

# Desarrollo de un algoritmo de cálculo para la implementación del método de Rayleigh-Ritz en el cálculo de frecuencias naturales de vibración de placas rectangulares con complejidades diversas

Daniel H. Felix, Diana V. Bambill\* y Carlos A. Rossit\*

Instituto de Mecánica Aplicada

Departamento de Ingeniería, Universidad Nacional del Sur

\* Miembro de la Carrera del Investigador Científico, CONICET

Alem 1253, 8000 Bahía Blanca, Argentina

Tel.: 54-291-45 951 00/01; Fax: 54-291-45 956 57

e-mail: dhfelix@criba.edu.ar

e-mail: dbambill@criba.edu.ar

e-mail: carossit@criba.edu.ar

## Resumen

En el presente trabajo se desarrolla una metodología<sup>1</sup> numérica para determinar frecuencias naturales de vibración en placas rectangulares, mediante la aplicación del método variacional<sup>2–3</sup> de Rayleigh-Ritz, recurriendo a conjuntos completos de funciones coordenadas para aproximar la deflexión de la placa.

Mediante el procedimiento propuesto se simplifica la construcción del determinante-ecuación que resuelve el problema, se obtienen las matrices correspondientes, evitando el desarrollo de numerosos pasos intermedios, y se logra un considerable ahorro de tiempo y esfuerzo así como una sensible disminución en la posibilidad de generación de errores.

**Palabras clave:** vibraciones, método de Rayleigh-Ritz, frecuencias naturales, placas rectangulares, métodos variacionales.

## A PARTICULAR RAYLEIGH-RITZ METHOD IMPLEMENTATION TO OBTAIN NATURAL FREQUENCIES OF RECTANGULAR PLATES WITH VARIOUS COMPLEXITIES

## Summary

In the present study an algorithmic formulation<sup>1</sup> of the variational<sup>2–3</sup> method of Rayleigh-Ritz, using complete sets of coordinate functions to approximate the deflection of the plate, is developed to allow the calculation of natural frequencies of rectangular plates.

A particular and efficient technique is used in the computer code to obtain the matrix system that yields the determinantal equation.

**Keywords:** vibration, Rayleigh-Ritz method, natural frequencies, rectangular plates, variational methods

## INTRODUCCIÓN

El objetivo inicial de utilizar como aproximación de la deflexión de la placa vibrante<sup>4</sup> funciones “viga” (ampliamente conocidas en la literatura técnico-científica), que constituirán las funciones coordenadas en el conocido método de Rayleigh-Ritz, necesita de una prolija organización del algoritmo y de los pasos algebraicos a seguir.

El estudio presentado consiste en el desarrollo de una metodología de cálculo de frecuencias naturales de vibración para placas rectangulares delgadas<sup>5</sup> con diversas condiciones de sustentación en su contorno.

El tratamiento propuesto permite considerar diversas variantes; como zonas debilitadas por orificios o por degradación del material, reparaciones tipo “parche”, y diferentes características de isotropía, ortotropía y anisotropía ya sea en la placa o en los parches. También admite la presencia de una o más masas puntuales vinculadas tanto rígida como elásticamente a la placa.

El desarrollo de este algoritmo consistió en la organización del considerable número de pasos algebraicos tendientes a obtener el determinante-ecuación que permite calcular los autovalores y las autofunciones del modelo estructural en estudio.

La metodología que se implementó para desarrollar el algoritmo fue la de generalizar mediante reglas de transformación adecuadas un proceso sistemático para calcular las matrices de energía cinética y de deformación elástica del modelo estructural y que permita el planteo del funcional energético del problema a partir de coeficientes sencillos de codificar.

La solución propuesta para placas rectangulares se basa en la utilización de un conjunto completo de funciones coordenadas, las funciones “viga”, que se adecuan a las condiciones de vinculación externas.

El algoritmo que se muestra en este estudio constituye un enfoque original y eficaz en el cálculo de las frecuencias y las formas modales en placas rectangulares, con la amplia gama de complejidades adicionales ya mencionadas.

## SOLUCIÓN ANALÍTICA

En la Figura 1 se muestra el modelo estructural básico para el planteo propuesto, una placa de espesor uniforme  $h$ , que se supone pequeño en comparación a sus otras dimensiones.

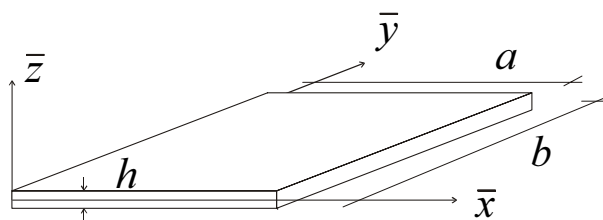


Figura 1. Placa rectangular

El funcional de energía que gobierna el problema de vibraciones libres de la placa se puede expresar como

$$J(W) = U_{\max}(W) - T_{\max}(W) \quad (1)$$

donde  $W$  representa las amplitudes de la deflexión en la dirección  $z$ ;  $U_{\max}(W)$  es la expresión de la máxima energía potencial elástica acumulada durante la deformación; y  $T_{\max}(W)$  es la máxima energía cinética de la placa que vibra transversalmente.

Para el dominio rectangular del modelo vibrante la expresión de la máxima energía potencial acumulada durante la deformación, siguiendo la notación de Lekhnitskii<sup>6</sup> para

materiales con anisotropía, es la siguiente

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_{A_p} [D_{11}W_{\bar{x}\bar{x}}^2 + 2D_{12}W_{\bar{x}\bar{x}}W_{\bar{y}\bar{y}} + D_{22}W_{\bar{y}\bar{y}}^2 + 4D_{66}W_{\bar{x}\bar{y}}^2 + 4(D_{16}W_{\bar{x}\bar{x}} + D_{26}W_{\bar{y}\bar{y}})W_{\bar{x}\bar{y}}] d\bar{x} d\bar{y} \quad (2)$$

donde los  $D_{ij}$  son las constantes de rigidez de la placa con anisotropía generalizada.  $D_{11}$  es la rigidez flexional alrededor del eje  $y$ ,  $D_{22}$  la rigidez flexional alrededor del eje  $\bar{x}$ ,  $D_{66}$  la rigidez torsional y  $D_{16}$  y  $D_{26}$  son las rigideces adicionales. Las relaciones  $D_{12}/D_{22}$  y  $D_{12}/D_{11}$  son conocidas como coeficientes reducidos de Poisson.  $A_p$  es la superficie de la placa de dimensiones  $a \times b$ , dominio en el cual se realiza la integración.

