

DETERMINACIÓN APROXIMADA DE LA FRECUENCIA FUNDAMENTAL DE PLACAS RECTANGULARES MEDIANTE EL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

RICARDO OSCAR GROSSI

*Programa de Matemática Aplicada de Salta
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Salta
Buenos Aires 177, 4400, Salta, República Argentina*

RESUMEN

En este trabajo se presentan los detalles del desarrollo y aplicación de un algoritmo general que permite la resolución de una gran cantidad de problemas de vibraciones libres de placas rectangulares que presentan diversos efectos que complican el modelo matemático, tales como anisotropía y ortotropía en el material de la placa, espesor variable, bordes elásticamente restringidos contra rotación y translación, etc. Este algoritmo está basado en la aplicación del método de Rayleigh-Ritz con expresiones polinómicas como funciones aproximantes, para generar una ecuación de frecuencias de fácil tratamiento tanto analítico como numérico. El mismo presenta la particularidad de permitir el uso de diferentes expresiones analíticas para definir ciertos parámetros característicos adimensionales, tales como, los coeficientes de frecuencia, los coeficientes de rigidez rotacional y translacional y los coeficientes de rigidez a la flexión. Los valores numéricos obtenidos tienen una buena precisión desde el punto de vista ingenieril, y el algoritmo puede ser fácilmente implementado en una computadora personal. El software así obtenido, constituye una herramienta adecuada para trabajos de diseño, dado que una gran cantidad de problemas sobre placas vibrantes con efectos complicantes, pueden ser resueltos con un trabajo computacional relativamente simple.

SUMMARY

The Rayleigh-Ritz method is used to generate results for a great number of flexural vibration problems for rectangular plate with several complicating effects. The general algorithm developed allows the inclusion of analysis of anisotropic and orthotropic materials, variable thickness, elastically restrained edges, etc. Also distinct expressions of adimensional parameters can be considered. The values obtained are accurate from an engineering viewpoint and the entire algorithm can be implemented in a personal computer. The software constitutes a useful tool in design work since a great amount of vibrating plate problems which involve several complicating effects can be solved, without an important amount of computational work.

Recibido: Abril 1995

INTRODUCCIÓN

El análisis dinámico de placas rectangulares es un problema que ha sido tratado con extensión por una gran cantidad de investigadores en todo el mundo. A su vez, es abrumadora la cantidad de información que al respecto se ha difundido. Por ello en este trabajo tan sólo una limitada selección de artículos se incluye en la lista de referencias.

Los métodos variacionales ocupan un lugar destacado como herramienta para la resolución del problema mencionado. En particular, el método de Rayleigh-Ritz se caracteriza por permitir la obtención de las expresiones analíticas de los términos de la ecuación de frecuencias. Esta posibilidad de manejo de expresiones analíticas constituye una formidable ventaja para analizar la variación de ciertas variables y/o parámetros. Una característica del método, que a veces constituye una desventaja, es que deben proponerse adecuadamente las funciones aproximantes. Al respecto se han utilizado diversos tipos de funciones, tales como: polinomios ortogonales, funciones exponenciales y funciones circulares¹⁻⁻⁸. En los últimos años se han utilizado funciones aproximantes que contienen parámetros indeterminados, para resolver una enorme cantidad de problemas⁹⁻⁻¹⁴. Probablemente el más simple de todos estos procedimientos, es aquél que se genera mediante la aplicación del método de Rayleigh-Ritz con el uso de polinomios para construir las funciones aproximantes. Las referencias [15] a [20] constituyen algunos ejemplos del uso de esta metodología, y los mismos tienen una característica en común, que es la de conducir a la generación de algoritmos de fácil manejo tanto desde el punto de vista analítico como del numérico. Esta característica esencial permite que puedan ser tenidos en cuenta diversos efectos complicantes, tales como: anisotropía y ortotropía en el material, espesor variable, bordes elásticamente restringidos, etc. Además, dichos algoritmos proporcionan resultados con buena precisión desde el punto de vista práctico. El algoritmo presentado en este trabajo tiene una característica adicional que es la de permitir el uso de diferentes expresiones analíticas para diversos parámetros característicos. Es común, que los coeficientes de frecuencias y otros parámetros característicos, correspondientes a los problemas de placas mencionados, se presenten en forma adimensional con distintas expresiones analíticas. Así, por ejemplo, cuando se analiza el comportamiento dinámico de placas rectangulares isotrópicas de espesor variable, se utilizan comúnmente una de las siguientes expresiones para los coeficientes de frecuencias:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega a^2 \qquad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega b^2$$

donde a y b indican las longitudes de los lados de la placa, ρ la densidad del material, $h^{(1)}$ el espesor de la placa, $D^{(1)}$ la rigidez a la flexión y ω la frecuencia circular.

Lo mismo ocurre con otros parámetros, como los coeficientes de rigidez rotacional que pueden ser definidos, por ejemplo, de la siguiente manera:

$$R_1 = \frac{r_1 a}{D^{(1)}}, \qquad R_2 = \frac{r_2 a}{D^{(2)}},$$

donde $D^{(1)}$ y $D^{(2)}$ indican rigidez a la flexión referida al borde 1 y 2 respectivamente (ver Figura 1). Pero dichos coeficientes también pueden ser definidos como:

$$R_1 = \frac{r_1 b}{D^{(1)}}, \quad R_2 = \frac{r_2 b}{D^{(1)}},$$

en este caso se usa b en lugar de a , tanto en R_1 como en R_2 , y la rigidez a la flexión en R_2 está referida al borde 1, es decir se usa $D^{(1)}$ en lugar de $D^{(2)}$.

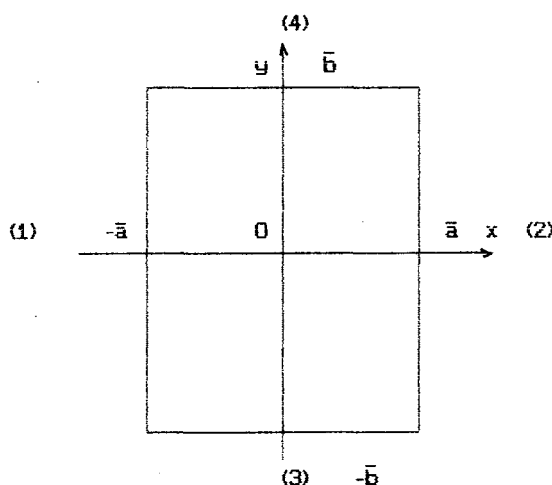


Figura 1. Dimensiones originales de la placa ($\bar{a} = a/2$, $\bar{b} = b/2$)

Es evidente que resulta imposible o al menos dificultosa, una comparación de valores de coeficientes de frecuencia entre dos trabajos donde no hay coincidencia en las expresiones adoptadas para ciertos parámetros característicos como los indicados.

El algoritmo aquí presentado posibilita, mediante una selección de parámetros, generar distintas expresiones analíticas para los coeficientes Ω_i , R_i , y T_i , entre otros. Es decir, que permite usar diferentes expresiones para varios parámetros característicos, posibilitando una automática comparación de valores de frecuencias.

Un algoritmo, con estas características, constituye una eficiente herramienta, para la determinación de valores de coeficientes de frecuencia, para una gran cantidad de problemas distintos, y resulta por ende, de importancia en trabajos de diseño preliminar.

APLICACIÓN DEL MÉTODO DE RAYLEIGH-RITZ

El método de Rayleigh-Ritz requiere la minimización del siguiente funcional:

$$I[W] = U_{\max} - T_{\max} \quad (1)$$

siendo: $U_{\max} = U_{p,\max} + U_{r,\max} + U_{t,\max}$

$U_{p,\max}$: valor máximo de la energía de deformación de la placa.

$U_{r,\max}$: valor máximo de la energía almacenada en los vínculos rotacionales de los bordes de la placa.

$U_{t,\max}$: valor máximo de la energía almacenada en los vínculos traslacionales de los bordes de la placa.

