

PRESIONES HIDRODINÁMICAS SOBRE CORTINAS RÍGIDAS EN UN EMBALSE DE GEOMETRÍA ARBITRARIA

X. LI ^{*,**}
M.P. ROMO O. ^{**}
y
J. AVILÉS L. ^{*}

** Instituto de Investigaciones Eléctricas, Apartado Postal 475,
62000, Cuernavaca, Mor., México*

*** Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México,
Apartado Postal 70-472, 04510, México D.F., México*

RESUMEN

En análisis sísmico de presas de gravedad, de arco y de enrocamiento con cara de concreto la influencia del embalse debe tomarse en cuenta debidamente. Es bien sabido que las presiones hidrodinámicas actuantes sobre presas dependen en gran medida de la forma del paramento aguas arriba de la cortina y del fondo del embalse. En este trabajo se presenta una formulación con elementos de frontera que permite calcular eficientemente las presiones hidrodinámicas sobre una presa rígida, siendo el embalse de geometría arbitraria y el líquido compresible. La formulación es bidimensional y se trata en el dominio de la frecuencia. El embalse puede ser finito o infinito; para este último caso se desarrolla una novedosa condición de frontera lejana. Los resultados obtenidos con el presente modelo se comparan favorablemente con soluciones analíticas existentes. Se estudia también la influencia de la geometría del embalse para ciertas formas típicas tanto del paramento como del fondo del mismo.

SUMMARY

In earthquake analysis of gravity, arch or concrete-faced rockfill dams the influence of the reservoir should be taken into account carefully. It is well known that hydrodynamic pressures acting on dams depend to great extent on geometric form of the dam face and reservoir bottom. This paper aims in presenting a boundary element formulation that allows to compute efficiently hydrodynamic pressures on rigid dams, considering a reservoir of arbitrary geometry with compressible fluid. The formulation is two-dimensional and stated in the frequency domain. The reservoir may be finite or infinite; for the latter case a novel far boundary condition is developed. The results obtained by the present model are favorably compared with existing analytical solutions. The influence of the reservoir geometry is also studied for certain typical forms of the dam face and the reservoir bottom.

Recibido: Julio 1994

INTRODUCCIÓN

En condiciones de operaciones normales de una presa, el agua contenida en un embalse ejerce presión hidrostática sobre el paramento aguas arriba de la cortina, cuya variación con la profundidad es siempre lineal. Cuando la presa está sujeta a excitación sísmica, la cortina junto con el embalse sufren vibraciones y en consecuencia el agua produce una presión hidrodinámica adicional a la hidrostática. Si el análisis dinámico se efectúa en el dominio de la frecuencia, la presión hidrodinámica puede tener valores reales e imaginarios y varía con la profundidad en una forma más complicada que la lineal. Para tener una idea de la magnitud de la presión hidrodinámica generalmente se supone que la cara de la cortina es vertical, el embalse se extiende hacia el infinito con un fondo horizontal y el agua es incompresible. Ante una excitación armónica horizontal con aceleración máxima igual a la de la gravedad, la máxima fuerza hidrodinámica total resulta ser un poco mayor que la resultante hidrostática, lo cual no es nada despreciable. Para excitaciones de menor intensidad, la fuerza disminuye proporcionalmente. La magnitud y distribución de presiones hidrodinámicas dependen de muchos factores; entre ellos se encuentran la geometría del embalse, la inclinación de la cara de la cortina, las características dinámicas de los materiales constituyentes de la presa, la compresibilidad del agua, la flexibilidad de la cimentación, el espesor y la compresibilidad del sedimento depositado en el fondo del embalse. Atendiendo a la complejidad del problema y al posible impacto sobre la seguridad de las presas, en las últimas dos décadas la valuación adecuada de presiones hidrodinámicas ha constituido un aspecto importante en el análisis sísmico de presas de arco, de gravedad y de enrocamiento con cara de concreto^{1,2,3}.

El problema hidrodinámico en presas fue planteado originalmente por Westergaard⁴ y reconsiderado posteriormente por Chopra⁵. A partir de este último estudio, las investigaciones dedicadas a dicho tema se han intensificado y profundizado⁶⁻¹¹. Hoy es bien sabido que la geometría del embalse es uno de los factores de influencia más importantes que se deben incluir en cualquier modelo del embalse. La importancia de la geometría del embalse se debe al hecho de que el cambio de la geometría modifica tanto la magnitud como el contenido de frecuencias de las presiones hidrodinámicas. Con el fin de poder tomar en cuenta la irregularidad geométrica de un embalse real, un algoritmo numérico resulta indispensable. Entre los varios métodos numéricos comunes, el de elementos de frontera es más atractivo ya que: el dominio del embalse es generalmente muy grande por lo que la discretización en el contexto de elementos finitos resulta en un enorme sistema de ecuaciones, el interés práctico del problema está en la frontera más que en el dominio, y el embalse es un sistema secundario para el problema global embalse-presa por lo que modelándolo con elementos de frontera se puede asociar fácilmente al sistema principal que es la presa.

Cabe mencionar que existen dos tipos de embalse en cuanto a su geometría global: finito e infinito⁷. En el primero, el dominio del embalse se acota como un contenedor de agua; mientras que en el segundo, el embalse se extiende por un extremo al infinito y por el otro se acota con la cortina. En la realidad todos los embalses son finitos; sin embargo, en la mayoría de los casos la extensión horizontal del embalse es mucho mayor que la altura de la cortina, implicando una geometría de análisis demasiado

esbelta lo cual causa dificultad numérica. Aún más, en el análisis sólo interesa conocer el comportamiento del agua en la cercanía de la presa y por lo tanto la inclusión de todo el embalse es innecesaria. De ello surge la idealización que se muestra en la Figura 1, donde la región acotada representa a la zona irregular del embalse y la región ilimitada con profundidad constante a la zona regular del embalse. Entre las regiones finita e infinita se encuentra la llamada "frontera lejana".

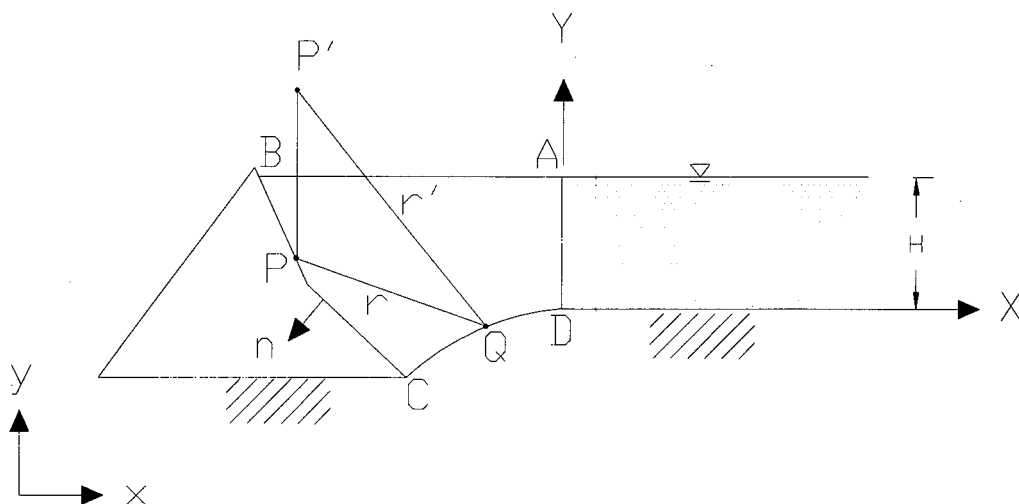


Figura 1. Esquema ilustrativo del embalse analizado por el método directo de elementos de frontera

Cuando el problema se resuelve con elementos de frontera, aparentemente la frontera lejana puede omitirse. Esta práctica es común al tratar los problemas dinámicos en una masa semi-infinita de suelo o roca, ofreciendo gran ventaja sobre el método de elementos finitos en donde el dominio de análisis tiene que ser limitado. Sin embargo, según estudios previos¹², debido a la compresibilidad del agua la omisión de la frontera lejana produce resultados numéricos erróneos. Es indispensable imponer cierta condición en la frontera lejana aún cuando el problema se resuelva por elementos de frontera.