La máxima energía cinética de la placa que vibra transversalmente es

$$T_{\max} = \frac{1}{2} \rho \omega^2 \int_{A_p} h W^2 d\bar{x} d\bar{y} \quad (3)$$

donde  $\rho$  es la masa por unidad de volumen del material de la placa y  $\omega$  es frecuencia circular de vibración transversal del sistema.

Si la placa es ortótropa y las direcciones de los ejes coordenadas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  coinciden con las direcciones elásticas principales 1 y 2, la expresión de la máxima energía de deformación elástica se expresa como

$$U_{\max} = \frac{1}{2} \int_{A_p} (D_1 W_{\bar{x}\bar{x}}^2 + 2D_1 \nu_2 W_{\bar{x}\bar{x}} W_{\bar{y}\bar{y}} + D_2 W_{\bar{y}\bar{y}}^2 + 4D_k W_{\bar{x}\bar{y}}^2) d\bar{x} d\bar{y} \quad (4)$$

mientras que la expresión de la máxima energía cinética es la indicada en la expresión (3).

Las constantes de rigidez flexional de la placa ortótropa para las direcciones elásticas principales y la rigidez torsional están dadas por las expresiones

$$D_1 = \frac{E_1 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \quad D_2 = \frac{E_2 h^3}{12(1 - \nu_1 \nu_2)} \quad D_k = \frac{G h^3}{12} \quad (5a, b, c)$$

o siguiendo la denominación de Lekhnitskii, las rigideces principales  $D_1$ ,  $D_2$  y  $D_3$  con

$$D_3 = D_1 \nu_2 + 2D_k \quad (6)$$

donde  $E_1$ ,  $E_2$  son los módulos de Young,  $\nu_1$ ,  $\nu_2$  los coeficientes de Poisson y  $G$  el módulo de elasticidad transversal para las direcciones principales elásticas.

En el caso de la placa isótropa resultan

$$E_1 = E_2 = E \quad (7)$$

$$\nu_1 = \nu_2 = \nu \quad (8)$$

$$G = \frac{E}{(1 + \nu)} \quad (9)$$

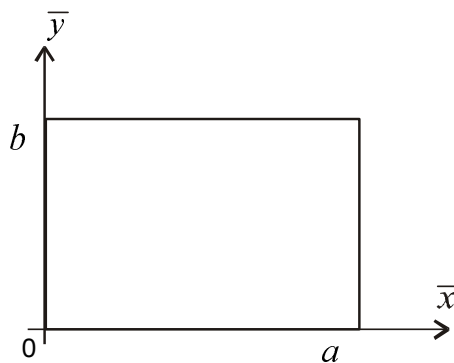
mientras que las tres rigideces principales se reducen a una única rigidez  $D$

$$D = D_1 = D_2 = D_3 = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (10)$$

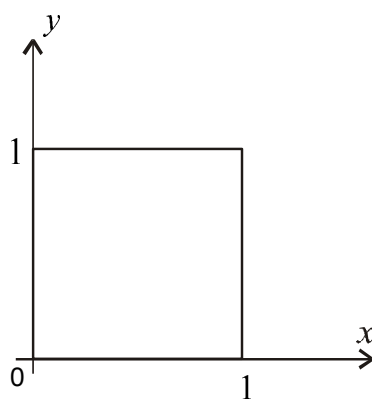
Se presenta a continuación el desarrollo para el caso de una placa rectangular ortótropa que vibra libremente. El funcional correspondiente a las expresiones de energía (3) y (4) y referida a un dominio normalizado de integración en el plano  $x - y$  (Figura 2) es

$$\begin{aligned}
 J_{[W]} = & \frac{1}{2} \left[ \frac{b}{a^3} \int_{A_n} D_1 W_{xx}^2 dx dy + \frac{2\nu_2}{ab} \int_{A_n} D_1 W_{xx} W_{yy} dx dy + \right. \\
 & \left. + \frac{a}{b^3} \int_{A_n} D_2 W_{yy}^2 dx dy + \frac{4}{ab} \int_{A_n} D_k W_{xy}^2 dx dy \right] - \\
 & - \frac{1}{2} \rho a b \omega^2 \int_{A_n} h W^2 dx dy
 \end{aligned} \tag{11}$$

donde  $x = \bar{x}/a$  e  $y = \bar{y}/b$  son las coordenadas normalizadas y  $A_n$  el área de la placa correspondiente en un dominio normalizado ( $1 \times 1$ ) de integración.



a)  $A_p = a \times b$



b)  $A_n = 1 \times 1$

**Figura 2.** Dominio normalizado de integración

Siguiendo el proceso del método de Rayleigh-Ritz, se aplica el cálculo variacional<sup>3</sup> a la expresión (11) del funcional del problema, resultando

$$\begin{aligned}
\delta J_{[W]} = & \frac{1}{2} \left[ \frac{b}{a^3} \int_{A_n} D_1 \delta(W_{xx}^2) dx dy + \frac{2\nu_2}{ab} \int_{A_n} D_1 \delta(W_{xx} W_{yy}) dx dy + \right. \\
& + \frac{a}{b^3} \int_{A_n} D_2 \delta(W_{yy}^2) dx dy + \frac{4}{ab} \int_{A_n} D_k \delta(W_{xy}^2) dx dy \left. \right] - \\
& - \frac{1}{2} \rho a b \omega^2 \int_{A_n} h \delta(W^2) dx dy = 0
\end{aligned} \tag{12}$$

La amplitud de la deflexión de la placa durante la vibración se adopta en forma de sumas dobles según la expresión

$$W = W(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m(x) Y_n(y) \tag{13}$$

en términos de las funciones coordenadas del caso planteado. Es necesario que cada término de la serie satisfaga al menos las condiciones de borde esenciales, que resultan de la vinculación externa de la placa.

En el desarrollo propuesto, las funciones  $X_m(x)$  e  $Y_n(y)$  que se adoptan son las funciones viga<sup>7</sup> que se corresponden con las condiciones de vínculo de la placa en los bordes exteriores, según cada dirección coordenada. De acuerdo con el método de Rayleigh-Ritz, los coeficientes  $A_{mn}$  de la expresión (13) se eligen de manera que el funcional de energía resulte ser un mínimo.

