

UNA FORMULACION VARIACIONAL DEBIL PARA LA PROPAGACION DE ONDAS LOVE

FRANCISCO J. SERON

*Dpto. Matemáticas II, E.T.S. de Ingenieros Industriales,
Universidad de Zaragoza, España.*

RESUMEN

Este trabajo presenta los fundamentos matemáticos que ha utilizado el autor en el problema geofísico directo de análisis del comportamiento del borde continental atlántico de la Península Ibérica como medio transmisor de energía sísmica. Se muestran los principales resultados obtenidos, y se concluye proponiendo una gran variedad de problemas abiertos, en los cuales pueden aplicarse técnicas análogas basándose en la generalidad del método propuesto.

SUMMARY

This paper describes the fundamental principles of the mathematical formulation used by the author in relation with the direct geophysical problem of analyzing the behaviour of the atlantic continental margin of the Iberian Peninsula as a transmission medium of seismic energy. The work shows the main results obtained and proposes a large variety of open problems to which analogous techniques can be applied.

INTRODUCCION

La estructura terrestre compleja bidimensional considerada en este trabajo está representada en la Figura 1 y está constituida por una zona central propiamente irregular (I), que contiene todo tipo de irregularidades estructurales, tanto físicas

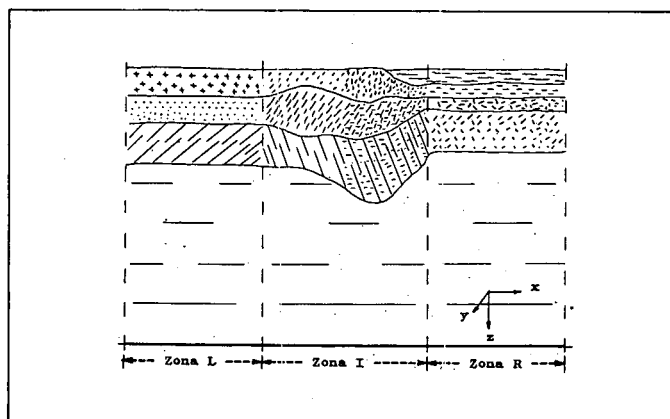


Fig. 1.— Tipo de estructura terrestre compleja considerada.

Recibido: Marzo 1985

como geométricas, flanqueada por dos zonas semiinfinitas (L y R) estratificadas horizontalmente y con fronteras verticales Γ_L y Γ_R con la anterior. El límite inferior de la estructura se supone rígido a todos los efectos.

El material se considera elástico lineal, isótropo y no homogéneo, caracterizado en todo punto por los parámetros de Lamé λ y μ y por la densidad de masa ρ . Estas constantes elásticas, así como la densidad de masa son funciones reales acotadas que verifican las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned}\rho(r) &\geq \rho_o > 0 \\ \lambda(r) &\geq \lambda_o > 0 & \forall r \in \Omega = \Omega_L \cup \Omega_R \\ \mu(r) &\geq \mu_o > 0\end{aligned}\quad (1)$$

$$\begin{aligned}\rho \in [L^\infty(\Omega_L \cup \Omega_R)]^1 &\ni \rho = \rho(z) \\ \lambda \in [L^\infty(\Omega_L \cup \Omega_R)]^1 &\ni \lambda = \lambda(z) & \forall r \in \Omega_L \text{ ó } \Omega_R \\ \mu \in [L^\infty(\Omega_L \cup \Omega_R)]^1 &\ni \mu = \mu(z)\end{aligned}\quad (2)$$

$$\begin{aligned}\rho \in [L^\infty(\Omega_I)]^2 &\ni \rho = \rho(x, z) \\ \lambda \in [L^\infty(\Omega_I)]^2 &\ni \lambda = \lambda(x, z) & \forall r \in \Omega_I \\ \mu \in [L^\infty(\Omega_I)]^2 &\ni \mu = \mu(x, z)\end{aligned}\quad (3)$$

La zona irregular, en estado estacionario, se supone sometida a una oscilación forzada como consecuencia de las tensiones provocadas por ondas Love monocromáticas normalmente incidentes sobre ella desde la zona L. En lo que sigue se propone una formulación variacional débil para el estudio de los fenómenos físicos asociados a la propagación de energía sísmica con las ondas Love reflejadas y transmitidas. Tal formulación permite hacer uso de un conjunto de resultados sobre la existencia y unicidad de la solución y también construir una solución discreta mediante aproximación por elementos finitos.

