

INTERACCIÓN SÍSMICA SUELO-ESTRUC- TURA-FLUIDO

J. Miquel Canet y A. Barbat

Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE)

Universidad Politécnica de Cataluña

Campus Norte UPC, 08034 Barcelona

e-mail: canet@cimne.upc.es

1 INTERÉS DEL PROBLEMA

El estudio del comportamiento de las estructuras sometidas a terremotos demuestra que los fenómenos de interacción suelo-estructura y fluido-estructura tienen una gran influencia en la respuesta estructural, razón por la cual deben considerarse en un análisis sísmico. El estudio numérico de dichos fenómenos implica la resolución de problemas en los cuales el acoplamiento entre dos sólidos o entre un sólido y un fluido ocurre únicamente en las superficies de contacto entre ambos⁽¹⁾.

Para que dichos fenómenos de interacción ocurran es preciso que se den algunas condiciones. Por ejemplo, la interacción suelo-estructura no aparece en el caso de una estructura cimentada en roca rígida y por tanto con apoyos no deformables. En tal caso, el movimiento inducido por el terremoto en el contacto suelo-estructura es el mismo que el producido por un terremoto en condiciones de ausencia de la estructura. Además, las frecuencias naturales de la estructura analizada son en este caso las mismas que las que corresponderían al sistema completo suelo-estructura. Inversamente, en el caso en que el suelo de cimentación sea deformable, las ondas sísmicas sufren importantes modificaciones debido a la presencia de la estructura; al mismo tiempo, las frecuencias naturales del sistema completo suelo-estructura cambian respecto a las de la estructura cimentada en terreno rígido. Por ello, en el caso de suelo deformable es preciso incluir el efecto de la interacción suelo-estructura en el análisis sísmico que se realice de la estructura.

Puede hacerse una observación similar por lo que concierne a la interacción fluido-estructura. Este fenómeno no se presenta si la estructura es perfectamente rígida y está apoyada en un suelo también rígido. Si el fluido en contacto con la estructura se supone incompresible, el problema se reduce al cálculo de unas masas ficticias añadidas a la estructura, las cuales producen únicamente una variación en las frecuencias propias de la misma. La interacción fluido-estructura aparece realmente cuando se considera la estructura flexible y en contacto con un fluido compresible.

La triple interacción suelo-fluido-estructura es un fenómeno que se produce en el caso de presas, depósitos, depósitos de agua elevados, plataformas marinas, torres de toma, etc. Puede tener diferentes efectos en el comportamiento global del sistema suelo-estructura-fluido. Es preciso identificar primeramente los efectos que tienen una influencia determinante desde un punto de vista estructural en las decisiones de diseño, tales como

- Modificación (amplificación o reducción) de las fuerzas sísmicas que se producen en la estructura debido al fenómeno de triple interacción.
- Reducción de la capacidad resistente del terreno de cimentación debido a las vibraciones del sistema completo suelo-estructura-fluido.

Una vez identificados estos efectos esenciales es importante señalar que hay otros aspectos importantes que condicionan el conocimiento completo del problema. Algunos de éstos están relacionados con los señalados anteriormente y tienen una influencia directa en ellos. Pueden sintetizarse como sigue⁽²⁻⁴⁾:

- Las características de propagación de las ondas en campo libre están influenciadas por las condiciones locales del suelo^(5,6).
- Las capas de suelo en las cuales la estructura está cimentada, así como la masa de fluido que interacciona con la estructura, modifican el valor de las frecuencias del sistema global suelo-estructura-fluido. Esta modificación de frecuencias debida a la interacción es la causa principal de los cambios que tienen lugar en las fuerzas sísmicas.

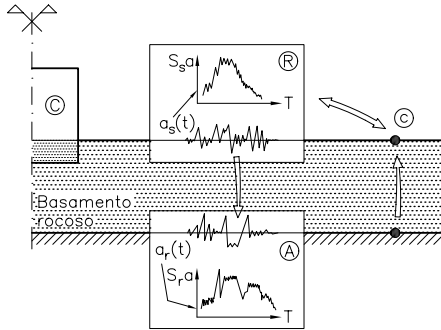


Figura 1: Obtención del movimiento de la roca de base. R – registro original; A – movimiento de la roca de base obtenido mediante un proceso de deconvolución; C – movimiento de control

- La radiación de las ondas sísmicas disipa parte de la energía inducida por los terremotos en la estructura, especialmente en el caso de capas de suelo de gran espesor o cuando existen grandes volúmenes de fluido en contacto con la estructura. Desde el punto de vista de sus efectos sobre el comportamiento estructural, este fenómeno puede cuantificarse mediante el incremento del amortiguamiento del modelo dinámico⁽⁷⁾.

La información disponible acerca de un movimiento sísmico del terreno consiste, generalmente, en registros obtenidos mediante instrumentos situados en la superficie terrestre o a pequeña profundidad. Sin embargo, la mayor parte de los procedimientos utilizados para resolver el problema de interacción sísmica requieren que se disponga de un registro del movimiento sísmico en la superficie que separa la zona del suelo considerada en el análisis de la zona del suelo no incluida.. Esta superficie de separación define un contorno teórico, denominado en ocasiones *roca de base*. El suelo debajo de dicho contorno puede suponerse infinitamente rígido o dotado de una cierta flexibilidad. Para obtener el movimiento de la roca de base, esto es, un acelerograma al nivel de la roca de base, debe realizarse una deconvolución del movimiento sísmico disponible en la superficie del suelo, de acuerdo con el esquema de la figura 1. El proceso de deconvolución puede

realizarse mediante procedimientos simplificados, analizando la propagación vertical de las ondas de cortante a través de una columna de suelo discretizada en elementos finitos⁽⁵⁾.

Posteriormente a la deconvolución se aplica un proceso de convolución, en el cual el movimiento de la roca de base previamente calculado se utiliza como dato de entrada para obtener el *movimiento de control* en la superficie del suelo (ver figura 1). Esta operación permite adaptar los parámetros de la malla de elementos finitos utilizados en los procesos de deconvolución y de convolución, imponiendo la condición de que el movimiento de control obtenido y el registro sísmico original sean muy parecidos.

2 FORMULACIÓN UNIDIMENSIONAL DE LA DECONVOLUCIÓN DE LA SEÑAL SÍSMICA

2.1 Bases teóricas

Tal como se ha señalado en el apartado anterior, el tratamiento completo del problema de la interacción requiere conocer previamente el valor del movimiento sísmico en la roca de base a partir de datos disponibles en la superficie del terreno. Por otra parte, el mencionado movimiento en la roca de base es de mucha utilidad para conocer la modificación que experimenta el acelerograma superficial cuando para un mismo terremoto cambian las condiciones locales, o cuando se produzcan determinadas excavaciones que modifiquen los distintos estratos de suelo.

Dadas las dificultades que encierra la resolución tridimensional del problema se recurre normalmente a realizar una serie de simplificaciones, de tal forma que dicha resolución pueda llevarse a cabo de manera más sencilla. Concretamente, tal como se ha explicado anteriormente, es habitual solucionar todo el proceso estudiando la transmisión unidimensional de las ondas de cortante en sentido vertical. La ecuación diferencial que gobierna el proceso se escribe en este caso

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = G \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial x^2 \partial t} \quad (1)$$

siendo

- u - movimiento horizontal del terreno
- ρ - densidad
- G - módulo de elasticidad transversal
- η - viscosidad del suelo

Para realizar un análisis en frecuencias se parte de la expresión

$$u = U \exp(i\omega t) \quad (2)$$

siendo U la amplitud del desplazamiento correspondiente a la frecuencia ω . Con ello la ecuación (1) se expresa en la forma

$$(G + i\omega\eta) \frac{d^2U}{dx^2} - \rho\omega^2U \quad (3)$$

La fracción del amortiguamiento crítico ν se relaciona con la viscosidad η mediante la ecuación⁽⁵⁾

$$\omega\eta = 2G\nu \quad (4)$$

Llamando

$$G^* = G + i\omega\eta = G(1 + 2i\nu) \quad (5)$$

y también

$$k^2 = \frac{\rho\omega^2}{G^*} \quad (6)$$

la ecuación del movimiento queda

$$\frac{d^2U}{dx^2} + k^2U = 0 \quad (7)$$

siendo (7) una ecuación diferencial ordinaria cuya solución se escribe de la forma

$$U = D \exp(ikx) + B \exp(-ikx) \quad (8)$$

D y B son constantes de integración para cada una de las capas.

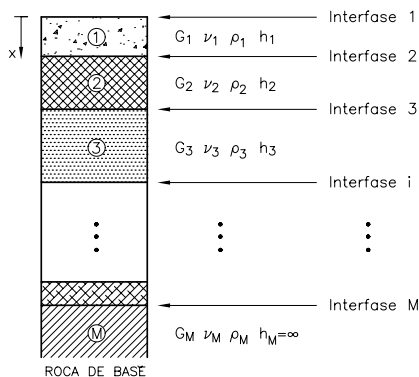


Figura 2: Caracterización en vertical de los distintos estratos de suelo y de la roca de base.

2.2 Planteamiento de la solución

Considérense una serie de estratos de suelo tales como los representados en la figura 2. Cada uno de ellos tiene unas características mecánicas G_i , ν_i , ρ_i así como un espesor h_i . El espesor de la roca de base h_N se supone de valor infinito. Entre unas capas de terreno y otras existen M superficies de separación en las cuales existe una discontinuidad en los valores de las propiedades así como de las constantes D y B de la expresión (8). Para $x \geq x_M$ la expresión de U , de acuerdo con (8), es

$$U = D_R \exp(ikx) + B_R \exp(-ikx) \quad (9)$$

siendo D_R y B_R los valores de las constantes D y B para la roca de base. Asimismo, el término $D_R \exp(ikx)$ representa la onda incidente, mientras que $B_R \exp(-ikx)$ representa la reflejada. Es decir, D_R no depende de las capas de suelo por encima de la capa M sino únicamente del propio sismo. Puede decirse, por tanto, que se caracteriza el sismo de forma intrínseca por el parámetro D_R , que constituye de esta forma una de las incógnitas del problema.

a) Condiciones en desplazamientos

Para el caso en que se conozcan para cada frecuencia los valores de las amplitudes U_1 de los movimientos en la superficie del terreno

y se quiera determinar sus valores en la roca de base (problema de la deconvolución), los valores U_1 serán conocidos y por tanto condiciones de contorno a imponer.

Si, al contrario, lo que se desea conocer son los valores U_1 en la superficie del terreno partiendo de los datos en la roca de base, la amplitud conocida será la correspondiente a la superficie de separación M , debiéndose determinar el valor U_1 (problema de la convolución).

b) Condiciones en tensiones (derivadas de los desplazamientos)

Puesto que el dominio bajo análisis es la zona comprendida entre $x = 0$ y $x = x_M$ en ambos puntos es preciso introducir condiciones de contorno en tensiones o, lo que es lo mismo, en las derivadas espaciales de los desplazamientos. Para $x = 0$ (superficie del terreno) las tensiones tangenciales son nulas por lo que

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=0} = 0 \tag{10}$$

Por otra parte, para $x \geq x_M$ se tiene

$$U = D_R \exp(ikx) + B_R \exp(-ikx) \tag{11}$$

$$\frac{dU}{dx} = ikD_R \exp(ikx) - ikB_R \exp(-ikx) \tag{12}$$

Multiplicando la primera de estas ecuaciones por ik y sumando, se obtiene

$$\frac{dU}{dx} + ikU = 2ikD_R \exp(ikx) \tag{13}$$

por lo cual

$$\left(\frac{dU}{dx}\right)_{x=x_M} = -ikU_M + 2ikD_R \exp(ikx_M) \tag{14}$$

siendo ésta, por tanto, la condición a imponer en $x = x_M$.

2.3 Solución mediante el método de los elementos finitos

Para resolver numéricamente el problema planteado en el apartado anterior se divide cada una de las capas del suelo en m_i elementos de

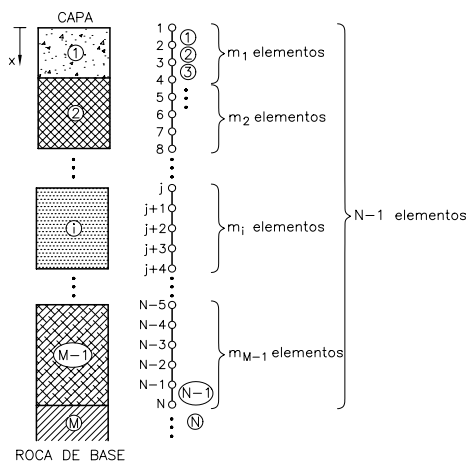


Figura 3: Descomposición de las capas de suelo en N elementos finitos.

dos nodos cada uno, con un total para todas las capas de N nodos (figura 3). Los nodos se numeran de forma correlativa, siendo el nodo 1 el correspondiente a la superficie libre y el nodo N el situado en la superficie de contacto entre la roca de base (capa M) y el estrato anterior (capa $M - 1$). Se tendrán en total $N - 1$ elementos lineales de dos nodos.

