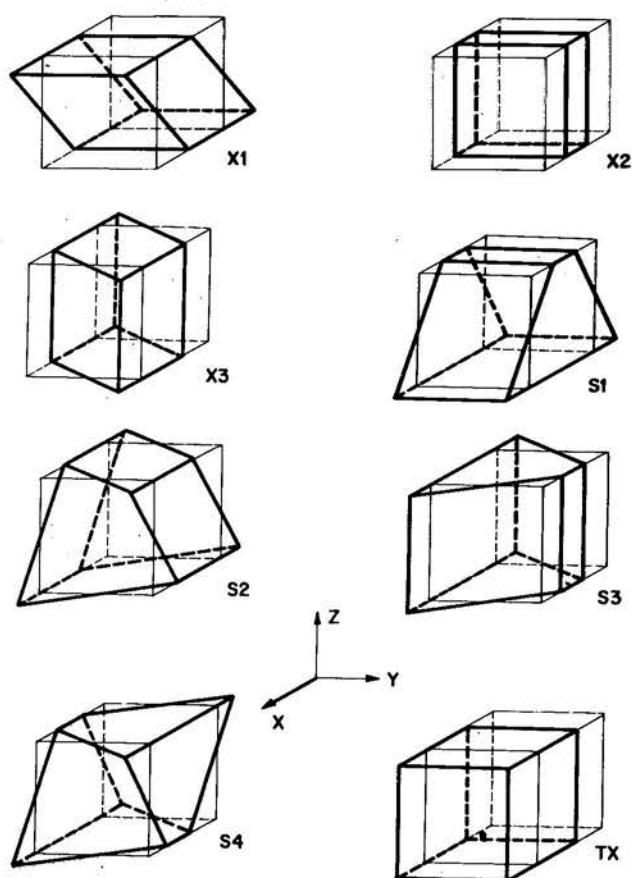


Figura 5.(a) Base ortogonal del espacio de 24 dimensiones al que pertenece el vector deformación en 3D. (a) Vectores con componente X

c) Componente K_s^1

Aquí, el producto

$$\phi_R \cdot K_s^1 \cdot \phi_R^T = \text{diag} (0 \ 0 \ 0 \ K \ K \ K)$$

con los que el rango de K aumenta en 3, aunque los modos constreñidos siguen siendo los 9 obtenidos anteriormente.

d) Componente K_G^2

Los modos con energía no nula son:

$X_2 \ S_1 \ S_3 \ S_4$ de la familia X

$Y_3 \ T_2 \ T_3 \ T_4$ de la familia Y

$Z_1 \ U_1 \ U_2 \ U_4$ de la familia Z

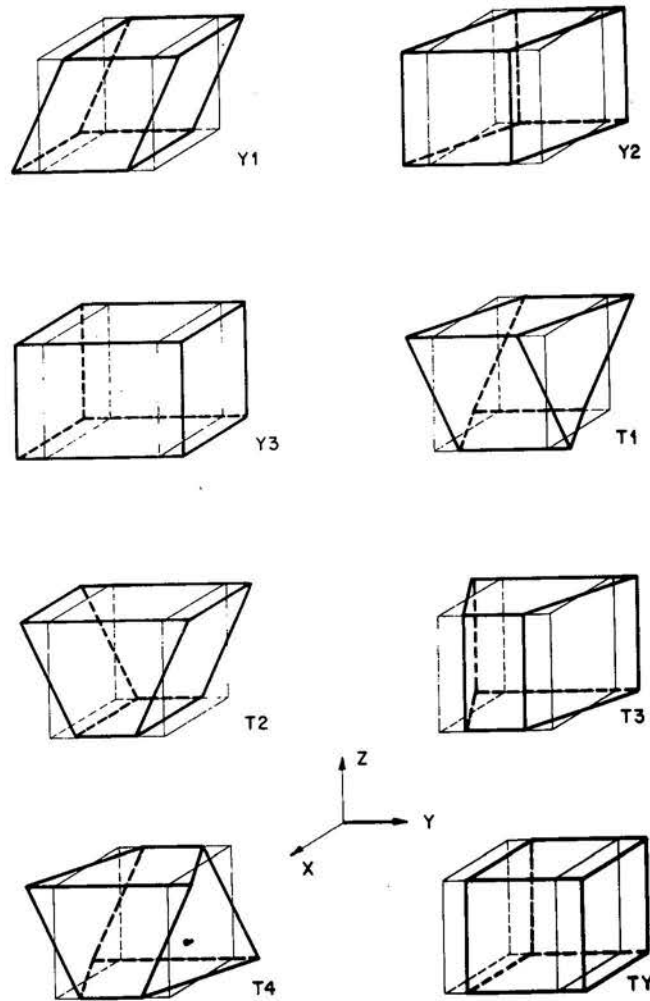


Figura 5.(b) Vectores con componente Y

Es decir, K_G^2 constriñe 9 modos más (hasta un total de 18) dado que X_2, Y_3 y Z_1 ya estaban constreñidos por K_C^1 . A este respecto, los 2 modos combinados V_{HG}^1 y V_{HG}^2 , que habíamos obtenido anteriormente, cumplen

