

# PRESIONES EN ZAPATAS RÍGIDAS DE FORMA ARBITRARIA SOMETIDAS A CARGA AXIAL EXCÉNTRICA

J. A. Rodríguez-Gutiérrez<sup>1</sup> y J. Darío Aristizabal-Ochoa<sup>2</sup>

**Resumen:** Un modelo para el análisis de zapatas superficiales rígidas de formas arbitrarias bajo fuerza axial y flexión biaxial es propuesto. El modelo permite calcular la posición del eje neutro y la presión máxima bajo una zapata superficial de forma arbitraria con o sin vacíos sometida a carga axial y momentos flectores dados biaxiales. Tres modelos de distribución de presiones bajo una zapata son utilizados: uniforme, lineal y parabólico. Una serie de monogramas o ayudas de diseño son desarrolladas para el cálculo de las presiones de contacto entre zapatas rígidas y el suelo elástico soportante. Se presenta un algoritmo basado en la integral de Gauss para los casos de zapatas de forma irregular o con vacíos interiores (agujeros). Tres ejemplos numéricos son incluidos para mostrar la capacidad del algoritmo propuesto y verificar los resultados con los de otros métodos.

## CONTACT PRESSURE CAUSED BY A RIGID FOOTING OF ANY SHAPE SUBJECTED TO ECCENTRIC AXIAL LOAD

**Abstract:** The stress analysis of an elastic soil supporting a rigid footing of arbitrary shape subjected to axial load with eccentricities about two axes is presented. The proposed model calculates the position of the neutral axis and the maximum contact pressure in the soil. Three different models for the contact pressure distribution are utilized: uniform, linear and parabolic. A series of monograms or design aids are developed to facilitate the stress analysis of elastic soils supporting rigid footings subjected to eccentric axial loads. For footing areas of irregular shapes or with cutoffs or interior openings, a computer algorithm based on the Gauss integral method is presented. Three numerical examples are included to verify the proposed method and to show its effectiveness.

### INTRODUCCIÓN

En el análisis y diseño de estructuras, el cálculo de las presiones en el suelo soportante y la localización de las fuerzas resultantes en las zapatas son de vital importancia para garantizar el buen comportamiento bajo las cargas aplicadas. Existen en la literatura técnica ayudas de diseño para calcular la presión máxima bajo zapatas rectangulares y circulares. Plock (1963) presenta gráficas para el cálculo de la posición del eje neutro y de la presión máxima bajo zapatas rectangulares bajo flexión biaxial (basado en una distribución lineal de presiones). Zweig (1966) presenta ayudas para obtener las presiones bajo zapatas trapezoidales cargadas excéntricamente. Gurfinkel (1970) presenta un algoritmo que permite obtener la posición del eje neutro y la presión máxima en zapatas rectangulares utilizando tres modelos de distribución de presiones bajo la zapata. Kramrisch (1985) presenta ayudas para obtener las presiones máximas bajo zapatas de forma rectangular, circular poligonal y en forma de anillo y fórmulas cerradas para obtener las presiones máximas y mínimas bajo zapatas en forma de T sometidas a carga excéntrica, Hackman (1977) presenta un método para obtener presiones de soporte bajo zapatas de puentes sometidas a flexión biaxial. Jarquio y Jarquio (1983) presentan ayudas para dimensionar zapatas rectangulares bajo flexión biaxial. Highter y Anders (1985) presentan ayudas para calcular el área efectiva a compresión en una zapata rectangular o circular bajo carga excéntrica (suponiendo que la forma del bloque de presiones es prismática). Irles y Irles (1994) obtienen expresiones cerradas para calcular los esfuerzos bajo una zapata rectangular con carga excéntrica.

Sin embargo, no siempre es posible construir zapatas rectangulares o circulares, ya sea por limitaciones de espacio o por modificaciones de la geometría de la zapata después de construida. En ocasiones es necesario tener cortes o vacíos (o agujeros) en zapatas originalmente circulares o rectangulares y se requiere conocer si la presión máxima transmitida al suelo no supera la presión admisible del suelo con la nueva geometría. Existe poca información sobre la distribución de presiones bajo zapatas superficiales de formas arbitrarias bajo flexión biaxial. Estos casos sólo pueden ser resueltos

<sup>1</sup> Ingeniero Consultor, Calle 83 #45-29, Medellín-Colombia.

<sup>2</sup> Profesor Generación 125-Años, Facultad de Minas, Universidad Nacional, Medellín-Colombia. E-mail: jdaristi2@yahoo.com

suponiendo que la zapata es una placa sobre fundación elástica ("mat foundation") utilizando programas de elementos finitos o diferencias finitas, o utilizando los momentos de inercia de la zapata; herramientas no siempre disponibles en las oficinas de ingeniería. Bowles (1977) presenta un ejemplo de distribución de presiones bajo una zapata con un corte (con una carga axial aplicada en el centroide de la zapata cuadrada original, pero al hacerse el corte cambia el centroide de la zapata y se produce flexión biaxial).

La flexión biaxial es un efecto que no puede ser ignorado al dimensionar zapatas, ya que no es posible garantizar que solamente carga axial es transmitida por la estructura al suelo de fundación. Esta situación generalmente ocurre en pilares de puentes, chimeneas altas y edificios sometidos a cargas de viento o terremotos y estructuras de contención. Cuando la excentricidad de la carga axial es a lo largo del eje de simetría se genera flexión uniaxial alrededor del eje normal. Ahora se genera flexión biaxial cuando existen momentos alrededor de los ejes globales XY o cuando sólo existe momento flector en uno de los ejes, pero la forma de la zapata es asimétrica. Para el caso biaxial, sería conveniente generalizar las ayudas de diseño existentes para el cálculo de las presiones máximas bajo una zapata para las formas geométricas más utilizadas, y para las formas geométricas no convencionales presentar un modelo fácil de programar. Estos son precisamente los dos objetivos de esta publicación.

El objetivo principal de esta publicación es presentar un método general para el análisis de zapatas de forma arbitraria soportadas superficialmente por suelos elásticos bajo carga axial y flexión biaxial. El modelo propuesto calcula la posición del eje neutro y la presión máxima en el suelo de contacto con la zapata. Tres modelos diferentes de distribución de la presión de contacto son utilizados: uniforme, lineal, y parabólico. Además, se presentan una serie de nomogramas y fórmulas (i.e., ayudas de diseño) para facilitar el análisis de zapatas rígidas de forma regular sujetas a cargas axiales excéntricas. Para zapatas de forma irregular (con vacíos y discontinuidades) se presenta un algoritmo basado en el método de la integral de Gauss. Se incluyen tres ejemplos numéricos para mostrar la capacidad del algoritmo propuesto y verificar los resultados con los de otros métodos disponibles en la literatura técnica.

## MODELO ESTRUCTURAL

Para calcular la presión máxima y la posición del eje neutro en una zapata superficial, se deberán resolver simultáneamente las ecuaciones no lineales (2a)-(2c) en A, b y  $q_o$ . "A" es la tangente del ángulo  $\alpha$  de inclinación del eje neutro con respecto al eje global X, "b" es el intercepto del eje neutro con el eje global Y y "q" es la presión máxima bajo la zapata.