Para resolver la ecuación (7) mediante el método de los elementos finitos se aplica el método de Galerkin de los residuos ponderados

$$\int_0^L W_i \left(\frac{d^2 U}{dx^2} + k^2 U \right) dx = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (15)$$

siendo W_i la función de peso correspondiente al nodo i y la longitud L la altura total de suelo considerada, es decir, $L = x_M - x_1$. Realizando la discretización

$$U = \sum_{j=1}^N N r_j U_j \quad (16)$$

y una integración por partes en la ecuación (14) se obtiene

$$\sum_{j=1}^N \left[\int_0^L \left(\frac{dr_i}{dx} \frac{dr_j}{dx} - r_i k^2 r_j \right) dx \right] U_j + \left[r_i \frac{dU}{dx} \right]_0^L = 0 \quad i = 1, \dots, N \quad (17)$$

El valor encerrado en el segundo corchete de la ecuación anterior puede ser no nulo únicamente para las ecuaciones correspondientes a $i = 1$ e $i = N$ ya que para las restantes ecuaciones r_i toma el valor cero en los límites de integración. Para $i = 1$ se tiene que $r_1(0) = 1$ y $r_1(L) = 0$ por lo que, teniendo también presente (10)

$$\begin{aligned} \left[r_1 \frac{dU}{dx} \right]_0^L &= r_1(L) \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=L} - r_1(0) \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=0} \\ &= - \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=0} = 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Para $i = N$ en la ecuación (16), $r_N(0) = 0$ y $r_N(L) = 1$ por lo que teniendo presente (13)

$$\begin{aligned} \left[r_N \frac{dU}{dx} \right]_0^L &= r_N(L) \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=L} - r_N(0) \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=0} \\ \left(\frac{dU}{dx} \right)_{x=L} &= -ik_N U_N + 2ik_N D_N \exp(ik_N L) \end{aligned} \quad (19)$$

Por lo tanto, la ecuación (16) queda

$$\begin{aligned} - \sum_{j=1}^N \left[\int_0^L \left(\frac{dr_i}{dx} \frac{dr_j}{dx} - r_i k^2 r_j \right) dx \right] U_j \\ + \delta_{iN} [-ik_N U_N + 2ik_N D_N \exp(ik_N L)] = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

con lo que se obtiene un sistema de ecuaciones lineales de la forma

$$\mathbf{AU} = \mathbf{F} \quad (21)$$

donde \mathbf{A} es una matriz tridiagonal simétrica cuyos elementos no nulos valen

$$a_{ii} = \frac{1}{h_{i-1}} + \frac{1}{h_i} - \left(k_{i-1} \frac{2h_{i-1}}{3} + k_i \frac{2h_i}{3} \right) \quad (22)$$

$$a_{i,i+1} = a_{i+1,i} = -\frac{1}{h_i} - k_i \frac{2h_i}{6} \quad (23)$$

siendo h_i el espesor del elemento i . Por lo que hace referencia al vector \mathbf{F} todos sus términos son nulos a excepción de F_N cuyo valor es

$$F_N = -ik_N U_N + 2ik_N D_N \exp(ik_N L) \quad (24)$$

Cuando se realiza la deconvolución dinámica es conocido el movimiento sísmico en la superficie del terreno, por lo que en el sistema de ecuaciones planteado (20) es conocido el valor de U_1 , siendo incógnitas U_2, U_3, \dots, U_N y D_N . Nótese asimismo que dicho sistema de ecuaciones es de muy fácil resolución al ser

$$a_{11}U_1 + a_{12}U_2 = 0 \quad (25)$$

es decir

$$U_2 = -\frac{a_{11}}{a_{12}}U_1 \quad (26)$$

Análogamente

$$a_{21}U_1 + a_{22}U_2 + a_{23}U_3 = 0 \quad (27)$$

o sea

$$U_3 = -\frac{a_{21}}{a_{23}}U_1 - \frac{a_{22}}{a_{23}}U_2 \quad (28)$$

y así sucesivamente. En general

$$a_{i,i-1}U_{i-1} + a_{i,i}U_i + a_{i,i+1}U_{i+1} = 0 \quad (29)$$

$$U_{i+1} = -\frac{a_{i,i-1}U_{i-1} + a_{i,i}U_i}{a_{i,i+1}} \quad (30)$$

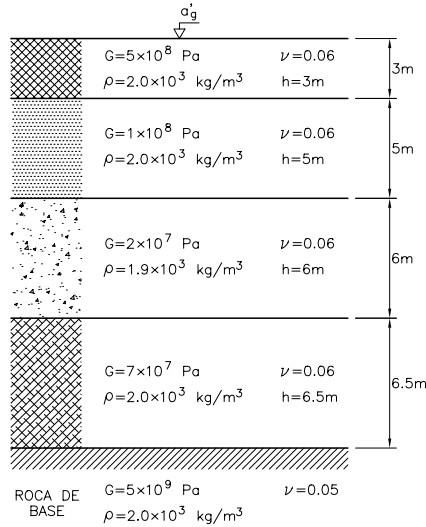


Figura 4: Modelo de suelo considerado en el ejemplo 1.

De la última ecuación se obtiene el valor de D_N :

$$D_N = \frac{a_{N,N-1}U_{N-1} + (a_{N,N} + ik_N)U_N}{2ik_N \exp(ik_N L)} \quad (31)$$

Cuando se desee realizar la convolución dinámica será conocido el movimiento en la roca de base U_N o bien el valor de D_N , con lo cual también puede resolverse fácilmente el sistema de ecuaciones (20) para determinar el valor del resto de las incógnitas y fundamentalmente el valor de la amplitud del desplazamiento en la superficie D_1 .

Ejemplo 1. Supóngase un suelo estratificado con cuatro estratos más la roca de base (figura 4). Se supone conocida la amplitud del movimiento en la superficie libre del terreno para las frecuencias de la siguiente tabla.

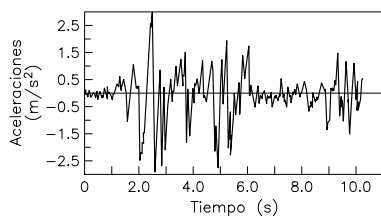


Figura 5: Acelerograma del ejemplo 1.

ω	U
10 rad/s	0.01 m
15 rad/s	0.009 m
20 rad/s	0.0075 m
25 rad/s	0.004 m
30 rad/s	0.003 m
35 rad/s	0.002 m

con lo cual la primera frecuencia vale 10 rad/s y el incremento en el valor de la frecuencia es de 5 rad/s. El número total de frecuencias a considerar en el análisis es de 6. El número de elementos a utilizar en cada estrato es el siguiente:

Estrato número	Número de elementos
1	6
2	10
3	10
4	12
5 (roca de base)	1

En la superficie del suelo estratificado se dispone de un registro sísmico en superficie definido por el acelerograma de la figura 5. En dicho registro la duración total es de 22 segundos siendo el incremento de tiempo entre dos valores sucesivos de la aceleración de 0.02 segundos. Obtener el registro de aceleraciones en la roca de base.

Solución El número total de puntos del registro es de 512, por lo

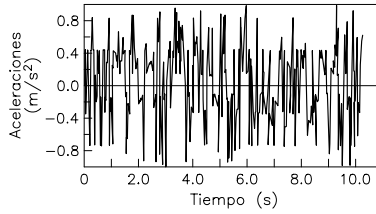


Figura 6: Acelerograma en la roca de base del ejemplo 1

cual, dado que $2^M = 512$, resulta un valor $M = 9$. En el caso más general en que el número de puntos no fuera una potencia entera de 2, se añaden al registro el número suficiente de ceros para que se verifique tal propiedad. Utilizando procedimiento descrito se obtiene el registro de aceleraciones en la roca de base representado en la figura 6.

Ejemplo 2. *En la superficie de un suelo estratificado se conoce el acelerograma de una cierta acción sísmica. En dicho suelo se realiza una excavación eliminando algunas de las capas superiores (véase la figura 7). Utilizando el procedimiento descrito obtener el acelerograma en la nueva superficie del terreno.*

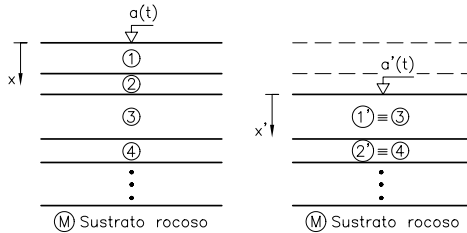


Figura 7: Modelo unidimensional del suelo antes y después de realizar la excavación

Solución El sismo se caracteriza de forma intrínseca por el valor D_N en la roca de base en función de la frecuencia, por lo que dicho parámetro debe de ser el mismo en el suelo original y en el excavado. Únicamente es preciso realizar una corrección debido al cambio de

ejes

$$D_N \exp(ik_N x_N) = D'_N \exp(ik_N x'_N)$$

por lo que

$$D'_N = D_N \exp [ik_N (x_N - x'_N)]$$

Por consiguiente, el proceso a seguir será el siguiente:

Deconvolución para que, partiendo del registro de aceleraciones $a(t)$ en la superficie del suelo original, se determine D_N . Obtenido D'_N a partir de D_N realizar la convolución dinámica en el suelo excavado para obtener el nuevo acelerograma en la superficie $a'(t)$.

Asimismo, y al igual que en el ejemplo **1**, será preciso utilizar la transformada rápida de Fourier.

Es muy importante llamar la atención sobre otro problema que puede ser resuelto mediante el mismo procedimiento. Dicho problema hace referencia a las condiciones locales del suelo en el punto en donde se registra un terremoto. Supóngase una determinada zona de terreno en la que, por su extensión, pueda considerarse que todos los puntos de la misma están sometidos a la acción del mismo terremoto. Si en cada punto los estratos de suelo no cambian, la aceleración registrada en la superficie será también la misma. Sin embargo, el caso habitual es que dichas condiciones locales varíen, por lo que siendo la roca de base la misma, el suelo situado por encima de ella es distinto de un punto a otro. El problema se plantea entonces en los siguientes términos: Conocido un acelerograma en superficie, determinar el acelerograma en un punto cercano en donde las únicas variaciones habidas hacen referencia a las condiciones locales del suelo.

3 INTERACCIÓN SUELO-ESTRUCTURA

3.1 Modelos dinámicos

El estudio del problema de interacción dinámica suelo-estructura constituye uno de los mayores retos del cálculo sísmico. Ello es debido a la gran complejidad que representa la introducción del suelo en el modelo a analizar. Dicha complejidad es debida fundamentalmente a tres factores:

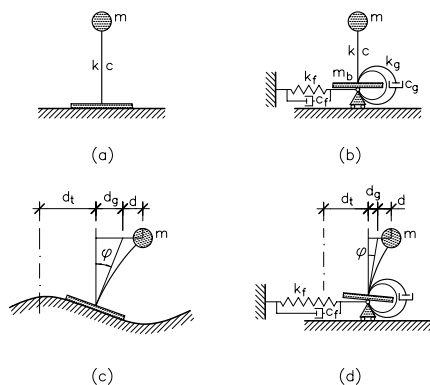


Figura 8: Modelos simplificados para el problema de interacción suelo-estructura. (a) modelo de un grado de libertad con cimentación rígida situada en un semiespacio elástico; (b) deformada del modelo (a); (c) modelo con tres grados de libertad: dos traslaciones y una rotación; (d) deformada del modelo (c).

- En primer lugar está la dificultad que representa el conocer de forma exacta la excitación sísmica en las zonas de suelo consideradas de interés.
- En segundo lugar está la propia modelización de las características tenso-deformacionales del terreno. Si en el cálculo estático dicha modelización ya tiene un alto grado de complejidad, en el cálculo dinámico las dificultades se acrecientan.
- Finalmente, aparecen problemas ligados a la zona de suelo a considerar en el análisis, es decir, problemas debidos a la introducción de contornos artificiales.

Los primeros estudios realizados acerca de la interacción suelo-estructura estaban basados en modelos dinámicos simplificados como, por ejemplo, el indicado en la figura 8.

El modelo de la figura 8(a), por ejemplo, consiste en un sistema con un solo grado de libertad situado sobre una placa rígida, representando la cimentación de la estructura⁽⁸⁾. La deformada de

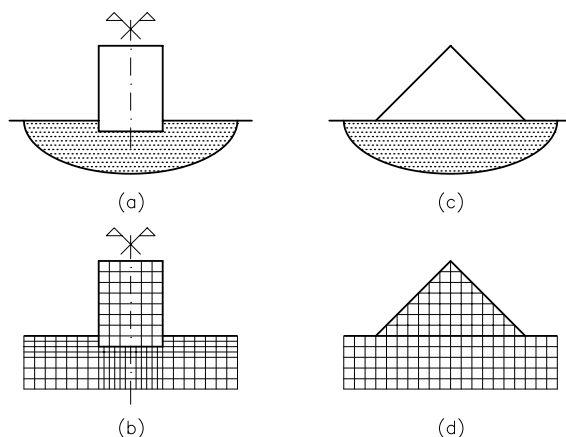


Figura 9: Modelos de elementos finitos para problemas de interacción suelo-estructura. (a) estructura simétrica; (b) modelo de elementos finitos de la estructura; (c) interacción presa-terreno; (d) modelo de elementos finitos correspondiente.

este modelo [figura 8(b)] puede obtenerse modelizando la cimentación rígida mediante el sistema dinámico de la figura 8(c), en el cual se considera para la placa rígida dos grados de libertad: uno de traslación y otro de rotación⁽⁹⁾. Puede verse que la deformada de este último modelo, dibujada en la figura 8(d), coincide con la del modelo inicial representado en la figura 8(b).

El método de los elementos finitos proporciona modelos dinámicos más rigurosos para la resolución de problemas de interacción suelo-estructura como, por ejemplo, los de la figura 9. Lógicamente, a medida de que se complica el modelo aparecen dificultades numéricas nuevas.

Para realizar el estudio de la interacción dinámica suelo-estructura en el campo de la elasticidad lineal existen básicamente dos formas de modelizar el suelo:

a) Mediante un semiespacio elástico en el caso tridimensional o un semiplano elástico cuando el problema a tratar es bidimensional. En este caso el contacto entre el suelo y la estructura se modeliza

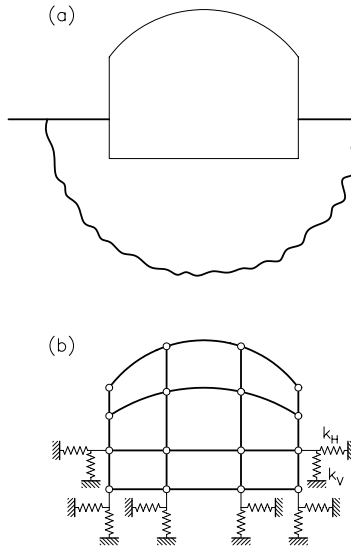


Figura 10: Modelización del contacto suelo-estructura cuando el terreno se trata como un semiespacio elástico. (a) Estructura en semiespacio elástico. (b) Modelización del contacto suelo-estructura.

mediante la inclusión de una serie de apoyos elásticos en dirección de cada eje, así como de los giros, cuya rigidez (función de la frecuencia) viene dada por la solución del problema del semiespacio elástico (véase la figura 10).

b) Considerando solamente una porción del mismo, tal como puede verse en la figura 10. Aparecen en este caso unos contornos artificiales que requieren un cuidadoso análisis a fin de asegurar buenos resultados.