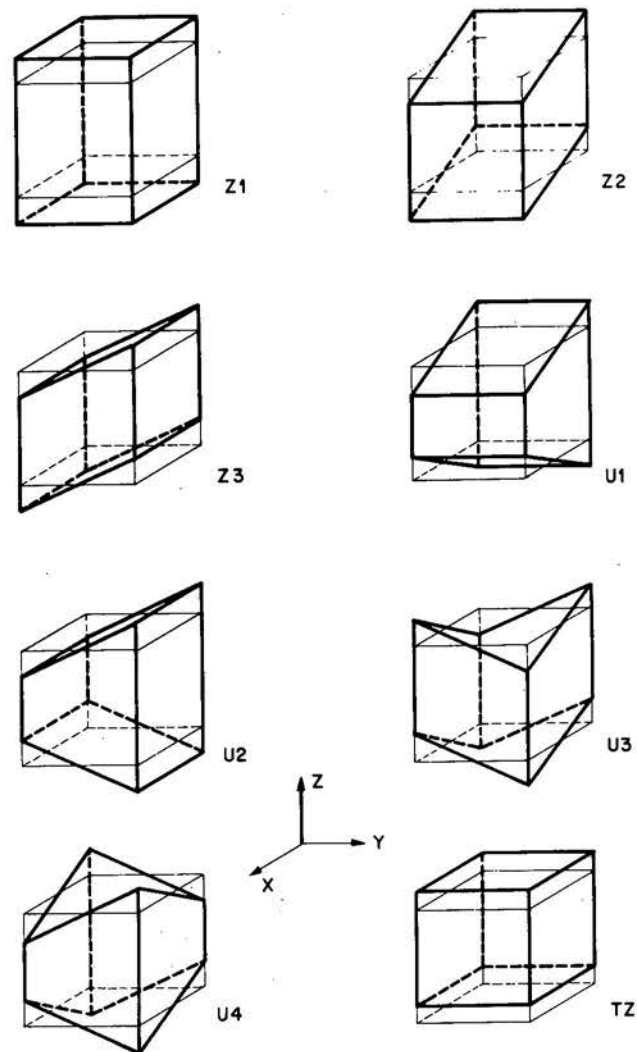
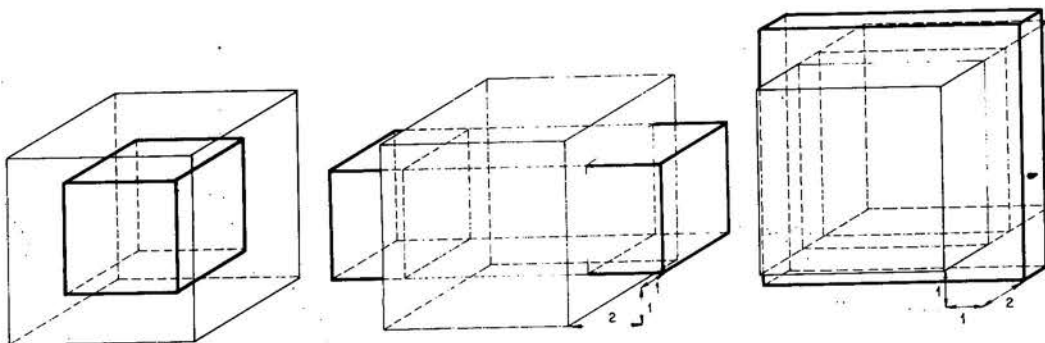
$$V_{HG}^1 \cdot K_G^2 \cdot V_{HG}^{1T} \neq 0$$

$$V_{HG}^2 \cdot K_G^2 \cdot V_{HG}^{2T} \neq 0$$

$$V_{HG}^1 \cdot K_G^2 \cdot V_{HG}^{2T} = 0$$

con lo que, como era de esperar, K_G^2 elimina la deformación (hourglass) a volumen constante.

El problema es que quedan 3 modos (aparte de los traslacionales puros) que siguen teniendo energía nula ante K . Dichos modos son S_2, T_1 y U_3 que se puede ver (Figura 5) que son modos torsionales

Figura 5(c) Vectores con componente Z Figura 6. Vectores V_C ; V_{HG}^1 y V_{HG}^2

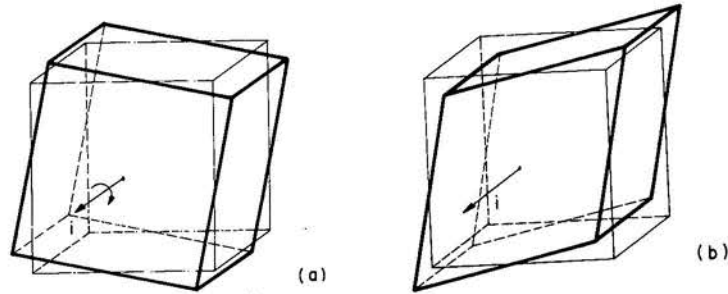


Figura 7. Vectores R_i y $S_i (i = x, y, z)$

S_2 , de las caras $\pm z$ y las caras $\pm y$

T_1 , de las caras $\pm x$ y las caras $\pm z$

U_3 , de las caras $\pm y$ y las caras $\pm x$

cuya energía nula ante K_R^1 se explica porque, al usar en ésta orden de integración 1, los planos restringidos son los planos medios del cubo que precisamente, para estos 3 modos, permanecen indeformados.

Las componentes de la torsión serán:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial r_x}{\partial x} \\ \theta_y &= \frac{\partial r_y}{\partial y} \\ \theta_z &= \frac{\partial r_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{69}$$

Habíamos procurado constreñir (vía el coeficiente de penalización p_R) las componentes de la rotación. La conveniencia de emplear integración reducida nos impide restringirlas de hecho más que en los planos medios. Pero de $r_x = r_y = r_z = 0$, en todo el dominio, por (69) se deduce que, asimismo,

$$\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0\tag{70}$$

lo que sugiere eliminar las componentes de la torsión con orden de integración 1 y por medio de un coeficiente de penalización.

De (69) y (41) se tiene:

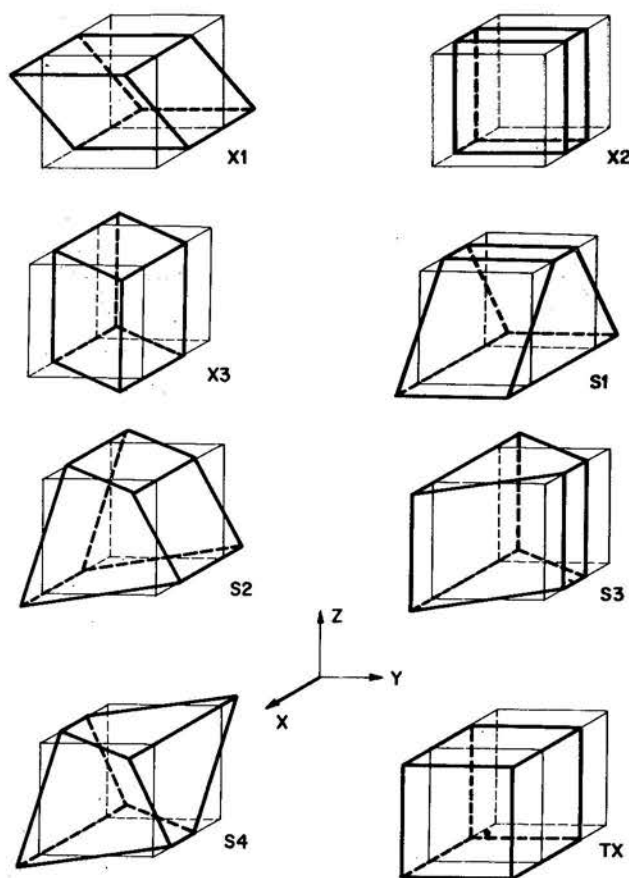


Figura 5.(a) Base ortogonal del espacio de 24 dimensiones al que pertenece el vector deformación en 3D. (a) Vectores con componente X

c) Componente K_s^1

Aquí, el producto

$$\phi_R \cdot K_s^1 \cdot \phi_R^T = \text{diag} (0 \ 0 \ 0 \ K \ K \ K)$$

con los que el rango de K aumenta en 3, aunque los modos constreñidos siguen siendo los 9 obtenidos anteriormente.

d) Componente K_G^2

Los modos con energía no nula son:

$X_2 \ S_1 \ S_3 \ S_4$ de la familia X

$Y_3 \ T_2 \ T_3 \ T_4$ de la familia Y

$Z_1 \ U_1 \ U_2 \ U_4$ de la familia Z

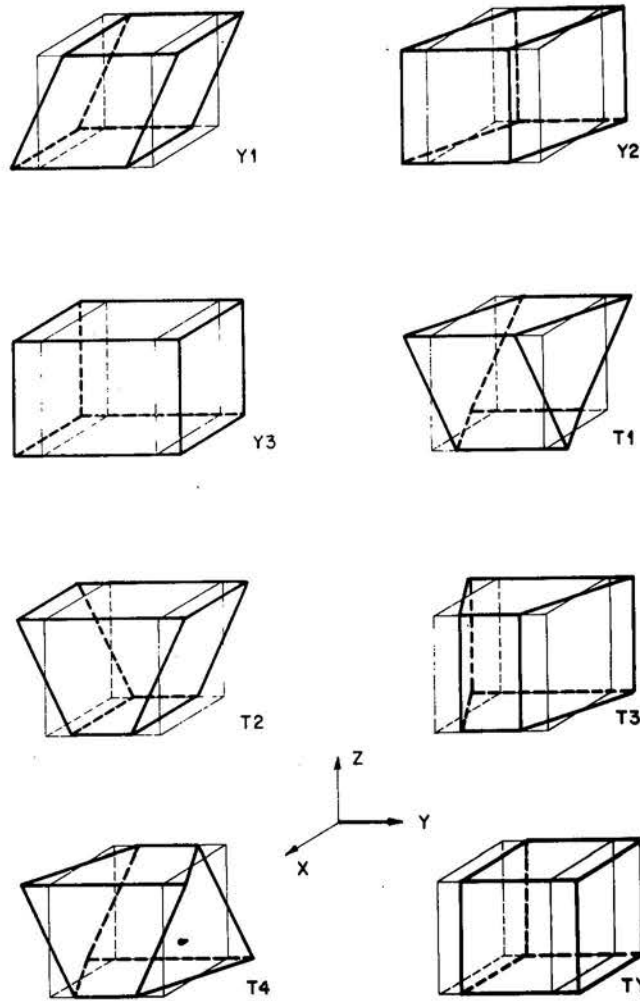


Figura 5.(b) Vectores con componente Y

Es decir, K_G^2 constriñe 9 modos más (hasta un total de 18) dado que X_2, Y_3 y Z_1 ya estaban constreñidos por K_C^1 . A este respecto, los 2 modos combinados V_{HG}^1 y V_{HG}^2 , que habíamos obtenido anteriormente, cumplen

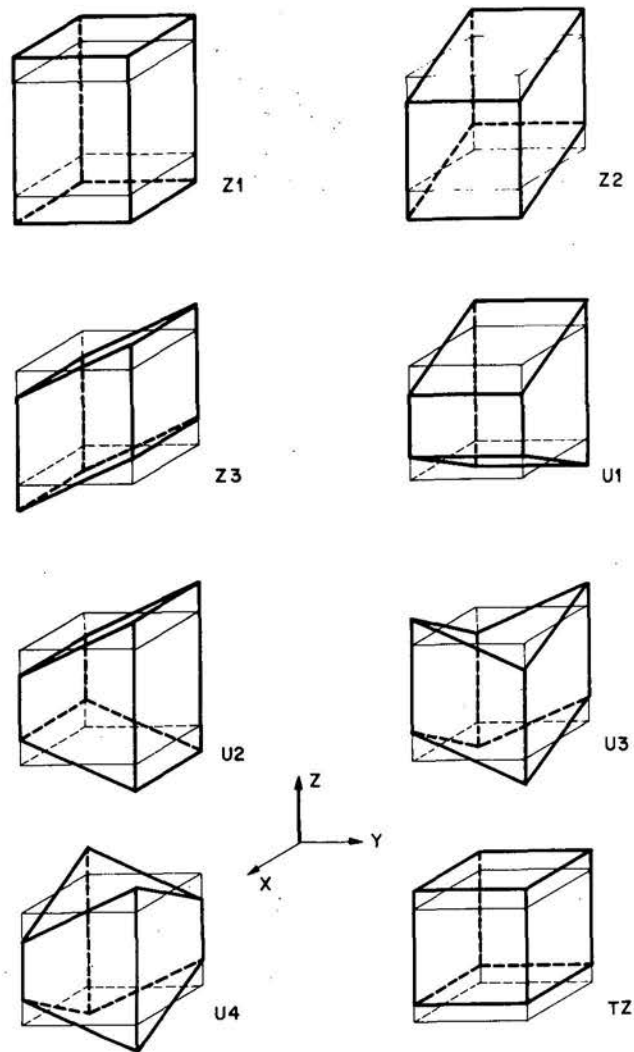
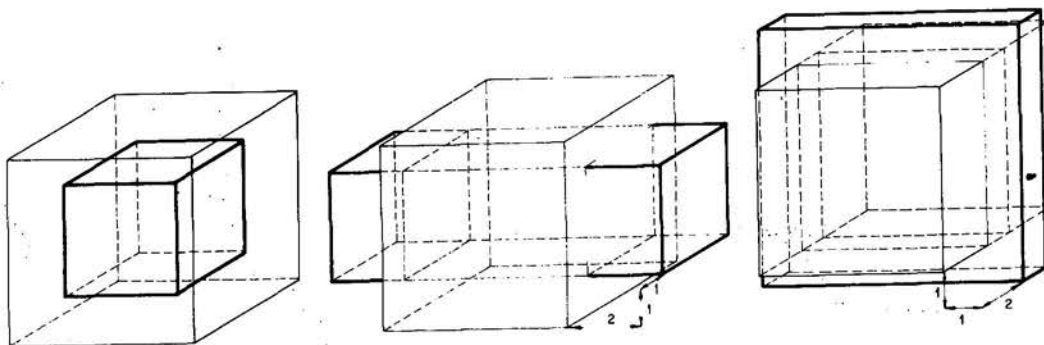
$$V_{HG}^1 \cdot K_G^2 \cdot V_{HG}^{1T} \neq 0$$

$$V_{HG}^2 \cdot K_G^2 \cdot V_{HG}^{2T} \neq 0$$

$$V_{HG}^1 \cdot K_G^2 \cdot V_{HG}^{2T} = 0$$

con lo que, como era de esperar, K_G^2 elimina la deformación (hourglass) a volumen constante.