El objetivo de este artículo es describir la implementación del método de elementos de frontera para resolver problemas hidrodinámicos en cortinas rígidas. Estudios similares se han reportado con anterioridad por otros autores^{12,13}. En esos trabajos, los cálculos siguen la formulación del método directo de elementos de frontera¹⁴, pero con diferentes modelos para la condición de frontera lejana. Wepf *et al.*¹² desarrollaron una condición que es válida solamente para excitación horizontal. La exactitud de dicha condición depende de la discretización de la frontera: para un rango de frecuencias más amplio se requiere de una discretización más fina. Por otro lado, Humar y Jablonski¹³ simplemente utilizaron una condición basada en el algoritmo de elementos finitos, que fue propuesta originalmente por Hall y Chopra⁷. Tal manera de combinar los dos métodos numéricos resulta ser bastante ineficiente en la implementación. El presente trabajo sigue utilizando el mismo método directo de elementos de frontera.

La contribución principal radica en proponer una nueva condición para la frontera lejana, que es más exacta y eficiente que las antes mencionadas. A fin de apreciar los efectos de la geometría del embalse, también se presentan resultados para algunas formas típicas tanto del paramento como del fondo del embalse.

Los análisis se enfocan a tratar un problema bidimensional en el dominio de la frecuencia, considerando sólo excitación horizontal. Pero el planteamiento es general, de forma que se puede extender a otros casos que no están contemplados en este trabajo.

ECUACIONES BÁSICAS

Si el líquido inviscido está sometido a un movimiento armónico de amplitud pequeña e irrotacional, que genera una presión $pe^{i\omega x}$, la ecuación que gobierna la amplitud de la presión está dada por la ecuación de Helmholtz:

$$\nabla^2 p + k^2 p = 0 \quad (1)$$

donde ∇^2 es el operador Laplaciano que se expresa para el caso bidimensional como $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ y $k = \omega/c$ es el número de onda, siendo ω la frecuencia circular de excitación y c la velocidad de propagación del sonido en el agua. El dominio de análisis es finito y está delimitado por $ABCD$, como se ve en la Figura 1, para el cual existen cuatro zonas de frontera cuyas condiciones se describen en lo que sigue. Si se ignora el efecto del oleaje la presión en la superficie libre del agua (AB) es nula, esto es:

$$p|_{AB} = 0 \quad (2)$$

A lo largo de la interfaz agua-cortina (BC), la derivada normal de la presión $q = \frac{\partial p}{\partial n}$ es igual a

$$q|_{BC} = -\rho a_c \quad (3)$$

donde $\frac{\partial}{\partial n} = \frac{\partial}{\partial x} n_x + \frac{\partial}{\partial y} n_y$, $[n_x, n_y]^T$ define la normal hacia afuera en la frontera. Además ρ es la densidad de masa del agua y a_c la amplitud de aceleración del movimiento de la cortina que, si a ésta se le supone rígida, se calcula de acuerdo con la aceleración del terreno como $a_c = a_H n_x|_{BC}$, siendo a_H la amplitud de aceleración del terreno en la dirección horizontal. Asimismo, a lo largo del fondo del embalse se tiene⁷

$$q|_{CD} = -\rho a_f - i\omega \xi p|_{CD} \quad (4)$$

donde $a_f = a_H n_x|_{CD}$. En esta expresión aparece un término adicional comparada con la ecuación (3) el cual expresa la flexibilidad del fondo del embalse: i es la unidad imaginaria y el coeficiente de amortiguamiento de la cimentación ξ está definido por

$$\xi = \frac{1}{c} \frac{1 - \alpha_r}{1 + \alpha_r} \quad (5)$$

siendo α_r el coeficiente de refracción de ondas, que se calcula aproximadamente como

$$\alpha_r = \frac{1 - \frac{\rho c}{\rho_r c_r}}{1 + \frac{\rho c}{\rho_r c_r}} \quad (6)$$

donde ρ_r y c_r son la densidad de masa y la velocidad de propagación de ondas de compresión en el material constituyente del fondo del embalse. Para el caso de fondo rígido se tiene que $\alpha_r = 1$, en tanto que para el caso de fondo infinitamente flexible se tiene que $\alpha_r = -1$. Por tanto, el valor de ξ varía de 0 a ∞ . Existe un caso llamado de amortiguamiento total en que se tiene que $\rho c = \rho_r c_r$ por lo que $\alpha_r = 0$ y $\xi = 1/c$. Finalmente, la condición de la frontera lejana (DA) se expresa como

$$q|_{DA} = Mp|_{DA} \quad (7)$$

donde M indica heurísticamente el mapeo que relaciona la derivada normal de la presión con la presión en la región infinita; esta función se obtiene posteriormente.

FORMULACIÓN CON ELEMENTOS DE FRONTERA

El método de elementos de frontera es eficiente comparado con otras técnicas numéricas porque reduce la dimensión espacial del problema en un orden. Para el problema considerado en este trabajo, dicho método es más atractivo por el hecho de que el dominio de análisis dado por el embalse es homogéneo y sólo es de interés la respuesta a lo largo de la frontera común con la cortina. Los fundamentos teóricos y las aplicaciones de este método abundan en la literatura y se han resumido en el libro de Brebbia *et al*¹⁴. Por limitaciones de espacio, se describe a continuación la formulación del método en cuestión de manera breve.

De acuerdo con los principios del método directo de elementos de frontera¹⁴, la ecuación (1) puede convertirse, después de haber utilizado los teoremas de Gauss, en la siguiente ecuación integral:

$$C(P)p(P) + \int_s p^*(Q, P)q(Q)ds = \int_s q^*(Q, P)p(Q)ds \quad (8)$$

donde P y Q denotan los puntos de colocación y de campo, respectivamente. Las dos integrales de superficie que aparecen en la expresión anterior se efectúan a lo largo de toda la frontera cerrada del dominio $ABCD A$. La integral que aparece en el lado izquierdo de la ecuación anterior significa que su existencia es en el sentido de valores principales de Cauchy. $C(P)$ es un coeficiente que se determina de acuerdo con la forma geométrica de la frontera. Además, p^* y q^* son funciones de Green que toman las siguientes formas para el problema bidimensional que nos ocupa:

$$p^* = -\frac{i}{4}H_0^2(kr) \quad (9)$$

$$q^* = \frac{\partial p^*}{\partial n} = \frac{ik}{4}H_1^2(kr)\frac{\partial r}{\partial n} \quad (10)$$

donde r es la distancia entre un punto de colocación y uno de campo; $H_0^2(kr)$ y $H_1^2(kr)$ son funciones de Hankel de segunda especie de orden cero y uno, respectivamente. Las funciones expresadas en (9) y (10) son válidas para un dominio infinito. La presencia de la superficie libre del agua hace que el problema pueda tratarse como un medio seminfinito. Para ello, se escoge un punto de colocación imagen P^* para cada punto fuente P (Figura 1), de suerte que ambos puntos de colocación tienen las mismas abscisas y distancia con respecto a la superficie libre. Las funciones en (9) y (10) pueden entonces ser sustituidas por

$$p^* = -\frac{i}{4}H_0^2(kr) + \frac{i}{4}H_0^2(kr') \quad (11)$$

$$q^* = \frac{\partial p^*}{\partial n} = \frac{ik}{4}H_1^2(kr)\frac{\partial r}{\partial n} - \frac{ik}{4}H_1^2(kr')\frac{\partial r'}{\partial n} \quad (12)$$

donde r' es la distancia entre el punto de colocación imagen P' y el campo Q . Por utilizar las funciones de Green para un dominio seminfinito, la frontera por integrar se reduce a $BCDA$ que es una frontera abierta.

A fin de resolver la ecuación integral (8), la frontera $BCDA$ se discretiza en cierto número de segmentos llamados elementos de frontera. En cada elemento de frontera se supone cierto esquema de interpolación sobre la presión y su derivada normal. En este trabajo se acepta una interpolación de orden cero, es decir, la presión y su derivada normal se suponen constantes en cada elemento. Estudios anteriores¹³ han demostrado que los elementos constantes son suficientes para resolver problemas hidrodinámicos en presas. Si los elementos son del tipo constante, el punto de campo se localiza en el centro de cada elemento y el coeficiente $C(P)$ en la ecuación (8) resulta ser $C(P) = -0.5$. Como resultado del proceso de discretización, la ecuación (8) se convierte en un sistema de ecuaciones algebraicas dado por

$$\mathbf{H}\mathbf{p} = \mathbf{G}\mathbf{q} \quad (13)$$

donde los componentes de las matrices $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ son

$$(\mathbf{H})_{ij} = \int_{s_j} q^*(Q_j, P_i) ds_j - 0.5\delta_{ij} \quad (14)$$

$$(\mathbf{G})_{ij} = \int_{s_j} p^*(Q_j, P_i) ds_j \quad (15)$$

donde δ_{ij} es la delta de Kronecker. Los vectores $\mathbf{p}$ y $\mathbf{q}$ contienen valores de presión y derivada normal, respectivamente, evaluados en cada punto de campo. Como los números de puntos de colocación y de campo son iguales, además de que las condiciones de frontera son correctamente especificadas, el sistema de ecuaciones (13) es exactamente determinado y siempre tiene solución única diferente de la trivial.