Con el fin de sistematizar el método se procedió al cálculo previo del conjunto de expresiones que se presentan a continuación:

a) cálculo de las derivadas parciales de la expresión  $W(x, y)$

$$W_{xx} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{d^2 X_m}{dx^2} Y_n \tag{14a}$$

$$W_{yy} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} X_m \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \tag{14b}$$

$$W_{xy} = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \frac{dX_m}{dx} \frac{dY_n}{dy} \tag{14c}$$

b) cálculo de las variaciones de la función  $W(x, y)$  y de sus derivadas con respecto a las constantes

$$\delta W = \frac{\partial W}{\partial A_{ql}} = X_q(x) Y_l(y) \tag{15}$$

$$\delta W_{xy} = \frac{\partial W_{xy}}{\partial A_{ql}} = \frac{dX_q(x)}{dx} \frac{dY_l(y)}{dy} \tag{16a}$$

$$\delta W_{xx} = \frac{\partial W_{xx}}{\partial A_{ql}} = \frac{d^2 X_q(x)}{dx^2} Y_l(y) \tag{16b}$$

$$\delta W_{yy} = \frac{\partial W_{yy}}{\partial A_{ql}} = X_q(x) \frac{d^2 Y_l(y)}{dy^2} \tag{16c}$$

La expresión que resulta al realizar la sustitución de la serie doble (13) en la expresión (12) del cálculo variacional, teniendo en cuenta las ecuaciones (14), (15) y (16), fue ordenada de manera que permite agruparla dentro de un único sumatorio doble. Asimismo se la premultiplicó por la relación  $a \times b/D1$  para adimensionalizar convenientemente el proceso de cálculo posterior. De ese tratamiento algebraico resultan  $M \times N$  ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} \frac{ab}{D_1} \frac{\partial J[W]}{\partial A_{ql}} = & \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} \left[ \lambda^{-2} \int_{A_n} \left( \frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) (Y_l Y_n) dx dy + \right. \\ & + \nu_2 \int_{A_n} \left[ \left( X_q \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 Y_l}{dy^2} Y_n \right) + \left( \frac{d^2 X_q}{dx^2} X_m \right) \left( Y_l \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) \right] dx dy + \\ & + \lambda^2 \frac{D_2}{D_1} \int_{A_n} (X_q X_m) \left( \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) dx dy + \\ & + \frac{4D_k}{D_1} \int_{A_n} \left( \frac{dX_q}{dx} \frac{dX_m}{dx} \right) \left( \frac{dY_l}{dy} \frac{dY_n}{dy} \right) dx dy - \\ & \left. - \frac{\rho h}{D_1} a^4 \omega^2 \lambda^{-2} \int_{A_n} (X_q X_m) (Y_l Y_n) dx dy \right] \end{aligned} \quad (17)$$

donde  $\lambda = a/b$  es la relación de lados de la placa rectangular.

Las integrales dobles sobre el dominio  $A_n$  que aparecen en la expresión (17), pueden ser fácilmente expresadas como producto de integrales simples en  $x$  e  $y$ , respectivamente. Esto simplifica enormemente la resolución de las mismas y así resultan

$$\int_{A_n} \left( \frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) (Y_l Y_n) dx dy = \left( \int_0^1 \frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 Y_l Y_n dy \right) \quad (18a)$$

$$\int_{A_n} \left( X_q \frac{d^2 X_m}{dx^2} \right) \left( \frac{d^2 Y_l}{dy^2} Y_n \right) dx dy = \left( \int_0^1 X_q \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \right) \left( \int_0^1 \frac{d^2 Y_l}{dy^2} Y_n dy \right) \quad (18b)$$

$$\int_{A_n} \left( \frac{d^2 X_q}{dx^2} X_m \right) \left( Y_l \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) dx dy = \left( \int_0^1 \frac{d^2 X_q}{dx^2} X_m dx \right) \left( \int_0^1 Y_l \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \right) \quad (18c)$$

$$\int_{A_n} (X_q X_m) \left( \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} \right) dx dy = \left( \int_0^1 X_q X_m dx \right) \left( \int_0^1 \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \right) \quad (18d)$$

$$\int_{A_n} \left( \frac{dX_q}{dx} \frac{dX_m}{dx} \right) \left( \frac{dY_l}{dy} \frac{dY_n}{dy} \right) dx dy = \left( \int_0^1 \frac{dX_q}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx \right) \left( \int_0^1 \frac{dY_l}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy \right) \quad (18e)$$

$$\int_{A_n} (X_q X_m) (Y_l Y_n) dx dy = \left( \int_0^1 X_q X_m dx \right) \left( \int_0^1 Y_l Y_n dy \right) \quad (18f)$$

Planteado el sistema de ecuaciones homogéneas, lineal con respecto a las constantes  $A_{mn}$ , el siguiente paso consistió en encarar su resolución.

Con el fin de implementar un proceso ordenado y sistemático se procedió a definir los siguientes coeficientes.

*Coefficientes viga:* Surgen ante la conveniencia de reagrupar las expresiones a integrar (17), como se indica en la ecuación (18) y se definen de la siguiente manera

$$X_{qm}^a = \int_0^1 X_q X_m dx \quad X_{qm}^b = \int_0^1 X_q \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \quad (19a, b, c, d)$$

$$X_{qm}^c = \int_0^1 \frac{d^2 X_q}{dx^2} \frac{d^2 X_m}{dx^2} dx \quad X_{qm}^d = \int_0^1 \frac{dX_q}{dx} \frac{dX_m}{dx} dx$$

$$Y_{ln}^a = \int_0^1 Y_l Y_n dy \quad Y_{ln}^b = \int_0^1 Y_l \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \quad (20a, b, c, d)$$

$$Y_{ln}^c = \int_0^1 \frac{d^2 Y_l}{dy^2} \frac{d^2 Y_n}{dy^2} dy \quad Y_{ln}^d = \int_0^1 \frac{dY_l}{dy} \frac{dY_n}{dy} dy$$

Estos coeficientes son función de las condiciones de borde de la placa, ya que como puede observarse dependen de las funciones viga.