El modelo propuesto permite analizar zapatas con vacíos o agujeros. Cada vacío es tratado en forma idéntica al perímetro exterior excepto que los vértices de cada vacío son numerados en sentido contrario a las agujas del reloj. Los vacíos circulares son aproximados por polígonos de diecisés lados y sus vértices son generados conocidos el radio y la posición del centro del vacío respecto a los ejes globales XY. En el caso de vacíos rectangulares los vértices son generados conocidos el ancho, largo y centro del agujero respecto a los ejes globales XY. Si la forma del vacío es arbitraria, es necesario entrar las coordenadas de cada vértice. El modelo propuesto es similar al utilizado por Rodríguez y Aristizabal-Ochoa (1999) para analizar o diseñar columnas de concreto reforzado.

Analicemos una zapata superficial de forma arbitraria que se muestra en la Figura 1a. La forma de la zapata es aproximada por líneas rectas y la contribución del área efectiva a compresión consiste de trapecios formados por los vértices utilizados para definir la forma de la zapata (con coordenadas  $X_i$ ,  $Y_i$  respecto al sistema global de ejes XY). El centroide de la zapata es generalmente elegido como el origen del sistema de ejes X Y, aunque se puede seleccionar algún otro punto.

El sistema local de ejes xy es formado por el eje neutro y por la línea normal bajada desde el vértice más alejado a compresión (con coordenadas globales  $X_e$ ,  $Y_e$ ). El sistema local xy es utilizado para definir las presiones bajo la zapata, y también para efectuar las integraciones numéricas necesarias.

Dos vértices consecutivos  $i$  y  $i+1$  definen la línea recta  $y = a_i x + b_i$  en el sistema local xy, las dos líneas perpendiculares trazadas desde los vértices  $i$  y  $i+1$ , el eje neutro x y la recta  $y = a_i x + b_i$  definen un trapecio, para los vértices que cumplen  $Y_i > A X_i + b_i$

$$c = \frac{ABS(AX_e - Y_e + b)}{\sqrt{A^2 + 1}} \quad (1a)$$

$$X_a = X_e + c \sin \alpha \quad (1b)$$

$$Y_a = Y_e - c \cos \alpha \quad (1c)$$

$$r_i = x_i = (X_i - X_a) \cos \alpha + (Y_i - Y_a) \sin \alpha \quad (1d)$$

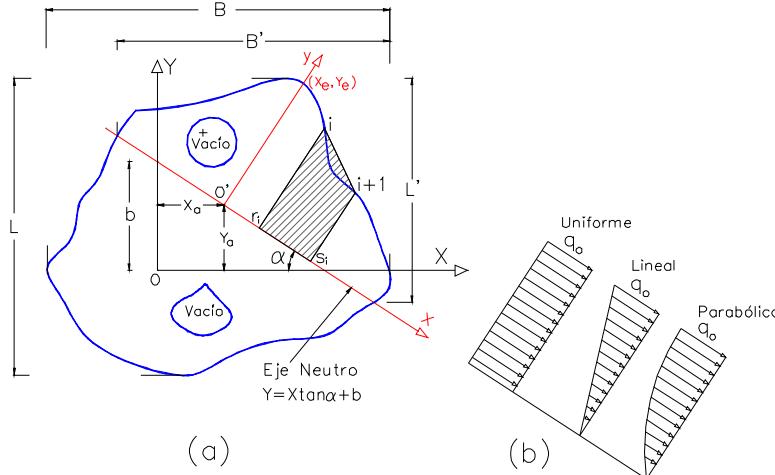
$$s_i = x_{i+1} - X_a \cos \alpha + (Y_{i+1} - Y_a) \sin \alpha \quad (1e)$$

$$y_i = (Y_i - Y_a) \cos \alpha - (X_i - X_a) \sin \alpha \quad (1f)$$

$$y_{i+1} = (Y_{i+1} - Y_a) \cos \alpha - (X_{i+1} - X_a) \sin \alpha \quad (1g)$$

$$a_i = (y_{i+1} - y_i) / (x_{i+1} - x_i) \quad (1h)$$

$$b_i = y_i - a_i x_i \quad (1i)$$



**Figura 1: modelo de una zapata superficial de forma arbitraria bajo flexión biaxial:  
(a) Parámetros geométricos; y (b) Modelos de distribución de presiones bajo una zapata.**

Cuando el eje neutro cruza el perímetro de la zapata, los puntos de intersección se encuentran como sigue:

$$\text{Cuando } Y_i < Y_{i+1}, \text{ entonces: } r_i = -b_i/a_i \quad (1j)$$

$$\text{Cuando } Y_i > Y_{i+1}, \text{ entonces: } s_i = -b_i/a_i \quad (1k)$$

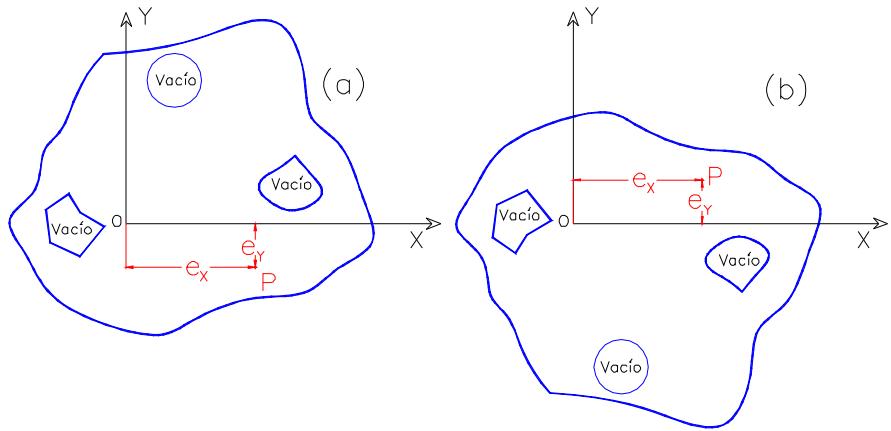
Si después de elegir los ejes globales XY, se desea analizar la zapata para carga axial con excentricidades en los cuadrantes 3 y 4, es necesario que los ejes roten de tal forma que las excentricidades queden en el primer o segundo cuadrante con relación a la nueva orientación de los ejes como se muestra en la Figura 2.