T_{\max} : valor máximo de la energía cinética de la placa.

Vamos a considerar un funcional general que represente al máximo valor de la energía de deformación de una amplia variedad de placas rectangulares. Sea entonces:

$$U_{p,\max} = \frac{1}{2} \int_R \int_R \left\{ D_1(W_{xx})^2 + D_2(W_{yy})^2 + 2D_3W_{xx}W_{yy} + 4D_4(W_{xy})^2 + 4D_5W_{xx}W_{xy} + 4D_6W_{xy}W_{yy} \right\} dxdy \quad (2)$$

donde $W = W(x, y)$ representa la deflexión de la placa y los subíndices indican derivación de W respecto a la variable que se usa como subíndice. Tal como se destaca en la Figura 1, el dominio de integración está dado por:

$$R = [-\bar{a}, \bar{a}] \times [-\bar{b}, \bar{b}], \quad \bar{a} = \frac{a}{2}, \quad \bar{b} = \frac{b}{2},$$

donde a y b denotan los lados de la placa, en la dirección de los ejes x e y respectivamente. En el funcional (2), los coeficientes D_i , ($i = 1, 2, \dots, 6$), representan las rigideces a la flexión, las rigideces torsionales y las rigideces adicionales de la placa.

La máxima energía que corresponde a los vínculos rotacionales, que actúan a lo largo de los bordes de la placa, viene dada por:

$$U_{r,\max} = \frac{1}{2} \left\{ r_1 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} [W_x(-\bar{a}, y)]^2 dy + r_2 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} [W_x(\bar{a}, y)]^2 dy + r_3 \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} [W_y(x, -\bar{b})]^2 dx + r_4 \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} [W_y(x, \bar{b})]^2 dx \right\} \quad (3)$$

donde r_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) denotan los coeficientes de vínculo rotacional.

Por otra parte, la máxima energía que corresponde a los vínculos traslacionales viene dada por:

$$U_{t,\max} = \frac{1}{2} \left\{ t_1 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} [W(-\bar{a}, y)]^2 dy + t_2 \int_{-\bar{b}}^{\bar{b}} [W(\bar{a}, y)]^2 dy + t_3 \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} [W(x, -\bar{b})]^2 dx + t_4 \int_{-\bar{a}}^{\bar{a}} [W(x, \bar{b})]^2 dx \right\} \quad (4)$$

donde t_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) denotan los coeficientes de vínculo traslacional. Finalmente, el valor máximo de energía cinética de la placa viene dado por:

$$T_{\max} = \frac{\rho\omega^2}{2} \int_R \int_R h(x, y) W(x, y)^2 dxdy \quad (5)$$

donde ρ denota la densidad del material de la placa y $h(x, y)$ indica la función que da el espesor de la placa.

A efectos de facilitar los desarrollos analíticos, es conveniente introducir el cambio de variables $\bar{x} = x/\bar{a}$ $\bar{y} = y/\bar{b}$, que modifica el dominio de integración y lo transforma en un cuadrado de longitud de lado igual a uno. No obstante, de aquí en más, para simplificar la notación, se vuelven a usar las letras x e y en lugar de \bar{x} y de \bar{y} .

ADOPCIÓN DE LA FUNCIÓN APROXIMANTE

Vamos a adoptar como función aproximante a la siguiente expresión construída con expresiones polinómicas:

$$W(x, y) = A_1 X_1(x) Y_1(y) + A_2 X_2(x) Y_2(y) \quad (6)$$

donde es:

$$X_1(x) = \sum_{i=1}^5 a_i x^{n_i} \quad Y_1(y) = \sum_{i=1}^5 a'_i y^{n_i} \quad (7)$$

$$X_2(x) = \sum_{i=1}^5 b_i x^{m_i} \quad Y_2(y) = \sum_{i=1}^5 b'_i y^{m_i} \quad (8)$$

$$a_1 = a'_1 = 1, \quad n_1 = 0, \quad n_2 = 1, \quad n_3 = 2, \quad n_4 = 3, \quad n_5 = 4, \quad b_1 = b'_1 = 1, \\ m_1 = 1, \quad m_2 = 2, \quad m_3 = 3, \quad m_4 = 4, \quad m_5 = 5 \quad (9)$$

Los coeficientes a_i , b_i , a'_i y b'_i se obtienen de los sistemas de ecuaciones lineales que resultan al reemplazar (6) en las condiciones de contorno correspondientes¹⁵. La expresión (6) se caracteriza por ser de muy fácil manejo analítico, permitiendo obtener con facilidad las expresiones de los términos que componen la ecuación de frecuencias.

ECUACIÓN DE FRECUENCIAS

El reemplazo de la función aproximante $W(x, y)$ en el funcional (1) conduce a la siguiente ecuación de balance energético:

$$\left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}^3}\right) D_1^{(1)} I_1 + \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}^3}\right) D_2^{(1)} I_2 + 2\left(\frac{1}{\bar{a}\bar{b}}\right) D_3^{(1)} I_3 + 4\left(\frac{1}{\bar{a}\bar{b}}\right) D_4^{(1)} I_4 + \\ + 4\left(\frac{1}{\bar{a}^2}\right) D_5^{(1)} I_5 + 4\left(\frac{1}{\bar{b}^2}\right) D_6^{(1)} I_6 + r_1 \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}^2}\right) I_7 + r_2 \left(\frac{\bar{b}}{\bar{a}^2}\right) I_8 + \quad (10)$$

$$+ r_3 \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}^2}\right) I_9 + r_4 \left(\frac{\bar{a}}{\bar{b}^2}\right) I_{10} + t_1 \bar{b} I_{11} + t_2 \bar{b} I_{12} + t_3 \bar{a} I_{13} + t_4 \bar{a} I_{14} - \rho h^{(1)} \omega^2 \bar{a} \bar{b} I_{15} = 0$$

Los términos I_i en (10), están dados por:

$$\begin{aligned}
 I_i &= \sum_{j=1}^3 C_j P X_{ij} P Y_{ij}, \quad i = 1, 2, 4; & I_i &= \sum_{j=1}^4 B_j P X_{ij} P Y_{ij}, \quad i = 3, 5, 6; \\
 I_i &= \sum_{j=1}^3 C_j R X_{i-6,j} R Y_{i-6,j}, \quad i = 7, 8, 9, 10; & I_i &= \sum_{j=1}^3 C_j T X_{i-10,j} T Y_{i-10,j}, \quad i = 11, 12, 13, 14 \\
 I_{15} &= \sum_{j=1}^3 C_j C X_j C Y_j
 \end{aligned}$$

donde es: $C_1 = A_1^2$, $C_2 = A_2^2$, $C_3 = 2A_1A_2$, $B_1 = A_1^2$, $B_2 = A_2^2$, $B_3 = A_1A_2$, $B_4 = B_3$.

En el apéndice se incluyen las expresiones analíticas de los términos PX_{ij} , PY_{ij} , RX_{ij} , RY_{ij} , TX_{ij} , TY_{ij} , CX_j y CY_j . Operando algebraicamente en (10), se construye fácilmente la expresión del coeficiente de frecuencias Ω deseado, y dado que los términos I_i son funciones de los parámetros A_1 y A_2 , al aplicar la condición necesaria de existencia de un mínimo respecto a dichos parámetros, resulta el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{aligned}
 A_1(E_1 - \Omega^2 E_2) + A_2(E_3 - \Omega^2 E_4) &= 0 \\
 A_1(E_3 - \Omega^2 E_4) + A_2(E_5 - \Omega^2 E_6) &= 0
 \end{aligned} \tag{11}$$

Los términos indicados con E_i , ($i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$) en (11), representan las expresiones que involucran a los términos PX_{ij} , PY_{ij} , RX_{ij} , RY_{ij} , TX_{ij} , TY_{ij} , CX_j y CY_j . El determinante del sistema de ecuaciones (11) debe ser nulo, para que exista una solución no trivial. De allí resulta la ecuación bicuadrática

$$A\Omega^4 + B\Omega^2 + C = 0 \tag{12}$$

La ecuación (12) posee dos raíces. La de menor valor absoluto corresponde al coeficiente de frecuencia fundamental y la restante al coeficiente de frecuencia de un modo superior de vibración.