3.2 Ecuaciones del movimiento: generalidades

Considérense los modelos lineales de la figura 11, sometidos a un movimiento sísmico del terreno. Dicha excitación se supone que actúa en la zona de contacto entre el suelo y la estructura. El sistema de ecuaciones del movimiento del modelo suelo-estructura es⁽⁷⁾

$$M\ddot{\mathbf{D}} + C\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -M\mathbf{J}a(t) \quad (30)$$

en donde la matriz de masa M , la matriz de amortiguamiento C , la matriz de rigidez K y el vector de desplazamientos D corresponden al sistema global suelo-estructura. J es un vector que tiene tantos elementos como D , los cuales toman los valores apropiados 0 ó 1.

La solución del sistema de ecuaciones (30) puede obtenerse mediante cualquier procedimiento numérico. La selección entre los distintos métodos vendrá dada según sea la forma en que se defina la acción sísmica. Un análisis en el dominio del tiempo, o en el dominio de la frecuencia, requiere una definición explícita de un registro de aceleraciones para hallar la historia en el tiempo de la respuesta estructural. Si la acción sísmica se define mediante espectros de respuesta, el desacoplamiento modal proporciona únicamente la respuesta sísmica máxima.

Aparece, sin embargo, un problema adicional al intentar resolver mediante técnicas de desacoplamiento modal la ecuación dinámica acoplada (30). En efecto, al ser el amortiguamiento de la estructura distinto, en general, al del terreno, la matriz C no es proporcional por lo que, salvo que se adopten hipótesis simplificadoras, o se utilicen técnicas especiales, no será posible realizar el desacoplamiento modal.

En el caso de que se utilice una técnica de análisis por subestructuras, las ecuaciones del movimiento deberán escribirse para cada una de ellas. El principal objetivo del análisis es el cálculo de la respuesta de la estructura. Por ello, la condición de compatibilidad en el contacto suelo-estructura se introduce de manera que se obtengan las ecuaciones del movimiento para la estructura en presencia del fenómeno de interacción. Es conveniente realizar este análisis en el dominio de la frecuencia, lo cual implica el uso de la *Transformada Rápida de Fourier (FFT)*.

3.3 Ecuaciones del movimiento: suelo modelizado como un subespacio elástico

a) Ecuaciones del movimiento para el suelo

Considérese el semiespacio elástico de la figura 12, en cuya superficie existe una placa infinitamente rígida de radio a . Sobre dicha placa

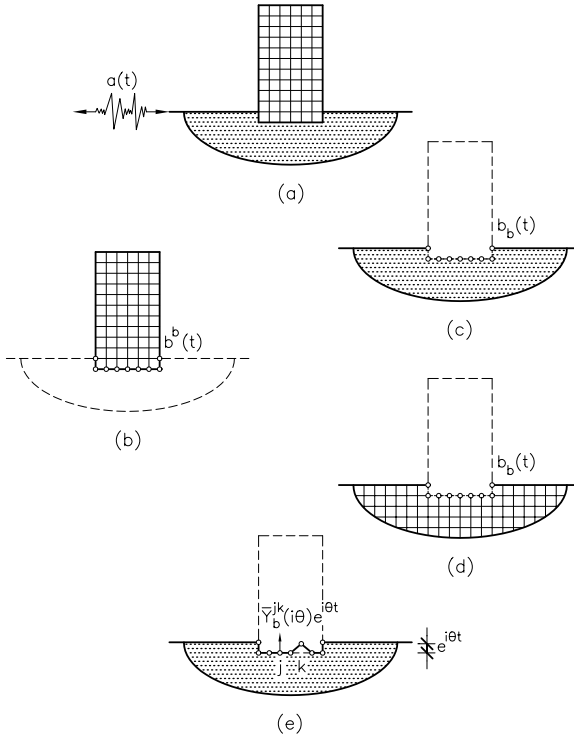


Figura 11: Técnica de subestructuras para resolver problemas de interacción suelo-estructura. (a) Sistema suelo-estructura; (b) primera subestructura: la estructura; (c) segunda subestructura: el suelo, tratado como semiespacio; (d) el suelo tratado mediante una malla de elementos finitos o de diferencias finitas; (e) definición de la rigidez dinámica de interacción.

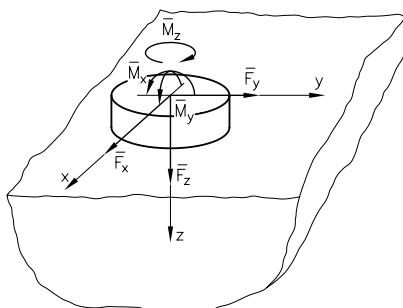


Figura 12: Placa circular rígida apoyada en un semiespacio elástico

actúan unas fuerzas $F_x = \bar{F}_x e^{i\theta t}$, $F_y = \bar{F}_y e^{i\theta t}$ y $F_z = \bar{F}_z e^{i\theta t}$, así como unos momentos $M_x = \bar{M}_x e^{i\theta t}$, $M_y = \bar{M}_y e^{i\theta t}$ y $M_z = \bar{M}_z e^{i\theta t}$. Dichas fuerzas y momentos producirán unos desplazamientos y giros de valor $u_x = \bar{u}_x e^{i\theta t}$, $u_y = \bar{u}_y e^{i\theta t}$, $u_z = \bar{u}_z e^{i\theta t}$, $\varphi_x = \bar{\varphi}_x e^{i\theta t}$, $\varphi_y = \bar{\varphi}_y e^{i\theta t}$, $\varphi_z = \bar{\varphi}_z e^{i\theta t}$. Para obtener la relación entre las fuerzas y los movimientos es preciso resolver para el semiespacio elástico la ecuación de Navier escrita en el campo de la frecuencia^(10,11)

$$(C_P^2 - C_S^2)\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{u}}) + C_S^2 \nabla^2 \bar{\mathbf{u}} + \omega^2 \bar{\mathbf{u}} = 0 \quad (32)$$

en donde $C_p = (E/\rho)1/2$ y $C_s = (G/\rho)1/2$ son, respectivamente, las velocidades de transmisión de las ondas de compresión y cortante.

La solución general de la ecuación (31) puede escribirse⁽¹⁰⁾

$$\bar{u}_i(x, y, 0) = \sum_{j=1}^3 \int_S G_{ij}(x - x', y - y', 0; k, \mu) \sigma_{j3}(x, y, 0) dx' dy' \quad (33)$$

En la ecuación anterior, G_{ij} hace referencia al desplazamiento en la dirección i en el plano $z = 0$ generado por una fuerza armónica unidad actuando en $(0,0,0)$ y cuyo sentido es el del eje j negativo. Las funciones G_{ij} dependen de $k = \omega/C_S$ y del coeficiente de Poisson μ . La expresión explícita de las funciones G_{ij} puede verse en la referencia⁽¹⁰⁾. A partir de la resolución de la ecuación (32) puede obtenerse la relación de flexibilidad

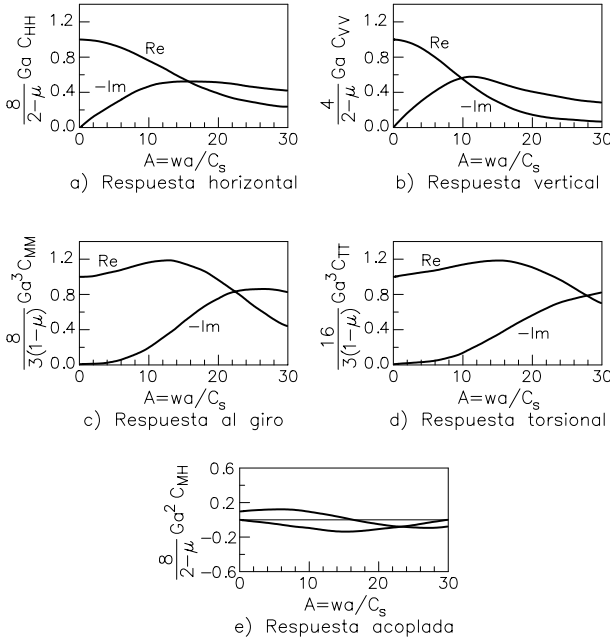


Figura 13: Valor de las funciones (a) C_{HH} , (b) C_{VV} , (c) C_{MM} , (d) C_{TT} y (e) C_{MH} .

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_y \\ \bar{u}_z \\ \bar{\varphi}_x \\ \bar{\varphi}_y \\ \bar{\varphi}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{HH} & 0 & 0 & 0 & C_{MH} & 0 \\ 0 & C_{HH} & 0 & C_{MH} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_{VV} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_{MH} & 0 & C_{MM} & 0 & 0 \\ C_{MH} & 0 & 0 & 0 & C_{MM} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{TT} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{F}_z \\ \bar{M}_x \\ \bar{M}_y \\ \bar{M}_z \end{bmatrix} \tag{34}$$

Las funciones complejas C_{HH} , C_{VV} , C_{MM} , C_{TT} y C_{MH} son coeficientes de flexibilidad y dependientes de la frecuencia ω . Su valor en función del parámetro adimensional $A = \omega a / C_s$ puede verse representado en la figura 13.

Para el caso bidimensional descrito en la figura 14, se tiene

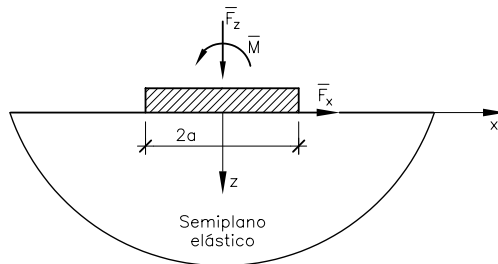


Figura 14: Placa rígida apoyada en un semiplano elástico.

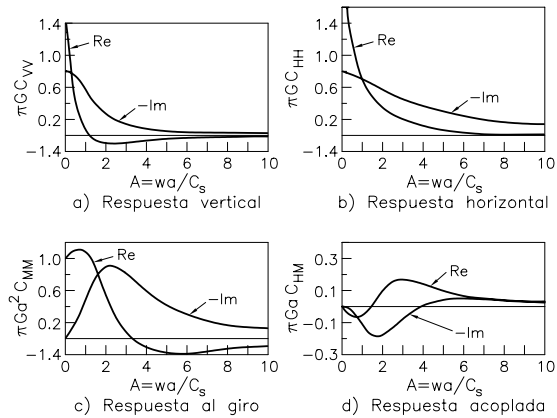


Figura 15: Funciones complejas de flexibilidad para el semiplano elástico: (a) C_{VV} , (b) C_{HH} , (c) C_{MM} , (d) C_{HM} .

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_x \\ \bar{u}_z \\ \bar{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{HH} & 0 & C_{HM} \\ 0 & C_{VV} & 0 \\ C_{HM} & 0 & C_{MM} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{F}_x \\ \bar{F}_y \\ \bar{M} \end{bmatrix} \quad (35)$$

Las funciones complejas de flexibilidad C_{HH} , C_{VV} , C_{MM} y C_{HM} pueden verse representadas en la figura 15. En las referencias (11-15) pueden estudiarse métodos alternativos de obtención de dichas funciones.

Las expresiones (33) y (34) pueden escribirse en forma compacta

$$\bar{D}_b = \bar{C}(\theta) \bar{f}_b \quad (36)$$

e invirtiendo la relación anterior

$$\bar{f}_b = \bar{Y}(\theta) \bar{D}_b \quad (37)$$

La matriz $\bar{Y}(\theta)$ de la expresión (36) proporciona la rigidez del sistema de muelles que se han colocado en cada nodo de la estructura en contacto con el suelo.

b) Ecuaciones acopladas del movimiento

Las ecuaciones que describen el comportamiento dinámico de la estructura analizada se escriben en la forma⁽¹⁶⁾

$$\mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{D}}_t + \mathbf{C}_t \dot{\mathbf{D}}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{D}_t = -\mathbf{M}_t \mathbf{J} a(t) \quad (38)$$

El subíndice t hace referencia a todos los grados de libertad pertenecientes a la estructura, incluyendo los del contacto con el suelo. Tal como se ha puesto de relieve anteriormente, el sistema de ecuaciones diferenciales (37) se resuelve partiendo de su transformada en el campo de la frecuencia

$$(-\theta^2 \mathbf{M}_t + i\theta \mathbf{C}_t + \mathbf{K}_t) \bar{\mathbf{D}}_t(\theta) = -\mathbf{M}_t \mathbf{J} \bar{a}(\theta) \quad (39)$$

En este sistema de ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos, θ es la frecuencia de la excitación, mientras que $\bar{\mathbf{D}}_t(\theta)$ y $\bar{a}(\theta)$ son, respectivamente, los vectores de las transformadas de Fourier de $\mathbf{D}_t(t)$ y $a(t)$.