Se denotara con  $P_n$  a la carga axial y con  $P_n$ ,  $M_{nX} = P_n e_Y$ , y  $M_{nY} = P_n e_X$  representan la carga axial y momentos flectores nominales alrededor de los ejes X y Y, respectivamente. Estas cantidades se suponen conocidas. Las ecuaciones de equilibrio producen:

$$P_n = \sum_{i=1}^{n_t} P_i \quad (2a)$$

$$M_{nX} = \sin \alpha \sum_{i=1}^{n_t} M_{iy} + \cos \alpha \sum_{i=1}^{n_t} M_{ix} + Y_a \sum_{i=1}^{n_t} P_i \quad (2b)$$

$$M_{nY} = \cos \alpha \sum_{i=1}^{n_t} M_{iy} - \sin \alpha \sum_{i=1}^{n_t} M_{ix} + X_a \sum_{i=1}^{n_t} P_i \quad (2c)$$



**Figura 2: Rotación de los ejes globales x y para considerar cargas con excentricidades en los cuadrantes 3 y 4: (a) Posición original de los ejes XY; (b) Ejes X-Y rotados**

En las ecuaciones (2<sup>a</sup>)-(2c),  $P_i$ ,  $M_{ix}$  y  $M_{iy}$  son las contribuciones del trapecio  $i$  a la carga axial y momentos flectores, respectivamente (con respecto a los ejes locales  $x$  y  $y$ ). Estas tres cantidades pueden ser calculadas integrando sobre el área de cada trapecio como sigue:

$$P_i = \int_{r_i}^{s_i} \int_0^{a_i x + b_i} q \, dy \, dx \quad (3a)$$

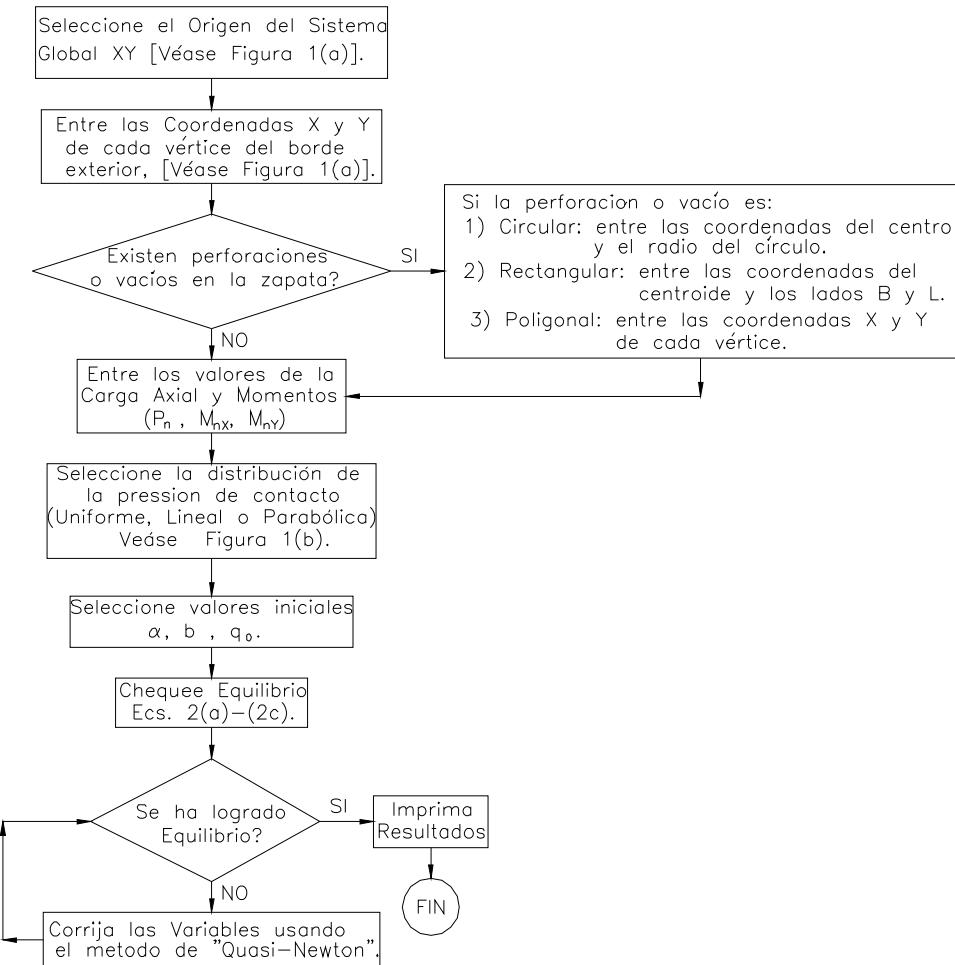
$$M_{ix} = \int_{r_i}^{s_i} \int_0^{a_i x + b_i} q \, y \, dy \, dx \quad (3b)$$

$$M_{iy} = \int_{r_i}^{s_i} \int_0^{a_i x + b_i} q \, x \, dy \, dx \quad (3c)$$

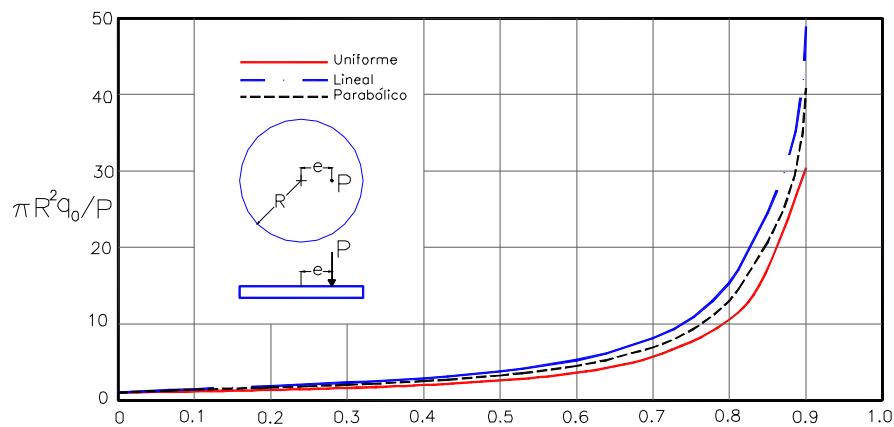
En el Apéndice I se presentan formas explícitas de las integrales anteriores para varios modelos de distribución de presiones bajo la zapata (uniforme, lineal o parabólica) como lo muestra la Figura 1(b). La Figura 3 muestra el diagrama de flujo utilizado en el análisis de una zapata bajo flexión biaxial.

## AYUDAS GRÁFICAS

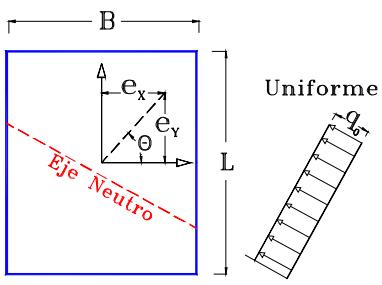
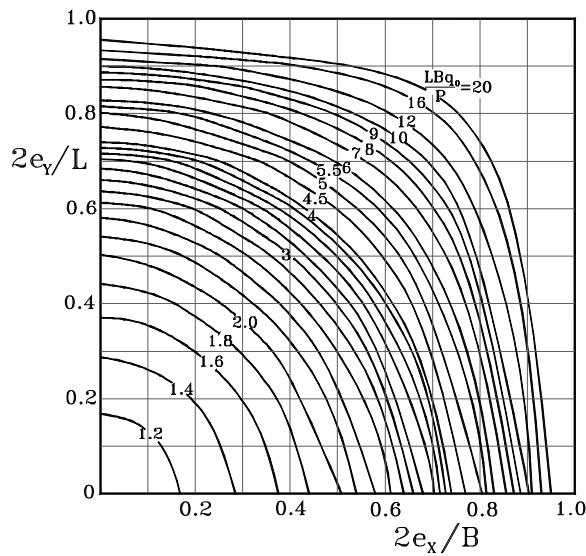
La Figura 4 muestra la variación de la presión máxima con la excentricidad para una zapata circular. Las Figuras 5 (a)-(c) muestran gráficas para calcular la presión máxima en una zapata rectangular bajo carga axial y flexión biaxial. Las Figuras 6(a)-(c) muestran gráficas para calcular la presión máxima bajo una zapata en forma de anillo circular bajo carga axial excéntrica.