FUNCIÓN QUE DA LA VARIACIÓN DE ESPESOR

Vamos a considerar que el espesor de la placa varía en forma lineal en la dirección de los ejes coordenados, según la función:

$$h = h(x, y) = h^{(1)} f(x) g(y) \tag{13}$$

$$f(x) = 0.5(c_1 x + c_1 + 2), \quad g(y) = 0.5(c_2 y + c_2 + 2) \tag{14}$$

donde: c_1 y c_2 son constantes, $h^{(1)}$ es el valor que toma h en el punto $(-1, -1)$ del borde 1 de la placa, tal como se indica en la Figura 2. El valor $h^{(2)} = h^{(1)}(1 + c_1)(1 + c_2)$ es el que toma h , en el punto $(1, 1)$ del borde 2 de la placa.

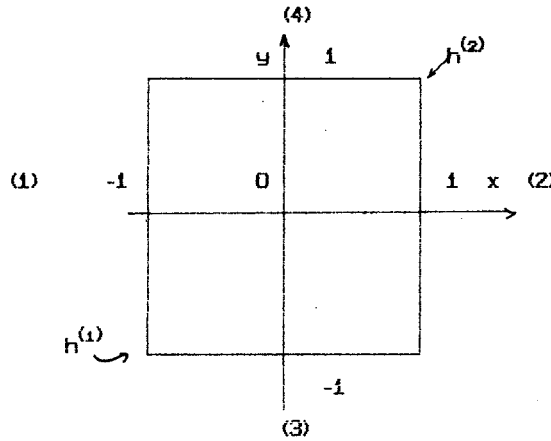


Figura 2. Dimensiones de la placa luego del cambio de variables $x = x/\bar{a}$, $y = y/\bar{b}$

GENERACIÓN DE COEFICIENTES DE FRECUENCIA

Cuando se analiza el comportamiento dinámico de placas rectangulares, es común que los valores de frecuencia se den en términos de coeficientes adimensionales, de manera de dar mayor generalidad a los resultados numéricos, ya que entonces, los mismos resultan independientes, entre otros parámetros, de las dimensiones de los lados de la placa, del valor de densidad del material, del espesor, etc. Los coeficientes de frecuencia más usados en la literatura técnico científica son los descriptos a continuación.

Placas isotrópicas de espesor variable

Los coeficientes de frecuencia comúnmente usados son:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega a^2 \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega b^2$$

donde $h^{(1)}$ y $D^{(1)}$ representan los valores de h y D , referidos al borde 1 de la placa. Dado que h varía de acuerdo a la función (13), resulta:

$$D = D(x, y) = D^{(1)} f(x)^3 g(y)^3 \quad \text{donde es } D^{(1)} = \frac{E(h^{(1)})^3}{12(1 - \mu^2)}$$

Placas ortótropas de espesor variable

Los coeficientes de frecuencia comúnmente usados son:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega a^2 \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega b^2$$

donde es $H_{xy}^{(1)} = \mu_y \cdot D_x^{(1)} + 2D_{xy}^{(1)}$. La rigidez a la flexión está dada por:

$$D_x(x, y) = D_x^{(1)} f(x)^3 g(y)^3, \quad \text{donde es: } D_x^{(1)} = \frac{E_x (h^{(1)})^3}{12(1 - \mu_x \mu_y)}$$

Por otra parte, la rigidez a la torsión viene dada por:

$$D_{xy}(x, y) = D_{xy}^{(1)} f(x)^3 g(y)^3, \quad D_{xy}^{(1)} = \frac{E(h^{(1)})^3}{12}$$

Placas anisótropas de espesor uniforme

En este caso los coeficientes de frecuencia más usados son:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega a^2 \quad \Omega = \sqrt{\frac{\rho h}{D_{11}}} \omega b^2$$

donde D_{11} representa la rigidez a la flexión de la placa anisótropa.

A efectos de generar los distintos coeficientes de frecuencia descriptos, vamos a introducir un coeficiente general, dado por:

$$\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^*}} \omega l^2 \quad (15)$$

Mediante la adecuada elección de l y D^* , se generan como casos particulares, los coeficientes antes definidos.

GENERACIÓN DE COEFICIENTES DE RIGIDEZ EN VÍNCULOS QUE ACTÚAN EN LOS BORDES

Es común, que los coeficientes de rigidez de los vínculos elásticos en bordes se expresen en forma adimensional. Por ejemplo, los coeficientes de rigidez rotacional y translacional, para placas isotrópicas de espesor constante, comúnmente usados en la literatura técnico científica están dados por¹⁶:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 \bar{a}}{D}, \quad T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D}, \quad R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D}, \quad T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D} \\ R_3 &= \frac{r_3 \bar{b}}{D}, \quad T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D}, \quad R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D}, \quad T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D} \end{aligned} \quad (16)$$

En las expresiones (16), R_i y T_i indican los coeficientes de rigidez rotacional y translacional respectivamente, correspondientes al borde i . Pero también se usan otras expresiones para todos estos coeficientes; algunos autores los expresan en términos del lado opuesto. Así, por ejemplo, en referencia [21], los mismos coeficientes se definen mediante las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 b}{D}, \quad T_1 = \frac{t_1 b^3}{D}, \quad R_2 = \frac{r_2 b}{D}, \quad T_2 = \frac{t_2 b^3}{D} \\ R_3 &= \frac{r_3 a}{D}, \quad T_3 = \frac{t_3 a^3}{D}, \quad R_4 = \frac{r_4 a}{D}, \quad T_4 = \frac{t_4 a^3}{D} \end{aligned} \quad (17)$$

En este trabajo se usan \bar{a} y \bar{b} en todas las expresiones, pero el uso de a y b como ocurre en (17), no afecta la posibilidad de una comparación directa de valores, ya que simplemente debe tenerse en cuenta la presencia del factor numérico que surge de las relaciones $\bar{a} = \frac{a}{2}$ y $\bar{b} = \frac{b}{2}$.

Para el caso de placas isótropas de espesor variable los coeficientes comúnmente usados son:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 \bar{a}}{D^{(1)}}, \quad T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D^{(1)}}, \quad R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D^{(2)}}, \quad T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D^{(2)}} \\ R_3 &= \frac{r_3 \bar{b}}{D^{(1)}}, \quad T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D^{(1)}}, \quad R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D^{(2)}}, \quad T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D^{(2)}}, \end{aligned} \quad (18)$$

donde es: $D^{(2)} = D^{(1)} f(1)^3 g(1)^3$

A su vez, para placas ortótropas de espesor variable comúnmente se usan los coeficientes:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 \bar{a}}{D_x^{(1)}}, \quad T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D_x^{(1)}}, \quad R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D_x^{(2)}}, \quad T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D_x^{(2)}} \\ R_3 &= \frac{r_3 \bar{b}}{D_y^{(1)}}, \quad T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D_y^{(1)}}, \quad R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D_y^{(2)}}, \quad T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D_y^{(2)}} \end{aligned} \quad (19)$$

donde es $D_x^{(2)} = D_x^{(1)} f(1)^3 g(1)^3$, $D_y^{(2)} = D_y^{(1)} f(1)^3 g(1)^3$

Finalmente, para el caso de placas anisótropas de espesor uniforme, se suelen usar:

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 \bar{a}}{D_{11}}, \quad T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D_{11}}, \quad R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D_{11}}, \quad T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D_{11}} \\ R_3 &= \frac{r_3 \bar{b}}{D_{22}}, \quad T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D_{22}}, \quad R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D_{22}}, \quad T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D_{22}} \end{aligned} \quad (20)$$

En (20), los parámetros D_{11} y D_{22} , representan las rigideces a la flexión de la placa anisótropa.

