

Esquemas de alta resolución para resolver las ecuaciones de “shallow water”

Pilar Brufau y Pilar García-Navarro

Mecánica de Fluidos, Centro Politécnico Superior
Universidad de Zaragoza
María de Luna 3, 50015 Zaragoza, España
Tel.: 34-976-76 10 00 ext. 5051, Fax: 34-976-76 18 82
e-mail: cuca@ideafix.litec.csic.es
e-mail: pigar@posta.unizar.es

Resumen

En este trabajo se revisan algunos esquemas numéricos en su aplicación a la modelización del flujo de superficie libre en una dimensión. El flujo de superficie libre en canales se describe matemáticamente con las ecuaciones de *shallow water* o de *St. Venant*. Se trata de un sistema hiperbólico de leyes de conservación discretizado mediante diferencias y volúmenes finitos. Describiremos cuatro métodos explícitos de alta resolución. En primer lugar, un esquema *upwind* de primer orden espacial y temporal; en segundo lugar, la generalización del esquema anterior a segundo orden; en tercer lugar un esquema de extrapolación de variables de segundo orden y por último un esquema clásico como es el esquema de segundo orden de MacCormack con corrección TVD que le confiere propiedades no oscilatorias. Como casos test se analiza un ejemplo de rotura de presa y la simulación de flujo estacionario en un canal en diversos regímenes: subcrítico, supercrítico y transcrítico. En todos los casos se comparan los resultados numéricos obtenidos con todos los esquemas junto a la solución exacta del problema, pudiendo discernir cuáles se comportan mejor y en qué condiciones.

HIGH RESOLUTION SCHEMES FOR SHALLOW WATER EQUATIONS

Summary

In this work some numerical schemes are checked in their application to model free surface flow in one dimension. Free surface flow in channels is mathematically described by the shallow water or *St. Venant* equations. They consist of a hyperbolic system of conservation laws and are discretized with finite differences and finite volumes. We are going to describe four high resolution explicit schemes. Firstly, a fist order in time and space upwind scheme; secondly, the generalization of such scheme to second order; thirdly a second order method using the extrapolation of variables and the last one is a classical second order MacComarck scheme with TVD correction to preserve it from oscillatory properties. Some test cases have been analyzed; a dam break and the simulation of steady state in a channel presenting different types of flow: subcritical, supercritical and transcritical. Numerical results obtained with all the schemes are compared with the exact solution in each case, in order to conclude which schemes are better and the conditions when it occurs.

INTRODUCCIÓN

Al tratar de resolver numéricamente ecuaciones hiperbólicas (leyes de conservación) con métodos clásicos puede aparecer una serie de problemas como son oscilaciones de las variables en torno a discontinuidades, generación de choques sin significado físico y desestabilización del cálculo debido al carácter no lineal de las ecuaciones. Para evitarlo suele aplicarse viscosidad artificial⁴, ya que de esta forma se puede suavizar el problema, aunque a su vez este método requiere el ajuste de otros parámetros lo cual resulta tedioso y a veces no satisfactorio.

Por ello se propusieron los esquemas llamados de alta resolución^{9,13,15} para leyes de conservación, basados en la discretización no lineal de los términos convectivos del sistema de ecuaciones aunque éste sea lineal¹⁵. Con ello se obtiene una mejor aproximación numérica a la solución exacta, ya que las teorías matemáticas en las que se basan (llamadas TVD o de variación total decreciente)⁴ se encuentran firmemente establecidas. Un inconveniente reside en que este tipo de teorías matemáticas se encuentra desarrollado para ser aplicado a ecuaciones o sistemas lineales y se necesita encontrar la forma apropiada de aplicarlas a sistemas no lineales. El método consiste en desacoplar localmente las ecuaciones linealizando de alguna forma el sistema. El punto clave estriba en encontrar la linealización adecuada para que la discretización siga manteniendo su carácter conservativo. En este trabajo se usa la descomposición del vector diferencia de flujo¹⁴.

En el caso de flujo en canales, el uso de modelos matemáticos basados en las ecuaciones de *shallow water* es generalmente aceptado³. Estas leyes representan conservación de masa y momento y se pueden obtener promediando en la vertical las ecuaciones de *Navier-Stokes*, despreciando el término de difusión turbulenta. La no linealidad del sistema de ecuaciones hace que la solución sea tan complicada que sólo pueda resolverse por métodos numéricos. De aquí surge la importancia de ser capaces de validar los esquemas numéricos, siendo posible en este caso gracias a los tests sugeridos por MacDonald *et al.*¹² entre otros, en los cuales se conoce la solución exacta del problema.

Los términos fuente han sido discretizados de forma centrada y descentrada^{1,8}. Se describirá cómo se ha procedido en cada una de las opciones. En todos los esquemas se ha usado una integración temporal explícita en uno o dos pasos, lo cual nos permite alcanzar primer o segundo orden de precisión temporal. Las condiciones de contorno han sido tratadas según la teoría de características⁶. La capacidad de los esquemas se demuestra en varios casos test: una rotura de presa y la simulación del estado estacionario para diferentes regímenes de flujo. En cada uno de los casos se comparan los resultados numéricos con la solución exacta.

ECUACIONES

El modelo basado en el sistema de ecuaciones *shallow water* en aproximación 1D que gobierna el flujo de superficie libre en un canal de sección rectangular y anchura unidad, en su forma conservativa³, se expresa de una forma compacta como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{H} \quad (1)$$

con $\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ hu \end{pmatrix}$, $\mathbf{F} = \begin{pmatrix} hu \\ hu^2 + g\frac{h^2}{2} \end{pmatrix}$, $\mathbf{H} = \begin{pmatrix} 0 \\ gh(S_0 - S_f) \end{pmatrix}$

donde \mathbf{U} representa el vector de variables conservadas, h es el nivel de agua y u la velocidad promedio del flujo en dirección x . \mathbf{F} es el flujo convectivo en la dirección x y \mathbf{H} el término fuente; g es la aceleración debida a la gravedad, S_0 la pendiente del fondo del cauce y S_f el término de fricción del agua con las paredes y fondo del cauce.

Dentro de las hipótesis del modelo se incluye el que las pendientes del fondo sean pequeñas, con lo cual $S_0 \cong \tan \theta = -\frac{dz}{dx}$, siendo θ la inclinación del fondo del cauce.

Para el término de fricción se ha usado la fórmula de Manning²

$$S_f = \frac{n^2 u |u|}{R^{\frac{4}{3}}} \quad (2)$$

donde n es el llamado coeficiente de Manning y R el radio hidráulico definido por

$$R = \frac{A}{P} \quad (3)$$

siendo A el área de una sección transversal y P el perímetro mojado correspondiente a esa misma sección, dependiente de la geometría del cauce. En el caso particular de cauce rectangular $A = bh$, donde b representa la anchura del canal y $P = b + 2h$.

El sistema de ecuaciones (1) es de aplicación práctica restringida. Sin embargo, gracias a su simplicidad, es posible comprobar la capacidad de los métodos numéricos.

La ecuación (1) se puede escribir también como

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \mathbf{A} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial x} = \mathbf{H}, \quad \mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} \quad (4)$$

donde la matriz \mathbf{A} es el llamado jacobiano del flujo y su expresión es

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ c^2 - u^2 & 2u \end{pmatrix} \quad (5)$$

Los valores y vectores propios de la matriz \mathbf{A} son

$$a^{1,2} = u \pm c \quad (6)$$

$$\mathbf{e}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ a^{1,2} \end{pmatrix} \quad (7)$$

$c = \sqrt{gh}$ es la celeridad de las ondas lineales en la superficie del agua. Es una cantidad análoga a la velocidad del sonido en el caso de flujos compresibles y constituye la base de la definición del número adimensional gobernante en este caso, llamado número de Froude y definido por $Fr = \frac{u}{c}$, análogo al número de Mach para gases, el cual se usa para clasificar el régimen de flujo: subcrítico, supercrítico y transcrítico.

Se emplea una discretización de las ecuaciones en diferencias finitas conservativa, ya que se parte de las ecuaciones de conservación de masa y momento lineal. Su ventaja es que garantiza el cumplimiento exacto de las leyes de conservación a nivel discreto y permite el cálculo de soluciones discontinuas sin necesidad de técnicas especiales.

Esquema “upwind” de primer orden

Empezamos dividiendo el dominio donde queremos conocer nuestras variables en una malla espacio-temporal. Cada punto vendrá representado por el par (x_i, t^n) , donde x_i representa la discretización en el espacio a lo largo de la dirección x , $x_{i+1} = x_i + \Delta x$, donde $i = 1, 2, \dots, IMAX$, y t^n representa el nivel temporal $t^{n+1} = t^n + \Delta t$, donde $n = 1, 2, \dots, N$.