El vector de los desplazamientos nodales se particiona como sigue:

$$\mathbf{D}_t = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}^b \end{array} \right\} \quad (40)$$

en donde \mathbf{D}_b es el vector de los desplazamientos correspondientes al contacto suelo-estructura y los elementos de \mathbf{D} son los desplazamientos de los restantes nodos de la estructura. La ecuación (38) se particiona de acuerdo con (39) resultando

$$\begin{aligned} -\theta^2 \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b \end{bmatrix} + i\theta \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{C}^b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}^b \end{bmatrix} \\ \times \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{D}} \\ \bar{\mathbf{D}}^b \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{a}}}(\theta) \end{aligned} \quad (41)$$

La ecuación (40) puede escribirse también

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{G}}' \\ \bar{\mathbf{G}}'^T & \bar{\mathbf{G}}^b \end{bmatrix} \left\{ \begin{array}{c} \bar{\mathbf{D}} \\ \bar{\mathbf{D}}^b \end{array} \right\} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b \end{bmatrix} \mathbf{J}_{\bar{\mathbf{a}}}(\theta) \quad (42)$$

en donde se han utilizado las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{G}} &= -\theta^2 \mathbf{M} + i\theta \mathbf{C} + \mathbf{K} \\ \bar{\mathbf{G}}' &= \mathbf{K}' \\ \bar{\mathbf{G}}^b &= -\theta^2 \mathbf{M}^b + i\theta \mathbf{C}^b + \mathbf{K}^b \end{aligned} \quad (43)$$

A la ecuación (41) falta introducirle las rigideces de los muelles representativos del suelo. Para ello, al ser

$$\bar{\mathbf{D}}^b(\theta) = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_b^{(1)} \\ \bar{\mathbf{D}}_b^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{D}}_b^{(r)} \end{bmatrix} \quad (44)$$

siendo r el número de nodos de la estructura en contacto con el suelo, se tendrá que

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{f}}_b^{(1)} \\ \bar{\mathbf{f}}_b^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{f}}_b^{(r)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{y}}^{(1)}(\theta) & & \mathbf{0} \\ & \bar{\mathbf{y}}^{(2)}(\theta) & \\ & & \ddots \\ \mathbf{0} & & \bar{\mathbf{y}}^{(r)}(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{D}}_b^{(1)} \\ \bar{\mathbf{D}}_b^{(2)} \\ \vdots \\ \bar{\mathbf{D}}_b^{(r)} \end{bmatrix} \quad (45)$$

o escrito en forma compacta

$$\bar{\mathbf{F}}_b = \bar{\mathbf{Y}}(\theta)\bar{\mathbf{D}}^b \quad (46)$$

Por tanto, la ecuación (41) se modifica en el sentido de sustituir la matriz $\bar{\mathbf{G}}^b$ por la matriz $\bar{\mathbf{G}}^b + \bar{\mathbf{Y}}(\theta)$. Con ello, el sistema de ecuaciones para el problema acoplado queda

$$\begin{bmatrix} \bar{\mathbf{G}} & \bar{\mathbf{G}}' \\ \bar{\mathbf{G}}'^T & \bar{\mathbf{G}}^b + \bar{\mathbf{Y}}(\theta) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \bar{\mathbf{D}} \\ \bar{\mathbf{D}}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}^b \end{bmatrix} \mathbf{J}\bar{\mathbf{a}}(\theta)$$

Este sistema de ecuaciones algebraicas con coeficientes complejos se resuelve para todos los valores de la frecuencia de excitación θ para las cuales la matriz $\bar{\mathbf{Y}}_b(\theta)$ ha sido previamente calculada. Una vez obtenidos los vectores $\bar{\mathbf{D}}_b(\theta)$, la transformada inversa de Fourier proporciona la respuesta en el dominio del tiempo de la estructura en interacción con el suelo.

3.4 Ecuaciones del movimiento: modelización del suelo mediante elementos finitos

a) Modelización del suelo

Una alternativa al tratamiento del suelo como un semiespacio elástico consiste en modelar una parte de él mediante la metodología propia del método de los elementos finitos. Aparecen, sin embargo, dificultades numéricas nuevas. La más importante de ellas consiste en la definición de los contornos de la zona de suelo a incluir en el análisis, así como en el gran número de elementos necesarios para discretizar el sistema completo suelo-estructura⁽¹⁷⁾. El primer problema incide directamente, como es obvio, en el segundo: si en el análisis se incluye una gran zona de suelo, el número de elementos finitos necesarios para describir el comportamiento del sistema completo suelo-estructura

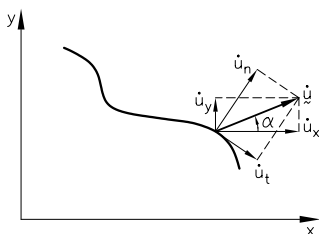


Figura 16: Contorno artificial.

se incrementa. Este problema se resuelve limitando las dimensiones de la zona de suelo mediante la utilización de contornos artificiales. Sin embargo, la reflexión en estos contornos de las ondas sísmicas que provienen de la estructura produce vibraciones adicionales falsas en la zona del suelo, lo cual afecta a la precisión de la respuesta sísmica calculada. Este problema puede evitarse imponiendo condiciones de contorno especiales en los límites de la zona del suelo considerada suponiendo, por ejemplo, que estos contornos están constituido por amortiguadores que simulan la radiación de las ondas sísmicas. Otra posibilidad es el uso de elementos infinitos, conectados a los elementos finitos con los cuales se discretiza el suelo en las proximidades de la estructura⁽¹⁸⁾.

En las ecuaciones discretizadas para el suelo únicamente es preciso introducir los amortiguadores necesarios para impedir la reflexión de ondas en los contornos artificialmente creados. Para ello, supóngase un contorno artificial y sea $\dot{\mathbf{u}}$ la velocidad de vibración de un punto cualquiera de dicho contorno (véase la figura 16). Dicha velocidad puede descomponerse según la normal y la tangente al contorno \dot{u}_n y \dot{u}_t , respectivamente. La condición de Lysmer⁽¹⁹⁾ establece que

$$\sigma_n = k_1 \rho C_p \dot{u}_n \quad (47a)$$

$$\tau = k_2 \rho C_S \dot{u}_t \quad (47b)$$

siendo σ_n y τ las tensiones normal y tangencial en el contorno, ρ la densidad del medio y

$$\begin{aligned}
 C_P &= \sqrt{E/\rho} \\
 C_S &= \sqrt{G/\rho} \\
 k_1 &= \frac{8}{15\pi} (5 + 2s - 2s^2) \\
 k_2 &= \frac{8}{15\pi} (3 + 2s) \\
 s^2 &= \frac{1 - 2\mu}{2(1 - \mu)}
 \end{aligned}$$

Las tensiones σ_n y τ pueden también expresarse en función de las velocidades \dot{u}_x y \dot{u}_y quedando

$$\begin{bmatrix} \sigma_n \\ \tau \end{bmatrix} = \rho \begin{bmatrix} k_1 & 0 \\ 0 & k_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha \\ -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{u}_x \\ \dot{u}_y \end{bmatrix} \quad (48)$$

o bien en forma compacta

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{AT} \dot{\mathbf{u}} \quad (49)$$

Realizando la aproximación $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{r} \dot{\mathbf{D}}$ siendo \mathbf{r} las funciones de interpolación, la expresión (49) queda

$$\boldsymbol{\sigma} = \rho \mathbf{AT} \mathbf{r} \dot{\mathbf{D}} \quad (50)$$

Estas tensiones $\boldsymbol{\sigma}$ en el contorno producen un trabajo virtual de valor

$$W_d = \int_S (\delta \mathbf{u}_V)^T \boldsymbol{\sigma} dS \quad (51)$$

siendo $\delta \mathbf{u}_V$ el desplazamiento virtual de un punto de la superficie S en las direcciones normal y tangente. Escribiendo

$$\delta \mathbf{u}_V = \mathbf{T} \delta \mathbf{u} = \mathbf{T} \mathbf{r} \delta \mathbf{D} \quad (52)$$

la expresión (51) se escribe en la forma

$$W_d = \delta \mathbf{D}^T \left[\int_S (\rho \mathbf{r}^T \mathbf{T}^T \mathbf{AT} \mathbf{r} dS) \right] \dot{\mathbf{D}} \quad (53)$$

La ecuación (53) indica que existe una matriz de amortiguamiento \mathbf{C}_d asociada al contorno artificial, cuyo valor es

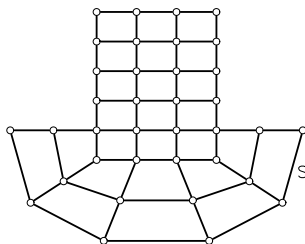


Figura 17: Discretización de una estructura con la porción de suelo considerada en el análisis.

$$\mathbf{C}_d = \int_S \rho \mathbf{r}^T \mathbf{T}^T \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{r} dS \quad (54)$$

Esta matriz de amortiguamiento se sumará a la propia del suelo en las correspondientes ecuaciones del movimiento. En las referencias ⁽²⁰⁾ y ⁽²¹⁾ pueden verse otras expresiones para los contornos absorbentes así como una comparación entre ellos.

b) Ecuaciones acopladas del movimiento

Supóngase la estructura de la figura 17 discretizada en elementos finitos, en la que también se ha discretizado una parte del suelo mediante la introducción de un contorno artificial S . Prescindiendo de las condiciones de contorno a imponer en S , las ecuaciones del equilibrio dinámico se expresan

$$\mathbf{M}_t \ddot{\mathbf{D}}_t + \mathbf{C}_t \dot{\mathbf{D}}_t + \mathbf{K}_t \mathbf{D}_t = -\mathbf{M}_t \mathbf{J} a(t) \quad (55)$$

En la ecuación (55) se particionan los vectores \mathbf{D}_t , $\dot{\mathbf{D}}_t$ y $\ddot{\mathbf{D}}_t$ de la forma

$$\mathbf{D}_t = \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}_S \end{bmatrix} \quad (56)$$

y lo mismo para las velocidades y aceleraciones. En la expresión (56) el subíndice s hace referencia a los nodos situados en el contorno S . Si por facilidad de exposición se supone que \mathbf{M}_t es diagonal, la ecuación (55) se escribe

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{D}}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{C}'^T & \mathbf{C}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{D}}_S \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}_S \end{bmatrix} = -\mathbf{M}_t \mathbf{J} a(t) \end{aligned} \quad (57)$$

Si a la ecuación (57) se le suma la ecuación de contorno deducida en el apartado anterior para los contornos artificiales, se obtiene

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{D}}_S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{C}' \\ \mathbf{C}'^T & \mathbf{C}_S + \mathbf{C}_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{D}}_S \end{bmatrix} \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{K}' \\ \mathbf{K}'^T & \mathbf{K}_S \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{D}_S \end{bmatrix} = -\mathbf{M}_t \mathbf{J} a(t) \end{aligned} \quad (58)$$

siendo esta última la ecuación de interacción sísmica suelo-estructura para el caso en que se consideren contornos artificiales en el terreno. Es importante notar que la ecuación (58) no puede resolverse mediante la superposición modal. Ello es debido a que el amortiguamiento es no proporcional. Esto se debe, en primer lugar, al hecho de que el amortiguamiento del suelo y de la estructura son en general distintos y, en segundo lugar, al hecho de haberse introducido la matriz \mathbf{C}_d en las ecuaciones.

4 INTERACCIÓN FLUIDO-ESTRUCTURA

4.1 Modelos dinámicos

Una formulación general del problema de interacción fluido-estructura debe permitir el análisis de estructuras de cualquier forma geométrica, unidas a una cimentación perfectamente rígida y en las que al menos uno de sus contornos está en contacto con un medio fluido. El sistema estructura-fluido así definido está sometido a una excitación sísmica que actúa en la cimentación rígida. Algunos ejemplos de estructuras interaccionando con un medio fluido pueden verse en la figura 18. De acuerdo con esta figura, los problemas de interacción estructura-fluido pueden clasificarse de la siguiente forma:

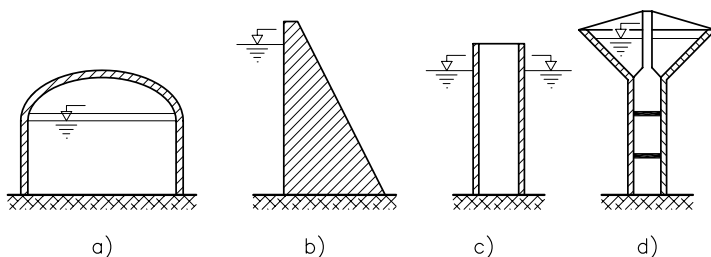


Figura 18: Interacción estructura-fluido. (a) depósito; (b) presa; (c) torre con fluido exterior; (d) depósito de agua elevado.

- Todo el fluido está situado dentro de la estructura, tal como en el caso de depósitos [ver las figuras 18(a) y 18(d)].
- La estructura está en contacto solamente con uno de los contornos del medio fluido, tal como es el caso de presas [figura 18(b)].
- La estructura está total o parcialmente sumergida en el fluido, tal como es el caso de torres de toma [figura 18(c)] o plataformas marinas.

El problema de interacción estructura-fluido puede resolverse utilizando modelos dinámicos simplificados con dos o más grados de libertad. Tales modelos, que incluyen masas adicionales, consisten en muelles, amortiguadores y masas concentradas, simulando de forma aproximada el efecto de las vibraciones del fluido. Dichas masas modifican las frecuencias naturales del modelo estructural. No es posible una formulación general de estos modelos simplificados debido a que los valores de dichas masas adicionales dependen del tipo de estructura analizado y especialmente de la forma de la superficie de contacto estructura-fluido. Otra dificultad inherente al uso de tales modelos es la definición numérica de sus características de rigidez y amortiguamiento.