En las expresiones dadas en (18) y (19) los coeficientes R_2 , T_2 , R_4 y T_4 tienen el coeficiente de rigidez a la flexión referido al borde 2 es decir $D^{(2)}$, pero también es posible referirlo al borde 1, o sea usar $D^{(1)}$. Además, puede usarse \bar{b} en lugar de \bar{a} , como se

indicó en las expresiones (17). Todas estas posibilidades conducen a una gran variedad de opciones para definir a los coeficientes de rigidez mencionados; por ello, resulta de gran importancia el uso de un algoritmo que permita generar automáticamente las distintas expresiones posibles. Para lograr esto, es suficiente con introducir ciertos parámetros en la expresión de la ecuación de balance energético (10).

Sea entonces:

$$\begin{aligned}
 & p_1\left(\frac{D_1^{(1)}}{D^*}\right)I_1 + p_2\left(\frac{D_2^{(1)}}{D^*}\right)I_2 + 2p_3\left(\frac{D_3^{(1)}}{D^*}\right)I_3 + 4p_4\left(\frac{D_4^{(1)}}{D^*}\right)I_4 + 4p_5\left(\frac{D_5^{(1)}}{D^*}\right)I_5 + 4p_6\left(\frac{D_6^{(1)}}{D^*}\right)I_6 + \\
 & + R_1\left(\frac{D_1^{(1)}}{D^*}\right)p_7I_7 + R_2\left(\frac{D_1^{(1)}}{D^*}\right)p_8I_8 + R_3\left(\frac{D_2^{(1)}}{D^*}\right)p_9I_9 + \\
 & + R_4\left(\frac{D_2^{(1)}}{D^*}\right)p_{10}I_{10} + T_1\left(\frac{D_1^{(1)}}{D^*}\right)p_{11}I_{11} + \\
 & + T_2\left(\frac{D_1^{(1)}}{D^*}\right)p_{12}I_{12} + T_3\left(\frac{D_2^{(1)}}{D^*}\right)p_{13}I_{13} + \\
 & + T_4\left(\frac{D_2^{(1)}}{D^*}\right)p_{14}I_{14} - \frac{\rho h^{(1)}}{D^*}\omega^2 l^4 \frac{I_{15}}{2^4} = 0
 \end{aligned} \tag{21}$$

En la ecuación (21) los parámetros: p_i ($i = 1, 2, \dots, 14$), l y D^* , permiten la selección de diferentes expresiones para los coeficientes de rigidez rotacional y translacional y el coeficiente de frecuencia.

DETERMINACIÓN DE LOS VALORES DE LOS PARÁMETROS PARA LA GENERACIÓN DE DISTINTOS CASOS

Vamos a determinar los valores que deben tomar los parámetros p_i , D^* y l en la ecuación de balance energético (21), a efectos de generar distintos problemas sobre placas vibrantes.

Supongamos que se desean generar valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}}\omega a^2$ y que los coeficientes de rigidez R_i y T_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) están definidos de la siguiente manera: $R_1 = \frac{r_1 \bar{a}}{D^{(1)}}$, $T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D^{(1)}}$, $R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D^{(1)}}$, $T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D^{(1)}}$, $R_3 = \frac{r_3 \bar{b}}{D^{(1)}}$, $T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D^{(1)}}$, $R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D^{(1)}}$, $T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D^{(1)}}$. Entonces, en la expresión (21), los parámetros p_i , D^* y l deben tomar los siguientes valores:

$$\begin{aligned}
 & p_1 = 1, \quad p_2 = rl^4, \quad p_3 = rl^2, \quad p_4 = rl^2, \quad p_5 = rl, \quad p_6 = rl^3, \quad p_7 = 1, \quad p_8 = 1, \quad p_9 = rl^4, \quad p_{10} = rl^4, \\
 & p_{11} = 1, \quad p_{12} = 1, \quad p_{13} = rl^4, \quad p_{14} = rl^4, \quad l = a, \quad rl = a/b, \quad D^* = D^{(1)}
 \end{aligned}$$

donde rl indica la relación de lados de la placa.

Supongamos ahora que se desean generar valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega a^2$ y que los coeficientes de rigidez R_i y T_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) están definidos así:

$R_1 = \frac{r_1 \bar{a}}{D^{(1)}}$, $T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D^{(1)}}$, $R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D^{(2)}}$, $T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D^{(2)}}$, $R_3 = \frac{r_3 \bar{b}}{D^{(1)}}$, $T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D^{(1)}}$, $R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D^{(2)}}$, $T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D^{(2)}}$. Entonces, en la expresión (21), los parámetros p_i , D^* y l deben tomar los siguientes valores:

$$p_1 = 1, p_2 = rl^4, p_3 = rl^2, p_4 = rl^2, p_5 = rl, p_6 = rl^3, p_7 = 1, p_8 = C, p_9 = rl^4, p_{10} = rl^4 C, \\ p_{11} = 1, p_{12} = C, p_{13} = rl^4, p_{14} = rl^4 C, l = a, rl = a/b, C = f(1)^3 g(1)^3, D^* = D^{(1)}$$

Finalmente, supongamos que se desean generar valores del coeficiente de frecuencia fundamental: $\Omega = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega b^2$ y que los coeficientes de rigidez R_i y T_i , ($i = 1, 2, 3, 4$) están ahora definidos así:

$R_1 = \frac{r_1 \bar{a}}{D^{(1)}}$, $T_1 = \frac{t_1 \bar{a}^3}{D^{(1)}}$, $R_2 = \frac{r_2 \bar{a}}{D^{(2)}}$, $T_2 = \frac{t_2 \bar{a}^3}{D^{(2)}}$, $R_3 = \frac{r_3 \bar{b}}{D^{(1)}}$, $T_3 = \frac{t_3 \bar{b}^3}{D^{(1)}}$, $R_4 = \frac{r_4 \bar{b}}{D^{(2)}}$, $T_4 = \frac{t_4 \bar{b}^3}{D^{(2)}}$. Entonces, en la expresión (21), los parámetros p_i , D^* y l deben tomar los siguientes valores:

$$p_1 = rl^4, p_2 = 1, p_3 = rl^2, p_4 = rl^2, p_5 = rl^3, p_6 = rl, p_7 = rl^4, p_8 = rl^4 C, p_9 = 1, p_{10} = C, \\ p_{11} = rl^4, p_{12} = rl^4 C, p_{13} = 1, p_{14} = C, l = b, rl = b/a, C = f(1)^3 g(1)^3, D^* = H_{xy}^{(1)}$$

De esta misma forma se generan todos los otros casos. Al almacenar en el programa de computadora correspondiente, los distintos conjuntos de valores de los parámetros p_i , D^* y l , es posible una inmediata selección de los distintos parámetros característicos a usar. Además, mediante la adopción de valores numéricos para los coeficientes de rigidez rotacional y translacional se genera el tipo de condiciones de contorno que afectan a la placa que se desea estudiar.

RESULTADOS NUMÉRICOS

En las Tablas I a VI se presentan valores del coeficiente de frecuencia fundamental Ω_{00} para distintos casos de placas vibrantes. Al respecto, se compararon valores con los trabajos indicados en las referencias [15] a [20]. Todos los casos generados por el presente algoritmo, están caracterizados por una superior o a lo sumo idéntica precisión de los valores numéricos. Esto es debido a que todos los resultados de este trabajo, fueron obtenidos con el uso de dos términos, mientras que en la mayoría de los trabajos citados, se usó un solo término en la función aproximante. Por otra parte, el método de Rayleigh-Ritz genera cotas superiores respecto a los valores exactos, y dado que los valores presentados en este artículo, son en general, más bajos que los reportados en

los trabajos citados, es lógico suponer que los valores aquí obtenidos son más exactos. Además, las tablas mencionadas contienen información numérica adicional con respecto a la proporcionada en las referencias citadas. Por otra parte, en la Tabla VII se presentan valores del coeficiente de frecuencia fundamental para placas con apoyos clásicos.