En forma compacta, el esquema *upwind* de primer orden para el sistema de ecuaciones (1)

prescindiendo de los términos fuente se puede expresar como

$$\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*) \quad (8)$$

con $\Delta x = x_{i+\frac{1}{2}} - x_{i-\frac{1}{2}}$ y $x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}(x_i + x_{i+\frac{1}{2}})$. En este caso se ha elegido una malla regularmente espaciada $\Delta x = \text{cte}$. $\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*$ es el flujo numérico. Se pueden construir diferentes esquemas numéricos dependiendo de la forma en que se escriba este flujo numérico.

Los esquemas de tipo *upwind* se basan en discretizaciones que dependen de las ecuaciones y de la propia solución, teniendo en cuenta el dominio de dependencia de cada punto de la malla computacional. Un esquema *upwind* de primer orden se define vía una linealización local del sistema desarrollada por Roe¹⁴. Para este propósito se define una matriz aproximada $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}$ que satisface en el intervalo $(i, i+1)$ las siguientes propiedades:

- 1) $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}} = \tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}} = (\mathbf{U}_{i+1}, \mathbf{U}_i)$
- 2) $\mathbf{F}_{i+1} - \mathbf{F}_i = \tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}} (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)$
- 3) $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}$ tiene valores propios reales y distintos y un conjunto completo de autovectores.
- 4) $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}} = (\mathbf{U}_i, \mathbf{U}_i) = \mathbf{A}(\mathbf{U}_i)$

La metodología consiste en descomponer el vector diferencia de flujo a través de las paredes que separan dos celdas adyacentes, linealizando localmente la ecuación (1). El esquema *upwind* de primer orden se asocia a un flujo numérico de la forma

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - |\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}| (\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i)] \quad (9)$$

donde $\tilde{\mathbf{A}}$ es el jacobiano aproximado del flujo.

Roe¹⁴ propuso para $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}$ la matriz jacobiana del flujo exacto evaluada en un estado promedio $\mathbf{A}(\tilde{U}_{i+\frac{1}{2}})$. De esta forma el problema se traslada al cálculo de este estado promedio, que se obtiene imponiendo las propiedades de $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}$.

Se buscan los valores promedios $\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}$ y $\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}$ necesarios para formar los valores y vectores propios de la matriz aproximada $\mathbf{A}(\tilde{U}_{i+\frac{1}{2}})$ del modo

$$\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^{1,2} = \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} + \tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} \quad (10)$$

$$\tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^{1,2} = \begin{pmatrix} 1 \\ \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^{1,2} \end{pmatrix} \quad (11)$$

De la propiedad 2) es sencillo inferir que

$$\tilde{u}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{\sqrt{h_{i+1}} u_{i+1} + \sqrt{h_i} u_i}{\sqrt{h_{i+1}} + \sqrt{h_i}} \quad (12)$$

$$\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}} = \sqrt{g \frac{h_{i+1} + h_i}{2}} \quad (13)$$

Usando que $\mathbf{U}_{i+1} - \mathbf{U}_i = \sum_{k=1,2} \alpha_{i+1}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k$, el flujo numérico correspondiente al esquema *upwind* de primer orden dado en (8) se puede escribir como

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} [\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \sum_{k=1,2} |\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k| \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k] \quad (14)$$

donde

$$\alpha_{i+\frac{1}{2}}^{1,2} = \frac{h_{i+1} - h_i}{2} \pm \frac{1}{2\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}} [(hu)_{i+1} - (hu)_i - \tilde{u}_{i+\frac{1}{2}}(h_{i+1} - h_i)] \quad (15)$$

Para evitar el problema de que aparezcan soluciones numéricas con discontinuidades no físicas (valores propios nulos), incompatibles con el principio de entropía, Harten y Hyman¹⁰ propusieron redefinir el módulo de los autovalores de $\tilde{\mathbf{A}}_{i+\frac{1}{2}}$. Para ello se calcula la cantidad $\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^k$

$$\epsilon_{i+\frac{1}{2}}^k = \max[0, (\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k - a_i^k), (a_{i+1}^k - \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k)] \quad k = 1, 2 \quad (16)$$

De esta forma se redefine el flujo numérico de acuerdo con

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \sum_{k=1,2} \psi_{i+\frac{1}{2}}^k \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k \right] \quad (17)$$

donde

$$\psi_{i+\frac{1}{2}}^k = \begin{cases} |\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k| & \text{si } |\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k| \geq \epsilon_{i+\frac{1}{2}}^k \\ \epsilon_{i+\frac{1}{2}}^k & \text{si } |\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k| < \epsilon_{i+\frac{1}{2}}^k \end{cases} \quad (18)$$

Esquema “upwind” de segundo orden

Para conseguir que el esquema numérico *upwind* de primer orden se convierta en uno de segundo orden en espacio y tiempo, una vez calculados los valores de $\alpha_{i+\frac{1}{2}}^k$, $\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k$ y $\tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k$ con $k = 1, 2$, basta con añadir correcciones limitadas de segundo orden al flujo numérico de primer orden¹⁶. Si se limitan los términos de segundo orden, la técnica es de tipo TVD.

De esta forma la expresión del flujo numérico queda como

$$\begin{aligned} \mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = & \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}_{i+1} + \mathbf{F}_i - \sum_{k=1,2} \psi_{i+\frac{1}{2}}^k \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k + \right. \\ & \left. + \sum_{k=1,2} \varphi(r_{i+\frac{1}{2}-s}^k) \underbrace{\psi_{i+\frac{1}{2}-s}^k (1 - |\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}-s}^k|) \alpha_{i+\frac{1}{2}-s}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}-s}^k}_{\text{corrección de segundo orden}} \right] \end{aligned} \quad (19)$$

donde $\psi_{i+\frac{1}{2}}^k$ es la corrección de los autovalores (18) y $\tilde{v}_{i+\frac{1}{2}}^k = \frac{\Delta t}{\Delta x} \tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k$ el número de Courant-Friedrichs-Lowy (CFL) local para cada velocidad característica, que garantiza la propiedad de estabilidad del esquema numérico. El subíndice s representa el signo de la velocidad de convección aproximada $s = \text{signo}(\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k)$.

El limitador de flujo $\varphi(r)$ o factor de corrección depende de la suavidad de la propia solución, de forma que cuando existan gradientes muy bruscos, como ocurre en el caso de discontinuidades, hace que el esquema se comporte como uno de primer orden y se suprimen las oscilaciones a las que dan lugar todos los esquemas numéricos lineales de segundo orden. Así se consigue que el esquema se comporte selectivamente como de primer o de segundo orden según la propia solución.

Para conseguirlo, se compara el gradiente de la entrefase con el de la entrefase señalada por el signo de propagación de la velocidad aproximada mediante su cociente. El argumento

de la función de limitación elegido es el siguiente

$$r_{i+\frac{1}{2}+s}^k = \frac{\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}+s}^k (1 - |\tilde{\nu}_{i+\frac{1}{2}+s}^k|) \alpha_{i+\frac{1}{2}+s}^k}{\tilde{a}_{i+\frac{1}{2}}^k (1 - |\tilde{\nu}_{i+\frac{1}{2}}^k|) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k} \quad (20)$$

Como limitadores se han estudiado los siguientes:

- Van Leer: $\varphi(r) = \frac{r+|r|}{1+r}$
- Minmod: $\varphi = \max[0, \min(r, 1) \min(1, r)]$
- Superbee: $\varphi = \max[0, \min(2r, 1) \min(2, r)]$
- Van Albada: $\varphi(r) = \frac{2r}{1+r^2}$

Con esto se consigue que el esquema numérico sea de segundo orden en el espacio. El segundo orden temporal se alcanza usando el método explícito de Euler en dos pasos (tipo predictor-corrector). La solución se avanza en un primer paso de t^n a $t^n + \frac{\Delta t}{2}$, después se calcula el flujo numérico en el nivel $n + \frac{1}{2}$ y se avanza la solución de t^n a t^{n+1} . El algoritmo se escribiría de la forma siguiente:

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*)^n \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* - \mathbf{F}_{i-\frac{1}{2}}^*)^{n+\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (21)$$

con $(\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^*)^{n+\frac{1}{2}} = \mathbf{F}^*(\mathbf{U}_i^{n+\frac{1}{2}}, \mathbf{U}_{i+1}^{n+\frac{1}{2}})$.

Método de extrapolación de variables

En lugar de limitar el flujo a través de su corrección *upwind* de segundo orden, se procede a limitar la pendiente para extender el esquema de primer orden a uno de segundo orden con propiedades TVD. Este tipo de esquemas se basa en calcular el flujo numérico *upwind* de primer orden con la peculiaridad de que las variables a la izquierda y derecha de cada entrefase se redefinen usando una extrapolación adecuada. Se trata de una extensión de orden superior del método de Godunov (1961). La idea básica se encuentra en la representación discreta de la solución numérica. Las funciones que representan el valor de las variables dentro de cada celda de cálculo se toman constantes en el caso de querer un esquema *upwind* de primer orden y en el caso de los esquemas *upwind* de segundo orden se toman lineales.