FORMULACION VARIACIONAL

Sea Ω_I un dominio abierto, acotado y conexo de R^3 con frontera Γ_I de C^1 y sean $\Gamma_o, \Gamma_1, \Gamma_L, \Gamma_R$ partes de Γ_I con medida superficial estrictamente positiva de manera que $\Gamma_I = \Gamma_o \cup \Gamma_1 \cup \Gamma_L \cup \Gamma_R$. El problema general considerado es el siguiente. Dados los campos $u_o = (u_{o1}, u_{o2}, u_{o3})$ y $u_1 = (u_{11}, u_{12}, u_{13})$ definidos en $Q_T = \Omega_I \times]0, T[$, así como las funciones g_L de $(L^2(\Sigma_{LT}))^3$ con $\Sigma_{LT} = \Gamma_L \times]0, T[$ y g_R de $(L^2(\Sigma_{RT}))^3$ con $\Sigma_{RT} = \Gamma_R \times]0, T[$, se trata de encontrar un campo $u = (u_1, u_2, u_3)$ definido en Q_T que sea solución del problema de Cauchy-Dirichlet homogéneo y del problema de Newman no homogéneo siguientes:

$$\rho \frac{\partial^2 u_i}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^3 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} = 0 \quad \text{en } Q_T \quad (4)$$

$$u_i = 0 \quad \text{en } \Gamma_o \times]0, T[\quad (5)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \nu_j = 0 \quad \text{en } \Gamma_1 \times]0, T[\quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \nu_j = g_{Li} \quad \text{en } \Gamma_L \times]0, T[\quad (7)$$

$$\sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \nu_j = g_{Ri} \quad \text{en } \Gamma_R \times]0, T[\quad (8)$$

$$u_i(r, 0) = u_{0i} \quad \text{en } \Omega_i \quad (9)$$

$$\dot{u}_i(r, 0) = \left(\frac{\partial u_i}{\partial t} \right)_{r, 0} = u_{1i} \quad \text{en } \Omega_i \quad (10)$$

Con la notación Γ_1 hacemos referencia al límite superior de la estructura, mientras que ν_i denota una cualquiera de las tres componentes del vector unitario normal a una superficie como las que sirven de frontera. La ley de comportamiento o relación constitutiva es:

$$\sigma_{ij} = \lambda(\text{div} \mathbf{u}) \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}, \quad 1 \leq i, j \leq 3 \quad (11)$$

donde σ_{ij} son las componentes del tensor de tensiones y ϵ_{ij} son las componentes del tensor de deformaciones, cuyas relaciones con el campo $\mathbf{u}$ de desplazamientos son bien conocidas.

El conjunto de ecuaciones (4)-(10) describe la evolución de los pequeños desplazamientos de un sólido elástico lineal, isótropo y no homogéneo, sometido a densidades superficiales de fuerzas $\mathbf{g}_L$ y $\mathbf{g}_R$, con respecto a su estado inicial.

Suponiendo que la solución $\mathbf{u}$ es suficientemente regular, se introduce el espacio de Sobolev de orden 1, $(H^1(\Omega))^3$ definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega); \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega); 1 \leq i \leq 3 \right\} \quad (12)$$

con el producto escalar

$$(u, v)_{1, \Omega} = \int_{\Omega} \left[uv + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \right] dr \quad (13)$$

y la norma

$$\|V\|_{1, \Omega} = (V, V)_{1, \Omega}^{1/2} \quad (14)$$

y se define el espacio

$$V = \left\{ v \in (H^1(\Omega))^3; v = 0 \text{ sobre } \Gamma_0 \right\} \quad (15)$$

y las formas bilineales continuas sobre $V \times V$

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^3 \int_{\Omega} \sigma_{ij}(\mathbf{u}) \epsilon_{ij}(\mathbf{v}) dr \quad (15 a)$$

$$(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 \int_{\Omega} \rho u_i v_i dr \quad (16 b)$$

Entonces, por métodos clásicos, se infiere la formulación variacional débil del problema descrito por las ecuaciones (4)-(10). En otros términos, el problema planteado se reduce a encontrar un campo u que satisface la ecuación

$$(\ddot{u}(t), v) + a(u(t), v) = (f(t), v) \quad \forall v \in V \quad (17)$$

donde

$$(f(t), v) = \sum_{i=1}^3 \left(\int_{\Gamma_L} g_{Li} v_i d\Gamma_L + \int_{\Gamma_R} g_{Ri} v_i d\Gamma_R \right) \quad \forall v \in V \quad (18)$$

El punto indica diferenciación respecto a la variable tiempo.

Se puede dar una interpretación mecánica de esta formulación. Así, el espacio V contiene los desplazamientos v admisibles y la formulación variacional no es otra cosa que la expresión del principio de los trabajos virtuales.

Teniendo en cuenta las propiedades (1)-(3) de los coeficientes de elasticidad y de la densidad de masa, se puede demostrar que la forma bilineal (16) es simétrica y además V -elíptica², lo cual asegura que existe una única función $u \in V$ compatible con la formulación variacional establecida.