Los valores numéricos que proporciona el algoritmo desarrollado, se obtienen en forma inmediata mediante la selección del conjunto de valores de los parámetros p_i , D^* y l (que permite la generación del coeficiente de frecuencia y de los coeficientes de rigidez deseados), la adopción del tipo de material, del espesor de la placa y las condiciones de contorno que corresponden.

Cabe destacar, que la generación de las condiciones de contorno para los cuatro bordes de la placa, se logra con suma facilidad. Así, por ejemplo, la generación de las condiciones de contorno que corresponden al caso indicado en la Tabla I, se logra simplemente dando los siguientes valores a los coeficientes de rigidez: $R_1 = \infty$, $R_4 = \infty$, $R_3 = 0$ ó ∞ , $T_i = \infty$ ($i = 1, 2, 3, 4$) y R_2 variando entre ∞ y 0. En el programa de computadora es suficiente con usar 10^{10} en lugar de ∞ .

PLACAS DE ESPESOR UNIFORME

Placas Anisótropas

Para analizar este caso se adoptaron los siguientes parámetros usados en referencia [15]:

$$\begin{aligned} D_1 &= D_{11}, D_2 = D_{22}, D_3 = D_{12}, D_4 = D_{66}, D_5 = D_{16}, D_6 = D_{26} \\ D_{12}/D_{11} &= 0.3245569 \quad D_{22}/D_{11} = 0.2130195 \quad D_{16}/D_{11} = 0.5120546 \\ D_{26}/D_{11} &= 0.1694905 \quad D_{66}/D_{11} = 0.3387559 \end{aligned}$$

La Tabla I proporciona valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\rho h/D_{11}} \omega_{00} b^2$, correspondiente a una placa rectangular anisotrópica cuyos bordes 1 y 4 están rígidamente empotrados, el borde 3 está rígidamente empotrado o simplemente apoyado y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. Los valores aquí obtenidos coinciden con los proporcionados en referencia [15].

Placas Ortótropas

La Tabla II proporciona valores del coeficiente de frecuencia fundamental

$$\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h}{H_{xy}}} \omega_{00} a^2,$$

correspondiente a una placa rectangular ortótropa cuyos bordes 1 y 3 están rígidamente empotrados, el borde 4 está libre, y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. Valores del coeficiente de frecuencia indicado, se obtienen de (12), adoptando: $D_1 = D_x$, $D_2 = D_y$, $D_3 = \mu_y D_x$, $D_4 = D_{xy}$, $D_5 = 0$, $D_6 = 0$, $D^* = H_{xy}$, donde es $H_{xy} = \mu_y D_x + 2D_{xy}$, $l = a$.

Los resultados aquí obtenidos, son en general, más bajos que los presentados en referencia [18].

	$R_3 = \infty$ $rl = b/a$			$R_3 = 0$ $rl = b/a$		
R_2	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
∞	13.47	27.44	92.90	11.34	26.87	93.30
100	13.43	27.24	92.04	11.29	26.65	92.43
10	13.25	25.99	86.19	11.00	25.24	86.51
1	13.06	23.54	72.61	10.58	22.29	72.64
0	13.04	22.67	66.86	10.48	21.17	66.69

Tabla I. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\rho h/D_{11}} \omega_{00} b^2$ correspondiente a una placa rectangular anisotrópica cuyos bordes 1 y 4 están rígidamente empotrados, ($R_1 = R_4 = \infty$), el borde 3 está rígidamente empotrado o simplemente apoyado y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. $R_2 = r_2 \bar{a}/D_{11}$, $T_i = \infty$, ($i = 1, 2, 3, 4$)

	$D_x/H_{xy} = 0.5$ $D_y/H_{xy} = 0.5$ $rl = a/b$			$D_x/H_{xy} = 2$ $D_y/H_{xy} = 0.5$ $rl = a/b$		
R_2	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
∞	16.61	18.77	27.00	31.97	32.72	36.54
100	16.45	18.62	26.84	31.67	32.42	36.24
10	15.41	17.61	25.91	29.55	30.32	34.27
1	12.96	15.46	24.29	24.43	25.35	29.91
0	11.91	14.60	23.77	22.16	23.18	28.14

Tabla II. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h}{H_{xy}}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa rectangular ortótropa cuyos bordes 1 y 3 están rígidamente empotrados, el borde 4 está libre, y borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. $R_1 = R_3 = \infty$, $R_4 = T_4 = 0$, $\mu_y = 0.2$, $R_2 = r_2 \bar{a}/D_x$, $T_i = \infty$, ($i = 1, 2, 3$)

Placas Isótropas

El material isotrópico se genera mediante la adopción de los siguientes valores de parámetros D_i : $D_1 = D$, $D_2 = D$, $D_3 = \mu D$, $D_4 = \frac{1}{2}D(1 - \mu)$, $D_5 = 0$, $D_6 = 0$.

La Tabla III proporciona valores del coeficiente de frecuencia fundamental

$$\Omega_{00} = \sqrt{\rho h/D} \omega_{00} a^2,$$

correspondiente a una placa rectangular isótropa cuyos bordes 1 y 3 están rígidamente empotrados, el borde 4 está libre, y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. Los valores numéricos aquí obtenidos son, en general, más bajos que los reportados en referencia [20].

	$rl = a/b$		
R_2	0.5	1.0	2.0
∞	22.85	24.20	31.32
100	22.63	23.98	31.12
10	21.14	22.53	29.86
1	17.56	19.20	27.34
0	15.99	17.79	26.41

Tabla III. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa rectangular isótropa cuyos bordes 1 y 3 están rígidamente empotrados, el borde 4 está libre, y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. $R_1 = R_3 = \infty$, $R_4 = T_4 = 0$, $R_2 = r_2 \bar{a}/D$, $\mu = 0.3$, $T_i = \infty$, ($i = 1, 2, 3$)

PLACAS DE ESPESOR VARIABLE

Placas Ortótropas

Este caso se genera adoptando: $D_1 = D_x$, $D_2 = D_y$, $D_3 = \mu D_x$, $D_4 = D_{xy}$, $D_5 = 0$, $D_6 = 0$

$D^* = H_{xy}^{(1)}$, donde $H_{xy}^{(1)} = \mu_y D_x^{(1)} + 2D_{xy}^{(1)}$

Si se adopta $l = b$ y los correspondientes valores de p_i se generan valores del coeficiente

$$\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{H_{xy}^{(1)}}} \omega_{00} b^2$$

La Tabla IV proporciona valores de este coeficiente correspondiente a una placa rectangular ortótropa de espesor variable, cuyos bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. Los valores aquí obtenidos son, en general, más bajos que los proporcionados en referencia [17].

	$D_x/H_{xy} = 0.5 \quad D_y/H_{xy} = 0.5$					
	$c_1 = -0.2, c_2 = 0.2$			$c_1 = 0.2, c_2 = 0.2$		
	$rl = b/a$			$rl = b/a$		
R_2	0.5	1.0	2.0	0.5	1.0	2.0
∞	18.40	28.11	73.73	22.46	34.30	89.87
100	18.36	27.98	73.22	22.45	34.20	89.47
10	18.16	27.18	69.72	22.36	33.51	86.11
1	17.84	25.58	61.18	22.36	31.92	74.93
0	17.75	25.01	57.44	22.36	31.27	69.03

Tabla IV. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{H_{xy}}} \omega_{00} b^2$ correspondiente a una placa rectangular ortótropa de espesor variable, cuyos bordes 1, 3 y 4 están rígidamente empotrados y el borde 2 está elásticamente restringido contra rotación. $R_1 = R_3 = R_4 = \infty$, $R_2 = r_2 \bar{a}/D_x^{(2)}$, $\mu_y = 0.3$, $T_i = \infty$, ($i = 1, 2, 3, 4$)

Placas Isótropas

La Tabla V proporciona valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega_{00} a^2$, correspondiente a una placa rectangular isótropa cuyos bordes 1, 2 y 3 están rígidamente empotrados, mientras que el borde 4 está libre. Los valores aquí obtenidos son más bajos que los reportados en referencia [19].