Primer orden correspondería a aproximar el vector de variables por (Figura 1)

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^L = \mathbf{U}_i, \quad \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^R = \mathbf{U}_{i+1} \quad (22)$$

y segundo orden⁹ (Figura 2),

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^L &= \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}}^L \\ (hu)_{i+\frac{1}{2}}^L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_i + \frac{1}{4}[(1-k)(h_i - h_{i-1}) + (1+k)(h_{i+1} - h_i)] \\ (hu)_i + \frac{1}{4}[(1-k)[(hu)_i - [(hu)_{i-1}] + (1+k)[(hu)_{i+1} - (hu)_i]] \end{pmatrix} \\ \mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^R &= \begin{pmatrix} h_{i+\frac{1}{2}}^R \\ (hu)_{i+\frac{1}{2}}^R \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{i+1} - \frac{1}{4}[(1-k)(h_{i+2} - h_{i+1}) + (1+k)(h_{i+1} - h_i)] \\ (hu)_{i+1} - \frac{1}{4}[(hu)_{i+2} - (hu)_{i+1}] + (1+k)[(hu)_{i+1} - (hu)_i] \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Para $k = -1$ se obtiene una discretización totalmente *upwind*, para $k = 0$ se obtiene una discretización *upwind* central al 50 % que se corresponde con el esquema de Fromm, para

$k = \frac{1}{3}$ se obtiene una discretización mezcla *upwind* central de hasta tercer orden de precisión y para $k = 1$ se obtiene una discretización central de segundo orden que no se puede utilizar sin limitadores de gradiente. Otros valores de k no tienen ninguna interpretación concreta¹¹.

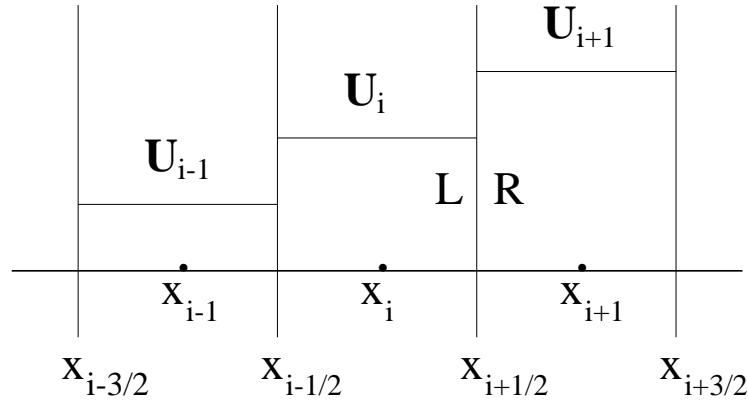


Figura 1. Representación de las variables en el método de extrapolación de variables para primer orden

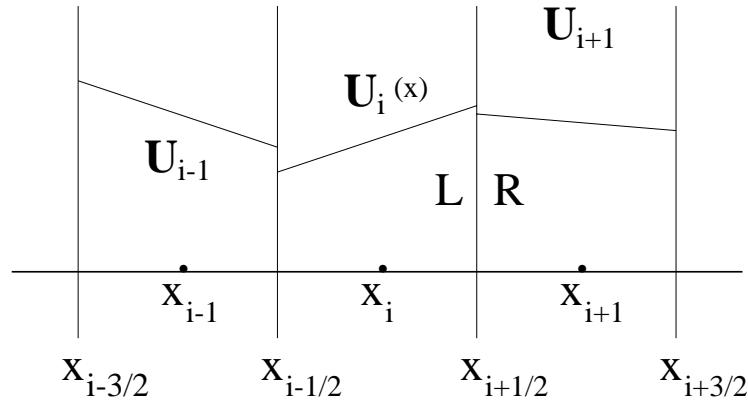


Figura 2. Representación de las variables en el método de extrapolación de variables para segundo orden

Si se limitan las pendientes de las funciones lineales que representan los valores de las variables dentro de cada celda, se llega a

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^L = \begin{pmatrix} h_i + \frac{1}{4}\varphi(r_{i-\frac{1}{2}}^+)[(1-k)(h_i - h_{i-1}) + (1+k)(h_{i+1} - h_i)] \\ (hu)_i + \frac{1}{4}\varphi(r_{i-\frac{1}{2}}^+)[(1-k)(hu)_i - [(hu)_{i-1}] + (1+k)[(hu)_{i+1} - (hu)_i]] \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^R = \begin{pmatrix} h_{i+1} - \frac{1}{4}\varphi(r_{i+\frac{3}{2}}^-)[(1-k)(h_{i+2} - h_{i+1}) + (1+k)(h_{i+1} - h_i)] \\ (hu)_{i+1} - \frac{1}{4}\varphi(r_{i+\frac{3}{2}}^-)[(1-k)[(hu)_{i+2} - (hu)_{i+1}] + (1+k)[(hu)_{i+1} - (hu)_i]] \end{pmatrix}$$

Las funciones de limitación junto a sus argumentos son los mismos que se utilizaron en la sección anterior: Van Leer, Minmod, Superbee y Van Albada.

Con los vectores de variables extrapolados en la pared $\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^{R,L}$ y que llamaremos estados a la derecha y a la izquierda de la pared se calcula el flujo numérico de alta resolución de la forma

$$\mathbf{F}_{i+\frac{1}{2}}^* = \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^R) + \mathbf{F}(\mathbf{U}_{i+\frac{1}{2}}^L) - \sum_{k=1,2} \psi_{RL}^k \alpha_{RL}^k \tilde{\mathbf{e}}_{RL}^k \right] \quad (23)$$

y se sustituye este valor en el algoritmo (8) para actualizar los valores de las variables. El orden de precisión del esquema depende de la discretización elegida, i.e. el valor dado al parámetro k .

Esquema de MacCormack TVD

La técnica que se describe en esta sección produce un algoritmo de segundo orden de precisión en el espacio y en el tiempo. A la vez se caracteriza por su gran simplicidad. Se trata del método clásico de MacCormack al cual se le ha añadido un tercer paso para dotarle de viscosidad artificial adaptativa, de acuerdo con los principios de los esquemas TVD⁷. Consiste en dos pasos: predictor y corrector, actualizando las variables en el nivel temporal t^{n+1} añadiendo los resultados obtenidos en el paso anterior. En su versión clásica

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^P &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \\ \mathbf{U}_i^C &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^P - \mathbf{F}_{i-1}^P) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^P + \mathbf{U}_i^C) \end{aligned} \quad (24)$$

Sin embargo, es bien conocido que los esquemas clásicos de segundo orden muestran un comportamiento oscilatorio cerca de las discontinuidades y el esquema de MacCormack no es la excepción. Este es el motivo por el cual en la práctica se hace uso de la aproximación de añadir viscosidad artificial⁵. La dificultad radica en determinar cuál es la cantidad justa de disipación que hay que introducir para conservar monotonicidad sin causar el suavizado innecesario en regiones propiamente suaves.

En la teoría TVD en 1D⁴ se ha visto que es posible añadir una modificación conservativa y no lineal al esquema de Lax-Wendroff consiguiendo que no haya oscilaciones en los puntos extremos sin perder precisión en otras regiones del flujo. La aplicación de esta idea a la versión de MacCormack derivada del esquema de Lax-Wendroff se encuentra descrita en detalle en la referencia⁷.

La idea subyacente a la modificación propuesta es usar un método de alto orden aumentando selectivamente la disipación numérica de acuerdo a los gradientes de la propia solución. Es posible conseguirlo añadiendo un término no lineal que contiene a los limitadores de flujo, los cuales finalmente serán los responsables de las propiedades de monotonicidad del algoritmo resultante.

El término que se añade al método clásico de MacCormack es de viscosidad artificial adaptativa, siguiendo los principios de los esquemas de tipo TVD. Del sistema de ecuaciones (1), el esquema numérico se puede expresar en la forma

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_i^P &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_{i+1}^n - \mathbf{F}_i^n) \\ \mathbf{U}_i^C &= \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{F}_i^P - \mathbf{F}_{i-1}^P) \\ \mathbf{U}_i^{n+1} &= \frac{1}{2} (\mathbf{U}_i^P + \mathbf{U}_i^C) + \frac{\Delta t}{\Delta x} (\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}}^n - \mathbf{D}_{i-\frac{1}{2}}^n) \end{aligned} \quad (25)$$

donde el término de extensión del esquema viene dado por

$$\mathbf{D}_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \sum_{k=1,2} \left[1 - \varphi(r'_{i+\frac{1}{2}}^k) \right] \psi_{i+\frac{1}{2}}^k (1 - |\tilde{\nu}_{i+\frac{1}{2}}^k|) \alpha_{i+\frac{1}{2}}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k \quad (26)$$

y los $(r'_{i+\frac{1}{2}}^k)$ son los mismos especificados en (20).

Aunque el esquema de MacCormack es de tipo central, la extensión TVD le obliga a tener una componente *upwind* debido a la forma del argumento de la función de limitación.