CONDICIONES DE FRONTERA LEJANA

Como se mencionó al principio de este trabajo, la especificación de las condiciones de frontera lejana es uno de los aspectos más importantes en el desarrollo de un modelo del embalse, ya que la respuesta hidrodinámica de la cortina es sumamente sensitiva al comportamiento de la región ilimitada del vaso. Esto es entendible pues la masa del agua en la región ilimitada es considerablemente mayor que la de la región finita; si la frontera lejana no está localizada apropiadamente de la cortina la región infinita tiene efectos dominantes sobre la respuesta de la cortina.

Hasta la fecha, la mayoría de las condiciones de frontera lejana son aproximadas en el sentido de que su desarrollo requiere de la discretización espacial *a priori* de la frontera. Por ejemplo, en el modelo de Hall y Chopra⁷ se tiene que discretizar la frontera con elementos finitos para obtener un sistema de ecuaciones algebraicas de las cuales se definen los modos de vibración. El modelo de Wepf *et al.*¹² tiene las mismas características, aunque se utilizan soluciones analíticas en lugar de elementos finitos. Por el contrario, la condición de frontera lejana que se desarrolla a continuación no requiere de la discretización *a priori* y, por lo tanto, es una condición exacta.

Para encontrar la condición de frontera lejana se parte de la solución analítica en la región infinita de profundidad constante. Aplicando separación de variables a la ecuación (1), considerando las condiciones de borde de la superficie libre (2) y el fondo (4) de la región ilimitada junto con la condición de radiación al infinito, se obtiene que la solución exacta es de la forma

$$p(Y, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l(\omega) e^{-\alpha_l X} f_l(Y, \omega) \quad (16)$$

Esta solución es válida para una excitación en la dirección horizontal. X y Y son coordenadas locales definidas en la Figura 1; la ordenada local Y tiene su origen en el fondo del embalse, se dirige hacia la superficie libre y varía entre 0 y H , siendo esta última la profundidad del agua en la región infinita del embalse. La función f_l está definida por $f_l(Y, \omega) = \sin \beta_l (H - Y)$, siendo β_l un eigenvalor que satisface la siguiente ecuación trascendental

$$\beta_l \cot(\beta_l H) + i\omega \xi = 0 \quad (17)$$

En casos extremos donde el fondo es rígido o la frecuencia de excitación es nula se tiene que $\xi = 0$ y por tanto $\beta_l H = (2l - 1)\pi/2$; para fondo infinitamente flexible o frecuencia muy grande se tiene que $\beta_l H = l\pi$. Finalmente, el coeficiente α_l se calcula de acuerdo con $\alpha_l = \pm \sqrt{\beta_l^2 - k^2}$, para el cual es indispensable satisfacer la restricción de que $Re[\alpha_l] > 0$ a fin de cumplir con la condición de radiación al infinito de Sommerfield^{18,19}. Esta última condición sobre el valor α_l es importante por tratarse de una región ilimitada en la cual las ondas que crecen hacia el infinito son físicamente inaceptables.

Ahora bien, las condiciones de unión entre la solución interna de elementos de frontera y la expansión externa de funciones de onda se deben establecer en $X = 0$; la

presión a lo largo de esta frontera lejana está dada por

$$p(Y, \omega) = \sum_{l=1}^{\infty} A_l(\omega) f_l(Y, \omega) \quad (18)$$

La derivada normal de presión a lo largo de la frontera lejana es de la forma

$$q(Y, \omega) = - \sum_{l=1}^{\infty} A_l(\omega) \alpha_l f_l(Y, \omega) \quad (19)$$

La derivada es hacia afuera de la región finita. En ambas expresiones, (18) y (19), los coeficientes A_l son indeterminados. Para establecer una condición de frontera lejana es necesario plantear la relación entre $p(Y, \omega)$ y $q(Y, \omega)$ en dicha frontera. Para ello se requiere primero despejar de la ecuación (18) los coeficientes A_l en términos de $p(Y, \omega)$, y después sustituirlos en la ecuación (19) a fin de obtener la mencionada relación.

La técnica de mínimos cuadrados es eficiente para determinar los coeficientes A_l si la frontera lejana no posee una forma geométrica simple¹⁵⁻¹⁷. Para el caso que nos ocupa en que la frontera lejana es vertical, se pueden utilizar directamente las propiedades de ortogonalidad de las funciones $f_l(\omega, Y)$, de suerte que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{DA} f_l(Y) f_k(Y) dY \right) A_k = \int_{DA} f_l(Y) p(Y, \omega) dY \quad (20)$$

Por las propiedades ortogonales de las eigenfunciones f_l , la integral del lado izquierdo de la ecuación (20) es no nula sólo cuando $l = k$, por lo que ésta se reduce a

$$A_l = \frac{1}{N_l} \int_{DA} f_l(Y) p(Y, \omega) dY \quad (21)$$

en donde

$$N_l = \int_{DA} f_l(Y) f_l(Y) dY = \frac{1}{2\beta_l} (\beta_l H - \sin \beta_l H \cos \beta_l H) \quad (22)$$

Sustituyendo (21) en (19) se obtiene

$$q(Y, \omega) = - \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\alpha_l f_l(Y, \omega)}{N_l} \int_{DA} f_l(Y) p(Y, \omega) dY \quad (23)$$

Esta expresión representa la forma específica de la condición de frontera lejana expresada en la ecuación (7). Comparando las ecuaciones (7) y (23), el mapeo M resulta ser una integral a lo largo de la frontera por lo que la condición resultante es no local. Hasta este punto, la obtención de la ecuación (23) no requiere de discretización espacial alguna, siendo por lo tanto una condición de frontera exacta. Esto marca la principal diferencia entre ésta y las otras condiciones anteriormente reportadas.

Con el fin de unir la expansión del dominio infinito a la región limitada que se analiza dentro del contexto del método directo de elementos de frontera, la frontera

lejana se divide en un cierto número de elementos constantes. En cada elemento constante, la presión y su derivada normal se mantienen constantes. Bajo esta hipótesis, la integración en la ecuación (23) puede llevarse a cabo fácilmente elemento por elemento, de suerte que dicha ecuación se convierte en la siguiente expresión discretizada

$$\mathbf{q} = -\mathbf{Fp} \quad (24)$$

en donde

$$(\mathbf{F})_{ji} = \sum_{l=1}^L \frac{2\alpha_l \sin \beta_l (H - Y_j)}{\beta_l H - \sin \beta_l H \cos \beta_l H} \{ \cos \beta_l (H - Y_{i+1}) - \cos \beta_l (H - Y_i) \} \quad (25)$$

donde Y_{i+1} y Y_i son ordenadas del punto inicial y final del elemento i , y L es el número de términos de la expansión considerados. La ecuación (24) representa la condición de frontera lejana en forma discretizada. La aproximación numérica inducida por dicha condición no proviene del dominio infinito sino de la región limitada del embalse. Cabe precisar que esta relación no es puntual, es decir, la derivada normal en un punto no solamente está relacionada con la presión en ese punto sino con las de todos los demás puntos.

La ecuación (24) es aplicable solamente para el caso de excitación horizontal. Ante una excitación vertical se requiere desarrollar otra condición de frontera lejana. Como el procedimiento de desarrollo es similar en ambos casos y este artículo está confinado a estudiar respuestas debidas a excitaciones horizontales, se omite aquí el detalle de desarrollo para la excitación vertical.

Humar y Jablonski¹³ presentaron una condición de frontera lejana cuya forma final es similar a la de la ecuación (23). Sin embargo, para obtener esa condición hay que efectuar un análisis unidimensional por elementos finitos, que es un proceso relativamente costoso. En cambio, la condición de frontera lejana presentada aquí tiene una forma cerrada y por tanto ofrece ventajas en cuanto al tiempo de ejecución y el espacio de memoria computacional. Por otro lado, Wepf *et al.*¹² desarrollaron otra condición de frontera lejana que es más parecida a la que se presenta aquí. Un inconveniente de esa condición es que el número de eigenvalores utilizados en la solución tiene que ser igual al número de elementos constantes en la frontera lejana; en cambio, la nueva condición no está limitada a esta restricción. Los elementos infinitos²⁰ reportados en la literatura producen resultados todavía menos satisfactorios²¹ por suponer *a priori* alguna función de mapeo para variables básicas que no es siempre válida.