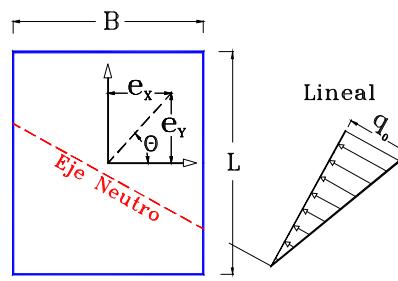
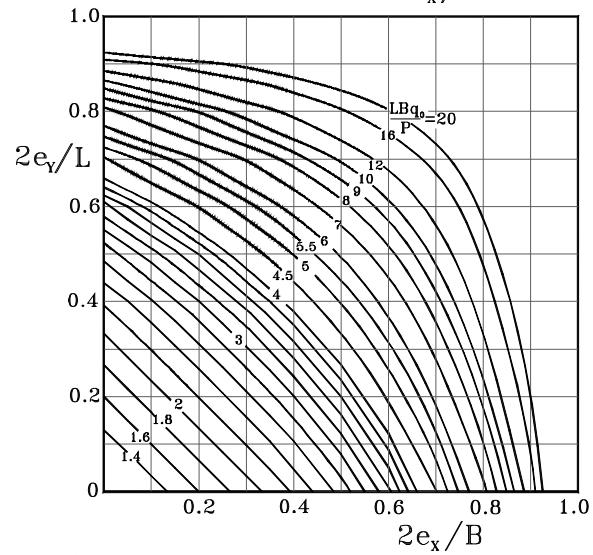
**Figura 3: Diagrama de flujo del programa de computador.**



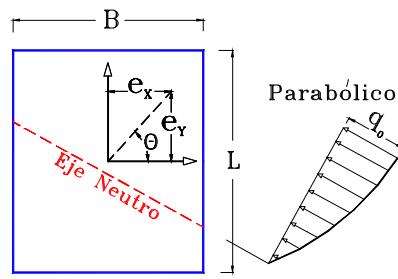
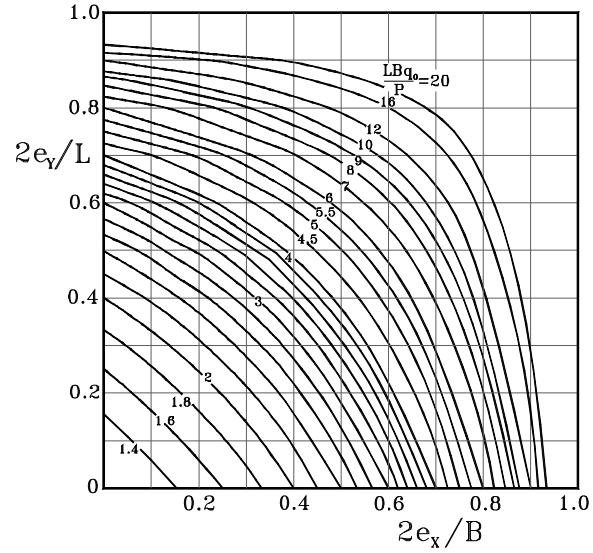
**Figura 4: Presión máxima bajo una zapata circular.**



(a)

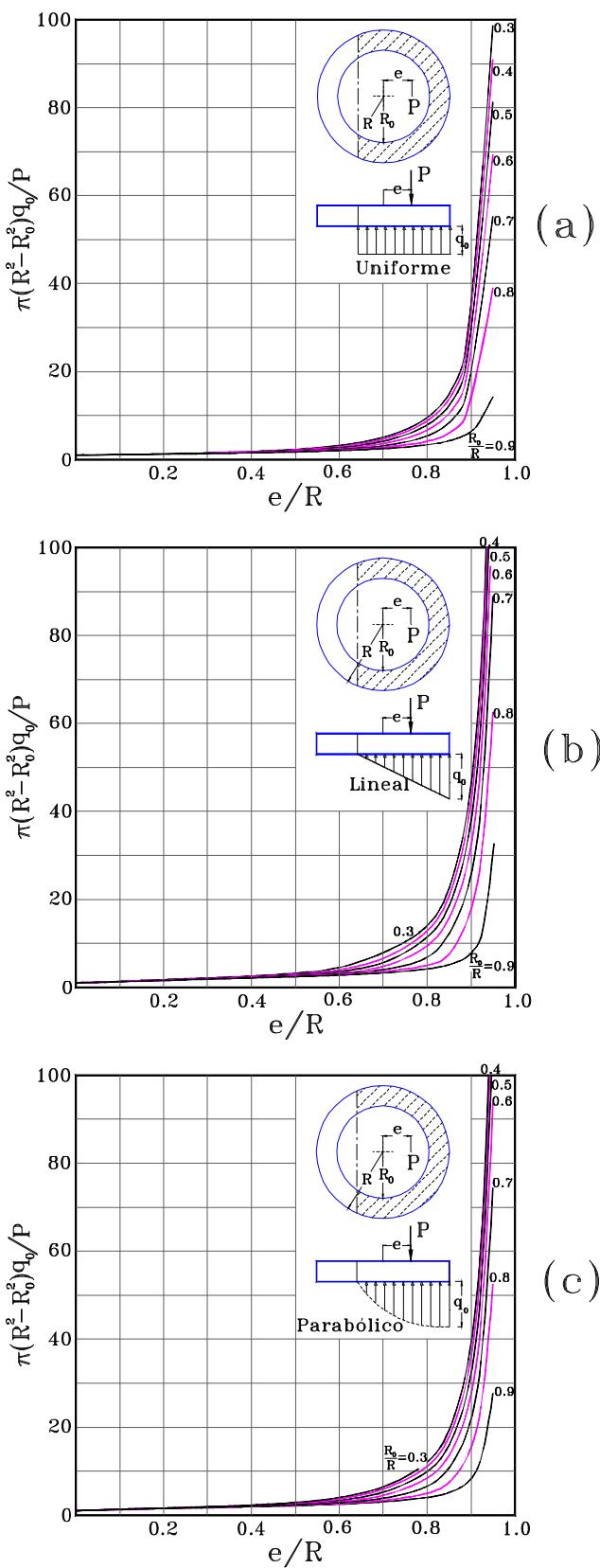


(b)



(c)

**Figura 5: Presión máxima bajo una zapata rectangular con distribución de presiones: (a) uniforme; (b) lineal; y (c) parabólica.**



**Figura 6: Presión máxima bajo una zapata de forma de anillo con distribución de presiones: (a) uniforme; (b) lineal; y (c) parabólica.**

## EJEMPLOS DE ANÁLISIS DE ZAPATAS IRREGULARES

### Ejemplo 1

Este ejemplo ilustra cómo pueden construirse ayudas gráficas para calcular la presión máxima bajo una zapata en forma de trapecio isósceles que son usualmente usadas como fundaciones combinadas. En este ejemplo  $\omega=70^\circ$ ,  $B_2/B_1=3$ . Los resultados se muestran en la Figura 7.