Términos fuente

Se han usado dos aproximaciones diferentes en la discretización de los términos fuente. Son la aproximación puntual, i.e. la evaluación del término fuente en el nodo i y la aproximación *upwind*, que consiste en descomponer el término fuente en la base de vectores propios del jacobiano del flujo.

La primera es la opción más simple para un término fuente genérico y consiste en la evaluación del término fuente en el nodo usando las variables dependientes ya conocidas del paso temporal anterior. Sin embargo, pueden surgir problemas cuando los términos fuente contienen derivadas espaciales y se debe establecer una definición de su representación discreta. Esta dificultad se encuentra en la práctica a la hora de discretizar el término de la pendiente del fondo del cauce S_0 .

La aproximación *upwind* para el tratamiento de los términos fuente está basada en un tratamiento de los mismos que, por analogía con la discretización del flujo¹, garantice el equilibrio en régimen de reposo. Así se tiene que los términos fuente se pueden discretizar de forma análoga a (14)

$$\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}} = \sum_{k=1,2} \beta_{i+\frac{1}{2}}^k \tilde{\mathbf{e}}_{i+\frac{1}{2}}^k \quad (27)$$

De esta descomposición se infiere el valor de los nuevos coeficientes $\beta_{i+\frac{1}{2}}^k$ de la descomposición⁸.

$$\beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{g\Delta x}{2\tilde{c}_{i+\frac{1}{2}}} \tilde{A}(\tilde{S}_0 - \tilde{S}_f) \quad \beta_{i+\frac{1}{2}}^1 = -\beta_{i+\frac{1}{2}}^2 = \beta_{i+\frac{1}{2}} \quad (28)$$

donde todavía existe libertad en la elección de \tilde{A} , \tilde{S}_0 y \tilde{S}_f . Estos promedios se fijan mediante imposición de las condiciones de equilibrio mencionadas.

La contribución del término fuente al nodo i consiste en una parte que proviene de la celda a su izquierda ($i - \frac{1}{2}$) y de otra de la celda a su derecha ($i + \frac{1}{2}$). La discretización *upwind* determina la cantidad relativa a estas dos partes $\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^*$ y $\mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^*$.

$$\mathbf{H}_i \Delta x = \frac{1}{2} (\mathbf{H}_{i+\frac{1}{2}}^* + \mathbf{H}_{i-\frac{1}{2}}^*) \quad (29)$$

donde

$$\mathbf{H}_{i\pm\frac{1}{2}}^* = \mathbf{H}^{R,L} \beta_{i\pm\frac{1}{2}} \quad (30)$$

y

$$\mathbf{H}^R = \begin{pmatrix} 1-s_1 & 1-s_2 \\ \tilde{a}^1(1-s_1) & \tilde{a}^2(1-s_2) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^L = \begin{pmatrix} 1+s_1 & 1+s_2 \\ \tilde{a}^1(+s_1) & \tilde{a}^2(1+s_2) \end{pmatrix} \quad (31)$$

$$s_k = signo(\tilde{a}^k)$$

Es importante hacer notar que con esta discretización del término fuente sólo queda garantizado el primer orden de precisión.

Tests numéricos

En esta sección se muestran las comparaciones de los resultados numéricos obtenidos con todos los esquemas revisados, incluyendo el esquema clásico de MacCormack, con la solución exacta. En todos los ejemplos se consideran canales de sección rectangular. Algunos de ellos están diseñados para comprobar la capacidad de tratar con flujo subcrítico, supercrítico y transcrítico, así como para ver la diferencia en los resultados según el tipo de discretización del término fuente que se haya usado.

Rotura de presa

A continuación se presentan los resultados obtenidos para el test de una rotura de presa en un canal de anchura unidad y 1000 m de longitud. La presa se encuentra situada a 500 m y la relación de alturas iniciales es 10:1. El fondo del canal es plano y no hay término de rozamiento. En este caso particular se puede obtener la solución exacta¹⁷ y comparar con ella los resultados. Se ha usado en todos los casos $\Delta x = 1$ m, $\Delta x = 10$ m y $CFL = 0,95$.

Las Figuras 3 y 4 representan la comparación entre la solución exacta y la solución numérica obtenida con el esquema *upwind* de primer orden.

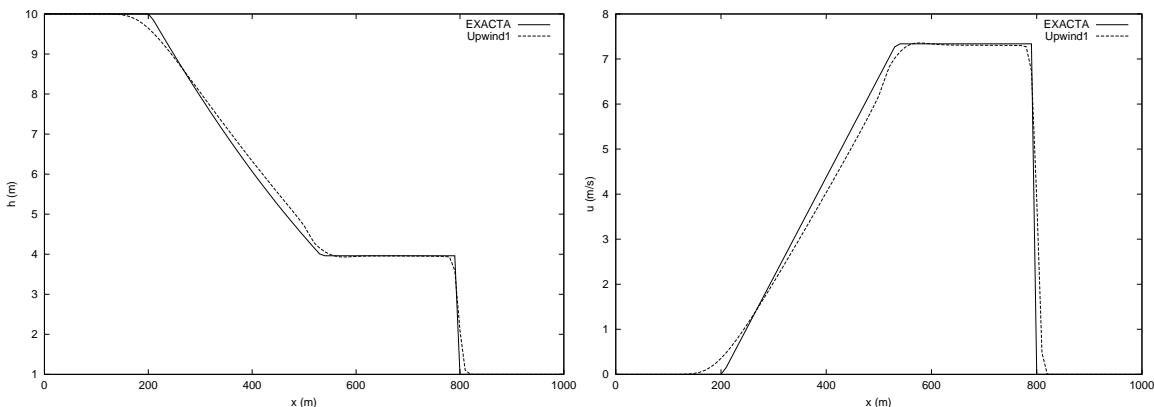


Figura 3. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema *upwind* de primer orden, $\Delta x = 10$ m

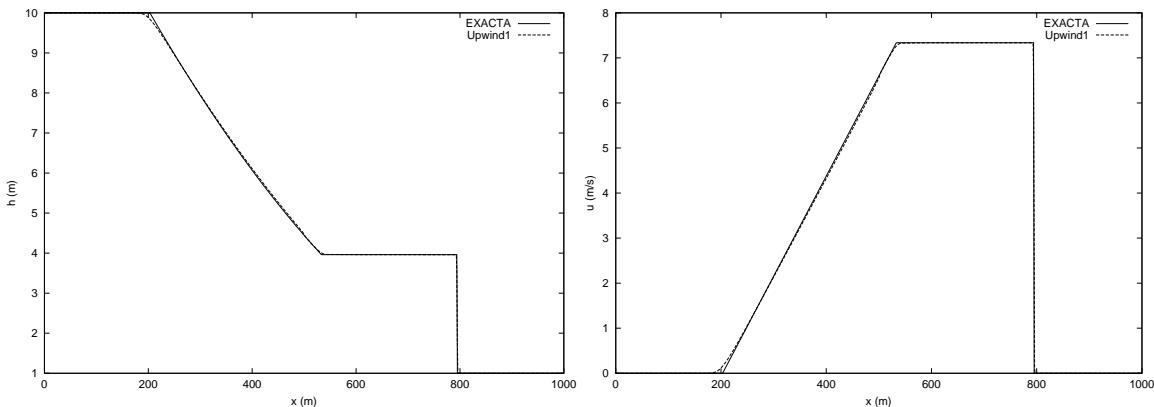


Figura 4. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema *upwind* de primer orden, $\Delta x = 1$ m

En las Figuras 5 y 6 representamos la comparación entre la solución exacta y la numérica obtenida con el esquema *upwind* de segundo orden. Se ha usado el limitador de Van Leer, aunque se podría haber usado cualquier otro, ya que no se han observado diferencias apreciables en los resultados.