Es importante puntualizar que la condición de frontera lejana desarrollada no es siempre una condición absorbente. Cuando se presenta la absorción por el fondo del embalse, las ondas se disipan completamente en el extremo infinito de la región ilimitada del embalse y la condición de frontera lejana sí es entonces del tipo absorbente. Sin embargo, cuando el fondo es rígido y las ondas se reflejan completamente, la condición de absorción en la frontera lejana ya no se cumple para el intervalo de frecuencias mayores que la fundamental del líquido del embalse. En estos casos las ondas que se propagan horizontalmente se reflejan a lo largo de la frontera lejana.

Precisamente por la presencia de ondas reflejantes en el intervalo de frecuencias altas, es importante desarrollar una condición de frontera lejana de la manera más precisa posible.

Con el fin de introducir la condición (24) en la ecuación (13), es necesario particionar esta última de la siguiente forma

$$[\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 \mathbf{H}_3][\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3]^T = [\mathbf{G}_1 \mathbf{G}_2 \mathbf{G}_3][\mathbf{q}_1 \mathbf{q}_2 \mathbf{q}_3]^T \quad (26)$$

donde los subíndices 1, 2 y 3 indican la interfaz agua-cortina BC , la interfaz agua-fondo CD y la frontera lejana DA . Introduciendo las condiciones (3) y (4) y la ecuación (24), se tiene finalmente

$$[\mathbf{H}_1 \mathbf{H}_2 + i\omega\xi \mathbf{G}_2 \mathbf{H}_3 + \mathbf{G}_3 \mathbf{F}][\mathbf{p}_1 \mathbf{p}_2 \mathbf{p}_3]^T = -\rho(\mathbf{G}_1 \mathbf{a}_1 + \mathbf{G}_2 \mathbf{a}_2) \quad (27)$$

donde las variables $\mathbf{a}_1$ y $\mathbf{a}_2$ son vectores que contienen valores de aceleración a_c y a_f a lo largo de la interfaz agua-cortina y agua-fondo, respectivamente. Para un punto de campo Q_j , los dos vectores se calculan como

$$(\mathbf{a}_1)_j = a_H n_x(Q_j)|_{BC} \quad (28)$$

$$(\mathbf{a}_2)_j = a_H n_x(Q_j)|_{CD} \quad (29)$$

La ecuación (27) es el resultado de la conjunción entre la expansión externa y la solución interna. Los errores de aproximación numérica que pueden resultar de dicha unión no provienen del dominio ilimitado sino de la discretización espacial de la frontera de la región irregular del embalse. Así, la solución externa es exacta, cumpliendo la ecuación de Helmholtz, la condición de Sommerfeld al extremo infinito y las otras condiciones de borde.

Aunque la formulación aquí descrita se limita al caso bidimensional, su extensión al caso tridimensional es directa. Específicamente, la ecuación (27) sigue siendo válida si la frontera CD incluye, además de la agua-fondo, la parte agua-ladera. El cálculo de las matrices $\mathbf{H}$ y $\mathbf{G}$ puede realizarse de acuerdo con las ecuaciones (14) y (15) excepto que las soluciones fundamentales expresadas en las ecuaciones (9)–(12) tienen que ser reemplazadas por otras establecidas para el caso tridimensional. La solución exacta para el dominio ilimitado puede encontrarse de la misma manera que se obtiene la ecuación (25), salvo que en el caso tridimensional existen modos de vibración adicionales en la dirección de las laderas.

VERIFICACIÓN DE LA CONDICIÓN DE FRONTERA LEJANA

Con el fin de validar el método presentado, se calcularon las presiones hidrodinámicas sobre una presa con paramento vertical y un embalse con fondo horizontal. La Figura 2a) ilustra la geometría del problema. Se analiza aquí el caso de excitación horizontal, tomando la amplitud de excitación $a_H = 1$. El fondo del embalse se considera rígido pues éste es el caso más crítico para comprobar la precisión de la

solución. Se utilizaron 10 elementos constantes y de igual longitud a lo largo del paramento de la cortina cuya altura es H ; se empleó al mismo tiempo un solo elemento de longitud $L = H/10$ para el fondo del embalse. Fijando esta discretización, existen otros dos parámetros que controlan la precisión del cálculo: el número de elementos de frontera lejana y el número de términos de la expansión para expresar la condición de frontera lejana, según la ecuación (25).

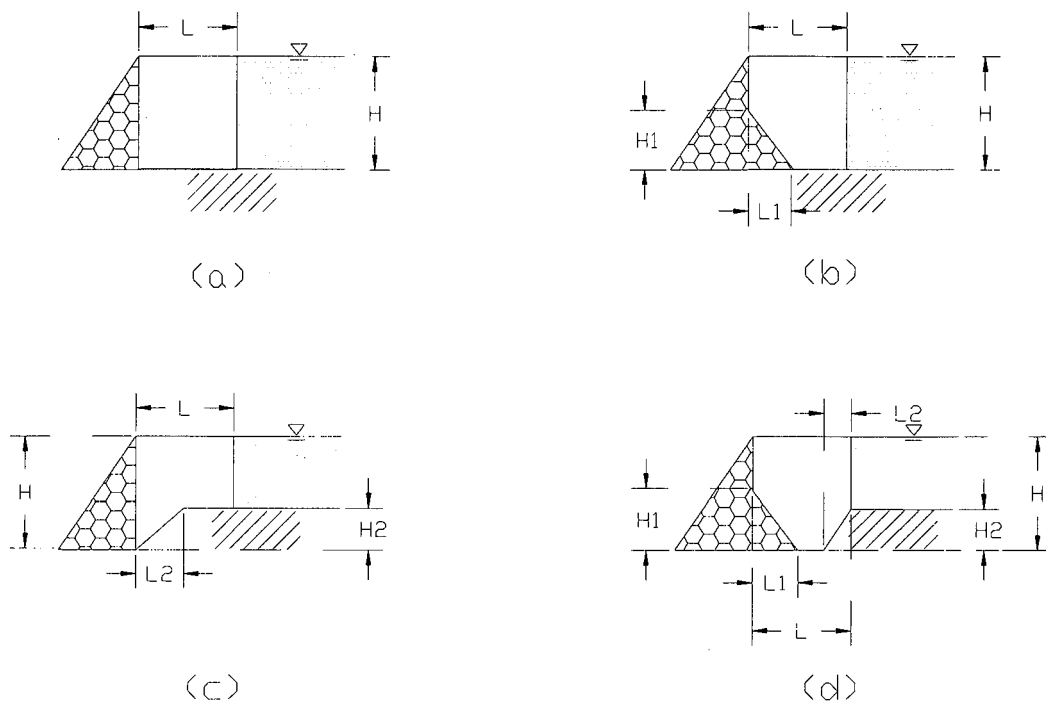


Figura 2. Los típicos casos estudiados del embalse. a) Embalse estándar de paramento vertical y fondo horizontal, b) Paramento inclinado, c) Fondo del embalse con levantamiento y d) Caso combinado de paramento inclinado y fondo no horizontal

Primero se investiga el efecto del número de elementos en la frontera lejana. En la Figura 3 se muestra la distribución de presiones sobre la pared de la presa para una frecuencia normalizada $f/f_1 = 1.05$, donde $f_1 = \pi c/2H$ es la frecuencia fundamental del líquido almacenado. En las abscisas se tiene la presión hidrodinámica normalizada con respecto a la presión hidrostática en el fondo del embalse $\rho g H$; se anexa para fines de comparación la solución exacta reportada en el trabajo de Hall y Chopra⁷. El número de términos de la expansión es igual a 10 en todos los casos calculados. Cuando no se impone ningún elemento (Sin EFL), la condición en la frontera lejana es tal que la presión es nula en el extremo infinito del embalse. En este caso, la presión calculada numéricamente difiere notablemente de la solución exacta. Si se utiliza un solo elemento en toda la frontera, los resultados finales son los mismos que en el caso de no imponer ningún elemento. Esto se debe a que los elementos que se están utilizando

son constantes y, por tanto, con un solo elemento la presión se mantiene constante en la frontera y toma el valor de la presión en la superficie del agua que es nula. Si se utilizan dos elementos constantes (2 EFL), el panorama cambia drásticamente; las partes real e imaginaria se aproximan bastante a la solución exacta. Con un total de 5 elementos (5 EFL), los resultados son excelentes.