Por otra parte, la Tabla VI contiene valores del coeficiente $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa cuadrada isotrópica de espesor variable, caracterizada por los siguientes parámetros:

$$\begin{aligned}
 R_1 &= \frac{r_1 \bar{b}}{D^{(1)}}, \quad T_1 = \frac{t_1 \bar{b}^3}{D^{(1)}}, \quad R_2 = \frac{r_2 \bar{b}}{D^{(1)}}, \quad T_2 = \frac{t_2 \bar{b}^3}{D^{(1)}}, \\
 R_3 &= \frac{r_3 \bar{a}}{D^{(1)}}, \quad T_3 = \frac{t_3 \bar{a}^3}{D^{(1)}}, \quad R_4 = \frac{r_4 \bar{a}}{D^{(1)}}, \quad T_4 = \frac{t_4 \bar{a}^3}{D^{(1)}}, \quad rl = a/b \quad (22)
 \end{aligned}$$

Las expresiones (22) constituyen el caso particular en que los coeficientes R_1 , T_1 , R_2 y T_2 , están definidos en términos de \bar{b} , en lugar de \bar{a} , y los coeficientes R_3 y T_3 contienen a D referido al borde 1, es decir $D^{(1)}$. Una situación análoga ocurre con los coeficientes R_4 , T_4 y T_4 .

$rl = a/b$			
c_1	0.5	1.0	2.0
-0.4	18.23	19.40	25.36
-0.2	20.54	21.78	28.25
0.0	22.85	24.20	31.32
0.2	25.11	26.62	34.50
0.4	27.36	29.05	37.78

Tabla V. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa rectangular isotrópica cuyos bordes 1, 2 y 3 están rígidamente empotrados, mientras que el borde 4 está libre. $R_1 = R_2 = R_3 = \infty$, $R_4 = T_4 = 0$, $\mu = 0.3$, $c_2 = 0$, $T_i = \infty$, ($i = 1, 2, 3$)

	$c_1 = 0, \quad c_2 = 0$			$c_1 = 0.2, \quad c_2 = 0$		
R_1	$R_i = 0$ ($i = 2, 3, 4$)	$R_3 = R_4 = 0$ $R_2 = R_1$	$R_4 = 0$ $R_2 = R_3 = R_1$	$R_i = 0$ ($i = 2, 3, 4$)	$R_3 = R_4 = 0$ $R_2 = R_1$	$R_4 = 0$ $R_2 = R_3 = R_1$
∞	23.67	28.95	31.86	26.17	32.00	35.18
100	23.53	28.54	31.37	26.01	31.40	34.48
10	22.59	26.02	28.27	24.93	28.13	30.47
1	20.54	21.38	22.12	22.66	23.27	23.93

Tabla VI. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental $\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h^{(1)}}{D^{(1)}}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa isotrópica cuadrada de espesor variable. $R_1 = \frac{r_1 \bar{b}}{D^{(1)}}$, $R_2 = \frac{r_2 \bar{b}}{D^{(1)}}$, $R_3 = \frac{r_3 \bar{a}}{D^{(1)}}$, $R_4 = \frac{r_4 \bar{a}}{D^{(1)}}$, $rl = a/b = 1$, $T_i = \infty$, ($i = 1, 2, 3, 4$)

PLACAS CON CONDICIONES DE APOYO CLÁSICOS

En la Tabla VII se muestran valores del coeficiente de frecuencia fundamental para placas rectangulares de espesor constante, con distintos tipos de material, y con condiciones de apoyo clásicos. Para el caso de anisotropía se usaron los parámetros $D_1 = D_{11}$, $D_2 = D_{22}$, $D_3 = D_{12}$, $D_4 = D_{66}$, $D_5 = D_{16}$, $D_6 = D_{26}$, con los mismos

valores que los usados en la Tabla I. Para el caso de ortotropía se usaron:

$$D_x/H_{xy} = 0.5, \quad D_y/H_{xy} = 0.5, \quad \mu_y = 0.3$$

Se incluyen además, valores para el caso de isotropía, tomados de referencia [2]. Tal como puede observarse, la concordancia de valores es muy buena.

Borde	1	2	3	4	$rl = a/b$	0.5	1.00	2.00
	SA	SA	SA	SA	(I)	12.34	19.74	(19.739) 49.37
					(II)	10.02	17.10	40.10
					(III)	11.38	16.18	32.36
	SA	SA	RE	RE	(I)	13.72	28.95	(28.950) 95.44
					(II)	11.12	23.18	70.91
					(III)	11.63	18.95	49.97
	SA	SA	RE	SA	(I)	12.98	23.67	(23.646) 69.39
					(II)	10.59	19.81	53.44
					(III)	11.68	17.69	40.15
	SA	SA	RE	L	(I)	10.61	12.92	(12.687) 22.92
					(II)	8.20	11.29	20.93
					(III)	10.52	12.40	18.94
	SA	SA	SA	L	(I)	10.38	11.79	(11.684) 16.22
					(II)	7.83	9.95	15.81
					(III)	10.37	11.72	15.99
	RE	RE	RE	RE	(I)	24.64	35.99	(35.992) 98.59
					(II)	18.43	28.14	73.72
					(III)	23.22	27.44	53.88
	RE	RE	RE	SA	(I)	24.23	31.86	(31.829) 73.58
					(II)	18.10	25.38	57.03
					(III)	23.32	26.87	45.37
	RE	RE	RE	L	(I)	22.85	24.20	(24.020) 31.32
					(II)	16.56	18.61	26.53
					(III)	22.69	23.48	27.21

Tabla VII. Valores del coeficiente de frecuencia fundamental de una placa rectangular de espesor constante con distintas condiciones de apoyo en los bordes.

(I): Valores de $\Omega_{00} = \sqrt{\rho h/D} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa isotrópica. ($\mu = 0.3$)

(II): Valores de $\Omega_{00} = \sqrt{\rho h/H_{xy}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa ortótropa ($D_x/H_{xy} = D_y/H_{xy} = 0.5$, $\mu_y = 0.3$)

(III): Valores de $\Omega_{00} = \sqrt{\rho h/D_{11}} \omega_{00} a^2$ correspondiente a una placa anisótropa. (Los coeficientes D_i son iguales a los de la Tabla I). Los valores que figuran entre paréntesis corresponden a referencia [2]

CONCLUSIONES

El algoritmo presentado permite generar valores, con buena precisión, del coeficiente de frecuencia fundamental, correspondiente a una gran variedad de placas rectangulares. Además, permite generar distintas expresiones analíticas para varios parámetros característicos, posibilitando una automática comparación de valores del coeficiente de frecuencia entre trabajos donde se han usado distintas expresiones analíticas para dichos parámetros.

Un caso que permite demostrar la versatilidad del algoritmo aquí desarrollado, es el que surge cuando se adoptan los valores de los parámetros p_i , D^* y l , que permiten generar valores del coeficiente de frecuencia:

$$\Omega_{00} = \sqrt{\frac{\rho h}{D}} \omega_{00} b^2, \quad \text{cuando los coeficientes de rigidez están dados por:}$$

$$\begin{aligned} R_1 &= \frac{r_1 \bar{b}}{D}, \quad T_1 = \frac{t_1 \bar{b}^3}{D}, \quad R_2 = \frac{r_2 \bar{b}}{D}, \quad T_2 = \frac{t_2 \bar{b}^3}{D}, \\ R_3 &= \frac{r_3 \bar{a}}{D}, \quad T_3 = \frac{t_3 \bar{a}^3}{D}, \quad R_4 = \frac{r_4 \bar{a}}{D}, \quad T_4 = \frac{t_4 \bar{a}^3}{D}, \quad rl = b/a \end{aligned}$$

Estos coeficientes (excepto por el uso de a y b en lugar de \bar{a} y \bar{b}), son los utilizados por Warburton y Edney en el trabajo indicado en referencia [21]. Con el uso del algoritmo aquí presentado se puede realizar una comparación directa de valores del coeficiente de frecuencia mencionado.