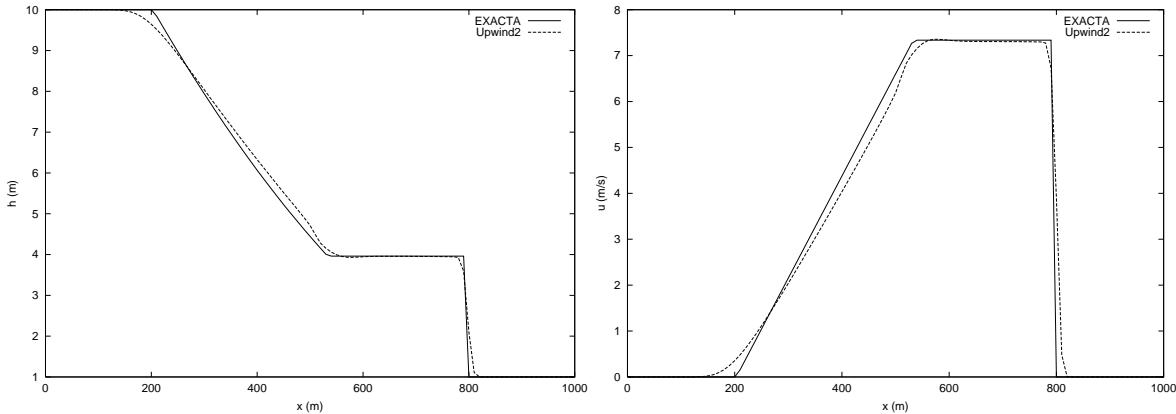


Figura 5. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema *upwind* de segundo orden, $\Delta x = 10$ m

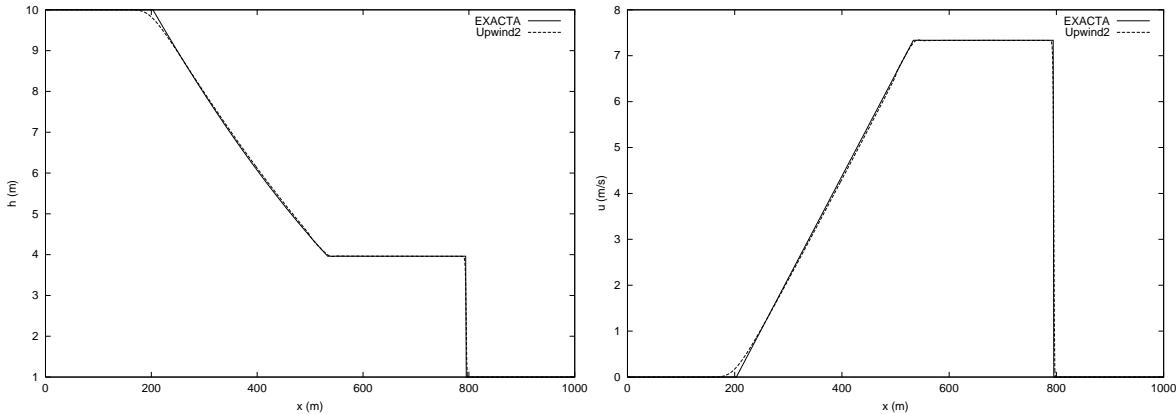


Figura 6. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema *upwind* de segundo orden, $\Delta x = 1$ m

Las Figuras 7 y 8 representan la comparación entre la solución exacta y la numérica obtenida con el método de extrapolación de variables. Se ha usado $K = -1$ y el limitador de Van Leer. Los resultados son similares.

En las Figuras 9 y 10 se muestra la comparación entre la solución exacta y la numérica obtenida con el esquema clásico de MacCormack. La solución numérica no es correcta, ya que aparece un salto hidráulico sin significado físico. Además cerca de la discontinuidad aparecen oscilaciones numéricas.

Las Figuras 11 y 12 representan la comparación entre la solución exacta y la numérica obtenida con el esquema de MacCormack con corrección TVD. Se ha usado el limitador de Van Leer.

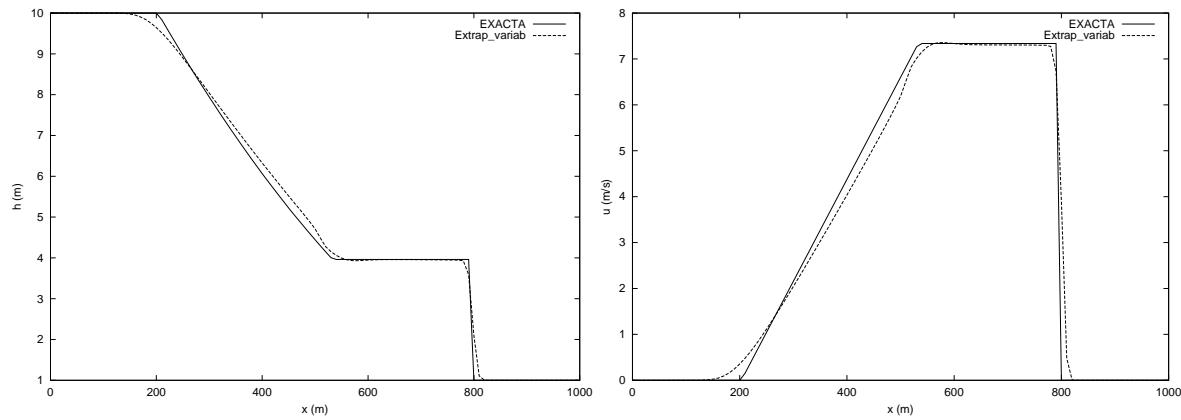


Figura 7. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema de extrapolación de variables, $\Delta x = 10$ m

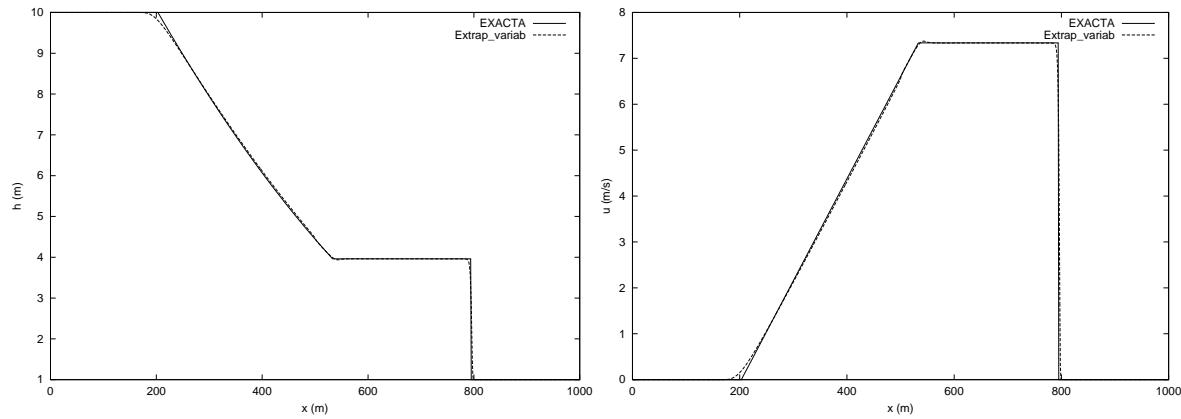


Figura 8. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema de extrapolación de variables, $\Delta x = 1$ m

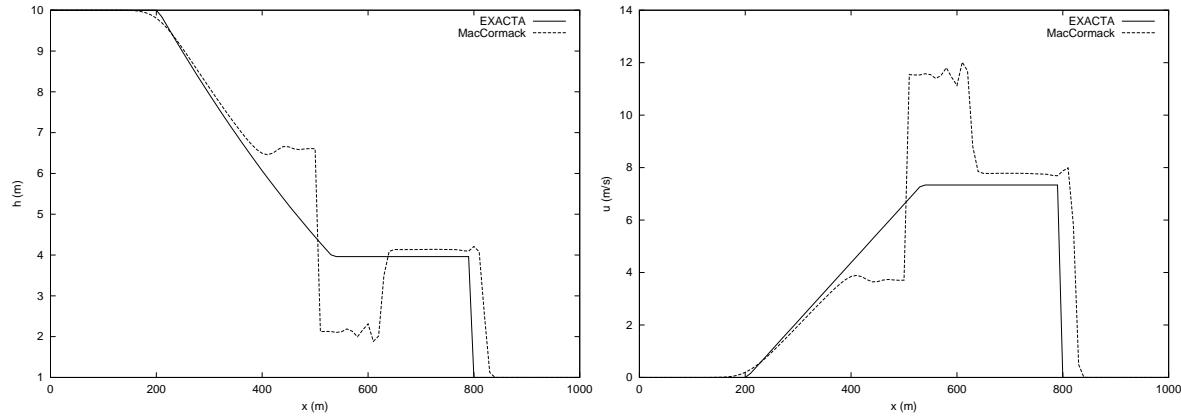


Figura 9. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema clásico de MacCormack, $\Delta x = 10$ m

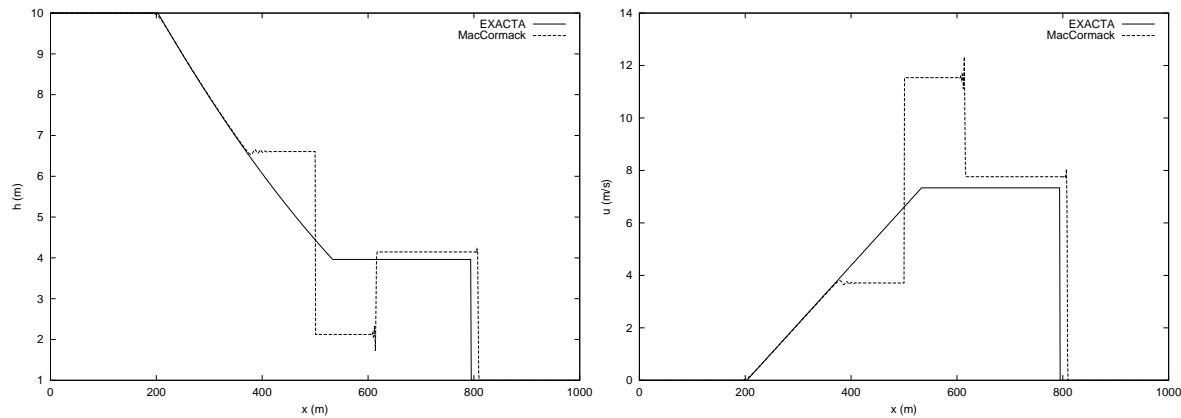


Figura 10. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema clásico de MacCormack, $\Delta x = 1$ m