APROXIMACION POR ELEMENTOS FINITOS

Con el fin de construir una solución discreta aproximada, haremos uso del método de los elementos finitos³⁻⁷. Se introduce para ello un subespacio V_h de V de dimensión finita $I = I(h)$, siendo $h > 0$ un parámetro geométrico que describe el tamaño de la discretización efectuada al aplicar dicho método, verificándose que

$$\lim_{h \rightarrow 0} I(h) = +\infty \quad (19)$$

El problema es el siguiente: conocidos los campos $u_{0,h}$ y $u_{1,h} \in V_h$, determinar una función $u_h(t) \in V_h$ solución de la ecuación diferencial ordinaria de segundo orden

$$\frac{d^2}{dt^2} (u_h(t), v_h) + a(u_h(t), v_h) = (f(t), v_h) \quad \forall v_h \in V_h \quad (20)$$

con las condiciones:

$$u_h(0) = u_{0,h}, \quad \left(\frac{du_h}{dt} \right)_{t=0} = u_{1,h} \quad (21)$$

El problema admite solución única² u_h . Y si $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_I$ es una base del espacio V_h , la solución se puede expresar de manera única en la forma

$$u_h(t) = \sum_{j=1}^I \xi_j(t) \phi_j \quad (22)$$

donde $\xi(t) = (\xi_1(t), \xi_2(t), \dots, \xi_I(t))^T$ son los grados de libertad para el modelo de elementos finitos adoptado, mientras que las funciones ϕ_j son meras funciones de inter-

polación, a elegir. Entonces, denotando $(f(t), \phi_j)$ por $F_i(t)$, $1 \leq i \leq I$, y poniendo $\mathbf{F}(t) = (F_1(t), F_2(t), \dots, F_I(t))^T$, la expresión (20) pasa a ser

$$\mathbf{M} \frac{d^2 \tilde{\xi}(t)}{dt^2} + \mathbf{K} \tilde{\xi}(t) = \mathbf{F}(t) \quad (23)$$

y las condiciones anteriores son ahora

$$\tilde{\xi}(0) = \tilde{\xi}_0, \quad \left(\frac{d\tilde{\xi}}{dt} \right)_{t=0} = \tilde{\xi}_1 \quad (24)$$

Las matrices

$$\mathbf{M} = (\phi_j, \phi_i) \quad (25)$$

$$\mathbf{K} = a(\phi_j, \phi_i) \quad 1 \leq i, j \leq I \quad (26)$$

se conocen como la matriz de masa y la matriz de rigidez de la estructura, respectivamente, y son reales y simétricas. En realidad, (23) es un sistema de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes constantes, cuya resolución requiere el conocimiento previo de las matrices que en el mismo aparecen (que dependen del modelo de elementos finitos adoptado y de las propiedades elásticas supuestas para cada elemento) y también de la carga dinámica o del término de fuerza $\mathbf{F}(t)$ que afecta a la estructura.

Realizando de forma adecuada el mallado de la estructura y eligiendo una base conveniente, el método de los elementos finitos es convergente y el error de la aproximación tolerable².

EL PROBLEMA DE LA PROPAGACION DE ONDAS LOVE

El problema anterior se simplifica en cierto modo para el caso de propagación de ondas Love a través de la estructura terrestre, compleja, plana, considerada. En efecto; en este caso tenemos

$$u_1 = u_3 = 0 \quad \text{en } \Omega_T \quad (27)$$

$$g_{L1} = g_{L3} = 0 \quad \text{en } \Sigma_{LT} \quad (28)$$

$$g_{R1} = g_{R3} = 0 \quad \text{en } \Sigma_{RT} \quad (29)$$

$$\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = \sigma_{13} = 0 \quad \text{en } \Omega_T \quad (30)$$

$$\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon_{33} = \epsilon_{13} = 0 \quad \text{en } \Omega_T \quad (31)$$

y las únicas componentes no nulas del campo $\mathbf{u}$, así como de las densidades superficiales de fuerza $\mathbf{g}_L$ y $\mathbf{g}_R$, se pueden expresar en la forma

$$u_2(x, y, z, t) = u(x, z) \exp(i\omega t) \quad \text{en } \Omega_T \quad (32)$$

$$g_{L2} = G_L(x, z) \exp(i\omega t) \quad \text{en } \Sigma_{LT} \quad (33)$$

$$g_{R2} = G_R(x, z) \exp(i\omega t) \quad \text{en } \Sigma_{RT} \quad (34)$$

siendo g_{L2} las tensiones que surgen en la zona irregular debidas a las ondas Love incidentes y a las ondas Love reflejadas, y g_{R2} las tensiones originadas en dicha zona debidas a las ondas Love transmitidas.

El cálculo de las matrices globales de masa y de rigidez ha sido realizado minuciosamente por Serón¹. Por otra parte, la determinación del término de fuerza, bajo la hipótesis de propagación de ondas Love, se debe a^{8,9}, proceso que conlleva la introducción de matrices complejas en el cálculo.