El problema es que quedan 3 modos (aparte de los traslacionales puros) que siguen teniendo energía nula ante K . Dichos modos son S_2, T_1 y U_3 que se puede ver (Figura 5) que son modos torsionales

Figura 5(c) Vectores con componente Z Figura 6. Vectores V_C ; V_{HG}^1 y V_{HG}^2

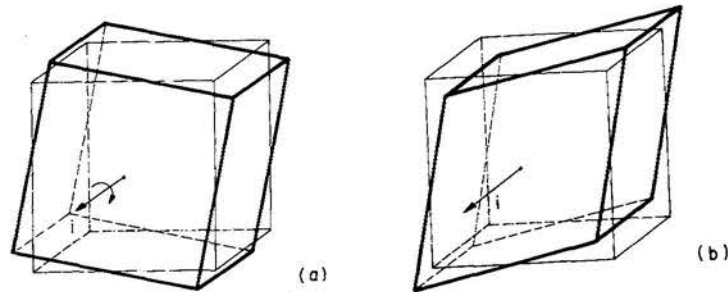


Figura 7. Vectores R_i y $S_i (i = x, y, z)$

S_2 , de las caras $\pm z$ y las caras $\pm y$

T_1 , de las caras $\pm x$ y las caras $\pm z$

U_3 , de las caras $\pm y$ y las caras $\pm x$

cuya energía nula ante K_R^1 se explica porque, al usar en ésta orden de integración 1, los planos restringidos son los planos medios del cubo que precisamente, para estos 3 modos, permanecen indeformados.

Las componentes de la torsión serán:

$$\begin{aligned}\theta_x &= \frac{\partial r_x}{\partial x} \\ \theta_y &= \frac{\partial r_y}{\partial y} \\ \theta_z &= \frac{\partial r_z}{\partial z}\end{aligned}\tag{69}$$

Habíamos procurado constreñir (vía el coeficiente de penalización p_R) las componentes de la rotación. La conveniencia de emplear integración reducida nos impide restringirlas de hecho más que en los planos medios. Pero de $r_x = r_y = r_z = 0$, en todo el dominio, por (69) se deduce que, asimismo,

$$\theta_x = \theta_y = \theta_z = 0\tag{70}$$

lo que sugiere eliminar las componentes de la torsión con orden de integración 1 y por medio de un coeficiente de penalización.

De (69) y (41) se tiene:

$$\begin{aligned}
\theta_x &= \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \\
\theta_y &= \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} \\
\theta_z &= \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x}
\end{aligned} \tag{71}$$

Es decir,

$$\boldsymbol{\theta} = \mathbf{L}_\theta \cdot \mathbf{u} = \mathbf{L}_\theta \cdot \mathbf{H} \mathbf{u}_o = \mathbf{B}_\theta \mathbf{u}_o \tag{72}$$

siendo

$$\mathbf{L}_\theta = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} & -\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2}{\partial z \partial y} & -\frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 \end{pmatrix} \tag{73}$$

y \mathbf{B}_θ es una matriz 3×24

Por tanto, haciendo

$$\mathbf{K}_\theta = k_B \int_v \mathbf{B}_\theta^T \cdot \mathbf{B}_\theta dv \tag{74}$$

resulta, teniendo en cuenta (66)

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C + p_e \mathbf{K}_R + \mu \mathbf{K}_S + \gamma h_m \cdot \mathbf{K}_G + p_t \cdot \mathbf{K}_\theta \tag{75}$$

donde p_t es el coeficiente de penalización adecuado a la restricción de torsiones y cuyo valor analizaremos en breve (Se ha asumido una nueva relación constitutiva

$$t_i = p_t \cdot k_B \cdot \theta_i \quad i = x, y, z \tag{76}$$

y se ha convertido el coeficiente de penalización en un número p_t veces mayor que k_B).

Si analizamos el rango de \mathbf{K}_θ^1 frente a los 24 vectores básicos resulta, en efecto, que los únicos con energía no nula son los deseados, es decir, S_2, T_1 y U_3 , con lo que ante

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e \mathbf{K}_R^1 + \mu \mathbf{K}_S^1 + \gamma h_m \mathbf{K}_G^2 + p_t \mathbf{K}_\theta^1 \tag{77}$$

los únicos modos de energía nula son los puramente traslacionales (TX, TY y TZ , Figura 5). Sin embargo, el rango de \mathbf{K}_θ es simplemente 2, lo que originará ciertos problemas que se analizan en un apartado siguiente.

Dado que la energía desarrollada por un modo R (ante \mathbf{K}_R^1) es del orden de 50 veces mayor que la desarrollada por S_2, T_1 y U_3 ante \mathbf{K}_θ^1 , el valor de p_t , que surtirá el

mismo efecto de apartar las frecuencias espúreas del rango de las de compresión, ha de ser necesariamente unas 50 veces mayor que el de p_e :

$$p_t = 50 p_e \quad (78)$$

PROBLEMAS NUMERICOS

La teoría anterior, impecable desde un punto de vista analítico, tropieza con las limitaciones del tratamiento numérico-informático que ha de hacerse de ella.

Se han desarrollado formulaciones de la rigidez de fluídos en 2D (38) y en 3D (77), con respectivamente 4 y 5 componentes, de las que en cada caso sólo una puede considerarse "ordinaria" en el sentido de que las magnitudes de sus elementos son comparables, del orden de magnitud, a las de otros elementos estructurales. El resto de las componentes matriciales podrían ser calificadas de "extraordinarias" o anormales.

Para complicar aún más las cosas, las hay anormalmente (y artificialmente) grandes a causa de los coeficientes de penalización, como son $p_e \cdot \mathbf{K}_R^1$ en 2 y D y $p_t \cdot \mathbf{K}_\theta^1$ en 3D, mientras que otras son anormalmente pequeñas $\mu \mathbf{K}_S^1$ (por el valor intrínseco de μ) y $\gamma h \mathbf{K}_G^2$ (tanto por el valor en general de γh como en particular para $h \rightarrow 0$). Ahora bien, normalmente los modos de oleaje no son de interés en análisis dinámicos normales. Esto nos permite recurrir al siguiente truco:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + p_e(\mathbf{K}_R^1 + 50 \mathbf{K}_\theta^1) + \pi(\mathbf{K}_S^1 + \mathbf{K}_G^2) \quad (79)$$

donde hemos sustituido μ y γh_m en (77) por π , siendo el significado de esta nueva constante el de una micropenalización cuyo objetivo sería alejar las frecuencias de oleaje a volumen constante lo suficiente del rango de frecuencias de compresión en el que estaríamos interesados, sin que se produzcan problemas numéricos; eso sí, al coste de perder la precisión en dichas frecuencias.

Sin embargo, si en las frecuencias en que estuviésemos interesados fuesen precisamente las de oleaje, el truco sería:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + \mathbf{K}_R^1 + 50 \mathbf{K}_\theta^1 + \gamma h_m \cdot \mathbf{K}_G^2 + \mu \mathbf{K}_\theta^1 \quad (80)$$

La penalización p_e desaparece (\mathbf{K}_R^1 y $50 \mathbf{K}_\theta^1$ ya están suficientemente penalizadas por k_B) y aparecen los coeficientes auténticos γh_m y μ .