El desarrollo de un algoritmo con estas características permite una rápida y eficiente determinación de valores de coeficiente de frecuencia, para una gran cantidad de problemas distintos, y resulta por ende de importancia en trabajos de diseño preliminar.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo se realizó con el apoyo del Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas de la República Argentina (PID 3-139000/88) y del Consejo de Investigación de la Universidad Nacional de Salta. El autor expresa su agradecimiento a los revisores por sus importantes sugerencias.

APÉNDICE

Definición de las variables y parámetros que intervienen en la ecuación (10)

Las expresiones analíticas de los términos PX_{ij} , PY_{ij} , RX_{ij} , RY_{ij} , TX_{ij} , TY_{ij} , CX_j y CY_j están dadas por:

$$PX_{11} = \int_{-1}^1 f(x)^3 (X_1'')^2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=3}^5 \frac{a_i a_j d_k n_i (n_i - 1) n_j (n_j - 1)}{n_{ij} - 4} (1 - (-1)^{n_{ij}-4}),$$

$$n_{ij} = n_i + n_j + k$$

donde es:

$$d_1 = \frac{1}{2^3}(2 + c_1)^3, \quad d_2 = \frac{3c_1}{2^3}(2 + c_1)^2, \quad d_3 = \frac{3c_1^2}{2^3}(2 + c_1), \quad d_4 = \frac{c_1^3}{2^3}$$

$$PX_{12} = \int_{-1}^1 f(x)^3 (X_2'')^2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=2}^5 \frac{b_i b_j d_k m_i (m_i - 1) m_j (m_j - 1)}{m_{ij} - 4} (1 - (-1)^{m_{ij}-4}),$$

$$m_{ij} = m_i + m_j + k$$

$$PX_{13} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1'' X_2'' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=3}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{a_i b_j d_k n_i (n_i - 1) m_j (m_j - 1)}{nm_{ij} - 4} (1 - (-1)^{nm_{ij}-4}),$$

$$nm_{ij} = n_i + m_j + k$$

$$PX_{21} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1^2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=1}^5 \frac{a_i a_j d_k}{n_{ij}} (1 - (-1)^{n_{ij}})$$

$$PX_{22} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_2^2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=1}^5 \frac{b_i b_j d_k}{m_{ij}} (1 - (-1)^{m_{ij}})$$

$$PX_{23} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1 X_2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=1}^5 \frac{a_i b_j d_k}{nm_{ij}} (1 - (-1)^{nm_{ij}})$$

$$PX_{31} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1'' X_1 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=3}^5 \frac{a_i a_j d_k n_j (n_j - 1)}{n_{ij} - 2} (1 - (-1)^{n_{ij}-2})$$

$$PX_{32} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_2 X_2'' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{b_i b_j d_k m_j (m_j - 1)}{m_{ij} - 2} (1 - (-1)^{m_{ij}-2})$$

$$PX_{33} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1 X_2'' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{a_i b_j d_k m_j (m_j - 1)}{nm_{ij} - 2} (1 - (-1)^{nm_{ij}-2})$$

$$PX_{34} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1'' X_2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=3}^5 \frac{b_i a_j d_k n_j (n_j - 1)}{mn_{ij} - 2} (1 - (-1)^{mn_{ij}-2}),$$

$$mn_{ij} = m_i + n_j + k$$

$$PX_{41} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1'^2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=2}^5 \frac{a_i a_j d_k n_i n_j}{n_{ij} - 2} (1 - (-1)^{n_{ij}-2})$$

$$PX_{42} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_2'^2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i,j=1}^5 \frac{b_i b_j d_k m_i m_j}{m_{ij} - 2} (1 - (-1)^{m_{ij}-2})$$

$$PX_{43} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1' X_2' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=2}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{a_i b_j d_k n_i m_j}{nm_{ij} - 2} (1 - (-1)^{nm_{ij}-2})$$

$$PX_{51} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1'' X_1' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=3}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{a_i a_j d_k n_i (n_i - 1) n_j}{n_{ij} - 3} (1 - (-1)^{n_{ij}-3})$$

$$PX_{52} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_2'' X_2' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=2}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{b_i b_j d_k m_i (m_i - 1) m_j}{m_{ij} - 3} (1 - (-1)^{m_{ij}-3})$$

$$PX_{53} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1'' X_2' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=3}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{a_i b_j d_k n_i (n_i - 1) m_j}{nm_{ij} - 3} (1 - (-1)^{nm_{ij}-3})$$

$$PX_{54} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1' X_2'' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=2}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{a_i b_j d_k n_i m_j (m_j - 1)}{nm_{ij} - 3} (1 - (-1)^{nm_{ij}-3})$$

$$PX_{61} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1 X_1' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{a_i a_j d_k n_j}{n_{ij} - 1} (1 - (-1)^{n_{ij}-1})$$

$$PX_{62} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_2 X_2' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{b_i b_j d_k m_j}{m_{ij} - 1} (1 - (-1)^{m_{ij}-1})$$

$$PX_{63} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1 X_2' dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=1}^5 \frac{a_i b_j d_k m_j}{nm_{ij} - 1} (1 - (-1)^{nm_{ij}-1})$$

$$PX_{64} = \int_{-1}^1 f(x)^3 X_1' X_2 dx = \sum_{k=1}^4 \sum_{i=1}^5 \sum_{j=2}^5 \frac{a_j b_i d_k n_j}{mn_{ij} - 1} (1 - (-1)^{mn_{ij}-1})$$

$$RX_{11} = X_1'^2(-1), \quad RX_{12} = X_2'^2(-1), \quad RX_{13} = X_1'(-1)X_2'(-1)$$

$$RX_{21} = X_1'^2(1), \quad RX_{22} = X_2'^2(1), \quad RX_{23} = X_1'(1)X_2'(1)$$

$$RX_{31} = \int_{-1}^1 X_1^2 dx = \sum_{i,j=1}^5 \frac{a_i a_j}{n_i + n_j + 1} (1 - (-1)^{n_i + n_j + 1})$$

$$RX_{32} = \int_{-1}^1 X_2^2 dx = \sum_{i,j=1}^5 \frac{b_i b_j}{m_i + m_j + 1} (1 - (-1)^{m_i + m_j + 1})$$

$$RX_{33} = \int_{-1}^1 X_1 X_2 dx = \sum_{i,j=1}^5 \frac{a_i b_j}{n_i + m_j + 1} (1 - (-1)^{n_i + m_j + 1})$$

$$RX_{41} = RX_{31}, \quad RX_{42} = RX_{32}, \quad RX_{43} = RX_{33}$$

$$TX_{11} = X_1^2(-1), \quad TX_{12} = X_2^2(-1), \quad TX_{13} = X_1(-1)X_2(-1)$$

$$TX_{21} = X_1^2(1), \quad TX_{22} = X_2^2(1), \quad TX_{23} = X_1(1)X_2(1)$$

$$TX_{31} = RX_{31}, \quad TX_{32} = RX_{32}, \quad TX_{33} = RX_{33}$$

$$TX_{41} = RX_{31}, \quad TX_{42} = RX_{32}, \quad TX_{43} = RX_{33}$$

$$CX_{11} = \int_{-1}^1 x X_1^2 dx = \sum_{i,j=1}^5 \frac{a_i a_j}{n_i + n_j + 2} (1 - (-1)^{n_i + n_j + 2})$$

$$CX_1 = \int_{-1}^1 f(x)X_1^2 dx = \left(\frac{2+c_1}{2}\right)RX_{31} + \frac{C_1}{2}CX_{11}$$

$$CX_{22} = \int_{-1}^1 xX_2^2 dx = \sum_{i,j=1}^5 \frac{b_i b_j}{m_i + m_j + 2} (1 - (-1)^{m_i + m_j + 2})$$

$$CX_2 = \int_{-1}^1 f(x)X_2^2 dx = \left(\frac{2+c_1}{2}\right)RX_{32} + \frac{C_1}{2}CX_{22}$$

$$CX_{33} = \int_{-1}^1 xX_1X_2 dx = \sum_{i,j=1}^5 \frac{a_i b_j}{n_i + m_j + 2} (1 - (-1)^{n_i + m_j + 2})$$

$$CX_3 = \int_{-1}^1 f(x)X_1X_2 dx = \left(\frac{2+c_1}{2}\right)RX_{33} + \frac{C_1}{2}CX_{33}$$

Los términos que dependen de la variable y , se obtienen directamente mediante el reemplazo de los coeficientes (definidos en (7) y (8)) a_i y b_i , por los coeficientes a'_i y b'_i respectivamente en las expresiones que corresponden, de acuerdo a la tabla que se indica a continuación.