Teniendo en cuenta que en problemas en los que la excitación es periódica, la solución no depende de las condiciones iniciales, de manera que una vez calculada representa la respuesta estable final, la expresión matricial (23) para las amplitudes $u(x, z)$ del movimiento toma la forma¹

$$(K + R_L + R_R - \omega^2 M) \{u\} = 2R_L \{u\}_L^R \quad (35)$$

siendo ω la frecuencia de excitación y donde R_L y R_R son matrices simétricas de elementos complejos, que se calculan a partir de los parámetros físicos que definen las zonas semi-infinitas, planas, estratificadas horizontalmente, y de los modos de vibración y formas modales de las ondas Love que se propagan libremente a través de estas zonas; $\{u\}_L^R$ es un vector que representa la amplitud en profundidad de una onda Love de período dado que se propaga libremente por la zona L e incide normalmente sobre la zona irregular. Esta expresión constituye un sistema de ecuaciones lineales complejas que, una vez resuelto, permite determinar amplitudes y fases de los desplazamientos debidos a ondas Love transmitidas y reflejadas, para un movimiento ondulatorio Love incidente de frecuencia dada. La matriz entre paréntesis es simétrica y de anchura de banda estrecha, aunque con elementos complejos a causa de las matrices R_L y R_R .

La aplicación del método de los elementos finitos se ha hecho siguiendo una formulación isoparamétrica con elementos finitos lagrangianos y considerando elementos afines al elemento rectangular lineal o de primer orden de la familia serendipita de clase C^0 ⁵. Asimismo, se ha procedido a una integración numérica de Gauss-Legendre 2×2 ¹⁰. La resolución propiamente dicha del sistema (35) se ha hecho siguiendo un método directo de eliminación gaussiana conocido por CROUT¹⁰.

La convergencia de la semidiscretización espacial que introduce el método de los elementos finitos queda asegurada⁴, en el sentido de que si u es la solución exacta y u_h la aproximada, se verifica

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|u - u_h\|_{1, \Omega_I} = 0 \quad (36)$$

El error de interpolación cometido viene dado por

$$\|u - u_h\|_{1, \Omega_I} = O(h) \quad (37)$$

$$\|u - u_h\|_{0, \Omega_I} = O(h^2) \quad (38)$$

El autor ha publicado recientemente dos trabajos^{11,12} en los que da detalles del cálculo numérico para la resolución de la ecuación (35) y también acerca de los errores cometidos en el proceso de cálculo, que demuestran la eficiencia de los algoritmos utilizados.

EJEMPLO DE APLICACION

El problema sismológico bidimensional estudiado se refiere a la propagación de ondas Love normalmente incidentes sobre una zona de transición océano-continente no subductiva, como es el borde continental atlántico de la Península Ibérica.

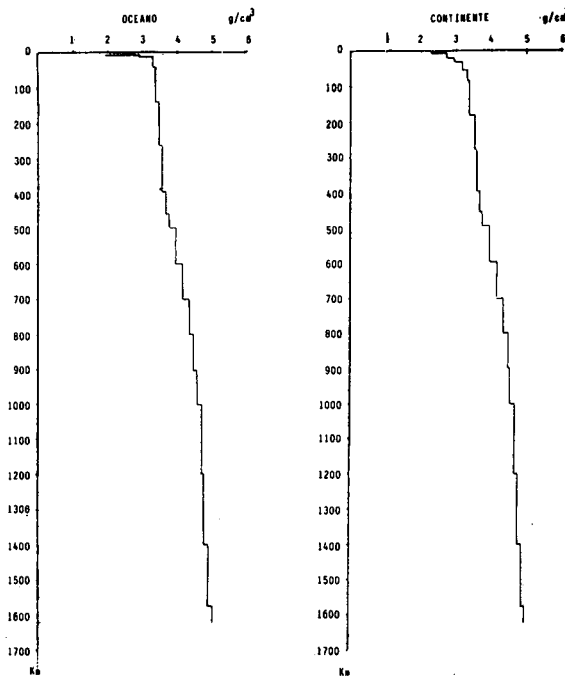


Fig. 2.— Distribución de la densidad frente a la profundidad para los modelos del océano y del continente.

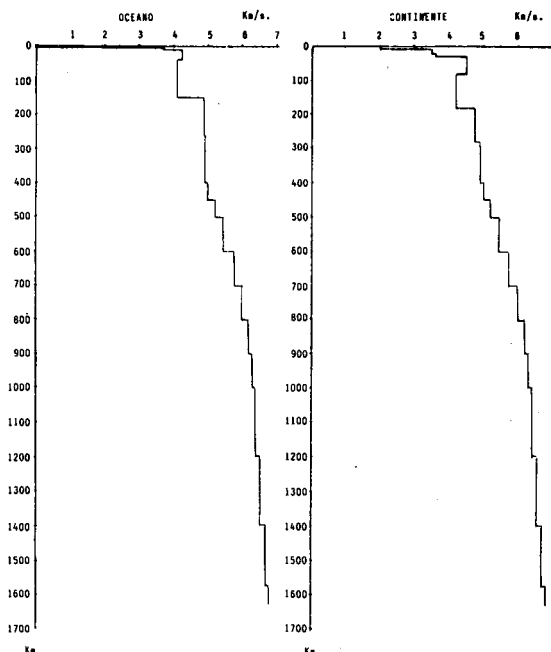


Fig. 3.— Distribución de la velocidad de las ondas S frente a la profundidad para los modelos del océano y del continente.