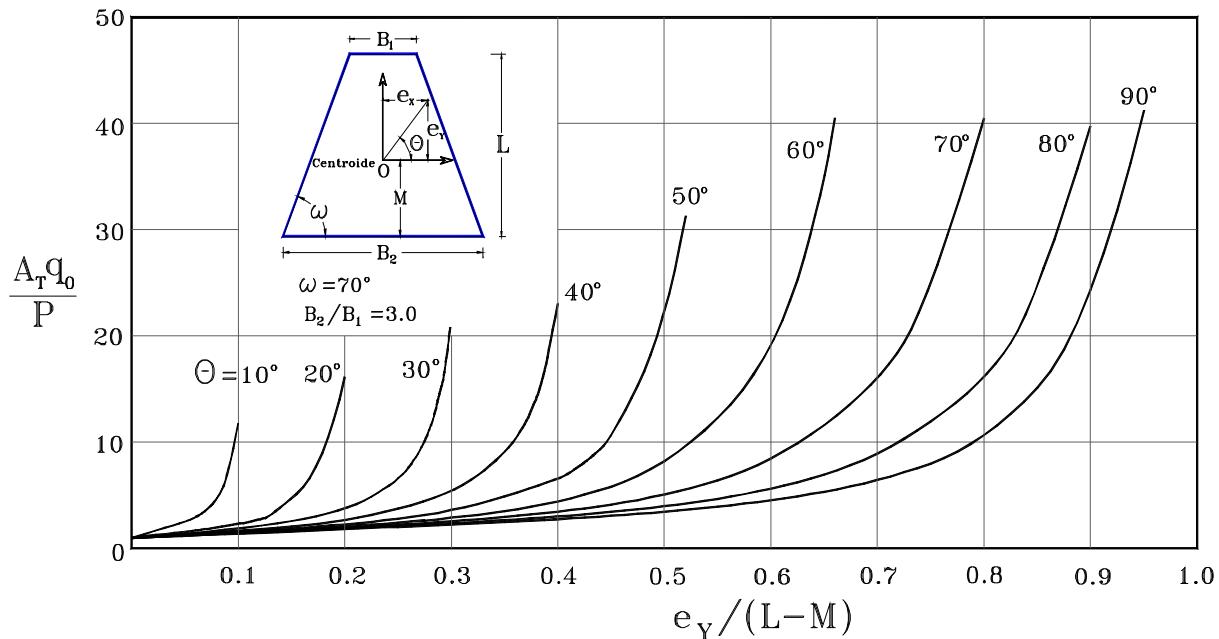


Figura 7: Ejemplo 1. Presión máxima bajo una zapata trapezoidal.

### Ejemplo 2

Calcule la presión máxima de contacto entre el suelo y una zapata cuadrada con un corte en una esquina como se muestra en la figura 8. Suponga que:  $L= 10$  pies (3.048 m), y un corte de esquina de  $3.0 \times 1.50$  pies (0.914  $\times$  0.457 m). La fuerza axial aplicada es de axial 540 kip (2,402.028 kN) localizada en el centro del cuadrado. Compare los resultados calculados con los resultados presentados por Bowles (1977).

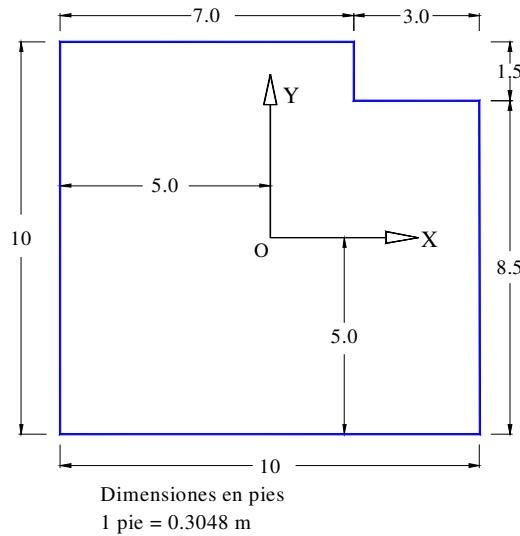


Figura 8: Ejemplo 2. Zapata cuadrada con un corte en una esquina bajo flexión biaxial.

### Solución:

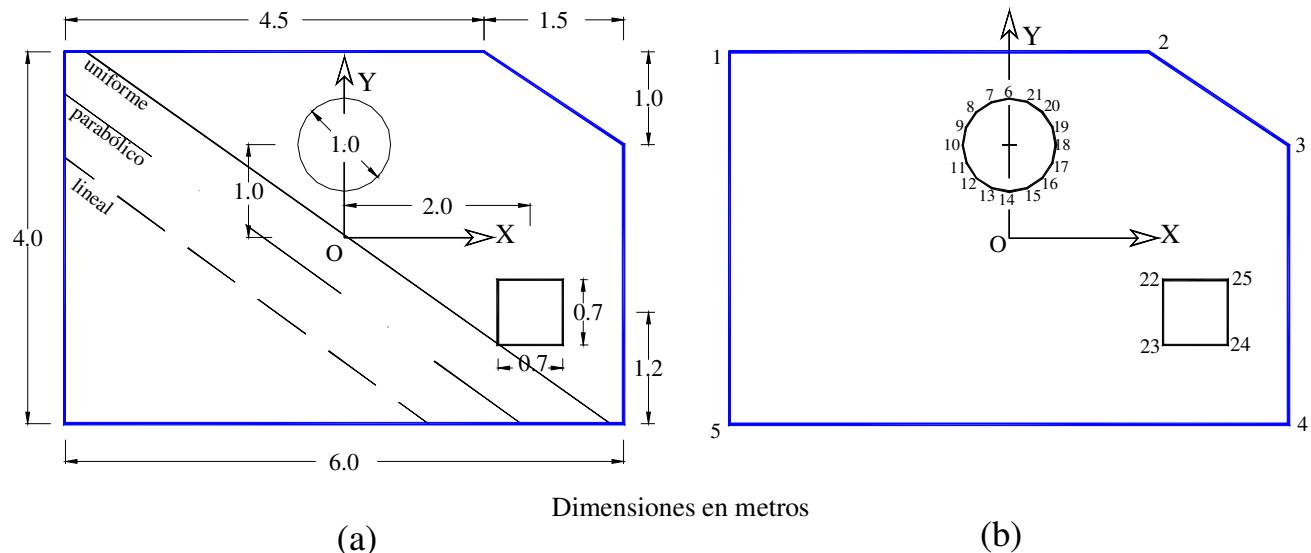
Bowles (1977) analizó este problema utilizando tres modelos diferentes: 1) la zapata como una zapata rígida y obtuvo una presión contacto máxima en el vértice de 4 de magnitud 6.90 kip/pie<sup>2</sup> (330.37 kN/m<sup>2</sup>); 2) la zapata como una losa rígida (“mat foundation”) con la columna articulada en el extremo inferior y obtuvo una presión contacto máxima en el vértice de 4 de magnitud 6.629 kip/pie<sup>2</sup> (317.396 kN/m<sup>2</sup>); y finalmente 3) la zapata como una losa rígida (“mat foundation”) con la columna empotrada en el extremo inferior y obtuvo una presión contacto máxima en el vértice de 3 de magnitud 5.755 kip/pie<sup>2</sup> (275.549 kN/m<sup>2</sup> ). La localización del eje neutro no fue reportada o discutida por Bowles (1977).