Al resolver las expresiones (19) y (20) para obtener los valores de los coeficientes viga, debe tenerse presente que las funciones viga utilizadas son funciones coordenadas ortogonales<sup>8-9</sup>, es decir, se verifica que los coeficientes  $X_{qm}^a$  son iguales a cero para todo  $q \neq m$  y, análogamente, los coeficientes  $Y_{ln}^a$  son iguales a cero para todo  $l \neq n$ . Sin embargo, cuando existe la presencia de un hueco o una inclusión de otro material en la placa, es necesario determinar además los coeficientes viga correspondientes a dichas zonas, y en este caso las condiciones de ortogonalidad ya no son aplicables.

*Coefficientes de energía:* Reemplazando los “coeficientes viga” dentro de la ecuación genérica (17) y reordenando, se pueden definir nuevos coeficientes asociados a la energía de deformación y cinética de la forma

$$u_{qlmn} = \lambda^{-2} X_{qm}^c Y_{ln}^a + \nu_2 (X_{qm}^b Y_{nl}^b + X_{mq}^b Y_{ln}^b) + \lambda^2 \frac{D_2}{D_1} X_{qm}^a Y_{ln}^c + 4 \frac{D_k}{D_1} X_{qm}^d Y_{ln}^d \quad (21)$$

$$t_{qlmn} = \lambda^{-2} X_{qm}^a Y_{ln}^a \quad (22)$$

Estos coeficientes, que se denominaron “coeficientes de energía”, permiten rescribir el sistema de ecuaciones (17) en una forma adecuada para la implementación del proceso en un código computacional:

$$\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N A_{mn} (u_{qlmn} - \Omega_i^2 t_{qlmn}) = 0 \quad (23)$$

donde los coeficientes  $\Omega_i$  son los coeficientes de frecuencia circular adimensional de vibración libre de la placa.

$$\Omega_i = \sqrt{\frac{\rho h}{D_1}} a^2 \omega_i \quad (24)$$

Igualando a cero el determinante de los coeficientes del sistema de ecuaciones homogéneas en las constantes  $A_{mn}$  (17), se obtiene la ecuación de frecuencias de la placa.

Procediendo en forma matricial<sup>10</sup>, se definieron las matrices **A**, **U** y **T** como

$$\mathbf{A} = [A_{mn}] \quad (25a)$$

$$\mathbf{U} = [u_{qlmn}] \quad (25b)$$

$$\mathbf{T} = [t_{qlmn}] \quad (25c)$$

La expresión matricial del sistema de ecuaciones (23) es

$$\mathbf{A}(\mathbf{U} - \Omega_i^2 \mathbf{T}) = 0 \quad (26)$$

y la ecuación de frecuencia de la placa

$$|\mathbf{U} - \Omega_i^2 \mathbf{T}| = 0 \quad (27)$$

Cabe aclarar que si bien los “coeficientes de energía” poseen cuatro subíndices, las matrices  $\mathbf{U}$  y  $\mathbf{T}$  son matrices bidimensionales de  $M^2 \times N^2$  elementos.

La solución de la ecuación de frecuencia (27) permite el cálculo de los autovalores  $\Omega_i$  correspondientes a los modos normales de vibración de la placa.

### Esquema del algoritmo

El mecanismo seguido en el proceso de cálculo puede sintetizarse en tres pasos fundamentales de resolución de un modelo (Figura 3).

Paso 1

Bloque 1

**COEFICIENTES VIGA**

$$X_{qm}^a, X_{qm}^b, X_{qm}^c, X_{qm}^d, Y_{ln}^a, Y_{ln}^b, Y_{ln}^c, Y_{ln}^d$$

*Resultan de la integración de "Funciones Viga" y dependen de las condiciones de borde geométricas o esenciales.*

Paso 2

Bloque 2

**MATRICES DE ENERGIA**

$$\mathbf{U} = [u_{qlmn}], \mathbf{T} = [t_{qlmn}]$$

*Resultan de combinar los "Coeficientes Viga" con las condiciones en el interior de la placa.*

Paso 3

Bloque 3

**DETERMINANTE ECUACION**

$$|\mathbf{U} - \Omega_i^2 \mathbf{T}| = 0$$

*Algoritmo de búsqueda de raíces que permite el cálculo de los autovalores de frecuencias.*

**Figura 3.** Pasos del algoritmo de cálculo de coeficientes de frecuencia natural

Paso 1: Se generan los “coeficientes viga” utilizando las ecuaciones (19) y (20) a partir de las funciones viga que se corresponden con las condiciones de borde en el exterior de la placa.

Paso 2: Se calculan los “coeficientes de energía” utilizando las expresiones (21) y (22) y se arman las matrices de energía.

Paso 3: Se calculan los resultados, coeficientes de frecuencia de vibración  $\Omega_i$ , resolviendo el determinante-ecuación (27).

El planteo propuesto admite extender el proceso al caso de placas con orificios o con inclusiones de otro material con diferentes características geométrico-mecánicas, con sólo plantear los coeficientes viga y los coeficientes de energía adecuados a cada caso. De la misma manera puede tratarse la existencia de una o más masas concentradas vinculadas a la placa.

En la Tabla I se muestra un esquema en el que se relacionan los términos del funcional (11) que gobierna el problema dinámico con los coeficientes del determinante-ecuación planteado en el algoritmo

| Términos del funcional gobernante              | Coeficientes del determinante-ecuación  |
|------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| $\frac{1}{2} \int_{A_n} W_{xx}^2 dx dy$        | $X_{qm}^c Y_{ln}^a$                     |
| $\frac{1}{2} \int_{A_n} 2 W_{xx} W_{yy} dx dy$ | $X_{qm}^b Y_{nl}^b + X_{mq}^b Y_{ln}^b$ |
| $\frac{1}{2} \int_{A_n} W_{yy}^2 dx dy$        | $X_{qm}^a Y_{ln}^c$                     |
| $\frac{1}{2} \int_{A_n} W_{xy}^2 dx dy$        | $X_{qm}^d Y_{ln}^d$                     |
| $\frac{1}{2} \int_{A_n} W^2 dx dy$             | $X_{qm}^a Y_{ln}^a$                     |

a)