Las características estructurales, tanto físicas como geométricas, de la zona irregular se han deducido teniendo en cuenta los resultados llevados a cabo sobre la Península Ibérica y el Océano Atlántico¹³⁻¹⁹. Por no existir información para profundidades superiores a 300 Km., también se han utilizado datos suministrados por modelos clásicos de manto superior²⁰. A partir de las contribuciones citadas se han obtenido las distribuciones de la densidad y de la velocidad de las ondas S frente a la profundidad mostradas en las Figuras 2 y 3, respectivamente.

El modelo básico de margen continental adoptado conecta las áreas adyacentes horizontalmente estratificadas que representan los dominios oceánico y continental (Figura 4). Los rasgos puramente físicos del borde continental se han introducido mediante interpolación lineal de los datos físicos que describen los dos zonas de los extremos.

La anchura de la zona irregular no está determinada. Se considera una anchura total de 180 Km. para la región: una zona izquierda (L) de 40 Km. de extensión, que representa la estructura oceánica; una zona central o propiamente irregular (I) de 100 Km. de extensión, que representa la zona de transición Océano Atlántico - Península Ibérica; y una zona derecha (R) de otros 40 Km. de extensión, que representa la estructura continental. La Figura 4 muestra un ejemplo de recubrimiento por elementos finitos de la zona compleja considerada.

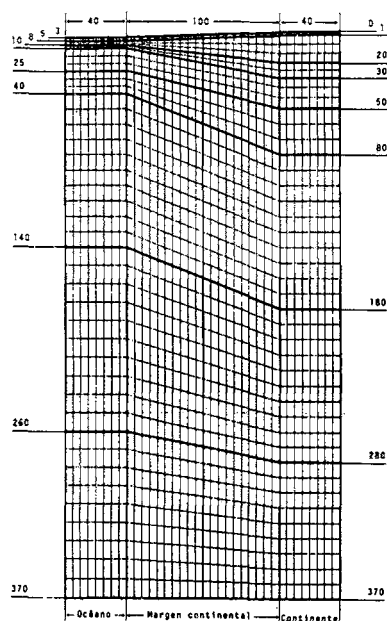


Fig. 4.— Zona de transición océano-continente mallada mediante elementos finitos.

Este trabajo contempla un barrido de períodos entre 4 y 60 s. Los períodos analizados se incluyen en la Tabla 1, así como las profundidades del modelo en cada caso.

La Tabla 2 recoge las características principales de las mallas utilizadas, los tipos de materiales distintos considerados en cada caso, así como otros datos relacionados con el proceso de cálculo.

TABLA 1
PERIODOS ANALIZADOS MEDIANTE MODELOS
CON LAS PROFUNDIDADES INDICADAS

Profundidad		PERIODOS (s.)										
370 Km.	4	5	6	7.25	8.5	9.75	11	12.5	14	15.5	17	19
735 Km.	15.5	19	21	23	25	27.5	30	32.5	35			
1120 Km.	30	35	40	45	50							
1625 Km.	45	50	55	60								

TABLA 2
CARACTERISTICAS PRINCIPALES DE LAS MALLAS UTILIZADAS

Modelo	1	1	1	1	2	2	3	3
Anchura (Km.)	180	180	180	180	120	120	90	90
Profundidad (Km.)	370	735	1120	1625	370	735	370	735
Anchura de cada elemento (Km.)	5	5	10	10	5	5	5	5
Número de elementos por capa	36	36	18	18	24	24	18	18
Número de capas	42	58	64	72	42	58	42	58
Número de elementos	1512	2088	1152	1296	1008	1392	756	1044
Número de nodos	1591	2183	1235	1387	1075	1475	817	1121
Número de ecuaciones	1554	2146	1216	1368	1050	1450	798	1102
N. de el. de cada matriz utilizados	67.396	126.956	78.094	98.514	45.232	85.208	34.150	64.334
% de ahorro en cada matriz	97.21	97.24	94.72	94.74	95.90	95.95	94.64	94.70
Tipos de materiales distintos	27	32	35	38	27	32	27	32

En cualquier caso el modelo de elementos finitos se somete a una oscilación forzada por un extremo (el océano) de acuerdo con las tensiones originadas por un modo Love fundamental normalmente incidente de período dado, amplitud unidad y fase cero, que se propaga a través de la estructura oceánica típica en dirección W-E. La aplicación

de la teoría permite calcular: a) el campo de desplazamientos complejos en todos los puntos nodales de la estructura, lo que a su vez permite calcular las amplitudes y fases de las ondas Love transmitidas y reflejadas para todos los modos (Figura 5); b) la curva de dispersión de la velocidad de fase para el modo Love fundamental que se propaga a través de la zona irregular (Figura 6); c) los factores de transmisión océano-continente (Figura 7); d) finalmente, la partición o distribución de la energía sísmica incidente en modos Love transmitidos y reflejados (Figura 8).