Este problema fue analizado con el algoritmo propuesto en esta publicación para zapatas irregulares con las tres distribuciones de presión (uniforme, lineal y parabólica) suponiendo los siguientes valores iniciales:  $\alpha = -30^\circ$ ,  $b = -4$  pie (-1.219 m), y  $q_0 = 5.40$  kip/pie<sup>2</sup> (258.552 kN/m<sup>2</sup>).

Para el caso de distribución uniforme, la presión de contacto máxima fue en el vértice 2 de magnitud 5.929 kip/pie<sup>2</sup> (283.88 kN/m<sup>2</sup>) y el eje neutro está localizado por  $\alpha = -25.27^\circ$  y  $b = -5.315$  pies (-1.62 m). Para el caso de distribución lineal, la presión de contacto máxima fue en el vértice 4 de magnitud 6.904 kip/pie<sup>2</sup> (330.563 kN/m<sup>2</sup>) y el eje neutro está localizado por  $\alpha = -39.55^\circ$  y  $b = -36.387$  pies (-11.09 m). Finalmente, para el caso de distribución parabólica, la presión de contacto máxima fue en el vértice 4 de magnitud 6.798 kip/pie<sup>2</sup> (325.488 kN/m<sup>2</sup>) y el eje neutro está localizado por  $\alpha = -39.51^\circ$  con  $b = -18.752$  pies (-5.715 m).

### Ejemplo 3 (paso a paso)

Una zapata rectangular con  $L = 6.0$  m,  $B = 4.0$  m fue proyectada para soportar una carga axial  $P_n = 500$  kN y momentos flectores  $M_{nX} = 300$  kN-m y  $M_{nY} = 500$  kN-m. Después de proyectada, es necesario abrir dos vacíos y hacer un corte para ubicar un equipo mecánico como se muestra en la Figura 9(a). Analice los efectos de los vacíos y el corte en la presión máxima bajo la zapata.



**Figura 9: Ejemplo 3. Zapata con cortes y vacíos bajo flexión biaxial:**  
**(a) Geometría de la zapata; (b) Vértices utilizados para aproximar la forma de la zapata.**

**Solución:**

**Paso 1:** El perímetro exterior y los vacíos son aproximados por polígonos. La enumeración de los vértices exteriores se hace en el sentido de las agujas del reloj mientras los vértices de los vacíos en sentido contrario como se muestra en la Figura 9(b).

**Paso 2:** Los cálculos fueron comenzados con los siguientes valores de las variables:  $\alpha = 50^\circ$ ;  $b = -1.0 \text{ m}$ ;  $q_o = kP_n/(LB)$ , donde  $k > 1$ . En este caso  $k = 5.0$  por lo tanto  $q_o = 104.166 \text{ kN/m}^2$ .

**Paso 3:** Las sumatorias de las ecuaciones 2a-2c son calculadas para el perímetro exterior y los dos vacíos y los valores se presentan en las Tablas 1-4. Utilizando las ecuaciones 1a-1c tenemos  $X_a = 0.254 \text{ m}$ ,  $Y_a = -1.303 \text{ m}$ ,  $c = 3.583 \text{ m}$ .

**Tabla 1: Sumatorias de las ecuaciones 2a-2c para el borde exterior.**

Sumatorias (1)	Uniforme (2)	Lineal (3)	Parabólica (4)
$\sum_{i=1}^n t_i P_i$	1521.499	619.044	910.724
$\sum_{i=1}^n t_i M_{ix}$	2218.476	1244.422	1621.970
$\sum_{i=1}^n t_i M_{iy}$	-1166.147	-336.369	-566.323

**Tabla 2: Sumatorias de las ecuaciones 2a-2c para el vacío circular.**

Sumatorias (1)	Uniforme (2)	Lineal (3)	Parabólica (4)
$\sum_{i=1}^n t_i P_i$	-79.725	-57.462	910.724
$\sum_{i=1}^n t_i M_{ix}$	-102.493	-76.594	-88.221
$\sum_{i=1}^n t_i M_{iy}$	153.74	110.807	129.904

**Tabla 3: Sumatorias de las ecuaciones 2a-2c para el vacío rectangular.**

Sumatorias (1)	Uniforme (2)	Lineal (3)	Parabólica (4)
$\sum_{i=1}^n t_i P_i$	-51.041	-39.355	-44.735
$\sum_{i=1}^n t_i M_{ix}$	-84.762	-66.323	-74.843
$\sum_{i=1}^n t_i M_{iy}$	-37.571	-28.969	-32.929

**Paso 4:** Las ecuaciones 2a-2c son transformadas en las ecuaciones 10a-10c como se indica en el Apéndice II y se eligen los incrementos de las variables para obtener las derivadas parciales de las funciones  $f$ ,  $g$  y  $h$ :  $\Delta A = \Delta T \tan \alpha = 1 \times 10^{-4}$ ,  $\Delta b = 1 \times 10^{-4}$  m, y  $\Delta q_o = 1 \times 10^{-4}$  kN/m<sup>2</sup>. Para los valores iniciales de las variables tenemos para el modelo uniforme:  $f(A, b, q_o) = 890.732$  kN;  $g(A, b, q_o) = -2.934$  kN-m;  $h(A, b, q_o) = -735.339$  kN-m.

Utilizamos la ecuación (13) para calcular las derivadas parciales de  $f$ ,  $g$  y  $h$ :

$$\begin{aligned} f_A(A, b, q_o) &= 293.370 \text{ kN}; & g_A(A, b, q_o) &= 391.160 \text{ kN-m}; & h_A(A, b, q_o) &= -574.389 \text{ kN-m} \\ f_b(A, b, q_o) &= -349.624 \text{ kN/m}; & g_b(A, b, q_o) &= -4.89 \times 10^{-9} \text{ kN}; & h_b(A, b, q_o) &= 293.37 \text{ kN} \\ f_{q_o}(A, b, q_o) &= 13.351 \text{ m}^2; & g_{q_o}(A, b, q_o) &= 2.851 \text{ m}^3; & h_{q_o}(A, b, q_o) &= 11.859 \text{ m}^3 \end{aligned}$$

**Tabla 4: Total borde exterior más vacíos.**

Sumatorias (1)	Uniforme (2)	Lineal (3)	Parabólica (4)
$\sum_{i=1}^n t_i P_i$	1390.732	522.226	798.624
$\sum_{i=1}^n t_i M_{ix}$	2031.220	1101.503	1458.905
$\sum_{i=1}^n t_i M_{iy}$	-1049.978	-254.531	-469.348