| Términos del funcional gobernante              | Coeficientes del determinante-ecuación                                          |
|------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|
| $\frac{1}{2} \int_{A_i} W_{xx}^2 dx dy$        | $X_{qm x_1}^{c x_2} Y_{ln y_1}^{a y_2}$                                         |
| $\frac{1}{2} \int_{A_i} 2 W_{xx} W_{yy} dx dy$ | $X_{qm x_1}^{b x_2} Y_{nl y_1}^{b y_2} + X_{mq x_1}^{b x_2} Y_{ln y_1}^{b y_2}$ |
| $\frac{1}{2} \int_{A_i} W_{yy}^2 dx dy$        | $X_{qm x_1}^{a x_2} Y_{ln y_1}^{c y_2}$                                         |
| $\frac{1}{2} \int_{A_i} W_{xy}^2 dx dy$        | $X_{qm x_1}^{d x_2} Y_{ln y_1}^{d y_2}$                                         |
| $\frac{1}{2} \int_{A_i} W^2 dx dy$             | $X_{qm x_1}^{a x_2} Y_{ln y_1}^{a y_2}$                                         |

b)

**Tabla I.** Correspondencia entre los términos del funcional gobernante y los coeficientes del determinante-ecuación: a) dominio completo, b) hueco o inclusión

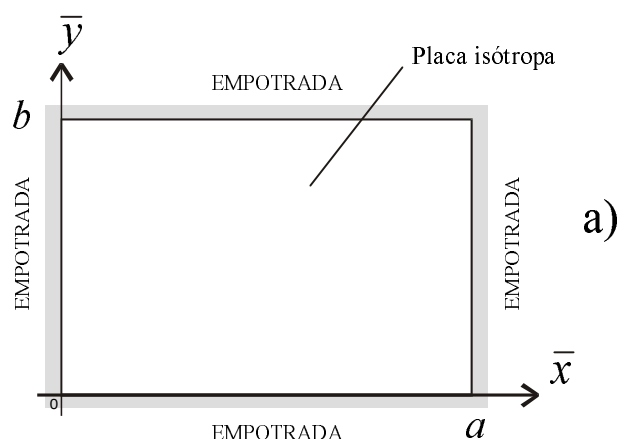
El esquema a) corresponde al dominio rectangular completo  $A_n$  de la placa maciza de dimensión unitaria; el esquema b) relaciona los coeficientes que corresponderían en el caso de existir un hueco o una inclusión de otro material para un dominio rectangular de dimensiones  $(x_2 - x_1) \times (y_2 - y_1)$ . Cabe señalar el hecho de que en el caso de orificios cuyo borde es libre no es posible satisfacer las condiciones de borde en los contornos de los mismos, pero esto es legítimo cuando se utiliza el método variacional de Rayleigh-Ritz.

### Resultados numéricos

Los resultados presentados en la Tabla II corresponden a los cuatro primeros coeficientes de frecuencia natural de una placa isótropa maciza empotrada, cuya relación de lados  $\lambda$  vale 1,5 (Figura 4a).

| $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D a^2} \omega_i; \quad (\lambda = 3/2)$ |              |            |            |            |            |
|--------------------------------------------------------------------|--------------|------------|------------|------------|------------|
| $M = N$                                                            | $M \times N$ | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| 3                                                                  | 9            | 60,797     | 94,030     | 148,926    | 149,901    |
| 5                                                                  | 25           | 60,772     | 93,886     | 148,825    | 149,742    |
| 7                                                                  | 49           | 60,765     | 93,853     | 148,797    | 149,701    |
| 10                                                                 | 100          | 60,763     | 93,838     | 148,787    | 149,687    |
| 12                                                                 | 144          | 60,762     | 93,836     | 148,784    | 149,681    |
| 15                                                                 | 225          | 60,761     | 93,835     | 148,781    | 149,676    |
| E.F.                                                               | —            | 60,761     | 93,834     | 148,781    | 149,676    |

**Tabla II.** Análisis de convergencia de los primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural de una placa isótropa empotrada maciza (Figura 4a)



**Figura 4a.** Placa rectangular isótropa maciza, empotrada en los cuatro bordes con  $\lambda = 3/2$

El análisis de convergencia y la comparación con valores calculados mediante el método de elementos finitos<sup>11</sup> demuestra que son necesarias unas pocas funciones viga (13) para obtener convergencia y precisión aceptables.

Incrementando la cantidad de términos, existe plena coincidencia entre los parámetros de frecuencia  $\Omega_i$  calculados por ambos métodos.

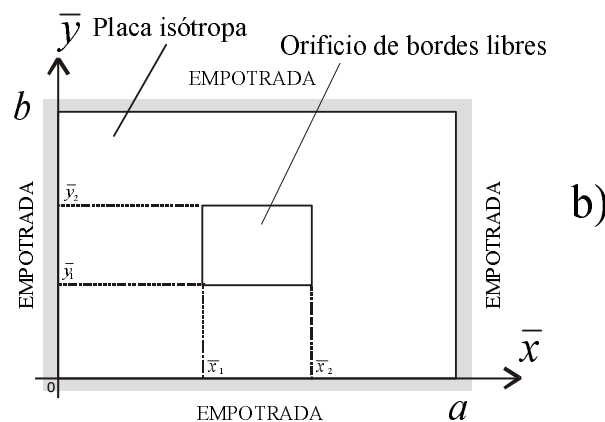
En la Tabla III se muestran los coeficientes de frecuencia para una placa isótropa rectangular empotrada similar, en la que se ha practicado un orificio rectangular de bordes libres (Figura 4b). El orificio es del orden del 16 % de la superficie total de la placa maciza y se encuentra centrado. Nuevamente se compararon los resultados calculados utilizando el algoritmo propuesto con los obtenidos con el método de elementos finitos.

La convergencia con  $M = N = 15$  es del orden del 99,4 % para el cuarto coeficiente de frecuencia y es mejor aún para las frecuencias inferiores.