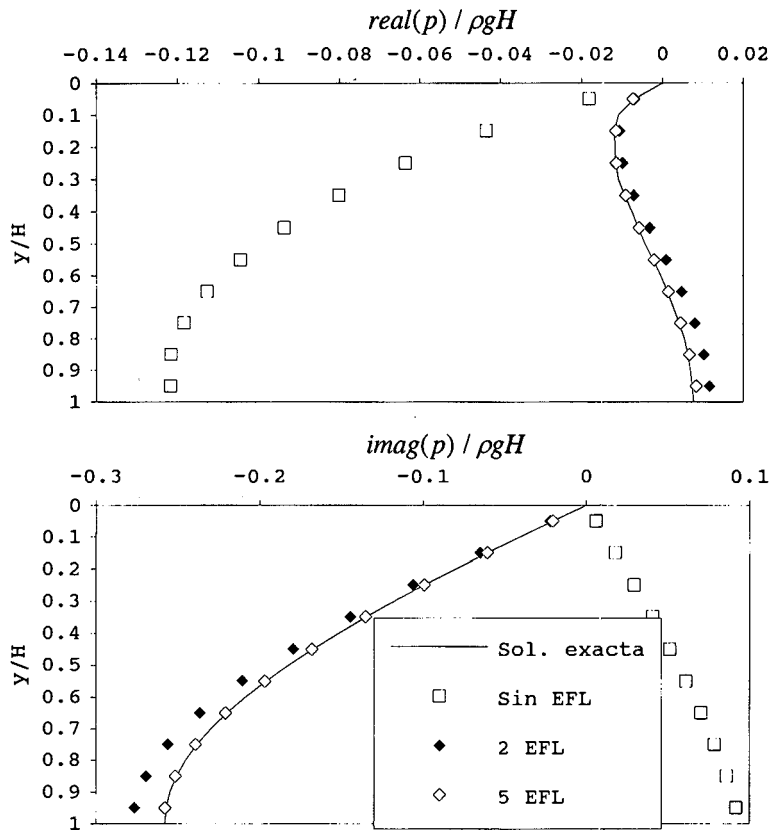


Figura 3. Distribución de presiones hidrodinámicas normalizadas (parte real e imaginaria) con respecto a la presión hidrostática en el fondo

Para estudiar el efecto del número de términos de la expansión, en la Figura 4 se presenta la fuerza absoluta, denotada por $abs(F)$, normalizada con respecto a la fuerza hidrostática total $F_{est} = \rho g H^2 / 2$. Comparada con la solución exacta, la solución numérica con 10 términos proporciona buenos resultados hasta una frecuencia normalizada de $f/f_1 = 12$, mientras que la solución con un término no es aceptable desde el inicio del barrido de frecuencias. La solución con un término se puede mejorar si la frontera lejana se localiza cinco veces más lejos del paramento con un valor de $L = H/2$ en lugar de $L = H/10$. Sin embargo, la solución para este caso es aceptable sólo para frecuencias menores que la segunda frecuencia natural. A la luz de estas observaciones se concluye que el número de términos de la expansión es un factor fundamental para lograr resultados con un grado de exactitud deseable. El número de

términos de la expansión está directamente relacionado con el rango de frecuencias de interés: cuanto más frecuencias resonantes se quieran cubrir, tanto más términos tienen que incluirse. Además, con un número suficiente de términos de la expansión es posible localizar la frontera lejana bastante cerca del paramento logrando así economizar la solución.

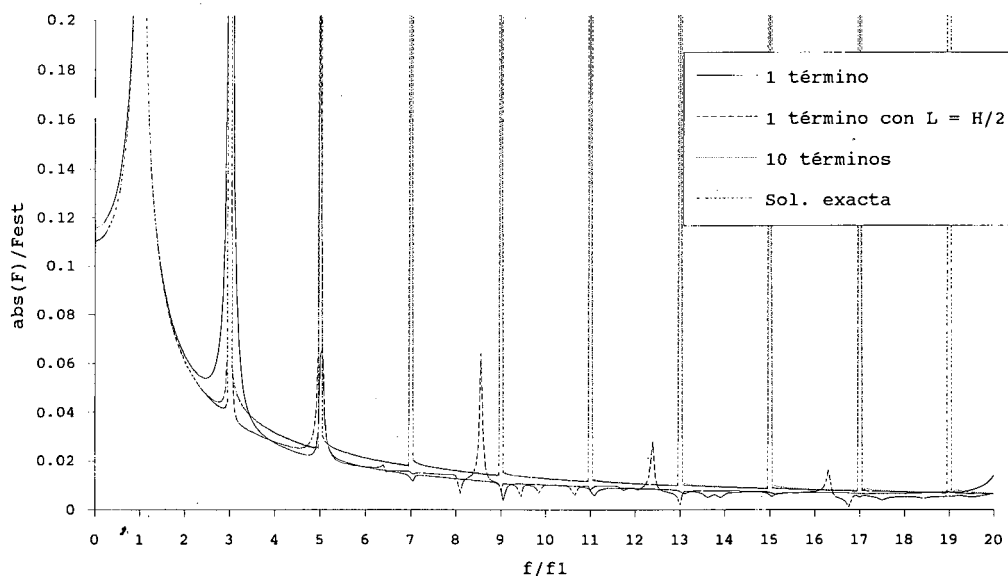


Figura 4. Valores absolutos de fuerzas hidrodinámicas normalizadas con respecto a la fuerza hidrostática *vs* frecuencias normalizadas con respecto a la fundamental del embalse estándar para diferentes números de términos de la expansión

Wepf *et al.*¹² presentaron resultados para el mismo problema que se estudia aquí. Ellos utilizaron 5 elementos en la frontera lejana y mostraron resultados hasta la quinta frecuencia de resonancia. Por la tendencia mostrada por sus resultados y por el hecho de que el rango de frecuencias depende íntimamente del número de elementos utilizados, con el mismo número de elementos los resultados se empeoran para frecuencias mayores. Esto, sin embargo, no sucede con la solución presentada en este trabajo. La superioridad numérica de ella es la consecuencia directa de la condición de frontera propuesta en la cual el número de elementos y el número de términos de la expansión relacionado con las frecuencias resonantes son independientes. Por otro lado, al comparar los resultados presentados por Humar y Jablonski¹³ con la solución analítica, se aprecia que la solución numérica es buena hasta la tercera frecuencia natural pero con la frontera lejana localizada bastante lejos del paramento, esto es, con un valor de L igual a $2H$ que es veinte veces mayor que el usado en el presente estudio.

A fin de verificar todavía más la validez y efectividad de la condición de frontera lejana propuesta, se presentan en la Figura 5 las fuerzas hidrodinámicas para un embalse de geometría irregular en el cual el paramento es vertical y el fondo tiene un levantamiento. Haciendo referencia a la Figura 2c) y definiendo H como la altura

de la cortina, el levantamiento del fondo H_2 se toma igual a $0,5H$ y la pendiente del fondo en la región finita es igual a 1:1, $L_2/H_2 = 1$. Se intentan comparar en este caso los resultados de presión hidrodinámica para los valores de $L/L_2 = 1, 2$ y 4. La Figura 5 muestra una tendencia que parece incongruente a primera vista: al alejarse la frontera lejana se empeora la solución ya que se presentan picos anómalos para los casos con L/L_2 iguales a 2 y 4. Para entender esto, hay que recordar que la condición de frontera lejana propuesta representa una solución exacta para la región regular del embalse. En un embalse que consiste de las partes irregular y regular, si la frontera lejana no se localiza donde se inicia exactamente la parte regular siempre se introducen aproximaciones numéricas adicionales. Parecería ser que la ubicación de la frontera abierta en $L/L_2 = 2$ o 4 no hace otra cosa que introducir la difracción de la onda reflejada en la discontinuidad del talud del fondo. Los picos espurios que se observan serían producto de una acumulación incorrecta de energía en la parte irregular del embalse. Los elementos constantes de frontera utilizados en esta parte no serían adecuados para modelar un cambio geométrico brusco que se presenta en el fondo del embalse. Los picos indeseables pueden eliminarse utilizando un mayor número de elementos de frontera o elementos de mayor orden. Pero estas medidas no son necesarias si se adopta $L/L_2 = 1$. La conclusión de que la frontera lejana tiene que aplicarse donde termina la región irregular es favorable, pues se logra al mismo tiempo una solución económica y precisa. Esto es contrario a la mayoría de otras condiciones de frontera lejana (Sharan¹⁸), en las cuales para lograr una solución con un grado de exactitud deseable siempre se tiene que sacrificar la economía al localizar la frontera a una distancia suficientemente lejana de la región irregular e incrementar el orden de interpolación de los elementos de frontera.