El método de los elementos finitos permite el desarrollo de modelos dinámicos más complejos. Básicamente, en este caso aparecen las mismas dificultades numéricas que en los sistemas de interacción

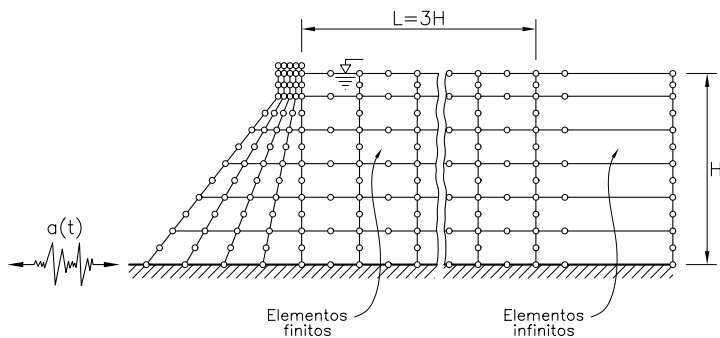


Figura 19: Utilización de elementos finitos e infinitos en la modelización del comportamiento dinámico de sistemas presa de gravedad-embalse.

suelo-estructura. La primera de ellas es la definición de los contornos a incluir en el análisis, de tal forma que no se produzcan reflexiones artificiales en estos contornos de las ondas que, provenientes de la estructura, viajan a través del fluido. Otra dificultad es la reducción del número de elementos necesarios para discretizar el sistema completo estructura-fluido. Una posible solución al primer problema consiste en la utilización de elementos infinitos de fluido, los cuales garantizan la radiación de las ondas en el fluido, tal como puede verse en las referencias^(22–25). Un ejemplo del uso de tales elementos infinitos en un modelo dinámico de presa interaccionando con el agua del embalse puede verse en la figura 19. Una solución al segundo problema es el análisis por subestructuras^(22,23).

Un fenómeno adicional que puede aparecer en los problemas de interacción estructura-fluido es la *cavitación*. Ésta se presenta especialmente en los casos en que grandes masas de fluido interaccionan con la estructura, tal como puede ser el caso de presas. Cuando una estructura está sometida a una fuerte aceleración en la dirección del dominio fluido, en éste pueden aparecer presiones por debajo de la de vapor en la zona de contacto con la estructura, produciendo discontinuidades. Este efecto es seguido por un impacto en el momento en el cual se produce un cambio de dirección del movimiento sísmico^(26,27).

4.2 Formulación de las ecuaciones del movimiento

A continuación van a deducirse las ecuaciones del movimiento del sistema completo estructura-fluido utilizando la metodología propia de los elementos finitos. En primer lugar se estudian las ecuaciones del fluido pasando seguidamente a las del sólido, para finalmente realizar el acoplamiento.

a) Ecuaciones del fluido

En su forma más general las ecuaciones que gobiernan el comportamiento dinámico del fluido vienen dadas por la expresión (véase el anexo)

$$\mathbf{G}\ddot{\Gamma} + \mathbf{R}\dot{\Gamma} + \mathbf{H}\Gamma + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}}^* = 0 \quad (59)$$

en donde $\ddot{\mathbf{D}}^*$ son las aceleraciones totales transmitidas por el sólido al fluido.

En el caso particular de que existan dominios infinitos y pueda aplicarse la formulación semianalítica, las ecuaciones a utilizar son (ver la expresión 104 del anexo)

$$\begin{bmatrix} -\theta^2 \mathbf{G}_{11} + \mathbf{H}_{11} & (-\theta^2 \mathbf{G}_{12} + \mathbf{H}_{12}) \Psi \\ \Psi^T (-\theta^2 \mathbf{G}_{21} + \mathbf{H}_{21}) & \Psi^T (-\theta^2 \mathbf{G}_{22} + \mathbf{H}_{22}) \Psi + \Psi^T \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \gamma \end{bmatrix} = -\mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}}^* \quad (60)$$

b) Ecuaciones del sólido

Las ecuaciones correspondientes al sólido son las ya estudiadas previamente. Conviene, sin embargo, reescribirlas para destacar de forma explícita las presiones que ejerce el fluido sobre la estructura. Si en la expresión de los trabajos virtuales se introducen las fuerzas por unidad de superficie que actúan sobre el sólido⁽¹⁶⁾

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \delta(\boldsymbol{\varepsilon}_i)^T \boldsymbol{\sigma}_i dV_i &+ \sum_{i=1}^N \int_{V_i} \delta(\mathbf{u}_i)^T (\rho \ddot{\mathbf{u}}_i^* + c\dot{\mathbf{u}}_i) dV_i \\ &= \sum_{i=1}^{N'} \int_{V_i} (\delta \mathbf{u}_i)^T \mathbf{f}_i dV_i \end{aligned} \quad (61)$$

donde \mathbf{f}_i son las fuerzas por unidad de superficie que actúan sobre el sólido. Escribiendo los desplazamientos y las deformaciones en función de los desplazamientos nodales

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_i &= \mathbf{r}_i \mathbf{D}_i \\ \boldsymbol{\varepsilon}_i &= \mathbf{b}_i \mathbf{D}_i \end{aligned}$$

la ecuación (61) queda

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t) + \mathbf{F}_S \quad (62)$$

El vector \mathbf{F}_S se ensambla a partir de los vectores elementales

$$\mathbf{f}_{S_i} = \int_{S_i} \mathbf{r}_i^T \mathbf{f} dS_i = \int_{S_i} r_i \mathbf{I}_3 \mathbf{f} dS_i \quad (63)$$

siendo \mathbf{I}_3 la matriz idéntica 3×3 . El vector \mathbf{f} se puede interpolar en función de sus valores nodales, quedando

$$\mathbf{f} = \sum_{j=1}^m \mathbf{r}_j^T \mathbf{f}_j = \sum_{j=1}^m r_j \mathbf{I}_3 \mathbf{f}_j \quad (64)$$

En el caso particular que aquí se considera, en el cual las fuerzas \mathbf{f} por unidad de superficie sean presiones, se tiene

$$\mathbf{f}_j = -\mathbf{n}_j \Gamma_j \quad (65)$$

siendo Γ_j la presión en el nodo j y \mathbf{n}_j el vector normal a dicho nodo. Sustituyendo (65) y (64) en (63) se obtiene

$$\mathbf{f}_{S_i} = - \sum_{j=1}^m \left[\int_{S_i} r_i r_j \mathbf{I}_3 \mathbf{I}_3 \mathbf{n}_j dS_i \right] \Gamma_j = - \sum_{j=1}^m m \left[\int_{S_i} r_i r_j \mathbf{n}_j dS_i \right] \Gamma_j \quad (66)$$

A partir de (66), la expresión (62) puede escribirse

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t) - \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \boldsymbol{\Gamma} \quad (67)$$

viniendo la matriz \mathbf{S} definida en el anexo.

c) *Ecuaciones acopladas del movimiento*

Las ecuaciones (59) y (67) pueden escribirse de forma conjunta

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} & \mathbf{0} \\ \mathbf{S} & \mathbf{G} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{D}} \\ \ddot{\mathbf{\Gamma}} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{D}} \\ \dot{\mathbf{\Gamma}} \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \mathbf{K} & \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \\ \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{D} \\ \mathbf{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{M}\mathbf{J} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} a(t) \quad (68)$$

Las ecuaciones (68) gobiernan el problema de interacción fluido-estructura en su forma más general. En el apartado siguiente se estudia algún caso particular que reviste especial interés en los problemas de cálculo dinámico de estructuras. A fin de facilitar tal estudio, es conveniente recordar el contenido de algunas de las matrices de la ecuación (68). Concretamente, la matriz \mathbf{G} es la resultante de incorporar a las ecuaciones del fluido el efecto de la compresibilidad del mismo y de las ondas lineales de superficie. Por otra parte, la matriz \mathbf{R} incluye los efectos de radiación de ondas como consecuencia de la introducción de contornos artificiales, así como la consideración de paredes parcialmente absorbentes. Si alguno de estos fenómenos dejaran de considerarse, algunos términos de (68) desaparecerían.

4.3 Las masas añadidas como caso particular de la interacción fluido-estructura

Supóngase un fluido en contacto con una estructura en donde:

- El volumen del fluido es finito.
- No se considera la presencia de contornos absorbentes.
- Se desprecian tanto la compresibilidad del fluido como las ondas de superficie.

En tal caso, las dos filas de la ecuación (68) se escriben

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} + \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \mathbf{\Gamma} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t) \quad (69a)$$

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{H}\mathbf{\Gamma} = 0 \quad (69b)$$

De la segunda de estas ecuaciones se obtiene directamente

$$\mathbf{\Gamma} = -\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}}$$

valor que, substituido en (69a), proporciona

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} - \frac{1}{\rho}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t)$$

obteniéndose finalmente:

$$\left(\mathbf{M} - \frac{1}{\rho}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}\right)\ddot{\mathbf{D}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{D}} + \mathbf{K}\mathbf{D} = -\mathbf{M}\mathbf{J}a(t) \quad (70)$$

En la ecuación (70), al término $-\frac{1}{\rho}\mathbf{S}^T\mathbf{H}^{-1}\mathbf{S}$ se le denomina masa añadida al sólido y representa la contribución del fluido al fenómeno de interacción^(29,30). La ecuación (70) puede resolverse mediante la técnica del desacoplamiento modal o por cualquier otro procedimiento de entre los ya estudiados, puesto que en este caso el amortiguamiento es proporcional. Nótese que en este caso el efecto del fluido se traduce inicialmente en una modificación de las masas del sólido.

Ejemplo 6. *Considérese el depósito de almacenamiento de gas natural licuado de la figura 20, cuya capacidad es de 80000 m³, sometido a la aceleración sísmica del terreno dada por el acelerograma de la figura 21. Las dimensiones del depósito pueden verse en la figura 20, siendo su espesor de 0.20 m para la cúpula y de 0.35 m para la pared cilíndrica. Las características del material del tanque son: $E = 2 \times 107 \text{ kN/m}^2$, $\mu = 0.15$ y $\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$. El gas natural licuado tiene una densidad de $\rho_f = 545 \text{ Kg/m}^3$. Se admite la hipótesis de masas añadidas para modelar el fluido.*

Solución El depósito está formado por una estructura interior metálica adosada a otra exterior de hormigón criogénico. Se realiza la hipótesis de que el depósito metálico interior colapsa debido a la acción del terremoto, siendo necesario, en consecuencia, que el depósito exterior resista la acción de las presiones dinámicas del fluido. El modelo de la figura 20 tiene en cuenta que la estructura analizada consiste en una lámina pretensada de hormigón criogénico, una cúpula y un nervio.

La estructura se discretiza mediante 30 elementos de lámina, mientras que la malla de elementos finitos para el fluido tiene 20×16

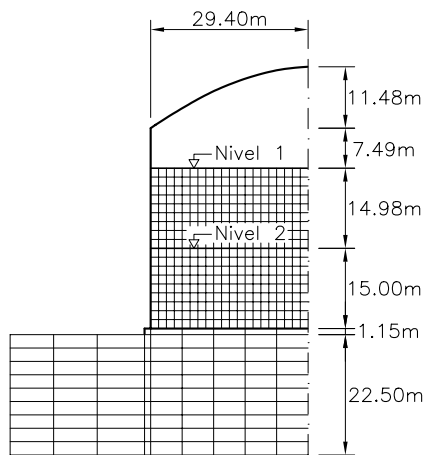


Figura 20: Malla de elementos finitos para un depósito de gas natural licuado.

elementos en el caso de depósito lleno y 20×8 cuando el fluido esté situado a media altura.

En la figura 22 se dan los momentos y fuerzas máximos, mientras que en la 23 pueden verse algunos resultados en desplazamientos⁽³¹⁾.

5 RESPUESTA SÍSMICA DE PRESAS CONSIDERANDO LOS FENÓMENOS DE INTERACCIÓN

5.1 Formulación teórica

En el caso de presas debe incluirse en el análisis dinámico una zona de suelo y una zona de fluido dependientes del tamaño de la estructura. Con el objeto de modelizar adecuadamente la influencia de la interacción suelo-estructura en el comportamiento estructural puede realizarse una recomendación general consistente en que la profundidad de suelo a considerar en el análisis debe ser del orden de una vez la altura H de la presa, mientras que su extensión a cada lado de la presa debe ser del orden de $2 \times H$. Para modelizar el efecto de

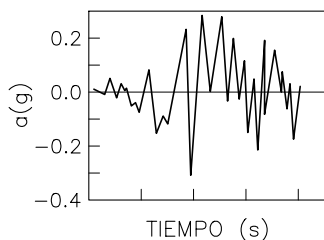


Figura 21: Acelerograma de entrada.

la gran masa de fluido que constituye el embalse y que interacciona con la presa, la zona de fluido a considerar en el modelo debe tener una longitud de $2H$ si el contorno artificialmente creado en el fluido se formula mediante la condición de radiación (véase el anexo). Si el fluido se describe mediante la formulación semianalítica, esta distancia se reduce al mínimo imprescindible para obtener un contorno vertical. De esta forma se obtiene un modelo discreto para el problema de interacción suelo-estructura-fluido parecido al de la figura 24.

Debido al gran tamaño de las zonas de suelo y de fluido que deben incluirse en el análisis, la *respuesta sísmica* de las presas está fuertemente influenciada por el fenómeno de interacción^(32,33). La complejidad del problema del cálculo de la respuesta sísmica de la estructura se incrementa por las dificultades adicionales que supone imponer condiciones de contorno adecuadas al modelo. Si en las zonas de fluido o de suelo se introducen contornos artificiales, y especialmente si dichos contornos están cerca de la estructura, se produce una menor disipación de energía debido a la radiación, esto es, decrece el amortiguamiento por radiación. En tales casos se producen reflexiones de onda artificiales que modifican y falsean la respuesta estructural.

Una formulación que proporciona muy buenos resultados^(34,35) y que se expone a continuación se basa en las siguientes hipótesis:

- Se considera la compresibilidad del fluido.
- Se desprecia el efecto de ondas superficiales.