Los valores correctos en cada caso y, en particular, en cada ordenador, se podrían discutir en base al criterio de la parcela propuesto en un apartado anterior: los valores adoptados mantendrán, con la precisión exigible, el éxito del test.

Para problemas normales (interacción líquido-estructura en casos de excitación sísmica) en un ordenador VAX, la aplicación de (79) con $p_e = 1000$ y $\pi = 0.001$, usando doble precisión, ha resultado satisfactoria tanto en 2D como en 3D.

MODOS DE BAJA FRECUENCIA

La propia naturaleza del líquido, reflejada en esas componentes de la rigidez afectadas por la micropenalización, da lugar a la aparición de modos de volumen constante con frecuencias asociadas bajas. Es importante conocer su número para poder comprobar que, efectivamente, sus frecuencias resultan suficientemente alejadas (por debajo) de las asociadas a modos de deformación volumétrica.

Sea la malla en 2D de la Figura 8.a, donde empleamos L elementos en sentido longitudinal y M en sentido vertical. El número de nodos será:

$$(NUMNP) = (L + 1) \cdot (M + 1) = L \cdot N + L + M + 1$$

con lo que el número bruto de grados de libertad es

$$(NBGDL) = 2LN + 2L + 2M + 2$$

Los 3 bordes imponen un número de condiciones de contorno esenciales que rebajan (NBGDL). El número de condiciones de contorno esenciales es

$$(NEBD) = L + 1 + 2(M + 1) = L + 2M + 3$$

Por consiguiente, el número neto de GDL' S es:

$$(NNGDL) = (NBGDL) - (NEBC) = 2LM + L - 1$$

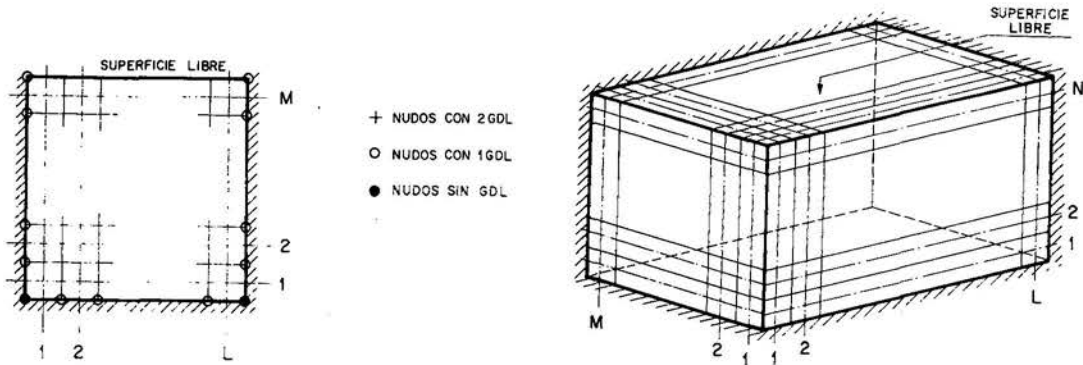


Figura 8. (a) Dominio rectangular $L \times M$ en 2D. (b) Dominio paralelepipedico $L \times M \times N$ en 3D

Las constricciones introducidas vía las componentes K_C^1 y K_R^1 de K son dos (una de compresión y otra de rotación) por elemento, para un total de $2LM$.

Por consiguiente, el número de modos de baja frecuencia será

$$(NLFM) = (NNGDL) - 2LM = L - 1 \quad (81)$$

es decir, tantos como columnas líquidas haya en el modelo menos uno.

De los $2LM$ modos restantes, la mitad (LM) corresponden al rango de interés. La otra mitad presentará frecuencias relativamente altas respecto a las del grupo de compresión. Otra cosa indicaría que el valor p_e elegido es inadecuado.

En 3D, la determinación de ($NLFM$) no es tan simple al no ser todas las constricciones introducidas vía rigidez, independientes de las condiciones de borde. No haber tenido esto en cuenta lleva a Wilson y Khalvati⁴ pensar erróneamente que su elemento funciona en 3D.

Sea un dominio paralelepípedo de $L * M * N$ elementos. En ausencia de K_θ , el número de modos de baja frecuencia es

$$(NLFM) = LM + L + M + N - 3 \quad (82)$$

valor a todas luces excesivo dado que, en general, estos modos no interesan para el cálculo y que muchos de ellos son, además espúreos. Definiendo K_θ en la forma consistente presentada en el texto (71-74) y recordando que la matriz así formulada tiene rango 2, el número de modos de baja frecuencia es:

$$(NLFM) = (L - 1) + (M - 1) + (L - 1) * (M - 1) = LM - 1 \quad (83)$$

donde ya no aparecen modos espúreos y que son, por tanto, los auténticos modos de oleaje. En efecto, en el dominio paralelepípedo considerado (Figura 8.b), podemos considerar L planos medios verticales en dirección transversal y M planos medios verticales en dirección longitudinal, planos que pueden asimilarse a dominios bidimensionales y que presentarían, por consiguiente, $M - 1$ y $L - 1$ modos de baja frecuencia cada uno. La introducción de K_θ reduce la independencia de esos modos, quedando como posibles:

- igual deformación en todos los planos medios transversales (torsión nula en 3 direcciones), para un total de $(M - 1)$ modos,
- igual deformación en todos los planos medios longitudinales (de nuevo torsión nula en 3 direcciones), para un total de $(L - 1)$ modos,
- combinación de modos a) y b) (torsión nula en direcciones vertical y diagonal), para un total de $(L - 1) \cdot (M - 1)$ modos (Figura 9).

Ello quiere decir que los $(L + M + N - 2)$ modos, eliminados por introducción de K_θ , eran espúreos y surgían como fruto de ignorar el cumplimiento de (70). Como de todas formas el valor (83) sigue siendo alto y recordando, una vez más, que en problemas normales de interacción fluido-estructura estos modos de baja frecuencia carecen de interés estructural, redefiniendo K_θ no según (74) sino a base de forzar

$$\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} = 0 \quad i \neq j \neq k \quad (84)$$

con lo que (70) se sigue cumpliendo, la rigidez así obtenida (ver APENDICE B), tiene ahora rango 3 con lo que automáticamente desaparecen los modos de oleaje tipo C,