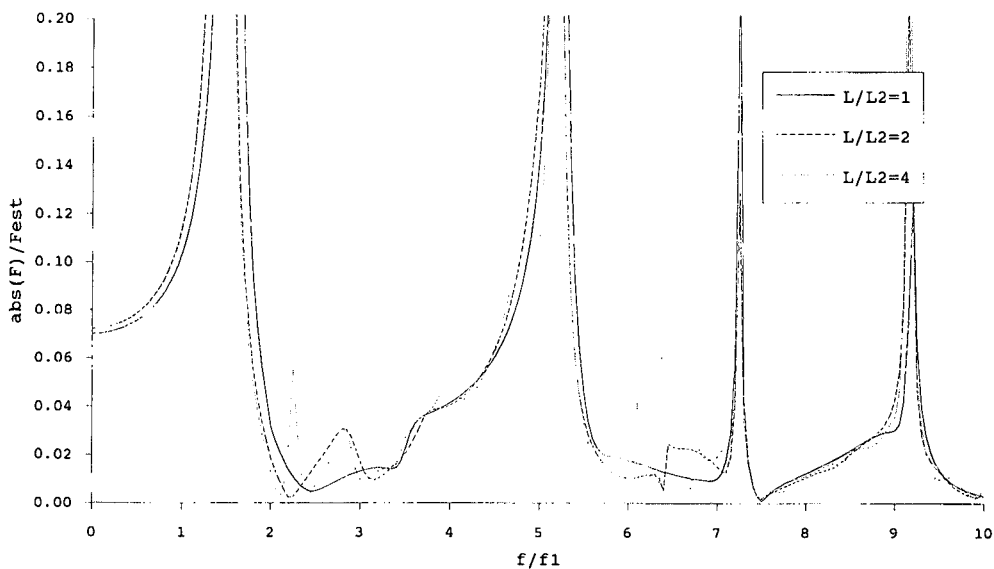


Figura 5. Valores absolutos de fuerzas hidrodinámicas normalizadas vs frecuencias normalizadas para diferentes localizaciones de la frontera lejana en un embalse con fondo no horizontal

Aunque todos los cálculos anteriores se efectuaron suponiendo un fondo del embalse rígido, es oportuno indicar que el desarrollo aquí planteado es general, de tal modo que la condición de frontera lejana propuesta es válida para un fondo del embalse tanto rígido como flexible. En la Figura 6 se muestran las fuerzas hidrodinámicas para los valores de $\alpha_r = 1, 0, 5$ y 0 ; el primer caso corresponde a un fondo rígido. Los resultados muestran una mejor correlación entre las respuestas numérica y analítica, calculadas para el fondo del embalse más flexible.

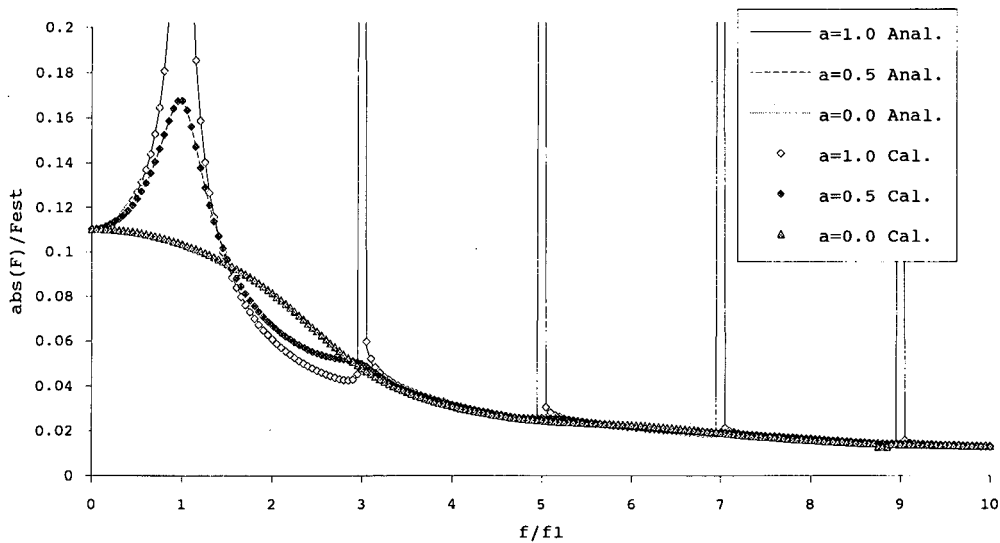


Figura 6. Valores absolutos de fuerzas hidrodinámicas normalizadas *vs* frecuencias normalizadas para diferentes valores del coeficiente de refracción de ondas α_r denotado en la figura por la letra *a*

Como conclusión, para excitación horizontal se pueden lograr buenos resultados utilizando al menos 5 elementos en la frontera lejana, un número de términos de la expansión igual al de frecuencias de resonancia que se desean cubrir, y localizando la frontera lejana donde termina la región irregular del embalse.

INFLUENCIA DE LA GEOMETRÍA IRREGULAR

Interesa estudiar cómo afecta el cambio de la geometría del embalse a la respuesta hidrodinámica de una presa rígida. Como es sabido, la geometría del embalse no solamente afecta a los valores de fuerzas resultantes sino también a la distribución de presiones. Por ejemplo, para un paramento con dos taludes se presenta un quiebre en el diagrama de presión con la profundidad. Sin embargo, es poco práctico presentar resultados en forma de distribuciones de presión para un gran número de casos. Por tanto, se presenta a continuación únicamente las fuerzas hidrodinámicas en función de la frecuencia de excitación. De este tipo de representación se pueden apreciar modificaciones tanto en las amplitudes de fuerza como en el contenido de frecuencias.

Se han seleccionado ocho casos que aparecen en la Tabla I con referencia a las Figuras 2a-d). En todos ellos se supone una cimentación rígida y una excitación horizontal de aceleración unitaria. El primer caso se refiere a un embalse estándar de paramento vertical y fondo horizontal. En los casos 2, 3 y 4 se investiga la variación de la geometría del paramento, mientras que en los casos 5, 6 y 7 se estudia la geometría del fondo del embalse. El caso 8 combina los dos tipos de variaciones de geometría. En las Figuras 7-9 las abscisas representan las frecuencias normalizadas con respecto a la frecuencia fundamental calculada en el caso 1, mientras que las ordenadas representan el componente horizontal de la fuerza hidrodinámica que a su vez está normalizada con respecto a la fuerza hidrostática.

En la Figura 7 se muestran cuatro curvas que corresponden respectivamente al paramento vertical, la inclinación parcial 1:1, la inclinación total 1:1 y la inclinación total 1:2 (casos 1, 2, 3 y 4 de la Tabla I y Figura 2b). Para el caso de doble talud o de inclinación parcial se considera un paramento en que la parte superior es vertical y el cambio de talud se presenta a la mitad de la altura. Se observa que la parte inclinada de un paramento tiende a disminuir las fuerzas hidrodinámicas casi en todo el rango de frecuencias estudiado, excepto en un pequeño intervalo entre la frecuencia fundamental y la frecuencia natural del segundo modo. En este rango, el paramento con una inclinación parcial produce mayor fuerza hidrodinámica que en los dos paramentos completamente inclinados. Para frecuencias menores que la fundamental, las fuerzas hidrodinámicas relativas al caso de paramento vertical se reducen hasta un 30 y 80 por ciento en los casos de doble talud y un talud 1:1, respectivamente. También se observa que el contenido de frecuencias prácticamente no se modifica con la presencia de taludes.

Caso	L/H	H_1/H	L_1/H_1	H_2/H	L_2/H_2
1	1/10	0	-----	0	-----
2	1/2	1/2	1	-----	-----
3	1	1	1	-----	-----
4	2	1	2	-----	-----
5	1	-----	-----	1/2	2
6	1/2	-----	-----	1/2	1
7	1	-----	-----	1	1
8	1	1/2	1	1/2	1

Tabla I. Datos de la geometría de los casos estudiados

En la Figura 7 también se puede apreciar el efecto de la inclinación de taludes. Los dos paramentos totalmente inclinados (casos 3 y 4 de la Tabla I y Figura 2b) tienen pendientes 1:1 y 1:2, y el paramento con la pendiente 1:2 es más tendido que el de 1:1. En términos generales, cuanto más tendido es el talud menor es la fuerza hidrodinámica resultante. Las frecuencias naturales del sistema se mantienen

prácticamente invariables. Como se dijo anteriormente, antes y cerca de la frecuencia natural del segundo modo la magnitud de la fuerza hidrodinámica para un talud 1:1 se incrementa con respecto al caso de paramento vertical; esto ya no sucede con un talud 1:2 que es más tendido. Las fuerzas hidrodinámicas disminuyen en un 50% si el talud cambia de 1:1 a 1:2. En resumen, el cambio de la geometría del parámetro prácticamente no modifica el contenido de frecuencias, pero la magnitud de la fuerza hidrodinámica disminuye si el paramento tiene una parte inclinada. El contenido de frecuencias depende fundamentalmente de la profundidad del embalse en el extremo infinito y no es sensible a los detalles geométricos del paramento de la cortina. De aquí se resalta la importancia de modelar correctamente la condición en la frontera lejana. La disminución de la fuerza hidrodinámica por la inclinación del paramento se debe al fenómeno de reflexión de ondas pues en un paramento inclinado parte de las ondas se reflejan en la dirección vertical, disminuyendo el componente horizontal de las ondas reflejadas y produciendo así menores fuerzas hidrodinámicas horizontales.