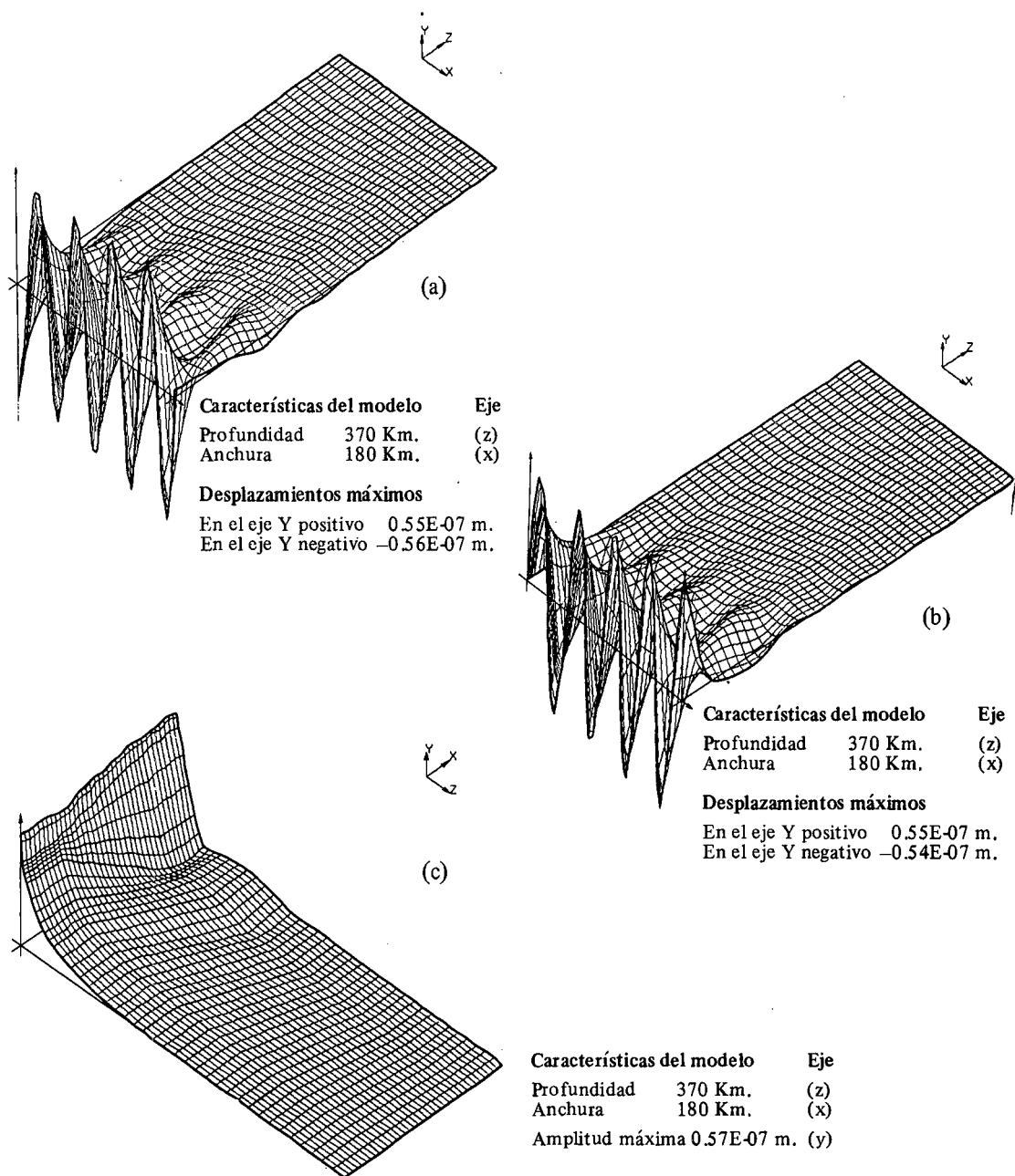


Fig. 5.— a) Parte real; b) Parte imaginaria; c) Módulo, del campo de desplazamientos de la zona irregular, producido por la incidencia de una onda Love modo fundamental oceánica de período 11 s.