Se observa que al aumentar el número de términos  $M = N = 20$ , la precisión mejora sensiblemente y el porcentaje de diferencia entre ambos grupos de resultados se reduce.

| $\Omega_i = \sqrt{\rho h / D} a^2 \omega_i; \quad (\lambda = 3/2)$ |              |            |            |            |            |
|--------------------------------------------------------------------|--------------|------------|------------|------------|------------|
| $M = N$                                                            | $M \times N$ | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| 3                                                                  | 9            | 60,497     | 94,334     | 148,487    | 151,870    |
| 5                                                                  | 25           | 60,413     | 94,153     | 148,330    | 151,712    |
| 7                                                                  | 49           | 60,329     | 93,925     | 148,224    | 151,330    |
| 10                                                                 | 100          | 60,237     | 93,678     | 148,127    | 150,843    |
| 12                                                                 | 144          | 60,052     | 93,119     | 148,032    | 149,724    |
| 15                                                                 | 225          | 59,977     | 92,891     | 147,967    | 149,208    |
| 20                                                                 | 400          | 59,859     | 92,588     | 147,791    | 148,625    |
| E.F.                                                               | —            | 59,713     | 92,159     | 147,219    | 148,264    |

**Tabla III.** Análisis de convergencia de los primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural de una placa isótropa empotrada, con un hueco:  $x_1 = 0,3$ ;  $x_2 = 0,7$ ;  $y_1 = 0,3$  e  $y_2 = 0,7$  (Figura 4b)

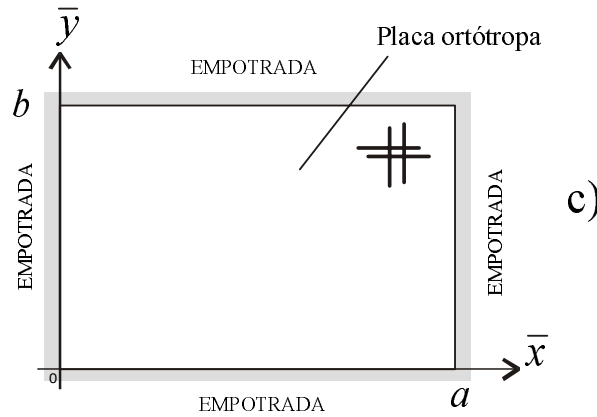


**Figura 4b.** Placa rectangular isótropa con un hueco de igual relación de lados  $\lambda$  y de dimensiones  $(x_2 - x_1) \times (y_2 - y_1)$ , empotrada en los cuatro bordes con  $\lambda = 3/2$

De un modo similar, en la Tabla IV se presentan los coeficientes de frecuencia de vibración libre de una placa ortótropa ( $D_2 = D_1/2$ ;  $D_k = D_1/2$ ;  $\nu_2 = 0,30$ ) rectangular maciza, con  $\lambda = 1,5$  (Figura 4c). Se observa que resolviendo para 400 términos  $M = N = 20$ , los resultados exhiben una excelente convergencia.

| $\Omega_i = \sqrt{\rho h / \bar{D}} a^2 \omega_i; \quad (\lambda = 3/2)$ |              |            |            |            |            |
|--------------------------------------------------------------------------|--------------|------------|------------|------------|------------|
| $M = N$                                                                  | $M \times N$ | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| 3                                                                        | 9            | 51,1588    | 90,9325    | 115,152    | 150,516    |
| 5                                                                        | 25           | 51,1035    | 90,6538    | 114,917    | 150,154    |
| 7                                                                        | 49           | 51,0884    | 90,5873    | 114,853    | 150,052    |
| 10                                                                       | 100          | 51,0830    | 90,5598    | 114,828    | 150,016    |
| 12                                                                       | 144          | 51,0806    | 90,5537    | 114,819    | 150,000    |
| 15                                                                       | 225          | 51,0790    | 90,5500    | 114,813    | 149,989    |
| 20                                                                       | 400          | 51,0785    | 90,5479    | 114,811    | 149,986    |
| E.F.                                                                     | —            | 51,0784    | 90,5481    | 114,811    | 149,987    |

**Tabla IV.** Análisis de convergencia de los primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural de una placa ortótropa maciza empotrada (Figura 4c)



**Figura 4c.** Placa rectangular ortótropa maciza,  $D_2 = D_1/2$ ;  $\nu_2 = 0,30$ ;  $D_k = D_1/2$ , empotrada en los cuatro bordes con  $\lambda = 3/2$

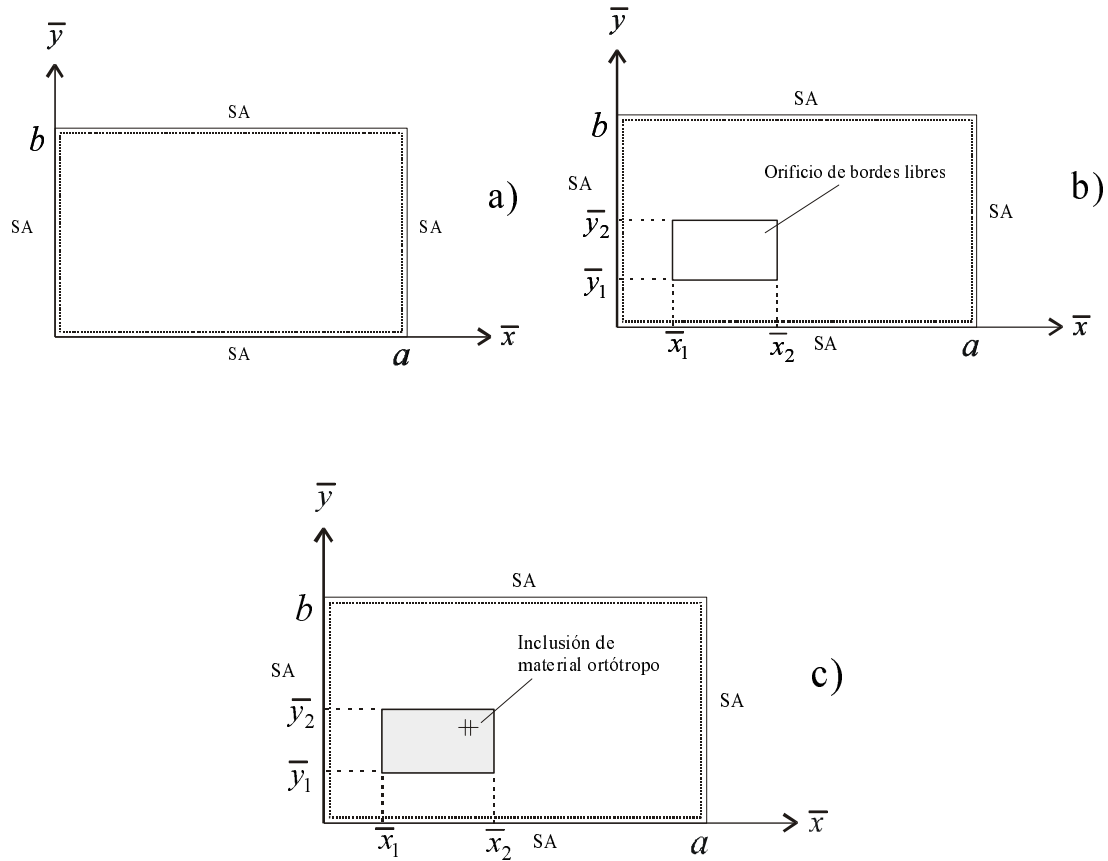
La Tabla V corresponde al caso de placas isotrópicas rectangulares simplemente apoyadas en sus cuatro bordes (Figura 5).