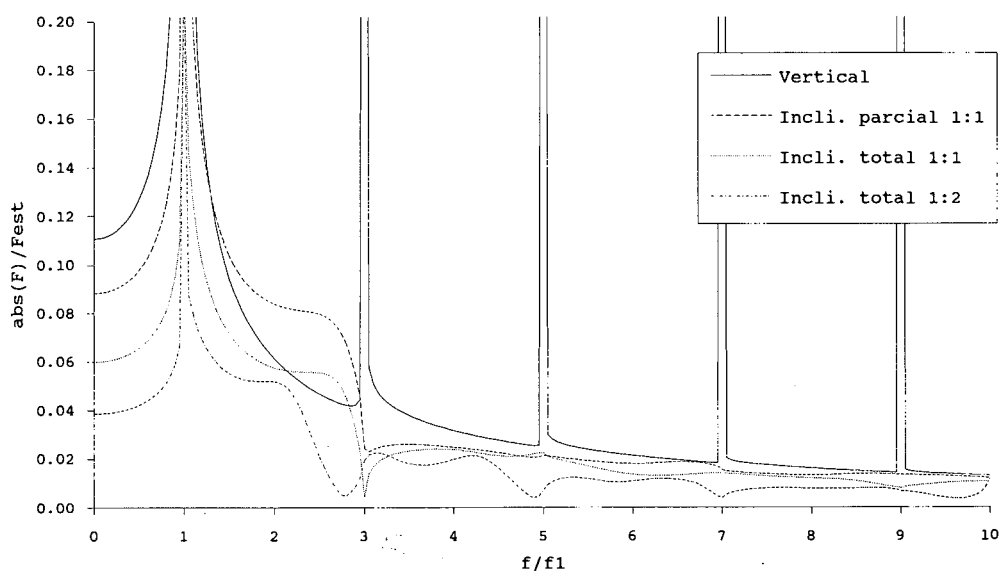


Figura 7. Valores absolutos de fuerzas hidrodinámicas normalizadas *vs* frecuencias normalizadas para diferentes formas de inclinación del paramento

Comparada con la del paramento de la cortina, la geometría del fondo del embalse tiene influencia más notable sobre la respuesta hidrodinámica pues un cambio del fondo modifica en gran medida el contenido de frecuencias. En la Figura 8 se aprecia el efecto del levantamiento del fondo; en los cuatro casos presentados (casos 1, 5, 6 y 7 de la Tabla I y Figura 2c) el paramento se mantiene vertical. El primer caso corresponde a un fondo del embalse horizontal con la altura total de la presa en la región infinita del embalse. En el segundo caso la región infinita tiene la mitad de la altura de la cortina y se presenta un talud 1:1 desde el pie de la presa hasta la región infinita. El tercer caso no tiene la región infinita dejando de ser en realidad un embalse abierto; la cuña del agua tiene una pendiente 1:1.

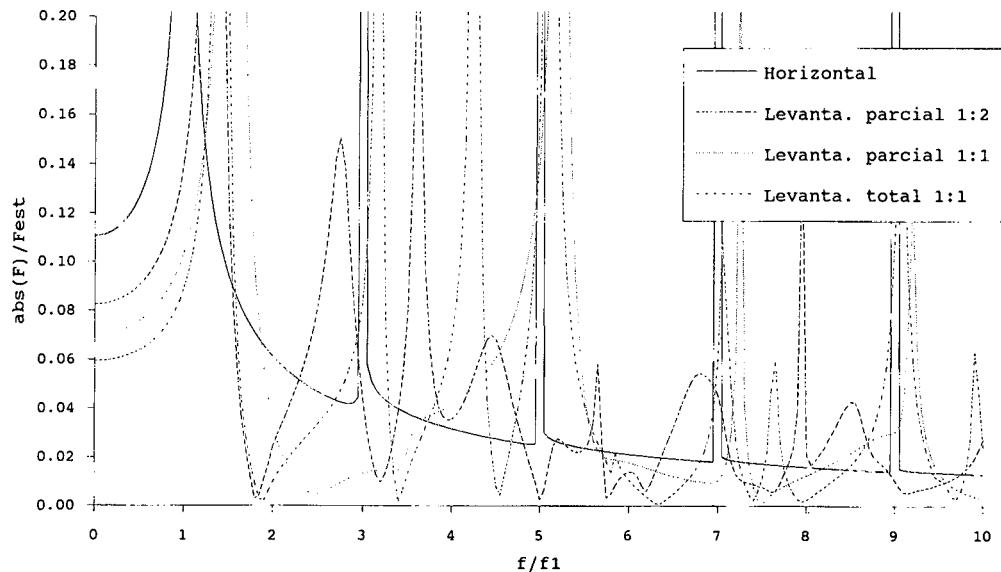


Figura 8. Valores absolutos de fuerzas hidrodinámicas normalizadas *vs* frecuencias normalizadas para diferentes formas del fondo del embalse

Como se observa en el segundo caso, las frecuencias naturales son el doble de las del primero. Esto es entendible ya que la altura del agua en la región infinita disminuye a la mitad. Este resultado confirma la conclusión anterior de que la región infinita del embalse tiene un efecto dominante sobre el contenido de frecuencias y por ende tiene que modelarse con precisión. También, debido a que en el segundo caso existe todavía una región finita del agua que tiene una altura variable, las fuerzas hidrodinámicas de este caso tienden a seguir la tendencia de variación del caso con un fondo horizontal. Esto se puede observar a través de la forma de la curva del segundo caso en la cercanía de las frecuencias naturales calculadas para el primero. La pendiente del talud en el fondo del embalse también afecta a la respuesta hidrodinámica tal como se observa en el tercer caso donde el talud del fondo con la pendiente 1:1 es más tendido que el del segundo caso. En estos casos la altura de la región infinita se mantiene a la mitad de la altura de la presa. Como se observa, para el caso con menor pendiente la fuerza hidrodinámica disminuye. Un aspecto importante es que para el caso con mayor pendiente la variación de la fuerza hidrodinámica con la frecuencia resulta un tanto errática. Esto se debe probablemente a que la región infinita del embalse está bastante lejos de la cortina, de tal modo que la respuesta de ésta deja de depender predominantemente de esa región. La mencionada variación errática de la fuerza hidrodinámica proviene principalmente del fenómeno de difracción de ondas ocurrido en la región finita del embalse, debido a la presencia de una irregularidad lateral definida precisamente por el talud del fondo del embalse; también proviene de los picos resonantes adicionales que se generan cuando el fondo del medio no es horizontal, o visto de otra forma, cuando la altura del agua varía continuamente. El cuarto y último caso es un embalse cerrado en el cual se aprecian más frecuencias de resonancia comparado con los otros casos anteriores. Dentro del intervalo de frecuencias estudiado, se observa en este último caso la presencia de resonancias en

las frecuencias normalizadas $f/f_1 = 1, 3.2, 4.4, 5.2, 5.8, 7.3, 7.6$ y 9 . Además, la amplitud de las fuerzas hidrodinámicas disminuye considerablemente con respecto a un embalse con fondo horizontal.

Para frecuencias menores que la frecuencia fundamental del primer caso, la amplitud de las fuerzas hidrodinámicas está relacionada con el volumen del embalse: cuanto menor es el volumen menor será la amplitud. Este resultado es congruente con los previamente obtenidos por Avilés y Sánchez-Sésma¹⁴ para un embalse finito de agua incompresible. Para frecuencias mayores no es posible afirmar en qué caso se presentan mayores fuerzas hidrodinámicas, puesto que por la gran variedad de picos múltiples, las fuerzas hidrodinámicas de un caso con respecto al otro son mayores en algunos intervalos de frecuencias y menores en los otros.