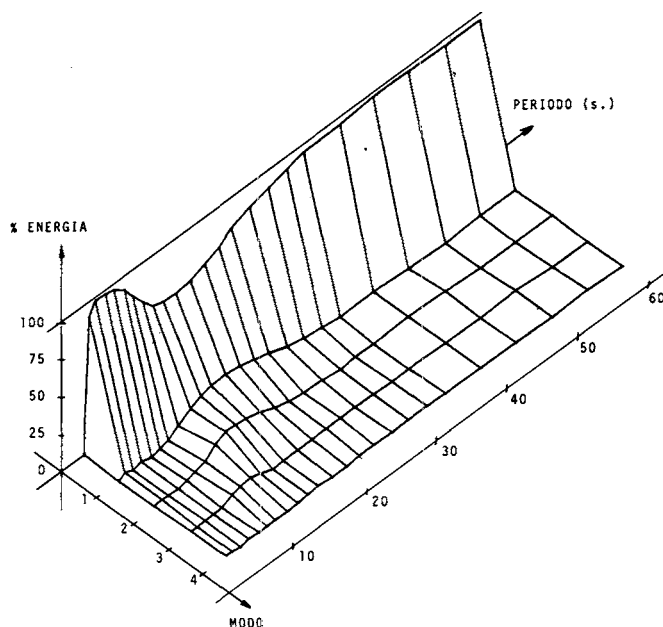


Fig. 8.— Distribución de la energía incidente desde el Océano en forma de diferentes modos fundamentales, en modos de la zona continental.

Debido a la carencia de software general para utilizar M.E.F. en la Universidad de Zaragoza, se elaboraron un conjunto de programas de propósito específico escritos en FROTRAN 77. Para su diseño se tuvieron en cuenta los principios de programación estructurada y la metodología de explotación de recursos de sistema VAX 11/780 del Centro de Cálculo de la Universidad de Zaragoza. Un análisis de costo computacional se puede encontrar en¹.

COMENTARIOS FINALES

Aparte del conocimiento adquirido sobre el comportamiento del borde continental atlántico de la Península Ibérica, la mayor ventaja del método propuesto y utilizado es su excepcional generalidad. Una vez elaborado el conjunto de programas necesario, es fácil analizar una gran variedad de problemas y condiciones de contorno.

Desde un punto de vista puramente sismológico consideramos que se puede citar un conjunto muy amplio de problemas abiertos que podrían tratarse con estas técnicas. Por ejemplo, en prospección geofísica, el problema de detectar un cuerpo anómalo enterrado, mediante el examen de los efectos que sufren las ondas sísmicas que lo atraviesan. A una escala mayor, la determinación de la estructura de la corteza depende de los efectos producidos sobre la propagación de las ondas sísmicas superficiales por las raíces de las dorsales o de las cadenas continentales, de las fosas oceánicas y de los márgenes continentales subductivos. Aumentando todavía la escala, aún existe el problema de determinar los efectos que la distribución irregular de los continentes y océanos, ejercen sobre los períodos de las oscilaciones libres de la Tierra. Otro

Un estudio riguroso del tema y una interpretación geofísica de los resultados aquí expuestos puede verse con todo detalle en¹.

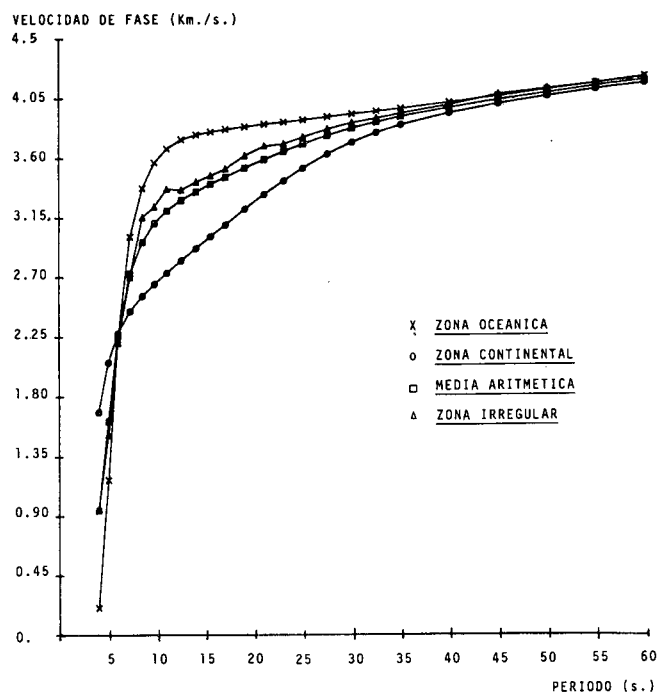


Fig. 6.— Comparación de las curvas de dispersión de los modos Love fundamentales de las diferentes zonas.