$PY_{11} \rightarrow PX_{21}$	$PY_{12} \rightarrow PX_{22}$	$PY_{13} \rightarrow PX_{23}$	$PY_{21} \rightarrow PX_{11}$	$PY_{22} \rightarrow PX_{12}$
$PY_{23} \rightarrow PX_{13}$	$PY_{31} \rightarrow PX_{31}$	$PY_{32} \rightarrow PX_{32}$	$PY_{33} \rightarrow PX_{34}$	$PY_{34} \rightarrow PX_{33}$
$PY_{41} \rightarrow PX_{41}$	$PY_{42} \rightarrow PX_{42}$	$PY_{43} \rightarrow PX_{43}$	$PY_{51} \rightarrow PX_{61}$	$PY_{52} \rightarrow PX_{62}$
$PY_{53} \rightarrow PX_{63}$	$PY_{54} \rightarrow PX_{64}$	$PY_{61} \rightarrow PX_{51}$	$PY_{62} \rightarrow PX_{52}$	$PY_{63} \rightarrow PX_{53}$
$PY_{64} \rightarrow PX_{54}$	$RY_{11} \rightarrow RX_{31}$	$RY_{12} \rightarrow RX_{32}$	$RY_{13} \rightarrow RX_{33}$	$RY_{21} \rightarrow RX_{31}$
$RY_{22} \rightarrow RX_{32}$	$RY_{23} \rightarrow RX_{33}$	$RY_{31} \rightarrow RX_{11}$	$RY_{32} \rightarrow RX_{12}$	$RY_{33} \rightarrow RX_{13}$
$RY_{41} \rightarrow RX_{21}$	$RY_{42} \rightarrow RX_{22}$	$RY_{43} \rightarrow RX_{23}$	$TY_{11} \rightarrow RX_{31}$	$TY_{12} \rightarrow RX_{32}$
$TY_{13} \rightarrow RX_{33}$	$TY_{21} \rightarrow RX_{31}$	$TY_{22} \rightarrow RX_{32}$	$TY_{23} \rightarrow RX_{33}$	$TY_{31} \rightarrow TX_{11}$
$TY_{32} \rightarrow TX_{12}$	$TY_{33} \rightarrow TX_{13}$	$TY_{41} \rightarrow TX_{21}$	$TY_{42} \rightarrow TX_{22}$	$TY_{43} \rightarrow TX_{23}$
$CY_1 \rightarrow CX_1$	$CY_2 \rightarrow CX_2$	$CY_3 \rightarrow CX_3$		

REFERENCIAS

1. A.W. Leissa, "Vibration of plates", *NASA SP 160*, (1969).
2. A.W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **31**, pp. 257-293, (1973).
3. S.F. Bassily y S.M. Dickinson, "On the use of beam functions for problems of plates involving free edges", *Journal of Applied Mechanics*, **42**, pp. 858-864, (1975).
4. S.F. Bassily y S.M. Dickinson, "Buckling and vibration of in-plane loaded plates treated by a unified Ritz approach", *Journal of Sound and Vibration*, **59**, pp. 1-14, (1978).
5. K. Vijayakumar y G.K. Ramaiah, "Analysis of vibration of clamped square plates by the Rayleigh-Ritz method with asymptotic solution from a modified Bolotin method", *Journal of Sound and Vibration*, **56**, pp. 127-135, (1978).
6. R.B. Bhat, "Natural frequencies of rectangular plates using characteristic orthogonal polynomials in Rayleigh-Ritz method", *Journal of Sound and Vibration*, **102**, pp. 493-499, (1985).

7. R.B. Bhat, "Flexural vibrations of polygonal plates using characteristics orthogonal polynomials in two variables", *Journal of Sound and Vibration*, **114**, pp. 65-71, (1987).
8. S.M. Dickinson y A. Di Blasio, "On the use of orthogonal polynomials in the Rayleigh-Ritz method for the study of the flexural vibration and buckling of isotropic and orthotropic rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, **108**, pp. 51-62, (1986).
9. R. Schmidt, "A variant of the Raileigh-Ritz method", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, **31** (1), pp. 37-46, (1981).
10. R. Grossi, "A Note on the Rayleigh-Schmidt Method", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, **37** (1), pp. 29-35, (1987).
11. Ch. Bert, "Application of a version of Rayleigh Technique to Problems of Bars, Beams, Columns, Membranes and Plates", *Journal of Sound and Vibration*, **119** (2), pp. 317-326, (1987).
12. R. Grossi y R. Bhat, "A Note on Vibrating Tapered Beams", *Journal of Sound and Vibration*, **174** (1), pp. 174-178, (1991).
13. R.O. Grossi, "On the Use of the Rayleigh-Schmidt Approach", *The Journal of the Industrial Mathematics Society*, **40** (2), pp. 115-122, (1990).
14. R.O. Grossi, P.A.A. Laura y M. Mukhopadhyay, "Fundamental frequency of vibration of orthotropic rectangular plates with three edges elastically restrained against rotation while the fourth is free", *Journal of Sound and Vibration*, **103** (3), pp. 443-445, (1985).
15. P.A.A. Laura y R.O. Grossi, "Transverse vibrations of rectangular anisotropic plates with edges elastically restrained against rotation", *Journal of Sound and Vibration*, **64** (2), pp. 257-267, (1979).
16. P.A.A. Laura y R.O. Grossi, "Transverse vibrations of rectangular plates with edges elastically restrained against translation and rotation", *Journal of Sound and Vibration*, **75** (1), pp. 101-107, (1981).
17. R.O. Grossi y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of orthotropic rectangular plates with thickness varying in two directions and with edges elastically restrained against rotation", *Fibre Science and Technology*, **14**, pp. 311-317, (1981).
18. R.O. Grossi y P.A.A. Laura, "Transverse vibrations of rectangular orthotropic plates with one or two free edges while the remaining are elastically restrained against rotation", *Ocean Engineering*, **6**, pp. 527-539, (1979).
19. P.A.A. Laura, R.O. Grossi y S.R. Soni, "Free vibrations of a rectangular plate of variable thickness elastically restrained against rotation along three edges and free on the fourth edge", *Journal of Sound and Vibration*, **62** (4), pp. 493-503, (1979).
20. P.A.A. Laura y R.O. Grossi, "Transverse vibrations of a rectangular plate elastically restrained against rotation along three edges and free on the fourth edge", *Journal of Sound and Vibration*, **59** (3), pp. 355-368, (1978).
21. G.B. Warburton y S. Edney, "Vibrations of rectangular plates with elastically restrained edges", *Journal of Sound and Vibration*, **95** (4), pp. 537-552, (1984).
22. E.M. Nassar, "Rapid calculation of the resonance frequency for rotational restrained rectangular plates", *American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal*, **17**, pp. 6-11, (1979).
23. T.E. Carmichel, "The vibration of rectangular plates with edges elastically restrained against rotation", *Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics*, **12**, pp. 29-42, (1959).
24. M. Mukhopadhyay, "Vibration analysis of elastically restrained rectangular plates with concentrated masses", *Journal of Sound and Vibration*, **113**, pp. 547-558, (1987).