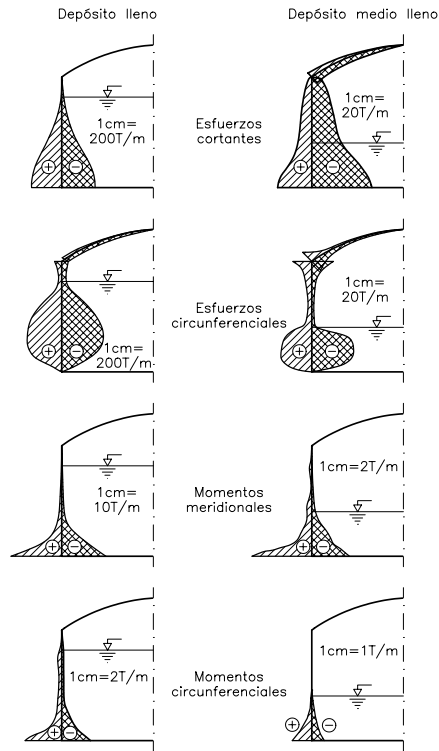


Figura 22: Máximas fuerzas y momentos para el ejemplo 7.

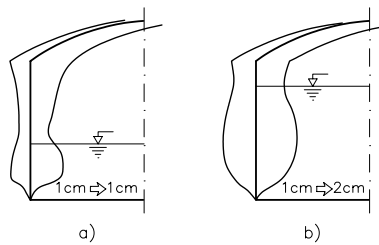


Figura 23: Respuesta en desplazamientos radiales del depósito de gas natural licuado. (a) respuesta máxima, líquido a media altura; (b) respuesta máxima, depósito lleno.

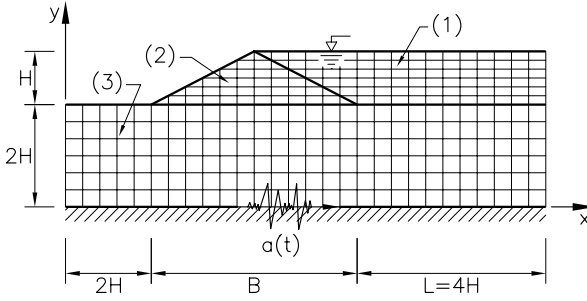


Figura 24: Modelo suelo-estructura-fluido para presas.

- Se modeliza la parte infinita de fluido utilizando la formulación semianalítica.
- Se considera la interacción de la presa con el terreno. A estos efectos se admite un modelo simplificado que consiste en dotar al terreno de flexibilidad pero no de masa, con lo cual no es necesario introducir contornos artificiales. Dicho modelo simplificado ha demostrado proporcionar excelentes resultados⁽³⁴⁻³⁷⁾.
- Se desprecia la interacción fluido-terreno.

Con tales hipótesis se realiza el análisis en frecuencias, siendo las ecuaciones (60) las que gobiernan el comportamiento del fluido. Para el sólido se parte de la (67) escrita en frecuencias, es decir

$$(-\theta^2 \mathbf{M} + i\theta \mathbf{C} + \mathbf{K}) \bar{\mathbf{D}} + \frac{1}{\rho} \mathbf{S}^T \mathbf{P}_1 = -\mathbf{M} \mathbf{J} \bar{a}(\theta) \quad (71)$$

Si se efectúa el desacoplamiento modal en (71) a partir de la ecuación

$$\bar{\mathbf{D}} = \sum_{i=1}^t \varphi_i y_i = \Phi \mathbf{y} \quad (72)$$

se tendrá

$$\mathbf{T} \mathbf{y} + \frac{1}{\rho} \Phi^T \mathbf{S}^T \mathbf{P}_1 = -\Phi^T \mathbf{M} \mathbf{J} \bar{a}(\theta) \quad (73)$$

en donde los elementos de la matriz \mathbf{T} valen

$$T_{ij} = -\theta^2 + i\omega_i C_i + \omega_i^2 \quad \text{si } i = j$$

$$T_{ij} = 0 \quad \text{si } i \neq j$$

siendo θ la frecuencia de excitación y ω_i las frecuencias propias de la estructura. En la ecuación (71), $\bar{a}(\theta)$ representa la transformada de Fourier de la aceleración.

Por otro lado, el término independiente (60) se escribe

$$\begin{aligned} -\mathbf{S}\bar{\bar{\mathbf{D}}}^* &= -\mathbf{S} \left[\bar{\bar{\mathbf{D}}} + \mathbf{J}\bar{a}(\theta) \right] = -\theta^2 \mathbf{S}\bar{\bar{\mathbf{D}}} - \mathbf{S}\mathbf{J}\bar{a}(\theta) \\ &= -\theta^2 \mathbf{S}\Phi \mathbf{y} - \mathbf{S}\mathbf{J}\bar{a}(\theta) \end{aligned} \quad (74)$$

Acoplando seguidamente (60) y (73) y teniendo presente (74) se obtiene finalmente

$$\begin{bmatrix} -\theta^2 \mathbf{G}_{11} + \mathbf{H}_{11} & {}_{11}(-\theta^2 \mathbf{G}_{12} + \mathbf{H}_{12})\Psi & -\theta^2 \mathbf{S}\Phi \\ \Psi^T(-\theta^2 \mathbf{G}_{21} + \mathbf{H}_{21}) & \Psi^T(-\theta^2 \mathbf{G}_{22} + \mathbf{H}_{22})\Psi + \Psi^T \boldsymbol{\eta} \mathbf{0} & \\ \frac{1}{\rho} \Phi^T \mathbf{S}^T & \mathbf{0} & \mathbf{T} \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \gamma \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{S}\mathbf{J} \\ \mathbf{0} \\ \Phi^T \mathbf{J} \end{bmatrix} \bar{a}(\theta)$$

Esta ecuación proporciona la solución del problema de interacción fluido-estructura en el caso de presas. Si se considera además la influencia del terreno, dicha ecuación describe razonablemente el comportamiento dinámico de presas sometidas a efectos sísmicos. La ecuación tiene que resolverse para cada frecuencia de excitación θ , aunque es muy importante notar el bajo número de ecuaciones que contiene, puesto que dicho número depende sólo de:

- El número de nodos de la discretización finita del fluido que no estén en contacto con la presa ni tampoco con la sección recta a partir de la cual se considera el fluido infinito.

- El número de nodos considerados en la sección recta del fluido.
- El número de autovalores considerados en la presa.

Asimismo la última ecuación ha sido aplicada con éxito al cálculo de diversas presas⁽³⁴⁾ comparándose los resultados con valores experimentales, con conclusiones plenamente satisfactorias.

Ejemplo 7. *Se desea determinar la respuesta sísmica de una presa de gravedad de 60 m de altura y 45 m de base. Las propiedades del hormigón de dicha presa son las siguientes:*

- *Módulo de elasticidad: $E = 3.29 \times 1010 \text{ Pa}$.*
- *Coefficiente de Poisson: $\mu = 0.17$.*
- *Densidad: $\rho = 2485 \text{ Kg/m}^3$.*

Por lo que respecta al terreno circundante las propiedades elásticas del mismo son:

- *Módulo de elasticidad: $E = 1,64 \times 1010 \text{ Pa}$.*
- *Coefficiente de Poisson: $\mu = 0.12$.*
- *Densidad: Se considera nula de acuerdo con la hipótesis adoptada.*

La presa está sometida a una excitación sísmica dada por el registro temporal de aceleraciones de la figura 25.

Solución Para determinar la solución del problema se ha utilizado el método descrito anteriormente, incluyendo en el análisis una porción del terreno (figura 26) circundante. La profundidad del mismo es igual a la altura de la presa, mientras que longitudinalmente, aguas arriba y aguas abajo de la misma se extiende una distancia igual a su base (es decir, 45 m). Después de realizada la discretización, el número total de elementos es de 185 y el de nodos de 624. La extensión de fluido incluida en el análisis es de 15 m, con un total de 10 elementos y 53 nodos.

Las cinco primeras frecuencias de vibración obtenidas son las siguientes: $\omega_1 = 29.8 \text{ rad/s}$, $\omega_2 = 65.3 \text{ rad/s}$, $\omega_3 = 75.2 \text{ rad/s}$, $\omega_4 = 135.4 \text{ rad/s}$,

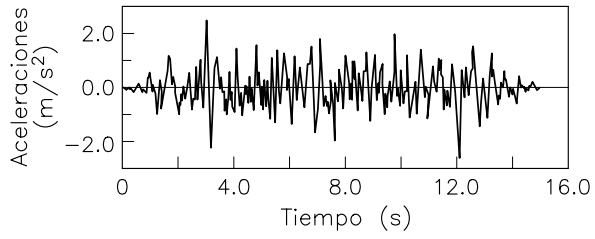


Figura 25: Acelerograma para el sismo del ejemplo 8.

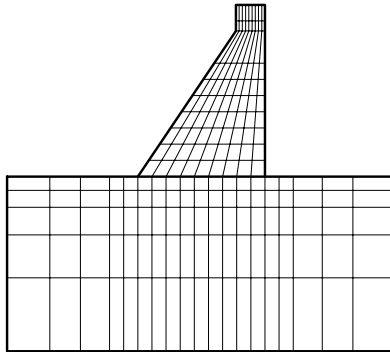


Figura 26: Discretización de la presa del ejemplo 7.

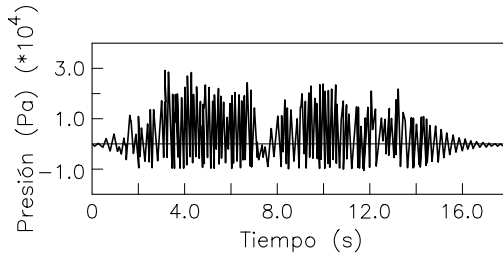


Figura 27: Variación de la presión en el punto superior del paramento aguas arriba.

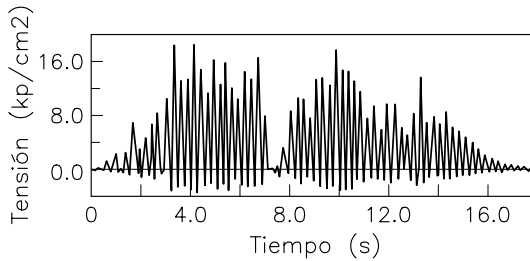


Figura 28: Variación de la tensión principal mayor en el punto de unión del terreno con el paramento aguas arriba de la presa.

$\omega_5=206.2$ rad/s. Si el terreno se hubiera supuesto rígido, las frecuencias obtenidas hubieran sido: $\omega'_1=44.4$ rad/s, $\omega'_2=106.2$ rad/s, $\omega'_3=127.8$ rad/s, $\omega'_4=192.8$ rad/s, $\omega'_5= 227.1$ rad/s.

En las figuras 27 a 30 pueden verse algunos de los resultados obtenidos en el análisis. En las figuras 27 a 29 se ha representado la variación de presiones y tensiones en el paramento aguas arriba de la presa. En la figura 30 se ha hecho una representación gráfica de la evolución de los desplazamientos en la coronación de la presa.

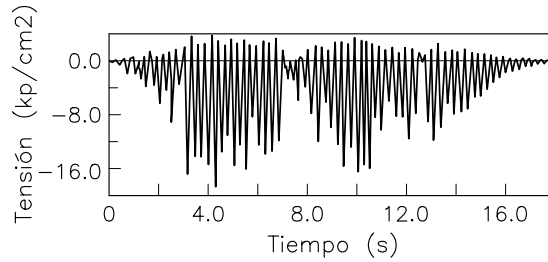


Figura 29: Variación de la tensión principal menor en el punto de unión del terreno con el paramento aguas arriba de la presa.

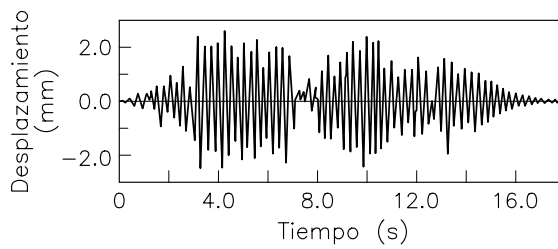


Figura 30: Desplazamiento de la coronación de la presa.

Anexo: Ecuaciones del movimiento para el dominio fluido

La formulación temporal de las ecuaciones del movimiento de un dominio fluido discretizado puede realizarse en el caso general aplicando el método de residuos ponderados de Galerkin^(38,39).

Considérese un dominio de volumen V y superficie A . Dicha superficie puede estar subdividida en áreas en cada una de las cuales se imponen distintas condiciones de contorno. Sea:

A_P : Parte del contorno de A en la cual es conocida la presión

$$p = \bar{p}$$

La superficie A_P normalmente será la superficie libre, en el caso de que se desprece el efecto de las ondas superficiales.

A_r : Parte del contorno de A en el cual se impone la condición de radiación

$$\frac{\partial p}{\partial r} = -\frac{\dot{p}}{c}$$

A_S : Parte del contorno de A en el cual se suponen conocidas las aceleraciones

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\rho \ddot{u}_n$$

En general será la superficie en contacto con un sólido con reflexión de onda total.

A_d : Parte del contorno de A en contacto con una pared semiabsorbente

$$\frac{\partial p}{\partial n} = -\varsigma \dot{p} \qquad \varsigma = \frac{\rho}{\rho_r c_r}$$

A_e : Parte del contorno de A que representa la superficie libre con la existencia de ondas superficiales

$$\frac{1}{g}\ddot{p} + \frac{\partial p}{\partial z} = 0$$

La ecuación diferencial que gobierna el estado de presiones de un fluido es⁽¹⁶⁾

$$\nabla^2 p = \frac{1}{c^2}\ddot{p} \quad (75)$$

Se trata, por tanto, de resolver la ecuación diferencial (75) sometida a todas o a alguna de las condiciones de contorno anteriores. Para ello, se divide el volumen del fluido en elementos finitos. La presión en el fluido se aproxima mediante

$$p = \sum_{j=1}^m q_j \gamma_j \quad (76)$$

siendo q_j las funciones de interpolación, γ_j los valores nodales de la presión y m el número total de nodos.