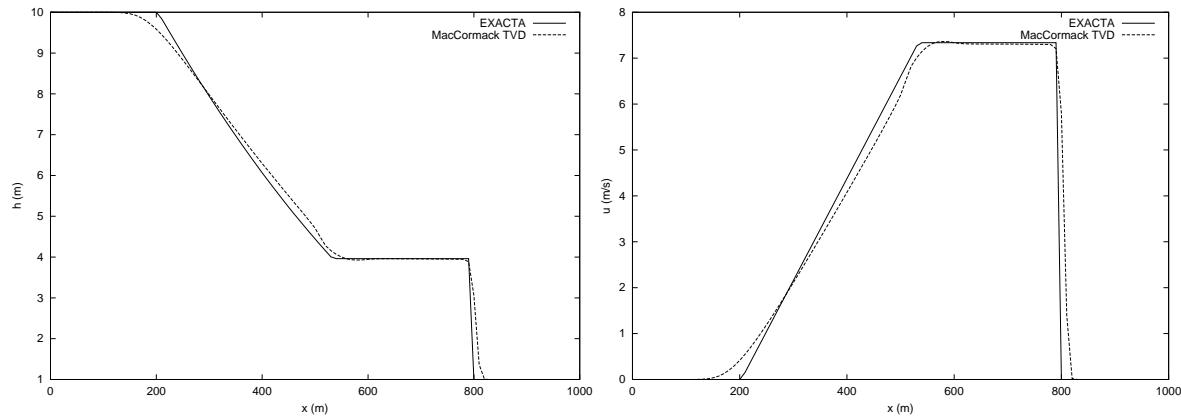


Figura 11. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema de MacCormack TVD, $\Delta x = 10$ m

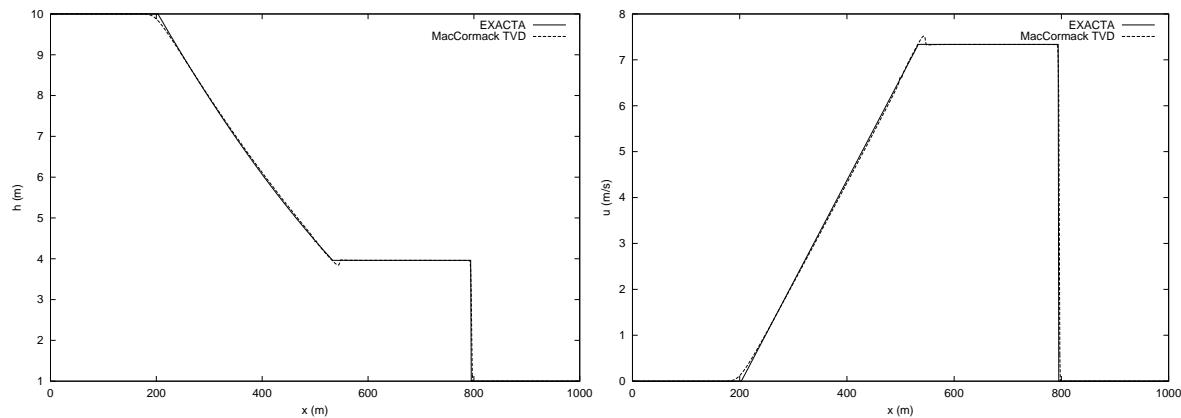


Figura 12. Perfiles de calado y velocidad en la rotura de presa, esquema de MacCormack TVD, $\Delta x = 1$ m

Flujo estacionario en un canal

Vamos a mostrar los resultados obtenidos para los casos test de convergencia al estado estacionario en un canal con cualquier tipo de régimen: subcrítico, supercrítico y transcrítico, sugeridos por MacDonald *et al.*¹² donde la solución exacta es conocida “a priori”. Se van a comparar las soluciones numéricas obtenidas con todos los esquemas con la solución exacta.

Se procede con lo que podría llamarse “problema inverso”; se eligen el calado y la pendiente del fondo del canal hipotéticos de forma que al resolver las ecuaciones, partiendo de unas condiciones iniciales arbitrarias, se encuentre como solución estacionaria el calado hipotético con el que hemos calculado la pendiente del canal; es decir, que se mantenga el estado estacionario en el canal. En todos los casos se considera un canal de 1000 m de longitud, 10 m de anchura y de sección transversal rectangular. La pendiente del fondo del canal viene dada por

$$S_0(x) = \left(1 - \frac{4}{gh^3(x)}\right) \frac{dh(x)}{dx} + 0,16 \frac{P^{\frac{4}{3}}}{A^{\frac{10}{3}}} \quad (32)$$

y el coeficiente de Manning es 0,02 para todos los casos excepto para el primero que es 0,03.

Suponemos inicialmente un caudal uniforme $Q = 20 \text{ m}^3/\text{s}$ y un calado de $h = 1 \text{ m}$. El cálculo se ha hecho en una malla con $\Delta x = 10 \text{ m}$. Dadas las condiciones iniciales, se deja evolucionar el sistema hacia el equilibrio.

En la Figura 14 se muestra el perfil analítico y simulado de calado y caudal obtenido con todos los esquemas numéricos. En este primer caso, el flujo es totalmente subcrítico. Como condiciones de contorno se fija el caudal aguas arriba y el calado aguas abajo. La solución exacta del calado es

$$h(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \frac{1}{2} \exp\left(-16 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right) \quad (33)$$

y seguiría la forma descrita en la Figura 13.

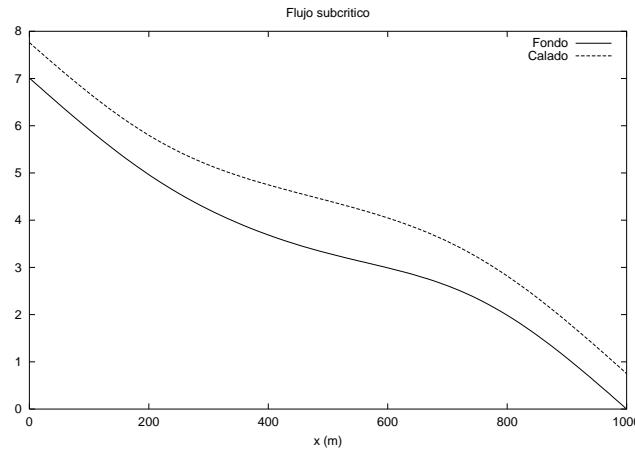


Figura 13. Calado y pendiente a lo largo del canal. Flujo subcrítico. Solución exacta.

El calado se resuelve correctamente con todos los esquemas numéricos, pero el caudal presenta pequeñas diferencias. Los resultados con el esquema de MacCormack muestran una oscilación simétrica alrededor del valor exacto. El resto de esquemas dan una solución

mejor. Se explica en el hecho de que el término fuente ha sido discretizado de forma *upwind*, excepto en el esquema de MacCormack que ha sido discretizado de forma puntual.

Hay que resaltar que el tratamiento nodal del término fuente dentro de una discretización de las ecuaciones de tipo *upwind* produce mayores errores en cuanto a conservación de masa que los mostrados en la Figura 14 con el esquema de MacCormack.

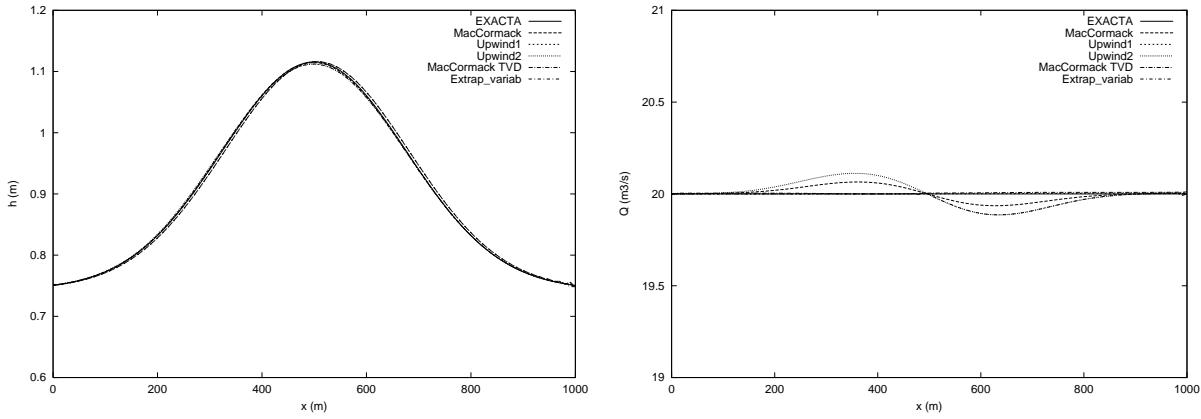


Figura 14. Perfil de calado y caudal en el estado estacionario. Flujo totalmente subcrítico

En la Figura 16 se muestra el perfil analítico y simulado de calado y caudal obtenido con todos los esquemas numéricos. En este segundo caso, el flujo es totalmente supercrítico. Como condiciones de contorno se fija el caudal y el calado aguas arriba y aguas abajo no imponemos ninguna condición. La solución exacta del calado es

$$h(x) = \left(\frac{4}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{5} \exp\left(-36\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)^2\right)\right) \quad (34)$$

y su forma es la que se puede ver en la Figura 15.