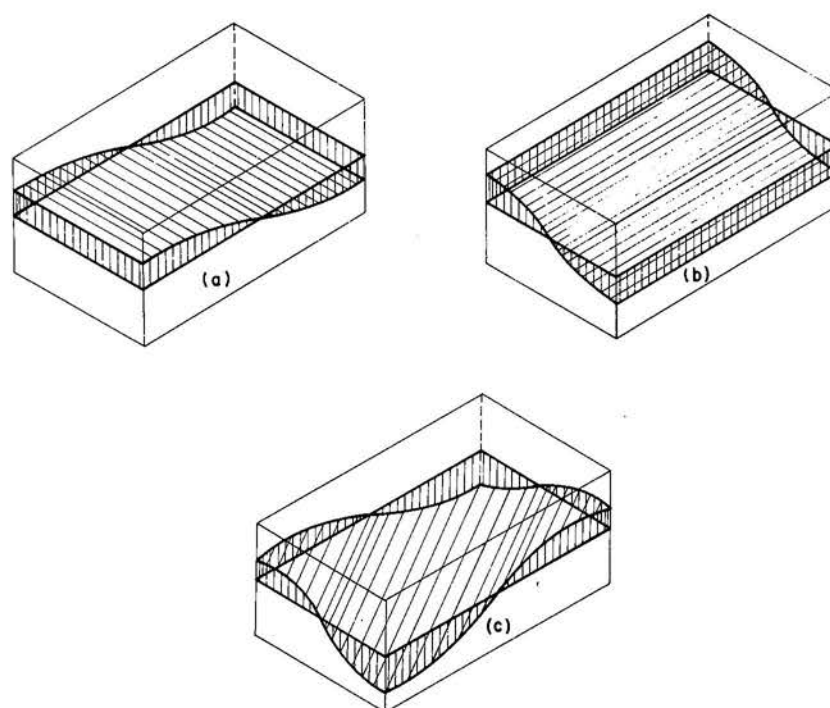


Figura 9. Modos típicos de oleaje. (a) longitudinales; (b) transversales y (c) mixtos quedando definitivamente

$$(NLFM) = L + M - 2 \quad (85)$$

con un ahorro de $(L - 1) (M - 1) \geq 0$ modos de baja frecuencia eliminados.

VALIDACION Y EJEMPLOS NUMERICOS

Una vez formulados los elementos líquidos en 2D y 3D, fueron introducidos en un programa general de elementos finitos¹¹ lo que nos permitió realizar una serie de pruebas de las que presentamos, a continuación, las más interesantes.

a) Frecuencias de vibración verticales

Para un depósito con superficie libre y profundidad de líquido H , los valores de dichas frecuencias vienen dados por la expresión¹²

$$\omega_K^v = \frac{2K - 1}{2} \frac{\pi C}{H} \quad (86)$$

donde $C = \sqrt{K_B}/\rho$ es la velocidad de propagación de las ondas en un fluido con módulo de deformación volumétrica K_B y densidad ρ . Se empleó un modelo de 640 m de altura, modelizado mediante 16 elementos de 40 m cada uno (Figura 10.a). En la Tabla IV se comparan los valores teóricos con los obtenidos para el modelo descrito, así como la evolución con el número de elementos.

Modo no.	FRECUENCIAS (rad/seg)		
	teóricas (form. 86)	obtenidas	error %
1	3.58	3.581	.03
2	10.74	10.71	.28
3	17.90	17.74	.89
4	25.06	24.60	1.84
5	32.22	31.22	3.10
6	39.38	37.54	4.67
7	46.54	43.49	6.55

a) Error creciente con ordinal del modo

No. de elementos \ Modo no.	1		2		3	
	frec. obt.	err. %	frec. obt.	err. %	frec. obt.	err. %
1	3.227	9.86	-	-	-	-
2	3.495	2.37	8.43	21.50	-	-
4	3.565	.42	10.14	5.59	15.18	15.20
8	3.583	.08	10.60	1.30	17.21	3.85
16	3.581	.03	10.71	.28	17.74	.89

b) Error decreciente al refinar la malla

Tabla IV. Precisión de frecuencias verticales. ($c = 1459.45$ m/seg)

b) Frecuencias de vibración horizontales

La realización de este ejemplo resulta sumamente ilustrativa sobre el comportamiento del fluido. En la referencia¹² se obtienen las siguientes expresiones para estas frecuencias:

$$\omega_k^{ha} = \frac{2K-1}{2} \frac{\pi C}{D} \quad (87a)$$

$$\omega_k^{hs} = \frac{2K}{2} \frac{\pi C}{D} \quad (87b)$$

donde D es el semiancho del depósito.

La primera expresión corresponde a modos antisimétricos y la segunda a modos simétricos. Sometiendo a un modelo confinado (es decir, sin superficie libre) al análisis, las frecuencias obtenidas coinciden con las predichas por las fórmulas (87). Ver Figura 10.b y Tabla V. Sin embargo, la existencia de una superficie libre cambia radicalmente las cosas. Esto puede parecer sorprendente en principio, pero no es así.

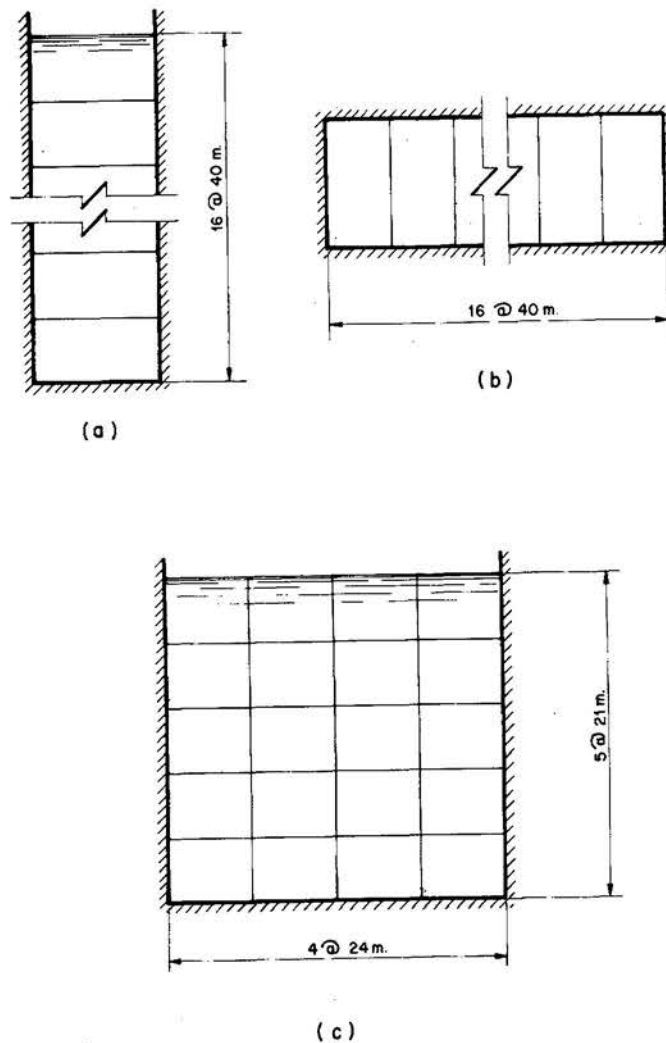


Figura 10. Modelos empleados en los ejemplos. (a) frecuencias verticales. (b) frecuencias horizontales. (c) caso mixto.