De todos estos resultados se puede concluir que es difícil obtener reglas simples que predigan las modificaciones que pueden tener las respuestas hidrodinámicas al variar la geometría del embalse. Es importante recurrir entonces a herramientas analíticas con el fin de apreciar, aún a nivel cualitativo, los fenómenos físicos. Para argumentar este punto, en la Figura 9 se presenta un caso que combina el efecto del paramento y el del fondo del embalse (caso 8 de la Tabla I y Figura 2d). En términos generales, la respuesta del caso combinado cae en un nivel intermedio entre las respuestas de las dos geometrías independientes (casos 2 y 6 de la Tabla I). Sin embargo se presentan fenómenos que no se pueden explicar por una simple combinación de los casos independientes. Por ejemplo, en los dos casos individuales no se aprecia un pico en la frecuencia normalizada de $f/f_1 = 3$. En cambio, para el caso combinado se observa tal pico en forma pronunciada.

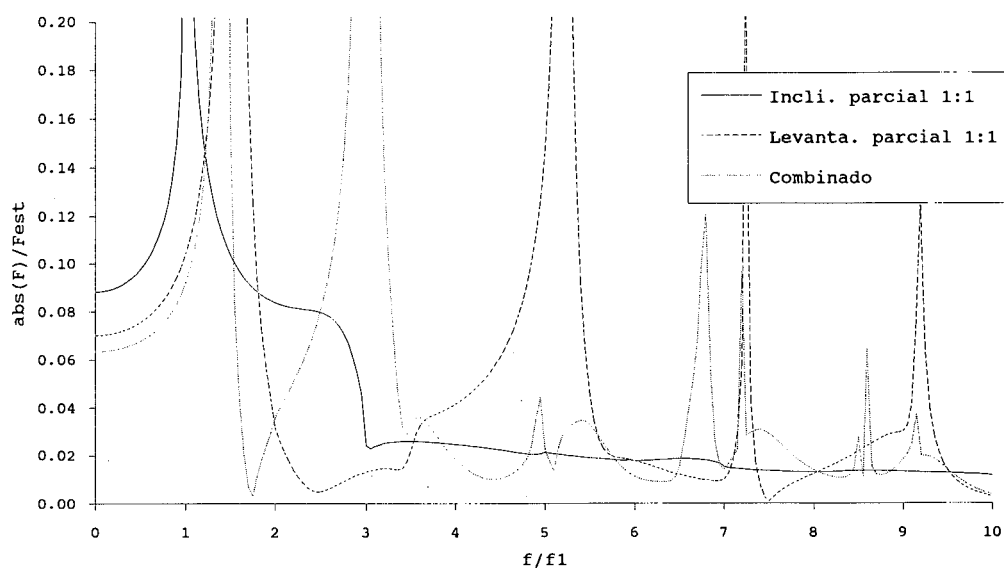


Figura 9. Valores absolutos de fuerzas hidrodinámicas normalizadas *vs* frecuencias normalizadas para un caso combinado de paramento no vertical y fondo no horizontal

CONCLUSIONES

La geometría del embalse tiene efectos importantes sobre la presión hidrodinámica de una presa rígida y tiene que incluirse en el análisis. El método de elementos de frontera resulta ser una técnica eficiente para evaluar numéricamente la influencia de la geometría del embalse. Para el caso de embalse infinito es indispensable imponer una condición de frontera lejana.

En este trabajo se desarrolló una nueva condición de frontera lejana que demostró su eficiencia y precisión comparada con otras condiciones anteriormente desarrolladas. La nueva condición es no local y se expresa en forma de serie para excitación horizontal. Se puede controlar el rango de interés de frecuencias resonantes mediante la variación del número de términos de la expansión. El rango de las frecuencias por cubrir es independiente de la discretización espacial de la frontera lejana, resultando así un modelo eficiente. Otra ventaja de la nueva condición de frontera es que se puede lograr una solución económica y precisa al mismo tiempo, localizando la frontera lejana donde termina la parte irregular del embalse.

Los estudios paramétricos realizados muestran que el cambio de la geometría del paramento prácticamente no modifica el contenido de frecuencias pero sí la magnitud de las fuerzas hidrodinámicas. Cuando el paramento tiene una parte inclinada la fuerza disminuye notablemente, entre más tendido sea el talud del paramento, menor resultará la respuesta. La geometría del fondo del embalse modifica en gran medida el contenido de frecuencias. Cuando el fondo deja de ser horizontal surgen más frecuencias de resonancia. En términos generales, la fuerza hidrodinámica disminuye con el volumen del fondo del embalse; un embalse totalmente abierto y otro completamente cerrado producen respectivamente la mayor y la menor fuerzas hidrodinámicas. Como conclusión general derivada de los resultados presentados, se tiene que es difícil obtener reglas simples sobre la respuesta hidrodinámica, siendo necesario utilizar herramientas computacionales.

REFERENCIAS

1. J.F. Hall, "The Dynamic and Earthquake Behaviour of Concrete Dams: Review of Experimental Behaviour and Observational Evidence", *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, Vol. 7, pp. 58-121, (1988).
2. X. Li y M.P. Romo, "Análisis de respuestas complejas en sistemas cortina-cimentación-agua", *Memoria de IV Congreso Nacional de Ingeniería Sísmica*, Manzanillo, México, (1991).
3. X. Li y M.P. Romo, "Análisis sísmico de presas de enrocamiento con cara de concreto", *Inf. Instituto de Ingeniería*, UNAM, México, (1992).
4. H.M. Westergaard, "Water Pressures on Dams During Earthquakes", *Transactions ASCE*, Vol. 98, (1933).
5. A.K. Chopra, "Hydrodynamic Pressures on Dams During Earthquakes", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 93, EM6, pp. 205-223, (1967).

6. P. Chakrabarti y A.K. Chopra, "Earthquake Analysis of Gravity Dams Including Hydrodynamic Interaction", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 2, pp. 147-160, (1973).
7. J.F. Hall y A.K. Chopra, "Dynamic Responses of Embankment, Concrete-Gravity and Arch Dams Including Hydrodynamic Interaction", *Rep. EERC/UCB-80/39*, Earthquake Engineering Research Center, U. of California, Berkeley, California, (1980).
8. G.L. Fenves y A.K. Chopra, "Effects of Reservoir Bottom Absorption on Earthquake Response of Concrete Gravity Dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 11, pp. 809-829, (1983).
9. R.W. Clough, K.-T. Chang, H.-Q. Chen y Y. Ghannat, "Dynamic Interaction Effects on Arch Dams", *Rep. EERC/UCB-85/11*, Earthquake Engineering Research Center, U. of California, Berkeley, California, (1985).
10. V. Lofti, J.M. Roesset y J.L. Tassoulas, "A Technique for the Analysis of The Response of Dams to Earthquakes", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 15, pp. 463-490, (1987).
11. G.L. Fenves y L.M. Vargas-Loli, "Nonlinear Dynamic Analysis of Fluid-Structure", *Journal of Engineering Mechanics Division, ASCE*, Vol. 114, EM2, pp. 219-240, (1988).
12. D.H. Wepf, J.P. Wolf y H. Bachmann, "Hydrodynamic-Stiffness Matrix Based on Boundary Elements for Time-Domain Dam-Reservoir-Soil Analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, 417-432, (1988).
13. J.L. Humar y A.M. Jablonski, "Boundary Element Reservoir Model for Seismic Analysis of Gravity Dams", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 16, pp. 1129-1156, (1988).
14. C.A. Brebbia, J.C.F. Telles y L.C. Wrobel, *Boundary Element Techniques, Theory and Applications in Engineering*, Springer-Verlag, Berlín, (1984).
15. J. Avilés y F.J. Sánchez-Sesma, "Water Pressures on Rigid Gravity Dams with Finite Reservoir During Earthquakes", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 18, pp. 527-537, (1989).
16. J. Avilés y F.J. Sánchez-Sesma, "Hydrodynamic Pressures on Dams with Nonvertical Upstream Face", *Journal of Engineering Mechanics, ASCE*, Vol. 112, pp. 1054-1061, (1985).
17. C.S. Tsai, "Semi-Analytical Solution for Hydrodynamic Pressures on Dams with Arbitrary Upstream Face Considering Water Compressibility", *Computers & Structures*, Vol. 42, pp. 497-502, (1992).
18. S.K. Sharan, *Computers & Structures*, Vol. 42, pp. 713-723, (1992).
19. A. Sommerfeld, *Partial Differential Equations in Physics*, Academic Press, Nueva York, (1949).
20. P. Bettles, "Infinite elements", *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. 11, pp. 53-64, (1977).
21. S.S. Saini, P. Bettles y O.C. Zienkiewicz, "Coupled Hydrodynamic Response of Concrete Gravity Dams Using Finite and Infinite Elements", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, Vol. 6, pp. 363-374, (1978).