A fin de poder escribir una ecuación de residuos ponderados, sean:

W : función de peso en V

\overline{W}_r : función de peso en el contorno A_r

\overline{W}_s : función de peso en el contorno A_s

\overline{W}_d : función de peso en el contorno A_d

\overline{W}_e : función de peso en el contorno A_e

La ecuación de residuos ponderados se escribe⁽¹⁶⁾ como

$$\begin{aligned} & \int_V W \left(\nabla^2 p - \frac{1}{c^2}\ddot{p} \right) dV + \int_{A_e} \overline{W}_e \left(\frac{1}{g}\ddot{p} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dA_e \\ & + \int_{A_r} \overline{W}_r \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\dot{p}}{c} \right) dA_r + \int_{A_s} \overline{W}_s \left(\frac{\partial p}{\partial n} + \rho \ddot{u}_n \right) dA_s \\ & + \int_{A_d} \overline{W}_d \left(\frac{\partial p}{\partial n} + \varsigma \dot{p} \right) dA_d = 0 \end{aligned} \quad (77)$$

La integral

$$\int_V W \nabla^2 p dV$$

puede integrarse por partes, quedando

$$\begin{aligned} \int_V W \nabla^2 p dV &= - \int_V (\nabla W)^T (\nabla p) dV + \int_A W (\nabla p)^T \mathbf{n} dA \\ &= - \int_V (\nabla W)^T (\nabla p) dV + \int_V W \frac{\partial p}{\partial n} dA \end{aligned} \quad (78)$$

Se realiza a continuación la hipótesis de que las funciones de peso, que son arbitrarias, se pueden elegir de la siguiente forma:

$$\overline{W}_r = -W \text{ en el contorno } A_r$$

$$\overline{W}_S = -W \text{ en el contorno } A_S$$

$$\overline{W}_d = -W \text{ en el contorno } A_d$$

$$\overline{W}_e = -W \text{ en el contorno } A_e$$

Utilizando dicha hipótesis y sustituyendo (78) en (77), se obtiene la siguiente ecuación:

$$\begin{aligned} & - \int_V (\nabla W)^T (\nabla p) dV + \int_{A_e} W \frac{\partial p}{\partial n} dA_e + \int_{A_r} W \frac{\partial p}{\partial n} dA_r \\ & + \int_{A_s} W \frac{\partial p}{\partial n} dA_s + \int_{A_d} W \frac{\partial p}{\partial n} dA_d + \int_{A_e} (-W) \left(\frac{1}{g} \ddot{p} + \frac{\partial p}{\partial z} \right) dA_e \\ & + \int_{A_r} (-W) \left(\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\dot{p}}{c} \right) dA_r + \int_{A_s} (-W) \left(\frac{\partial p}{\partial n} + \rho \ddot{u}_n \right) dA_s \\ & + \int_{A_d} (-W) \left(\frac{\partial p}{\partial n} + c \dot{p} \right) dA_d - \frac{1}{c^2} \int_V W \ddot{p} dV = 0 \end{aligned} \quad (79)$$

Simplificando términos, la expresión (79) queda

$$- \int_V (\nabla W)^T (\nabla p) dV - \int_{A_e} \frac{W}{g} \ddot{p} dA_e - \int_{A_r} \frac{W}{c} \dot{p} dA_r$$

$$-\int_{A_s} W \rho \ddot{u}_n dA_s - \int_{A_d} W \zeta \dot{p} dA_d - \frac{1}{c^2} \int_V W \ddot{p} dV = 0 \quad (80)$$

Las funciones de peso W se tomarán iguales a las de interpolación q_j

$$W = q_j$$

Se realizan, asimismo, las discretizaciones

$$\begin{aligned} p &= \sum_{j=1}^m q_j \gamma_j \\ \ddot{u}_n &= \sum_{j=1}^{m_s} q_j \left(\ddot{\mathbf{D}}_n \right)_j = \sum_{j=1}^{m_s} q_j \mathbf{n}_j^T \ddot{\mathbf{D}}_j \end{aligned} \quad (81)$$

en donde m y m_s son, respectivamente, el número total de nodos en el fluido y el número de nodos en la zona del contorno en la cual se han impuesto aceleraciones. Sustituyendo (81) en cada uno de los miembros de (80), se obtiene

$$\begin{aligned} \int_V (\nabla W)^T (\nabla p) dV &= \int_V \left[\frac{\partial q_i}{\partial x} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial q_j}{\partial x} \gamma_j \right) + \frac{\partial q_i}{\partial y} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial q_j}{\partial y} \gamma_j \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial N_i}{\partial z} \sum_{j=1}^m \left(\frac{\partial q_j}{\partial z} \gamma_j \right) dV \right] \\ &= \sum_{j=1}^m \left[\int_V \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial q_j}{\partial y} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \frac{\partial q_j}{\partial z} \right) dV \right] \gamma_j \end{aligned}$$

$$\int_{A_e} \frac{W}{g} \ddot{p} dA_e = \frac{1}{g} \int_{A_e} q_i \left(\sum_{j=1}^{m_e} q_j \ddot{p}_j \right) dA_e = \sum_{j=1}^{m_e} \left(\frac{1}{g} \int_{A_e} q_i q_j dA_e \right) \ddot{\gamma}_j$$

$$\int_{A_s} W \rho \ddot{u}_n dA_s = \int_{A_s} W \rho \left(\sum_{j=1}^{m_s} q_j \mathbf{n}_j^T \ddot{\mathbf{D}}_j \right) dA_s \quad (82)$$

$$= \sum_{j=1}^{m_s} \left(\int_{A_s} q_i \rho q_j \mathbf{n}_j^T dA_s \right) \ddot{\mathbf{D}}_j$$

$$\frac{1}{c} \int_{A_r} W \dot{p} dA_r = \frac{1}{c} \int_{A_r} q_i \sum_{j=1}^{m_r} (q_j \dot{p}_j) dA_r = \frac{1}{c} \sum_{j=1}^{m_r} \left(\int_{A_r} q_i q_j dA_r \right) \dot{\gamma}_j$$

$$\int_{A_d} W \varsigma \dot{p} dA_d = \varsigma \sum_{j=1}^{m_d} \left(\int_{A_d} q_i q_j dA_d \right) \dot{\gamma}_j$$

$$\frac{1}{c^2} \int_V W \ddot{p} dV = \sum_{j=1}^m \left(\frac{1}{c^2} \int_V q_i q_j dV \right) \ddot{\gamma}_j$$

en donde m_e , m_s , m_r y m_d son el número total de nodos en las zonas del contorno A_e , A_s , A_r y A_d , respectivamente. Evidentemente, como i varía de 1 a m , se obtienen m expresiones del tipo (82). Sustituyendo seguidamente (82) en (80), se obtiene

$$\mathbf{G}\ddot{\mathbf{\Gamma}} + \mathbf{R}\dot{\mathbf{\Gamma}} + \mathbf{H}\mathbf{\Gamma} + \mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}} = \mathbf{0} \quad (83)$$

teniendo los elementos de las matrices de la ecuación (83) las siguientes expresiones:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \frac{1}{c^2} \int_V q_i q_j dV + \frac{1}{g} \int_{A_e} q_i q_j dA_e \\ R_{ij} &= \frac{1}{c} \int_{A_r} q_i q_j dA_r + \varsigma \int_{A_d} q_i q_j dA_d \\ H_{ij} &= \int_V \left(\frac{\partial q_i}{\partial x} \frac{\partial q_j}{\partial x} + \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial q_j}{\partial y} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \frac{\partial q_j}{\partial z} \right) dV \\ S_{ij} &= \int_{A_s} \rho q_i q_j \mathbf{n}_j^T dA_s \end{aligned}$$

El término

$$\mathbf{S}\ddot{\mathbf{D}}$$

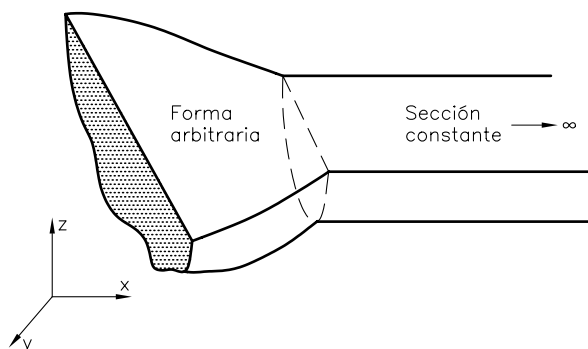


Figura 31: Dominio de fluido infinito.

es conocido y define los esfuerzos que se aplican al dominio fluido.

Por otra parte, en todo el desarrollo anterior se ha prescindido del término correspondiente a aquella zona del contorno en la cual la presión es conocida. Ello es debido a que esta condición se impone *a posteriori*, directamente en la ecuación (83), de la misma forma que en una estructura se impone un desplazamiento conocido.

La formulación estudiada puede, en principio, aplicarse a cualquier dominio de fluido finito o infinito, sin hacer mención de su forma. Su campo de aplicación es por tanto muy extenso, siempre que se tenga precaución de que se cumplan las hipótesis bajo las cuales ha sido formulada⁽³⁹⁾.

Existe, sin embargo, un caso particular de dominios infinitos⁽³⁴⁾, en los cuales una parte de los mismos está generada por una superficie plana que se desplaza a lo largo de un eje, tal como puede verse en la figura 31. Se forma, de esta manera, un volumen en el cual la sección según el eje generador permanece constante a lo largo de éste. Dicho caso particular presenta notable interés en los problemas de interacción presa-embalse⁽³⁵⁾, pues el embalse puede modelarse mediante un volumen con las mencionadas características.

Supóngase, por ejemplo, que se trata de resolver un problema de interacción presa bóveda-embalse. En la figura 32 puede verse representada la planta de tal problema. La idea del método es dividir el recinto Ω , en suma de dos: un subdominio Ω_1 , cercano a la presa, el cual se discretiza mediante elementos finitos y un subdominio Ω_2 ,

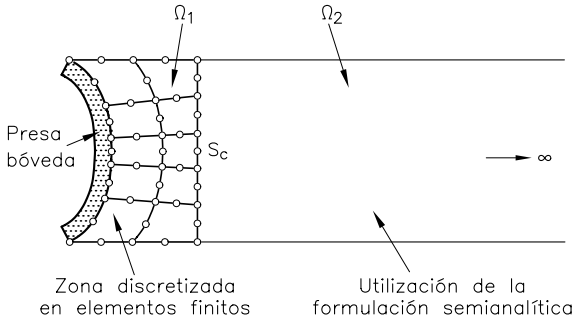


Figura 32: Planta de la interacción presa-embalse.

que se extiende hacia el infinito, en el cual se busca una solución del tipo semianalítico.

Si la ecuación (75) se transforma al dominio frecuencial, escribiendo

$$p = \bar{P} \exp(i\theta t)$$

se obtiene la conocida ecuación de Helmholtz

$$\nabla \bar{P} + \frac{\theta^2}{c^2} \bar{P} = 0 \quad (84)$$

Considérese por tanto el dominio Ω_2 y sea S_c la superficie plana mediante la cual se separan los dominios Ω_1 y Ω_2 (figura 32). La solución de la ecuación (84) puede expresarse como

$$\bar{P}(x, y, z) = \bar{P}_2(y, z) \exp(-kx) \quad (85)$$

siendo $\bar{P}_2(y, z)$ la amplitud de la presión en el plano $x = 0$.

Sustituyendo (85) en (84) se obtiene

$$\frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{P}_2}{\partial z^2} + \lambda^2 \bar{P}_2 = 0 \quad (86)$$

siendo $\lambda^2 = \frac{\theta^2}{c^2} + k^2$. La ecuación (86) representa un problema de valores y vectores propios en la sección transversal S_c . Por otra parte, los valores propios λ_j que se obtendrán resolviendo la ecuación

(86) serán las frecuencias propias del fluido infinito divididas por c . Para resolverla se procede a discretizar S_c mediante elementos finitos. Dichos elementos constituirán, lógicamente, una de las caras de los elementos de Ω_1 en contacto con Ω_2 . Escribiendo, por tanto

$$\bar{P}_2 = \sum_{j=1}^n q_j P_{2j} \quad (87)$$

siendo q_j las funciones de interpolación y aplicando a (86) el método de Galerkin de residuos ponderados, se obtiene

$$\int_{S_c} q_i \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial^2 q_j}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 q_j}{\partial z^2} \right) P_{2j} + \lambda^2 \sum_{j=1}^n q_j P_{2j} \right] dS_c = 0 \quad (88)$$

Integrando por partes y procediendo de forma análoga a lo expuesto en el apartado anterior, la ecuación (88) queda

$$(\lambda^2 \mathbf{G}^s + m \mathbf{H}^s) \mathbf{P}_2 - \int_{\Gamma} \mathbf{q} \frac{\partial \bar{P}_2}{\partial n} d\Gamma = 0 \quad (89)$$

en donde los términos G_{ij}^s y H_{ij}^s de las matrices \mathbf{G}^s y \mathbf{H}^s valen

$$G_{ij}^s = \int_{S_c} q_i q_j dS_c \quad (90)$$

$$H_{ij}^s = \int_{S_c} \left\{ \frac{\partial q_i}{\partial y} \frac{\partial q_j}{\partial y} + \frac{\partial q_i}{\partial z} \frac{\partial q_j}{\partial z} \right\} dS_c \quad (91)$$

y siendo Γ el contorno de la superficie S_c de contacto con el terreno.