De la atenta observación del método de obtención de las frecuencias (86 y 87) en la referencia¹², se puede ver que, de un problema en 2D, los autores obtienen dos problemas unidimensionales por separación de variables. Una de las condiciones de contorno es que los modos tienen coordenadas vertical 0 en la superficie superior, lo cual no es cierto salvo que aquella esté confinada.

Es por ello que en el modelo mixto (Figura 10.c) siguen apareciendo modos puros verticales con la frecuencias predichas por la fórmula (86), pero los modos horizontales y las frecuencias (87) dejan de cumplirse. Aparecen en su lugar frecuencias mixtas por interacción de los modos horizontales con los verticales (Tabla VI, b). Curiosamente, con μ (micropenalización de la matriz de cortante) tendiendo a un valor alto (Tabla VI, a), se recuperan los modos puros horizontales, lo que supone una prueba adicional por reducción al absurdo de lo anteriormente expuesto, ya que en un líquido, $\mu \rightarrow 0$.

Modo no.	tipo	FRECUENCIAS (rad/seg)		
		teóricas (form. 86)	obtenidas	error %
1	anti	7.16	7.16	.00
2	sim	14.32	14.24	.56
3	anti	21.18	21.19	.05
4	sim	28.64	27.94	2.44
5	anti	35.80	34.41	3.88
6	sim	42.96	40.56	5.58
7	anti	50.12	46.32	7.58
8	sim	57.28	51.63	9.86

a) Error creciente con ordinal del modo

No. de elemntos	Modo 1 Antisim.		Modo 1 Simetr.	
	frec. obt.	err. %	frec. obt.	err. %
2	6.45	9.92	-	-
4	6.99	2.37	12.91	9.84
8	7.12	.56	13.97	2.44
16	7.16	.00	14.24	.56

b) Error decreciente al refinar la malla

Tabla V. Precisión de frecuencias horizontales.(c = 1459.45 m/seg)

c) Frecuencias de oleaje

Hemos resuelto con $p_e = 1$, tal como se explicó anteriormente, el problema de oleaje que se recoge en la referencia³ (Figura 11) y sin extraer h_m de la integral (32), con lo que, manteniendo la nomenclatura del texto, sería

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_C^1 + \mathbf{K}_R^1 + \gamma \int_{\Omega} \mathbf{B}_3^T \cdot \mathbf{h} \cdot \mathbf{B}_3 d\Omega + \mu \mathbf{K}_S^1 \quad (88)$$

El resultado, con $\mu \rightarrow 0$, se recoge en la Figura 11 donde se ve una perfecta coincidencia con la referencia³ para la primera frecuencia, que es la única presentada por los autores de dicha referencia.

d) Caso tridimensional

Hemos discutido en b) la resolución del sistema de autovalores en 2D, realizada por Chopra. Un comentario adicional surge de la resolución de un caso tridimensional: habría, con igual razón, modos horizontales longitudinales que modos transversales. No

Modo no.	caracter	FRECUENCIAS (rad/seg)		
		teóricas (form. 86-87)	obtenidas	error %
1	vertical	21.83	21.66	.77
2	h-antsim	47.76	46.49	2.66
3	vertical	65.50	63.09	3.68
4	h-simetr	95.52	85.99	9.98
5	vertical	109.17	98.29	9.97
6	h-antsim	143.28	112.37	21.57
7	vertical	152.83	123.87	18.95
8	vertical	196.50	137.29	30.13

a) Modelo 4 x 5 con MACROpenalti en K_s

Modo no. (*)	caracter	frecuencias obtenidas
1	vertical puro	21.72
2	antisimétrico mixto hor.-vert	50.20
3	antisimétrico mixto hor.-vert	61.55
4	vertical puro	63.11
5	antisimétrico mixto hor.-vert	71.75
6	antisimétrico mixto hor.-vert	79.32
7	simétrico mixto hor.-vert	86.37
8	simétrico mixto hor.-vert	89.07
9	simétrico mixto hor.-vert	93.17

(*): Ordinal, ignorando los 3 modos de oleaje.

b) Modelo 4 x 5 con MICROpenalti en K_s

Tabla VI. Modelo bidimensional con modos desacoplados (a) y acoplados (b). (Nótese que la formulación (a) es incorrecta)

podemos entrar en detalles que se escaparían del alcance de este trabajo. Solamente queremos hacer hincapié en que la solución de Chopra, con la limitación antes apuntada, al ignorar las frecuencias longitudinales, sería válida para longitud infinita de embalse.

En cualquier caso, la dimensión longitudinal suele ser de orden de magnitud superior a la transversal y a la profundidad, —al menos en casos de interacción presa-

embalse-, con lo que si bien es cierto que las primeras frecuencias tienden a 0, siempre habrá un cierto K para el que los valores dados por (87) entren en el rango de influencia de la estructura. La dimensión longitudinal ha de estar fijada, por tanto, en base a un criterio de este tipo. Es un caso similar al de interacción suelo-estructura: la dimensión infinita del suelo daría frecuencia nula y, sin embargo, se adopta, bien que un poco "apriorísticamente", un dominio de suelo con un radio entre H y $3H$, siendo H la altura de la presa^{12,13}.

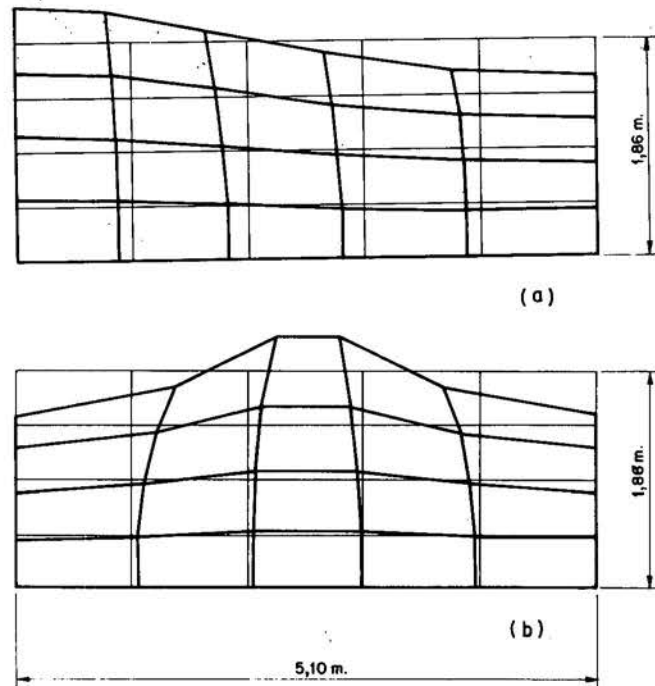


Figura 11. Modos de oleaje a volumen constante en 2D. (a) primer modo : 2.209 rad/seg. (b) segundo modo : 3.501 rad/seg.