**Paso 5:** Ahora utilizamos para el modelo uniforme las ecuaciones 12a-12c

$$DET = \begin{vmatrix} 293.370 & -349.624 & 13.351 \\ 391.160 & 0 & 2.851 \\ -574.389 & 293.370 & 11.859 \end{vmatrix} = 3,481,217.556$$

$$D_A = \frac{1}{DET} \begin{vmatrix} -890.732 & -349.624 & 13.351 \\ 2.934 & 0 & 2.851 \\ 735.339 & 293.370 & 11.859 \end{vmatrix} = 0.431$$

$$D_b = \frac{1}{DET} \begin{vmatrix} 293.370 & -890.732 & 13.351 \\ 391.160 & 2.934 & 2.851 \\ -574.389 & 735.339 & 11.859 \end{vmatrix} = 0.689 \text{ m}$$

$$D_{q_o} = \frac{1}{DET} \begin{vmatrix} 293.370 & -349.624 & -890.732 \\ 391.160 & 0 & 2.934 \\ -574.389 & 293.370 & 735.339 \end{vmatrix} = -58.153 \text{ kN-m}$$

**Paso 6:** Utilizamos las ecuaciones 11a-11c para corregir las variables

$$A_2 = A_1 + D_A = -1.191 + 0.431 = 0.760$$

$$b_2 = b_1 + D_b = -1.0 m + 0.689 m = -0.311 m$$

$$q_{02} = q_{01} + D_{q0} = 104.166 \text{ kN/m}^2 - 58.153 \text{ kN/m}^2 = 46.013 \text{ kN/m}^2$$

De forma similar, los cálculos de los pasos 4-6 pueden ser realizados para los modelos lineal y parabólico. Los pasos 2-6 descritos arriba se repiten, y se calcularon nuevos valores para A, b, q<sub>0</sub> hasta que se alcanza la convergencia. Los valores numéricos de las principales variables y la convergencia para los tres modelos se resumen en las Tablas 5 y 6.

**Tabla 5: Parámetros importantes en la solución del problema del Ejemplo 3.**

Iteración (1)	A= tan $\alpha$			b (m)			q <sub>0</sub> (kN/m <sup>2</sup> )		
	Uniforme (2)	Lineal (3)	Parabólica (4)	Uniforme (5)	Lineal (6)	Parabólica (7)	Uniforme (8)	Lineal (9)	Parabólica (10)
Initial	-1.191	-1.191	-1.191	-1.0	-1.0	-1.0	104.166	104.166	104.166
1	-0.760	-0.624	-0.731	-0.311	-1.652	-0.722	46.013	70.129	64.274
2	-0.687	-0.736	-0.723	0.049	-1.374	-0.625	49.855	74.596	66.010
3	-0.708	-0.731	-0.723	0.027	-1.337	-0.626	50.821	77.221	66.070
4	-0.709	-0.732		0.028	-1.338		50.841	77.225	

**Tabla 6: Error máximo en las ecuaciones (10a) y (10c).**

Iteración (1)	Uniforme		Lineal		Parabólica	
	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)
Initial	890.732		313.212		519.320	
1	51.966		102.524		10.943	
2	26.181		15.329		0.662	
3	0.340		0.184		1.2x10 <sup>-4</sup>	
4	1.3x10 <sup>-4</sup>		4.2x10 <sup>-5</sup>			

## RESUMEN Y CONCLUSIONES

Se propuso un modelo para encontrar la posición del eje neutro y la presión máxima bajo una zapata superficial rígida de forma arbitraria sometida a carga axial y momentos flectores biaxiales se puede estudiar los efectos de vacíos (agujeros) y cortes en zapatas rígidas. Las losas de fundación ("mat foundations") y zapatas combinadas pueden ser analizadas reduciendo las cargas axiales y los momentos transmitidos por columnas o pilares, a una carga axial resultante y momentos flectores netos y considerando que la zapata se comporta rígidamente.

La flexión biaxial es un efecto que no puede ser ignorado al dimensionar zapatas. Esta situación generalmente ocurre en pilares de puentes, chimeneas, y en edificios sometidos a cargas de viento o terremotos y estructuras de contención. Cuando la excentricidad de la carga axial es a lo largo del eje de simetría se genera flexión uniaxial alrededor del eje normal. Cuando existen momentos alrededor de los ejes globales XY o cuando sólo existe momento flector en uno de los ejes, pero la forma de la zapata es asimétrica ocurre flexión biaxial. Para el caso biaxial, se presentan ayudas de diseño para el cálculo de las presiones máximas bajo zapatas con las formas geométricas más utilizadas, y para las formas geométricas no convencionales se presenta un algoritmo basado en la integral de Gauss. Se presentan tres modelos de distribución de presiones bajo la zapata. Los elementos matemáticos básicos del modelo se utilizan de tal forma que pueda ser fácilmente programado. Tres ejemplos de zapatas irregulares incluyendo uno con detalles de cálculo "paso a paso" son presentados.

## REFERENCIAS

- Bowles, J. E. (1977). *Foundation Analysis and Design*, 2<sup>nd</sup> Ed., McGraw Hill, New York.
- Gurfinkel, G. (1970). "Analysis of footings subjected to biaxial bending," *Journal of the Structural Division, ASCE*, 93(6), pp. 1049-1059.
- Hackman, M. (1977). "Bearing pressures on bridge footings," *Civil Engineering*, (11), pp. 37-39.
- Highter, W. H., y Anders, J. C. (1985). "Dimensioning footings subjected to eccentric loads," *Journal of Geotechnical Engineering Div., ASCE*, 111(5), pp. 659-665
- Irles, R., y Irles, F. (1994). "Explicit stresses under rectangular footings," *Journal of Geotechnical Engineering*, ASCE, 120(2), pp. 444-450.
- Jarquio, R, y Jarquio, V. (1983). "Design footing area with biaxial bending," *Journal of Geotechnical Engineering Div., ASCE*, 109(10), pp.1337-1341.
- Kramrisch, F. (1985). "Footings" Chapter 5 in *Handbook of Concrete Engineering*, Second Edition, M. Fintel, Editor, Nostrand Reinhold Company, New York.
- Plock, H. J. (1963). "Fast way to find Pressure under Footings," *Engineering News-Record*, April 25, pp 50-51.
- Rodríguez, J. A., Aristizabal-Ochoa, Dario, J. (1999). "Biaxial interaction diagrams for short R/C columns of any cross section," *Journal of Structural. Engineering, ASCE*, 125(6), pp. 672-683.
- Yen, J. R. (1991). "Quasi-Newton method for reinforced concrete column analysis and design," *Journal of Structural. Engineering, ASCE*, 117(3), pp 657-666.
- Zweig, A. (1966). "Eccentrically loaded trapezoidal or round footings," *Proceedings ASCE, ST-1*, pp. 161-168.