En la primera columna de la tabla se indica la relación de lados  $\lambda = a/b$ . En general, se observa (columnas segunda y tercera) que el coeficiente de frecuencia fundamental  $\Omega_1$  siempre disminuye cuando se practica un orificio en la placa. Para el modelo tabulado, el orificio es de dimensiones  $x_2 - x_1 = 0,3$  por  $y_2 - y_1 = 0,2$  y está desplazado con respecto al centro (Figura 5b).

La cuarta columna exhibe los coeficientes de frecuencia fundamental de la placa cuando el hueco se ha rellenado con un material ortótropo de características:  $D_{1inc}/D = 2,856$ ;  $\nu_{2inc} = 0,757$ ;  $D_{2inc}/D = 2,256$ ;  $D_{kinc}/D = 0,765$ ;  $\rho_{inc}/\rho = 2,95$  (Figura 5c).

| $\Omega_1$         |                 |                    |                                    |
|--------------------|-----------------|--------------------|------------------------------------|
| $M \times N = 400$ |                 |                    |                                    |
| $\lambda$          | a) Placa maciza | b) Placa con hueco | c) Inclusión de material ortótropo |
| 1/2                | 12,3370         | 12,0791            | 11,9941                            |
| 2/3                | 14,2562         | 13,9930            | 13,8515                            |
| 1                  | 19,7393         | 19,2028            | 19,1467                            |
| 3/2                | 32,0762         | 30,2638            | 31,0312                            |
| 2                  | 49,3480         | 44,8322            | 47,6500                            |

**Tabla V.** Coeficientes de frecuencia fundamental de placas isotrópicas: a) macizas, b) con hueco, c) con inclusiones de un material ortótropo. Los vértices de la inclusión o hueco son:  $x_1 = 0,3$ ;  $x_2 = 0,6$ ;  $y_1 = 0,1$  e  $y_2 = 0,3$  (Figura 5)

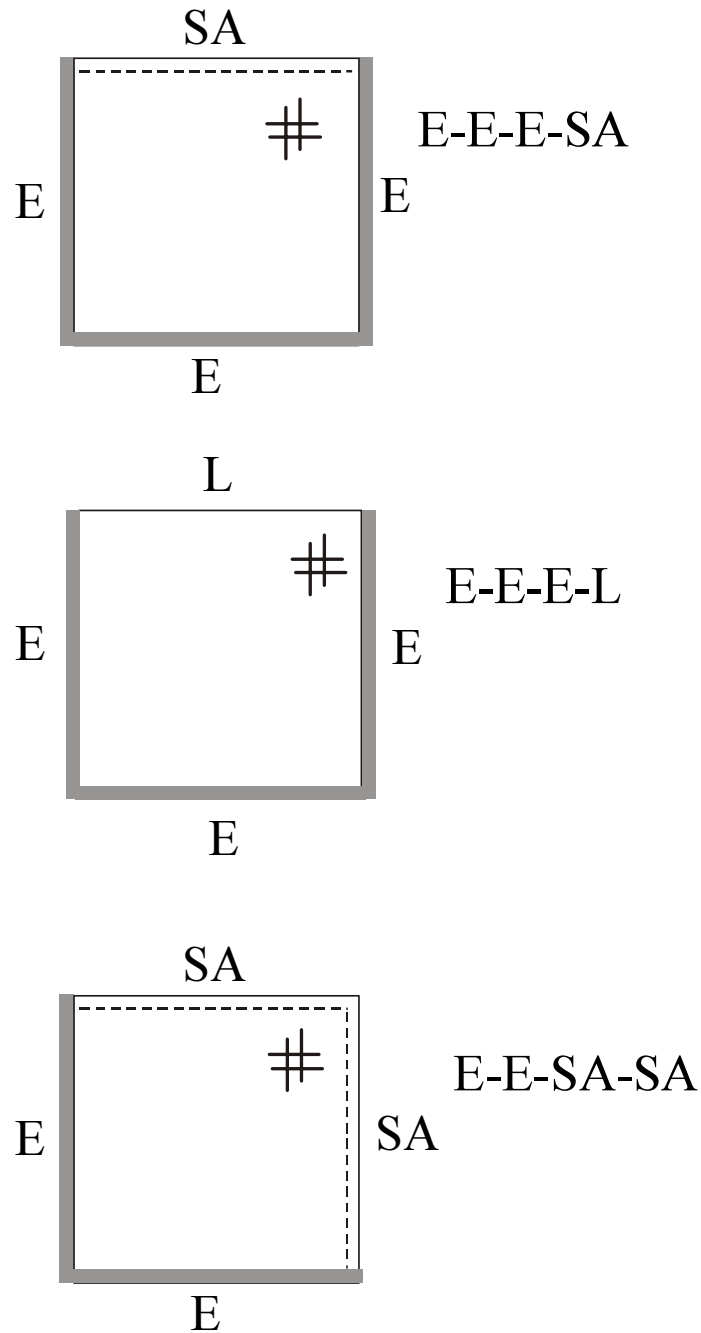


**Figura 5.** Placa rectangular isotrópica simplemente apoyada en su contorno: a) maciza, b) con un hueco, c) con una inclusión de material ortótropo  $D_{1inc}/D = 2,856$ ;  $D_{2inc}/D = 2,256$ ;  $\nu_{2inc} = 0,757$ ;  $D_{kinc}/D = 0,765$  y  $\rho_{inc}/\rho = 2,95$