Si se considera que solamente se producen aceleraciones en la dirección x , los términos de contorno de la integral de la ecuación (89) se anulan. Si, por el contrario, se consideran las aceleraciones que se transmiten directamente al fluido normalmente a dicha dirección x , los valores de $\frac{\partial \bar{P}_2}{\partial n}$ son conocidos y, por tanto, la integral de contorno se evalúa fácilmente. En cualquiera de los dos casos, puede resolverse el problema de valores propios

$$(\lambda^2 \mathbf{G}^s + \mathbf{H}^s) \mathbf{P}_2 = 0 \quad (92)$$

con lo que \mathbf{P}_2 puede escribirse en la forma

$$\mathbf{P}_2 = \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\varphi}_j \gamma_j \quad (93)$$

siendo $\boldsymbol{\varphi}_j$ los modos propios de vibración del fluido infinito y t el número de valores propios considerados en el análisis. En la expresión (93) los valores γ_j son desconocidos y se determinan en función de la naturaleza del problema. El valor del vector de presiones \mathbf{P} en las líneas paralelas al eje x y que pasan por los puntos nodales se obtiene combinando la expresión (93) con la (85), es decir

$$\mathbf{P} = \sum_{j=1}^t \boldsymbol{\varphi}_j \gamma_j \exp(-k_j x) \quad (94)$$

siendo

$$k_j = \sqrt{\lambda_j^2 - \theta^2 c^2} \quad (95)$$

Como puede observarse, los valores de k_j son reales siempre que las frecuencias de excitación θ sean inferiores al valor propio correspondiente a λ_j . En caso contrario serán imaginarias.

Considérese nuevamente el dominio Ω_1 . La ecuación matricial que rige el comportamiento de las presiones en su interior, es

$$(-\theta^2 \mathbf{G} + \mathbf{H}) \mathbf{P} + \int_{S_c} \mathbf{q} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c = -\mathbf{S} \ddot{\mathbf{D}}^* \quad (96)$$

siendo $\ddot{\mathbf{D}}^*$ el vector que contiene las amplitudes de las aceleraciones que el cuerpo sólido transmite al fluido. \mathbf{G} es la matriz de masa de Ω_1 y \mathbf{H} su matriz de rigidez, siendo \mathbf{S} la denominada matriz de interacción sólido-fluido definida en (83).

Para la resolución de la ecuación (96) es preciso evaluar previamente el valor de los términos de contorno, es decir

$$\int_{S_c} \mathbf{q} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c \quad (97)$$

En la expresión vectorial anterior, cada uno de sus términos vale

$$\int_{S_c} q_i \frac{\partial P}{\partial n} dS_c = \int_{S_c} q_i \sum_{j=1}^n \frac{\partial P_j}{\partial n} P_j dS_c \quad (98)$$

en donde P_j es el valor de \mathbf{P} dado por la expresión (94) en el punto $x = 0$, por lo que (98) se escribe como

$$\int_{S_c} q_i \sum_{j=1}^n q_j \frac{\partial P_j}{\partial x} dS_c = \sum_{j=1}^n \left[\int_{S_c} q_i q_j dS_c \right] \frac{\partial P_j}{\partial x} = \mathbf{G}^s \left(\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \right)_{x=0} \quad (99)$$

El término $\frac{\partial P_j}{\partial x}$ de la ecuación (99) se obtiene a partir de (94), derivando respecto a x y particularizando para $x = 0$, es decir

$$\left. \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial x} \right|_{x=0} = \sum_{j=1}^t (-k_j) \varphi_j \gamma_j = -\mathbf{\Psi} \mathbf{K} \boldsymbol{\gamma} \quad (100)$$

La matriz $\mathbf{\Psi} = [\varphi_1 \varphi_2 \dots]$, que no es necesariamente cuadrada, contiene los vectores propios del fluido infinito. \mathbf{K} es una matriz cuadrada diagonal que contiene los distintos valores k_j y $\boldsymbol{\gamma}$ es un vector que contiene los factores de participación γ_j . Sustituyendo (100) en (99), se obtiene finalmente

$$\int_{S_c} \mathbf{q} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c = -\mathbf{G}^s \mathbf{\Psi} \mathbf{K} \boldsymbol{\gamma} = -\boldsymbol{\eta} \boldsymbol{\gamma} \quad (101)$$

siendo la matriz $\boldsymbol{\eta}$

$$\boldsymbol{\eta} = \mathbf{G}^s \mathbf{\Psi} \mathbf{K}$$

Por otra parte, la ecuación (96) se puede escribir en la forma

$$\begin{bmatrix} -\theta^2 \mathbf{G}_{11} \mathbf{H}_{11} & -\theta^2 \mathbf{G}_{12} \mathbf{H}_{12} \\ -\theta^2 \mathbf{G}_{21} \mathbf{H}_{21} & -\theta^2 \mathbf{G}_{22} \mathbf{H}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \int_{S_c} \mathbf{q} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c \end{bmatrix} = -\mathbf{S} \ddot{\mathbf{D}}^* \quad (102)$$

siendo \mathbf{P}_2 el valor de la presión en los nodos de Ω_1 pertenecientes también a S_c y, por tanto, también a Ω_2 , mientras que \mathbf{P}_1 es el valor de la presión en los nodos restantes. Sustituyendo en (102) el valor

de $\int_{S_c} \mathbf{q} \frac{\partial P}{\partial n} dS_c$ dado por (101) y el valor de \mathbf{P}_2 por el dado en (94) particularizado para $x = 0$ [expresión (93)], se obtiene

$$\begin{bmatrix} -\theta^2 \mathbf{G}_{11} \mathbf{H}_{11} & (-\theta^2 \mathbf{G}_{12} \mathbf{H}_{12}) \Psi \\ -\theta^2 \mathbf{G}_{21} \mathbf{H}_{21} & (-\theta^2 \mathbf{G}_{22} \mathbf{H}_{22}) \Psi + \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \gamma \end{bmatrix} = -\mathbf{S} \ddot{\mathbf{D}}^* \quad (103)$$

Premultiplicando la segunda fila de (103) por Ψ^t y teniendo en cuenta que el término independiente correspondiente a dicha fila es un vector nulo por no estar los nodos 2 en contacto con la estructura, la expresión (103) queda

$$\begin{bmatrix} -\theta^2 \mathbf{G}_{11} \mathbf{H}_{11} & (-\theta^2 \mathbf{G}_{12} \mathbf{H}_{12}) \Psi \\ \Psi^t (-\theta^2 \mathbf{G}_{21} \mathbf{H}_{21}) & \Psi^t (-\theta^2 \mathbf{G}_{22} \mathbf{H}_{22}) \Psi + \Psi \eta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \gamma \end{bmatrix} = -\mathbf{S} \ddot{\mathbf{D}}^* \quad (104)$$

en donde $\Psi^t (-\theta^2 \mathbf{G}_{22} \mathbf{H}_{22}) \Psi + \Psi \eta$ es una matriz diagonal.

Si se conoce la excitación $\ddot{\mathbf{D}}^*$ que la estructura transmite al fluido, resolviendo el sistema de ecuaciones (104) se obtienen las presiones en cualquier punto. Si la estructura es infinitamente rígida, los valores de $\ddot{\mathbf{D}}^*$ son conocidos. Sin embargo, si el sólido es flexible, el valor de dichas aceleraciones se desconoce y constituye de hecho uno de los resultados del problema.

REFERENCIAS

- [1] O. C. Zienkiewicz, "Coupled problems and their numerical solution", Capítulo 1 de *Numerical Methods in Coupled Systems*, (R. W. Lewis, P. Bettess y E. Hinton, editores), John Wiley & Sons, New York, 35-58, 1984.
- [2] S. Okamoto, *Introduction to Earthquake Engineering*, University of Tokyo Press, Tokyo, 1973.
- [3] A. H. Barbat, *Cálculo sísmico de estructuras*, Editores Técnicos Asociados, S.A., Barcelona, 1982.
- [4] A. H. Barbat, "Seismic soil-structure-fluid interaction analysis", Capítulo 12 de *Numerical Methods in Coupled Systems*, (R. W. Lewis, P. Bettess y E. Hinton, editores), John Wiley & Sons, New York, 353-386, 1984.

-
- [5] P. B. Schnabel, J. Lysmer y H. B. Seed, *SHAKE, A Computer Program for Earthquake Response Analysis of Horizontally Layered Sites*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, Report **EERC 72-12**, 1972.
- [6] J. P. Wolf, *Dynamic Soil-Structure Interaction*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.
- [7] R. W. Clough y J. Penzien, *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill Book Company, New York, 1975.
- [8] R. A. Parmelee, "Building-foundation interaction effects", *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, **93(2)**, 131-152, 1967.
- [9] B. K. Ramiah y D. S. Gupta, "Factors affecting seismic design of water towers", *Journal of Structural Engineering Division*, ASCE, **92(4)**, 13-30, 1966.
- [10] H. L. Wong y J. E. Luco, "Dynamic response of rigid foundations of arbitrary shape", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **4**, 579-587, 1976.
- [11] Y. Wang y R. K. N. D. Rajapakse, "Dynamics of rigid strip foundations embedded in orthotropic elastic solids", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 927-947, 1991.
- [12] S. Swaddiwndhipong, Y. K. Chow, S. C. Tan y K. F. Phoon, "Dynamic response of surface foundations on layered media", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 1065-1081, 1991.
- [13] Ch. Zhao y S. Valliappan, "Vibration of three-dimensional rigid raft foundation on viscoelastic medium", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **20**, 1159-1177, 1991.
- [14] W. Y. Jean, T. W. Lin y J. Penzien, "System parameters of soil foundations for time domain dynamic analysis", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **19**, 541-553, 1990.
- [15] Y. Hayashi y I. Takahashi, "An efficient time domain soil-structure interaction analysis based on the dynamic stiffness of an unbounded soil", *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **21**, 787-798, 1992.
- [16] A. H. Barbat y J. Miquel Canet, *Estructuras sometidas a acciones sísmicas*, Centro Internacional de métodos numéricos en Ingeniería (CIMNE), Barcelona, 1994.
- [17] J. A. Gutierrez y A. K. Chopra, "A substructure method for earthquake analysis of structures, including soil-structure interaction",

- Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **6**, 51-69, 1978.
- [18] H. Werkle, “Dynamic finite element analysis of three-dimensional soil models with transmitting element”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **14**, 41-60, 1986.
- [19] J. Lysmer y R. L. Kuhlemeyer, “Finite dynamic model for infinite media”, *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, **95**, 859-877, 1969.
- [20] J. P. Wolf, “A comparison on time-domain transmitting boundaries”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **14**, 655-673, 1986.
- [21] E. Kansel, “Local Transmitting Boundaries”, *Journal of Engineering Mechanics*, ASCE, **114(6)**, 1011-1027, 1988.
- [22] G. Fenves y K. Chopra, *Earthquake Analysis and Response of Concrete Gravity Dams*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, Report **EERC 84/10**, 1984.
- [23] V. Lofti, J. M. Roesset y J. L. Tassoulas, “A technique for the analysis of the response of dams to earthquakes”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **15**, 463-490, 1987.
- [24] L. G. Olson y K.-J. Bathe, “An infinite element for analysis of transient fluid-structure interactions”, *Engineering Computations*, **2**, 319-329, 1985.
- [25] S. K. Sharan, “The time domain analysis of infinite fluid vibrations”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, **24**, 945-958, 1987.
- [26] D. K. Paul, O. C. Zienkiewicz y E. Hinton, “Transient dynamic analysis of reservoir-dam interaction using staggered solution schemes”, en *Numerical Methods for Coupled Problems*, (E. Hinton, P. Bettess y R. W. Lewis, editores), Pineridge Press Limited, Swansea, 321-334, 1981.
- [27] R. W. Clough y C. H. Chang “Seismic cavitation of gravity dam reservoir”, en *Numerical Methods for Coupled Problems*, (E. Hinton, P. Bettess y R. W. Lewis, editores), Pineridge Press Limited, Swansea, 185-196, 1981.
- [28] S. S. Saini, P. Bettess y O. C. Zienkiewicz, “Coupled hydrodynamic response of concrete gravity dams using finite and infinite elements”, *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, **6**, 363-374, 1978.

- [29] A. H. Barbat, *The Seismic Analysis of Elevated Water Tanks Considering the Interaction Phenomena*, Tesis, Universidad Politécnica de Iași, Iași, Rumanía, 1978.
- [30] A. H. Barbat, C. D. Ionescu y V. Breabăn, "Dynamic analysis of elevated water tanks considering the water-structure interaction", *Proceedings of the International Symposium on thin Shells*, Łódź, Poland, **2**, 34-46, 1974.
- [31] A. H. Barbat, M. Cervera, R. Chueca y E. Oñate, Seismic analysis of cryogenic tanks, including interaction phenomena, *Proceedings of the Second International Conference on Cryogenic Concrete*, Holland, Session **3**, Paper **1**, 1983.
- [32] A. H. Barbat y V. Breabăn, "Finite element-finite difference method for a flat upstream dam-reservoir analysis", *Bulletin of the Polytechnic Institute of Iași*, Iași, Rumanía, **23(3-4)**, 29-32, 1977.
- [33] A. H. Barbat, V. Breabăn y C. D. Ionescu, "Dam-reservoir interaction for a dam with flat upstream face during earthquakes", *Proceedings of the 6th World Conference on Earthquake Engineering*, New Delhi, **2**, 1301-1306, 1977.
- [34] J. Miquel Canet, E. Oñate, J. Buil y E. Herrero *Análisis dinámico de presas*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Monografía CIMNE 5, 1991.
- [35] J. Miquel Canet, S. Botello, J. Buil y E. Oñate, *La presa bóveda de Talvacchia. Análisis estático y dinámico*, Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, Monografía CIMNE 6, 1991.
- [36] K. L. Fox y A. K. Chopra, *Earthquake Analysis of Arch Dams including Dam-Water Interaction, Reservoir Boundary Absorbtion and Foundation Flexibility*, Earthquake Engineering Research Center, University of California, Berkeley, California, 1985.
- [37] *** *First Benchmark Workshop on Numerical Analysis of Dams*, ISMES, Bergamo, Italia, Mayo 1991.
- [38] O. C. Zienkiewicz y R. L. Taylor, *The Finite Element Method*, Fourth Edition, **volume 2**, McGraw-Hill, London, 1991.
- [39] K.-J. Bathe, *Finite Element Procedures in Engineering Analysis*, Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.