## APÉNDICE I. DERIVACIÓN DE FORMAS EXPLÍCITAS PARA LAS INTEGRALES (3a)-(3b)

### 1. Distribución uniforme de presiones bajo la zapata [ $q = q_0$ ]

Para  $a_i = 0$ :

$$P_i = q_0(s_i - r_i)b_i \quad (4a)$$

$$M_{ix} = \frac{1}{2}q_0(s_i - r_i)b_i^2 \quad (4b)$$

$$M_{iy} = \frac{1}{2}q_0(s_i^2 - r_i^2)b_i \quad (4c)$$

Para  $a_i \neq 0$ :

$$P_i = q_0 \left[ s_i \left( \frac{a_i s_i}{2} + b_i \right) - r_i \left( \frac{a_i r_i}{2} + b_i \right) \right] \quad (5a)$$

$$M_{iy} = q_0 \left[ \frac{a_i}{3} (s_i^3 - r_i^3) + \frac{b_i}{2} (s_i^2 - r_i^2) \right] \quad (5b)$$

$$M_{ix} = \frac{q_0}{6a_i} \left[ (a_i s_i + b_i)^3 - (a_i r_i + b_i)^3 \right] \quad (5c)$$

### 2. Distribución lineal de presiones bajo la zapata [ $q = q_0 y/c$ ]

Para  $a_i = 0$ :

$$P_i = \frac{1}{2c}q_0(s_i - r_i)b_i^2 \quad (6a)$$

$$M_{ix} = \frac{1}{3c}q_0(s_i - r_i)b_i^3 \quad (6b)$$

$$M_{iy} = \frac{1}{4c}q_0(s_i^2 - r_i^2)b_i^2 \quad (6c)$$

Para  $a_i \neq 0$ :

$$P_i = \frac{q_0}{6a_i c} \left[ (a_i s_i + b_i)^3 - (a_i r_i + b_i)^3 \right] \quad (7a)$$

$$M_{ix} = \frac{q_o}{12a_i c} \left[ (a_i s_i + b_i)^4 - (a_i r_i + b_i)^4 \right] \quad (7b)$$

$$M_{iy} = \frac{q_o}{24a_i^2 c} \left[ (a_i s_i + b_i)^3 (3a_i s_i - b_i) - (a_i r_i + b_i)^3 (3a_i r_i - b_i) \right] \quad (7c)$$

3. Distribución Parabólica de presiones bajo la zapata [ $q = q_0(y/c)^{1/2}$ ]

Para  $a_i = 0$

$$P_i = \frac{2q_o}{3\sqrt{c}} b_i^{3/2} (s_i - r_i) \quad (8a)$$

$$M_{ix} = \frac{2q_o}{5\sqrt{c}} b_i^{5/2} (s_i - r_i) \quad (8b)$$

$$M_{iy} = \frac{2q_o}{3\sqrt{c}} b_i^{3/2} (s_i^2 - r_i^2) \quad (8c)$$

Para  $a_i \neq 0$ :

$$P_i = \frac{4q_o}{15a_i\sqrt{c}} \left[ (a_i s_i + b_i)^{5/2} - (a_i r_i + b_i)^{5/2} \right] \quad (9a)$$

$$M_{ix} = \frac{4q_o}{35a_i\sqrt{c}} \left[ (a_i s_i + b_i)^{7/2} - (a_i r_i + b_i)^{7/2} \right] \quad (9b)$$

$$M_{iy} = \frac{4q_o}{105a_i^2\sqrt{c}} \left[ (a_i s_i + b_i)^{5/2} (5a_i s_i - 2b_i) - (a_i r_i + b_i)^{5/2} (5a_i r_i - 2b_i) \right] \quad (9c)$$

## APÉNDICE II. ALGORITMO “QUASI-NEWTON” PARA LA SOLUCIÓN DE LAS ECUACIONES (2a)-(2c)

Para resolver el conjunto acoplado de ecuaciones (2a)-(2c) (las cuales son altamente no lineales), es necesario replantearlas como lo ha sugerido Yen (1991) en la siguiente forma:

$$f(A, b, q_o) = P_n - F(A, b, q_o) = 0 \quad (10a)$$

$$g(A, b, q_o) = e_Y P_n - G(A, b, q_o) = 0 \quad (10b)$$

$$h(A, b, q_o) = e_X P_n - H(A, b, q_o) = 0 \quad (10c)$$

Las ecuaciones (11) son luego utilizadas para corregir cada una de las tres variables, así:

$$A_{j+1} = A_j + D_A$$

(11a)

$$b_{j+1} = b_j + D_b$$

(11b)

$$q_{o,j+1} = q_{o,j} + D_{q_o} \quad (11c)$$

donde  $D_A$ ,  $D_b$  y  $D_{q_o}$  son los residuos después de cada iteración los cuales se pueden evaluar de las siguientes tres expresiones:

$$D_A = \frac{1}{DET} \begin{vmatrix} -f(A, b, q_o) & f_b(A, b, q_o) & f_{q_o}(A, b, q_o) \\ -g(A, b, q_o) & g_b(A, b, q_o) & g_{q_o}(A, b, q_o) \\ -h(A, b, q_o) & h_b(A, b, q_o) & h_{q_o}(A, b, q_o) \end{vmatrix} \quad (12a)$$

$$D_b = \frac{1}{DET} \begin{vmatrix} f_A(A, b, q_o) & -f(A, b, q_o) & f_{q_o}(A, b, q_o) \\ g_A(A, b, q_o) & -g(A, b, q_o) & g_{q_o}(A, b, q_o) \\ h_A(A, b, q_o) & -h(A, b, q_o) & h_{q_o}(A, b, q_o) \end{vmatrix} \quad (12b)$$

$$D_{q_o} = \frac{1}{DET} \begin{vmatrix} f_A(A, b, q_o) & f_b(A, b, q_o) & -f(A, b, q_o) \\ g_A(A, b, q_o) & g_b(A, b, q_o) & -g(A, b, q_o) \\ h_A(A, b, q_o) & h_b(A, b, q_o) & -h(A, b, q_o) \end{vmatrix} \quad (12c)$$

donde DET es el valor numérico del determinante dado por la ecuación (12d).

$$DET = \begin{vmatrix} f_A(A, b, q_o) & f_b(A, b, q_o) & f_{q_o}(A, b, q_o) \\ g_A(A, b, q_o) & g_b(A, b, q_o) & g_{q_o}(A, b, q_o) \\ h_A(A, b, q_o) & h_b(A, b, q_o) & h_{q_o}(A, b, q_o) \end{vmatrix} \quad (12d)$$

La fórmula de diferencias finitas (“central difference”) es utilizada para el cálculo aproximado de las derivadas parciales como lo muestran la ecuación (13).

$$f_A(A, b, q_o) = \frac{f(A + \Delta A, b, q_o) - f(A - \Delta A, b, q_o)}{2(\Delta A)} \quad (13)$$

### APÉNDICE III. NOTACIÓN

- $A$  =  $\tan \alpha$ ;  
 $a_i$  = Tangente de la línea definida por los vértices  $i$  e  $i+1$  de un trapecio  $i$  en el sistema  $x, y$ ;  
 $b$  = Intercepto del eje neutro con el eje  $Y$   
 $c$  = Distancia del vértice extremo a compresión ( $X_e, Y_e$ ) al eje neutro;  
 $e_x, e_y$  = Excentricidades alrededor de los ejes  $XY$ ;  
 $n_t$  = Número de trapecios usados para aproximar la zona de la zapata bajo compresión.  
 $q_o$  = Máxima presión bajo la zapata;  
 $X_a, Y_a$  = Coordenadas del origen  $O'$  con respecto a los ejes globales  $XY$ ;  
 $X_e, Y_e$  = Coordenadas del punto más alejado a compresión con respecto a los ejes globales  $XY$ ;  
 $\alpha$  = Ángulo de inclinación del eje neutro con respecto al eje  $X$ ;  
 $\theta$  =  $\tan^{-1}(M_{hX}/M_{hY})$ .