La Tabla VI contiene los coeficientes de las cuatro primeras frecuencias naturales de las placas ortótropas rectangulares con diferentes condiciones de borde (Figura 6). Los coeficientes fueron calculados utilizando el procedimiento propuesto, con  $M \times N = 400$  términos y se compararon con los obtenidos por el método de elementos finitos. También en estos casos se puede observar que la coincidencia entre ambos procedimientos es excelente. Las relaciones de ortotropía adoptadas para los modelos fueron:  $D_2/D_1 = 0,5$ ;  $\nu_2 = 0,3$  y  $D_k/D_1 = 0,5$ .

| Placa ortótropa cuadrada E-E-E-SA                         |            |            |            |            |
|-----------------------------------------------------------|------------|------------|------------|------------|
|                                                           | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A                                                       | 31,1333    | 55,2491    | 72,1286    | 93,4225    |
| E F                                                       | 31,1331    | 55,2500    | 72,1293    | 93,4257    |
| Placa ortótropa rectangular ( $\lambda = 1,5$ ) E-E-E-SA  |            |            |            |            |
|                                                           | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A                                                       | 43,4663    | 85,6093    | 98,3919    | 145,573    |
| E F                                                       | 43,4660    | 85,6089    | 98,3925    | 145,574    |
| Placa ortótropa cuadrada E-E-E-L                          |            |            |            |            |
|                                                           | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A                                                       | 24,2537    | 39,2296    | 63,8493    | 66,9228    |
| E F                                                       | 24,1820    | 39,1948    | 63,6540    | 66,9100    |
| Placa ortótropa rectangular ( $\lambda = 1,5$ ) E-E-E-L   |            |            |            |            |
|                                                           | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A                                                       | 27,0251    | 59,5373    | 67,0171    | 107,717    |
| E F                                                       | 26,9492    | 59,5103    | 66,8032    | 107,610    |
| Placa ortótropa cuadrada E-E-SA-SA                        |            |            |            |            |
|                                                           | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A                                                       | 26,1425    | 51,9958    | 61,7599    | 91,0640    |
| E F                                                       | 26,1421    | 51,9962    | 61,7606    | 91,0666    |
| Placa ortótropa rectangular ( $\lambda = 1,5$ ) E-E-SA-SA |            |            |            |            |
|                                                           | $\Omega_1$ | $\Omega_2$ | $\Omega_3$ | $\Omega_4$ |
| M A                                                       | 39,6767    | 76,4478    | 96,1603    | 131,876    |
| E F                                                       | 39,6763    | 76,4480    | 96,1607    | 131,876    |

**Tabla VI.** Primeros cuatro coeficientes de frecuencia natural de placas ortótropas con diversas condiciones de borde.  $M \times N = 400$  (Figura 6)



**Figura 6.** Placa rectangular ortótropa maciza con diferentes condiciones de borde  
 $D_2/D_1 = 1/2$ ;  $D_k/D_1 = 1/2$  y  $\nu_2 = 0,3$

## CONCLUSIONES

El procedimiento propuesto permite resolver en forma sumamente eficiente y precisa una gama muy amplia de problemas de dinámica estructural de placas rectangulares que se comportan de acuerdo con la teoría clásica de placas vibrantes.

Resumiendo lo afirmado previamente pueden considerarse:

- todo tipo de condición de borde: desde borde libre a empotrado pasando por la condición de borde elásticamente restringido contra rotación
- presencia de orificios, inhomogeneidades, etc.,
- existencia de masas puntuales (motores o máquinas) montados rígida o elásticamente sobre la placa,
- el algoritmo de cálculo, cuando se utilizan pocos términos (p.ej.,  $M \times N = 25$ ), es extremadamente rápido para su procesamiento y la precisión es aceptable según se aprecia en las Tablas II, III y IV. Esto, adicionalmente, convierte al trabajo propuesto en una buena herramienta de cálculo para propósitos de prediseño o bien para el trazado de curvas de frecuencia para observar diferentes propiedades dinámicas.

## AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Dr. Patricio A.A. Laura su apoyo y asesoramiento permanente.

El presente estudio ha sido auspiciado por la Secretaría de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur, por el CONICET y por la Fundación Rocca (TECHINT).

## REFERENCIAS

- 1 D.H. Felix, D.V. Bambill, C.A. Rossit, R.E. Rossi y P.A.A. Laura, "Natural frequencies of a vibrating repaired panel in an ocean structure", *Ocean Engineering*, Vol. **30**, pp. 955–963, (2003).
- 2 P.A.A. Laura, L. Ercoli y R. Gutiérrez, "*Optimized Rayleigh-Ritz method*", Instituto de Mecánica Aplicada, Bahía Blanca, Argentina, (1995).
- 3 H. Leipholz, "*Direct variational methods and eigenvalue problems in engineering*", Noordhoff International Publishing, Leydan, Países Bajos, (1977).
- 4 A.W. Leissa, "*Vibration of plates*", NASA SP160, (1969).
- 5 P.A.A. Laura, R.H. Gutiérrez, R.E. Rossi y C.A. Rossit, "Transverse vibration of a clamped rectangular plate or slab with an orthotropic patch", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **238**, N° 4, pp. 705–709, (2000).
- 6 S. G. Lekhnitskii, "Anisotropic plates", Gordon and Breach Science Publishers, Inc., New York, (1968).
- 7 C.A. Rossit, "Vibraciones longitudinales y transversales de barras. Desarrollos no armónicos de Fourier", Tesis Magister en Ingeniería, Universidad Nacional del Sur, Bahía Blanca, Argentina, (1995).
- 8 W. Weaver, S.P. Timoshenko y D.H. Young, "*Vibration problems in engineering*", John Wiley & Sons, New York, (1990).
- 9 A. W. Leissa, "The free vibration of rectangular plates", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **31**, pp. 257–293, (1973).
- 10 J.S. Przemieniecki, "*Theory of matrix structural analysis*", Dover Publications, Inc., New York, (1985).
- 11 R.E. Rossi, "*Programas 'Vib. Matr' y 'Vib. Frec'*", Adaptación y modificación de un desarrollo original de Bogner-Fox-Schmit, procesado en Visual Basic 5.0, (1998).