CONCLUSIONES

Resumiremos las conclusiones del tema expuesto en los siguientes puntos:

1. Es posible la definición de un elemento finito líquido planteado en desplazamientos, para resolución de problemas de interacción fluido-estructura en fluidos confinados totalmente o con una superficie libre.
2. Para ello es preciso emplear repetidamente integración reducida en los términos penalizados, tanto los penalizados de forma natural (compresibilidad) como los penalizados artificialmente (irrotacionalidad y atorsionalidad).
3. El problema originado por la deficiencia en rango de la rigidez obtenida con el esquema de integración reducida se resuelve añadiendo una rigidez geométrica, con

integración normal, planteando el balance diferencial de energía de posición ante pequeños desplazamientos sin variación de volumen.

4. Lo anterior permite obtener las frecuencias de oleaje, con ciertas limitaciones de tipo numérico.
5. En la resolución del problema aparecen siempre estos modos, normalmente innecesarios, pero que se pueden reducir al mínimo.
6. La vibración horizontal de un fluido con superficie libre, no es independiente de la vertical.

APENDICE A

Obtención rigurosa de K_G

En el texto se recurre a conceptos intuitivos para la obtención de la rigidez que hemos denominado geométrica K_G . A continuación se procede a una obtención más rigurosa de la misma.

Sea un elemento diferencial de área $d\Omega$ en el interior de un dominio amplio de fluido, de profundidad total H . En un instante determinado, la energía potencial de dicho elemento tiene una parte convertible en otras formas de energía:

$$\gamma(H - y_m) d\Omega \quad (A - 1)$$

Si la masa fluída experimenta una pequeña deformación a volumen constante, el elemento considerado pasa a tener una energía convertible:

$$\gamma(H - y_m) d\Omega (1 - \delta_{cv}^2) \quad (A - 1)$$

En efecto,

- antes de la deformación $d\Omega = dx \cdot dy$
- después de la deformación, según (26)

$$dx \rightarrow dx \left(1 + \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{cv} \right) = dx(1 + \delta_{cv})$$

$$dy \rightarrow dy \left(1 + \frac{\partial v}{\partial y} \Big|_{cv} \right) = dy(1 - \delta_{cv})$$

por tanto, $d\Omega \rightarrow d\Omega(1 - \delta_{cv}^2)$

Es decir, la energía convertible ha disminuído en $\gamma(H - y_m)\delta_{cv}^2 d\Omega$, energía que se ha consumido en la deformación a volumen constante

$$dE = \gamma z_m \cdot \delta_{cv}^2 d\Omega \quad (A - 3)$$

donde $z_m = H - y_m$ es la profundidad media del elemento que, en términos de rigidez equivale a asociar, tal como se hizo en el texto, una tensión $g = \gamma z_m \delta_{cv}$ con la deformación δ_{cv} a volumen constante.

APENDICE B

Obtención de K_θ con rango 3

Si forzamos vía un penalti adecuado a que

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y \partial z} = \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial x} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = 0 \quad (B-1)$$

automáticamente se cumple la condición (70). Para comprobarlo basta entrar con (84) en (71).

Definimos 3 relaciones constitutivas del tipo

$$t_i = p_t K_B \cdot \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \quad i = 1 \text{ a } 3; \quad j, k \neq i \quad (B-2)$$

llamando

$$\xi_i = \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_j \partial x_k} \quad y \quad \xi^T = (\xi_1 \ \xi_2 \ \xi_3)$$

será

$$\xi = L_\xi u = L_\xi \cdot H \cdot u_o = B_\xi u_o \quad (B-3)$$

$$L_\xi = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial^2}{\partial z \partial x} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \end{pmatrix} \quad (B-4)$$

lo que nos permite redefinir K_θ

$$K_\theta = K_B \int B_\xi^T \cdot B_\xi \cdot dv \quad (B-5)$$

matriz con rango 3 y perfectamente sustituible en (75) al no afectar nada más que a los 3 modos torsionales S_2, T_1 y U_3 .

REFERENCIAS

1. H.M. Westergaard, "Water pressures on dams during earthquakes", *Trans. Am. Soc. Civ. Eng.*, pp. 418-473, (1931).
2. L.G. Olson y K.J. Bathe, "A study of displacement-based fluid finite elements for calculating frequencies of fluid and fluid-structure system", *Nuclear Eng. & Design* **76**, pp. 137-151, (1983).
3. E.L. Wilson y M. Khalvati, "Finite elements for the dynamic analysis of fluid-solid systems", *Int. J. num. meth. engng.*, **19**, pp. 1657-1668, (1983).
4. L.G. Olson y K.J. Bathe, "Analysis of fluid-structure interactions. A direct, symmetric coupled formulation based on the fluid velocity potential", *Comp. & Struct.*, Vol. **21**, no. 1/2, pp. 21-32, (1985).
5. ADINA (Automatic Dynamic Incremental Nonlinear Analysis), User's Manual, *Report AE 84-1*, Adina Engineering, Watertown, (1984).
6. K.J. Bathe y E.L. Wilson, "Numerical Methods in Finite Element Analysis", Chapter 4, Prentice Hall, Englewood Cliffs, (1976).
7. M.A. Hamdi, Y. Ousset y G. Verchery, "A displacement method for the analysis of vibrations of coupled fluid-structure systems", *Int. J. num. meth. engng.*, Vol. **13**, pp. 139-150, (1978).
8. O.C. Zienkiewicz, "El método de elementos finitos", Capítulos 3 y 11, Editorial Reverté, Barcelona, (1979).
9. R.L. Taylor, J.C. Simó, et al. "The patch-test, a condition for assessing FEM convergence", *Int. J. num. meth. engng.*, Vol. **22**, pp. 39-62, (1986).
10. D.P. Flanagan y T. Belytschko, "A uniform strain hexahedron and quadrilateral with orthogonal hourglass control", *Int. J. num. meth. engng.*, Vol. **17**, pp. 679-706, (1981).
11. SAP ID (Programa de Análisis Estructural de Iberduero) Manual de Uso. (Versión aumentada del SAP IV de Bathe, Wilson y Peterson, *UCB/EERC 73/11*, Berkeley 1974). Documento KI-INCENIA-003, Rev. 4, (1987).
12. A.K. Chopra y K. Fok, "Earthquake analysis and response of concrete arch dams", *Rep. no. UCB/EERC-85/07*, Earthquake engng. Research Center, Univ. de California, Berkeley, (1985).
13. R.W. Clough, J.M. Raphael, y S. Mojtahedi, "ADAP, a computer program for static and dynamic analysis of arch dams", *Rep. no. 73/14*, Earthq. engng. Research Center, Univ. de California, Berkeley, (1973).