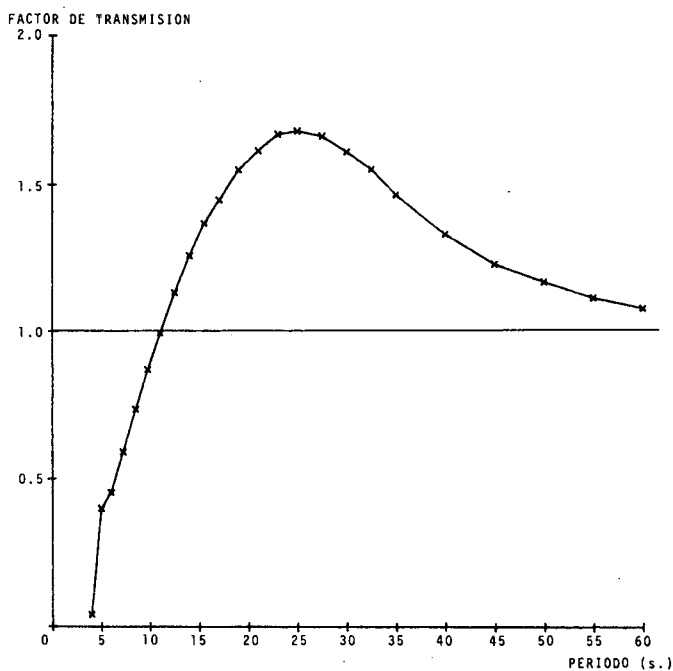


Fig. 7.— Factores de transmisión de las amplitudes de los desplazamientos superficiales del océano al continente. (AMP. CONT./AMP. OCEANO).

enfoque muy interesante lo presenta la posibilidad de introducir fuentes sísmicas en los modelos y analizar el comportamiento del campo cercano.

Desde un punto de vista más técnico, este método puede ser utilizado para la investigación del comportamiento de estructuras civiles sometidas a acciones sísmicas, u otros contextos de la ingeniería.

REFERENCIAS

1. F. J. Seron. "Resolución de problemas sismológicos bidimensionales mediante aproximación por elementos finitos". *Tesis Doctoral*. Facultad de Ciencias. Universidad de Zaragoza (Spain) (1984).
2. P. A. Raviart y J. A. Thomas. "*Introduction à l'Analyse numérique des équations aux dérivées partielles*". Masson. París (1983).
3. J. T. Oden. "*Finite element applications in mathematical physics*". Academic Press. New York (1973).
4. P. G. Ciarlet. "*The finite element method for elliptic problems*". North-Holland Publishing Company (1978).
5. O. C. Zienkiewicz. "*El método de los elementos finitos*". Reverté. Barcelona (1980).
6. E. B. Becker. "*Finite elements. An introduction*". Prentice-Hall, Englewood Cliffs. New Jersey (1981).
7. G. F. Carey y J. T. Oden. "*Finite elements. A second course*". Prentice-Hall, Englewood Cliffs. New Jersey (1983).
8. J. Lysmer y G. Waas. "Shear waves in plane infinite structures". *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, vol. **98**, No. EM1, 85-105 (1972).
9. J. Lysmer y L. A. Drake. "A finite element method for seismology". *Methods of Computational Physics*, vol. **11**, 181-216 (1972).
10. K. J. Bathe y E. L. Wilson. "*Numerical methods in finite element analysis*". Prentice-Hall, Englewood Cliffs. New Jersey (1976).
11. J. Badal y F. J. Seron. "Un análisis numérico eficiente sobre dispersión de ondas Love". *Revista de Geofísica*, **40**, 181-190 (1984).
12. J. Badal y F. J. Seron. "Sobre el movimiento de estructuras terrestres complejas al paso de ondas Love". *Revista de Geofísica*. (En revisión). (1985).
13. G. Payo. "Crustal phases across the Iberian Peninsula region". *Annali di Geofísica*, XVII, 523-545. (1964).
14. G. Payo. "Iberian Peninsula Crustal Structure from surface waves dispersion". *Bull. Seism. Soc. Am.*, **55**, 727-743 (1965).
15. G. Payo. "Structure of the crust and upper mantle in the Iberian Peninsula and the adjacent Atlantic and Mediterranean areas". *Geofísica Internacional*, **14**, 89-102 (1970).
16. C. Bravo y A. Udías. "Rayleigh wave group velocity dispersion in North Atlantic Region". *Geophys. J. R. astr. Soc.* **37**, 297-304 (1974).
17. J. A. Pérez, G. Payo y E. Ruiz de la Parte. "Estructura de la Península Ibérica y zonas adyacentes por medio de la dispersión de ondas superficiales producidas por terremotos próximos. Parte I: Trayectoria de San Vicente y Argelia". *Revista de Geofísica*, XXXVII, **2**, 132-144 (1978).
18. J. Sierra. "Nuevas técnicas de análisis de trenes de ondas dispersadas y su aplicación a ondas superficiales de sismos de la Península Ibérica" (1980).
19. F. Marillier y St. Mueller. "Structure of the upper mantle in the Northeastern Atlantic close to the Azores-Gibraltar Ridge from surface-wave and body-wave observations". *Tectonophysics*, **90**, 195-213 (1982).
20. A. Ben-Menahem y S. J. Singh. "*Seismic Waves and Sources*". Springer-Verlag. New York (1981).