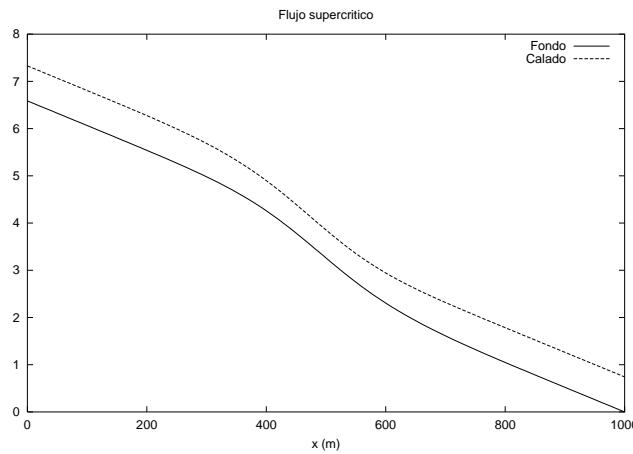


Figura 15. Calado y pendiente a lo largo del canal. Flujo supercrítico. Solución exacta.

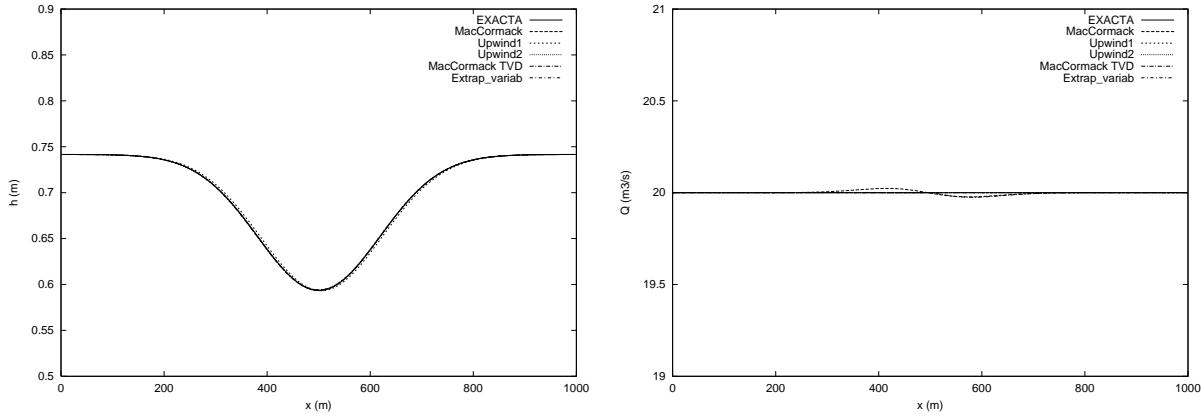


Figura 16. Perfil de calado y caudal en el estado estacionario. Flujo totalmente supercrítico

En este caso hay una coincidencia total entre la solución exacta y la numérica en ambas variables: calado y caudal.

En la Figura 18 se muestra el perfil analítico y simulado de calado y caudal obtenido con todos los esquemas numéricos. En este tercer caso, el flujo es subcrítico a la entrada y supercrítico a la salida. Como condiciones de contorno se fija el caudal aguas arriba y aguas abajo no imponemos ninguna condición. La solución exacta del calado es

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{3} \operatorname{tgh} \left(3 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) & 0 \leq x \leq 500 \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 - \frac{1}{6} \operatorname{tgh} \left(6 \left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right)\right) & 500 \leq x \leq 1000 \end{cases} \quad (35)$$

con la forma de la Figura 17.

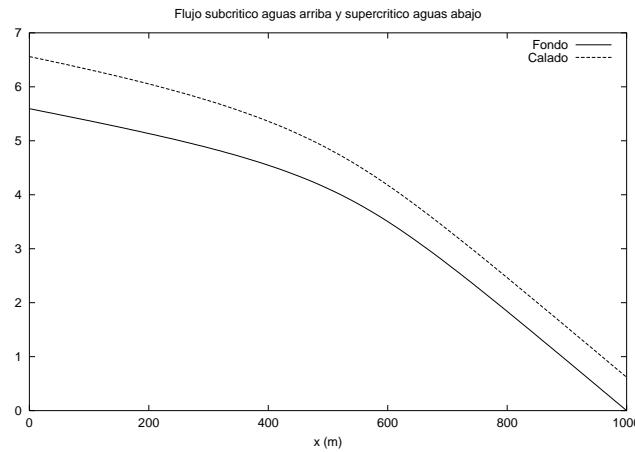


Figura 17. Calado y pendiente a lo largo del canal. Solución exacta.

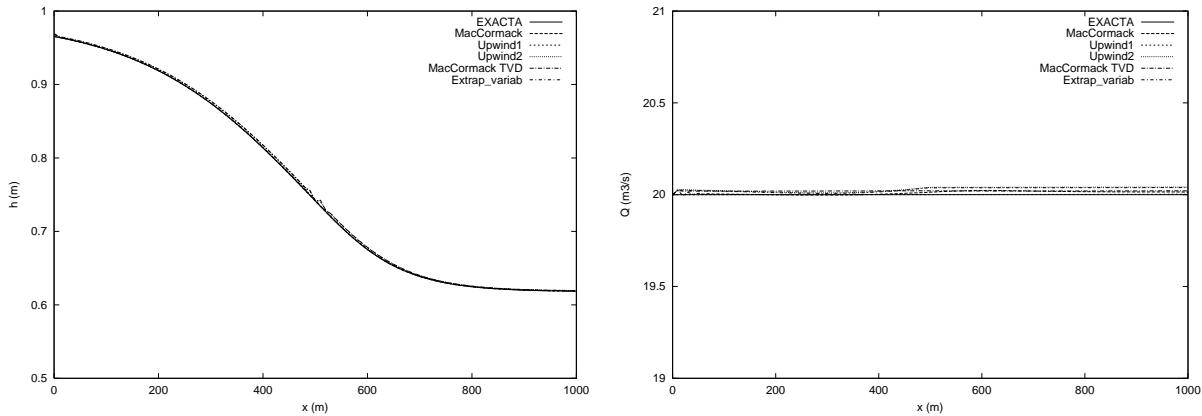


Figura 18. Perfil de calado y caudal en el estado estacionario. Flujo subcrítico a la entrada y supercrítico a la salida

El calado se ajusta bien a la solución exacta como ocurría en los casos anteriores. Sin embargo, para la variable caudal, los esquemas *upwind* dan la solución exacta, mientras que el esquema de MacCormack y el de extrapolación de variables no. Además, los resultados con el esquema de MacCormack muestran una pequeña oscilación cerca de la condición de contorno aguas arriba.

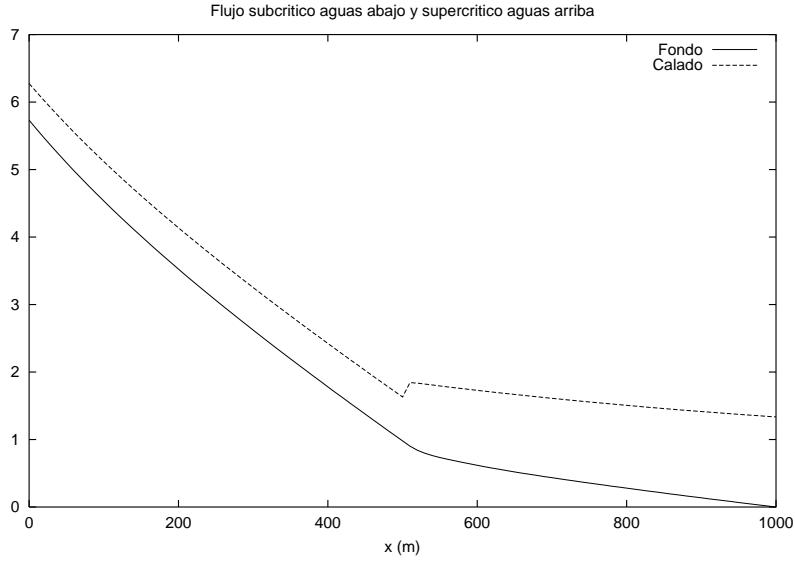


Figura 19. Calado y pendiente a lo largo del canal. Solución exacta.

En la Figura 20 se muestra el perfil analítico y simulado de calado y caudal obtenido con todos los esquemas numéricos. En este último caso test el flujo es supercrítico a la entrada y subcrítico a la salida. Este es el caso más difícil para comprobar la capacidad de un esquema numérico, ya que la transición es discontinua. Como condiciones de contorno

se fija el caudal y el calado aguas arriba y aguas abajo el calado. La solución exacta del calado es

$$h(x) = \begin{cases} \left(\frac{4}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \left(\frac{9}{10} - \frac{1}{6} \exp\left(\frac{-x}{250}\right) \right); & 0 \leq x \leq 500 \\ \left(\frac{4}{g}\right)^{\frac{1}{3}} \left(1 + \sum a_k \exp\left(-20k\left(\frac{x}{1000} - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{4}{5} \exp\left(\frac{x}{500} - 1\right) \right); & 500 \leq x \leq 1000 \end{cases} \quad (36)$$

con $a_1 = -0,348427$, $a_2 = 0,552264$ y $a_3 = -0,555580$.

El perfil es el que se muestra en la Figura 19.

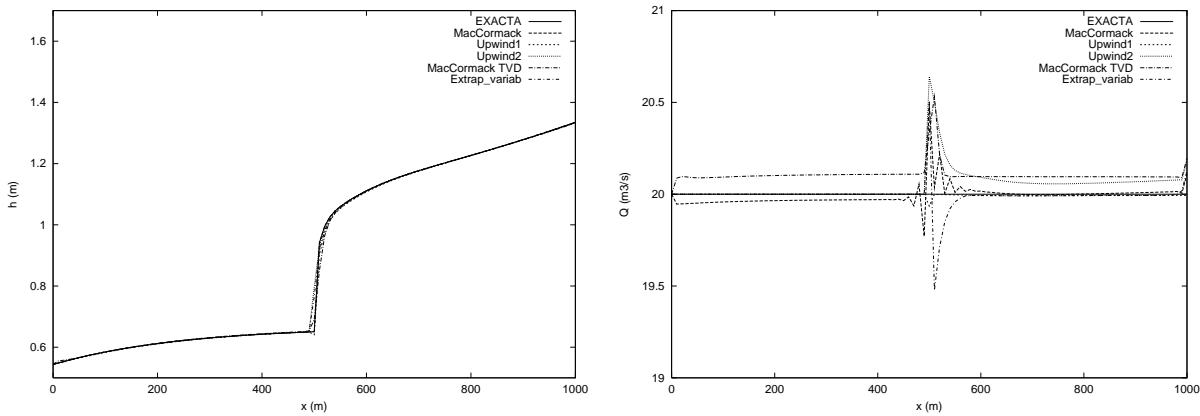


Figura 20. Perfil de calado y caudal en el estado estacionario. Flujo supercrítico a la entrada y subcrítico a la salida

Todos los esquemas presentan oscilaciones cerca de la discontinuidad, siendo menores con los esquemas *upwind* y mayores con el resto.

CONCLUSIONES

Todos los esquemas numéricos de alta resolución mostrados en este trabajo dan unos resultados muy satisfactorios y sin lugar a dudas mejores a los obtenidos con esquemas numéricos clásicos. No se muestran oscilaciones ni picos espúreos en la solución numérica.

Sólo la coincidencia de los resultados numéricos y experimentales pueden apoyar la aplicabilidad de un modelo; sin embargo, comparando los resultados numéricos con soluciones exactas de problemas simples como los considerados aquí, se puede obtener una buena referencia del comportamiento de los esquemas.

En todos los casos se puede apreciar que capturan perfectamente tanto la onda de choque como la de rarefacción, excepto con el método de MacCormack TVD, que no se comporta rigurosamente como TVD y aparece una pequeña onda. Los términos añadidos al esquema de MacCormack para hacerlo de tipo TVD no consiguen controlar la solución numérica, generándose este tipo de pequeña onda, lo cual indica que este esquema ha de ser aplicado con cuidado en problemas determinados. El tipo de función limitadora del flujo que se elija no afecta al resultado, cualquiera de ellas proporciona un resultado similar. Los tiempos de CPU requeridos por cada uno de los esquemas numéricos apenas difieren entre

sí; en todos ellos el cálculo es inferior a un minuto, siendo el más rápido el esquema *upwind* de primer orden.

Bajo las hipótesis de flujo no viscoso, las ecuaciones de Euler para flujo compresible constituyen un sistema no lineal hiperbólico análogo al sistema de ecuaciones de *shallow water*, y por lo tanto todos los métodos expuestos en este trabajo pueden ser aplicados¹⁸. Es más, algunos de estos métodos fueron desarrollados originalmente para ser aplicados a la dinámica de gases y diseñados para ser capaces de resolver sistemas con discontinuidades y ondas de choque.

En los últimos casos test los términos fuente contienen derivadas espaciales. Su discretización nodal lleva a oscilaciones numéricas alrededor de la variable caudal. Sin embargo, se ha resuelto con el tratamiento *upwind* de las variaciones del fondo en los esquemas donde esta aproximación era posible.

Como conclusión general se puede decir, que cualquiera de estos métodos es bueno para resolver las ecuaciones *shallow water* 1D, en el caso en que se pretendan simular flujos con discontinuidades.

Los autores opinan que aunque este tema no sea novedoso, aún sigue siendo merecedor de atención en la literatura científica, en primer lugar como punto de partida a quienes se introduzcan en el tema de la aproximación numérica de ecuaciones de conservación, en segundo lugar porque todavía existen detalles que no han sido resueltos y deben seguir siendo analizados y por último porque se considera necesario como trabajo preliminar para su posterior aplicación a problemas multidimensionales. En este sentido se está desarrollando una línea de investigación que será objeto de futuros trabajos.

REFERENCIAS

- 1 A. Bermúdez, M. E. Vázquez-Cendón, “Upwind methods for hyperbolic conservation laws with source terms”, *Computers and Fluids*, Vol. **8**, pp. 1049–1071, (1994).
- 2 V.T. Chow, “*Open channel hydraulics*”, MacGraw-Hill Book Co. Inc., (1959).
- 3 J.A. Cunge, F.M. Holly y A. Verwey, “*Practical aspects of computational river hydraulics*”, Pitman Pub. Inc., (1982).
- 4 S. Davis, “TVD finite-difference schemes and artificial viscosity”, Paper CR 172373 NASA, (1984).
- 5 R. García y R.A. Kahawita, “Numerical solution of the St. Venant equations with the MacCormack finite difference scheme”, *Int. J. Num. Met. Fluids*, Vol. **6**, pp. 259–274, (1986).
- 6 P. García-Navarro, “Propagación de ondas en cursos fluviales”, Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza, (1989).
- 7 P. García-Navarro y F. Alcrudo, “1D open channel flow simulation using TVD MacCormack scheme”, *J. Hydr. Engng.*, ASCE, (1992).
- 8 P. García-Navarro, y M.E. Vázquez-Cendón, “Some considerations and improvements on the performance of Roe’s scheme for 1D irregular geometries”, Prepublicaciones del Departamento de Matemática Aplicada, Universidad de Santiago de Compostela, Vol. **23**, (1997).
- 9 A. Harten, “High resolution schemes for hyperbolic conservation laws”, *J. Comp. Phys.*, Vol. **49**, pp. 357–393, (1983).
- 10 A. Harten y P. Hyman, “Self adjusting grid methods for one dimensional hyperbolic conservation laws”, *J. Comp. Phys.*, Vol. **50**, pp. 235–269, (1983).

- 11 Ch. Hirsch, "Numerical computation of internal and external flows", *Comp. Meth. for Inv. and Visc. Flows*, Vol. **2**, Wiley, Chichester, (1990).
- 12 I. MacDonald, M.J. Baines y N.K. Nichols, "Analysis and computation of steady open channel flow using a singular perturbation problem", *Num. An. Rep.*, Vol. **7**, (1994).
- 13 S. Osher, "Riemann solvers, the entropy condition and difference approximations", *SIAM Journ. Num. Anal.*, Vol. **21**, pp. 217–235, (1984).
- 14 P.L. Roe, "Approximate Riemann solvers, parameter vectors and difference schemes", *Journ. Comp. Phys.*, Vol. **43**, pp. 357–372, (1981).
- 15 P.K. Sweby, "A modification of Roes scheme for entropy satisfying solutions of scalar non-linear conservation laws", *Num. Anal. Rep.*, University of Reading, (1982).
- 16 P.K. Sweby, "High resolution schemes using flux limiters for hyperbolic conservation laws", *SIAM Journ. Num. Anal.*, Vol. **21**, (1984).
- 17 J.J. Stoker, "Water waves", Interscience Pub. Inc., New York, (1957).
- 18 E.F. Toro, "Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics", Kluwer Ac. Pub., Londres, (1994).