

Optimización topológica con la técnica de los autómatas celulares híbridos

Andrés Tovar

Departamento de Ingeniería Mecánica y Mecatrónica
Universidad Nacional de Colombia
Cr. 30 45-03, Bogotá, Colombia
Tel.: 57-1-316-53 20; Fax: 57-1-316-53 33
e-mail: atovarp@unal.edu.co

Resumen

La técnica de los autómatas celulares híbridos—*hybrid cellular automata* (HCA) fue originalmente desarrollada para simular el proceso de adaptación funcional de la estructura trabecular ósea. Esta técnica combina reglas de evolución de los autómatas celulares con análisis estructural por elementos finitos. Con algunos ajustes en sus parámetros, esta técnica demostró ser una herramienta efectiva para resolver problemas de optimización estructural. El objetivo del presente trabajo es demostrar el uso de los HCA en problemas de optimización topológica para la obtención de estructuras livianas de máxima rigidez.

Palabras clave: *diseño óptimo, optimización topológica, optimización de forma, autómatas celulares.*

TOPOLOGY OPTIMIZATION WITH THE HYBRID CELLULAR AUTOMATON TECHNIQUE

Summary

The hybrid cellular automaton (HCA) algorithm is a methodology developed to simulate the process of structural adaptation in bones. This methodology combines elements of the cellular automaton paradigm with finite element analysis. With some modifications, the HCA algorithm has proved to be computationally efficient to solve structural optimization problems. The objective of this investigation is to demonstrate the use of the HCA algorithm in topology optimization to obtain light structures with maximum rigidity.

Keywords: *design optimization, structural optimization, shape optimization, cellular automata.*

INTRODUCCIÓN

El problema de optimización topológica consiste en encontrar la mejor distribución de material dentro de un volumen finito denominado *dominio de diseño*, de tal forma que la estructura resultante maximice algún tipo de desempeño mecánico bajo ciertas restricciones. En un medio continuo, el dominio de diseño es discretizado en elementos que representan porciones finitas del material. El algoritmo de optimización topológica selectivamente remueve o reubica estos elementos para conseguir el desempeño óptimo de la estructura. Los métodos numéricos disponibles en algunos programas comerciales parametrizan este problema de distribución de material en una serie de variables de diseño continuas.

En optimización topológica, el número de elementos en un dominio diseño y, por lo tanto, el número de variables de diseño, depende del tamaño y la resolución requeridos en la estructura final. No obstante el diseño de un componente mecánico pequeño puede requerir decenas de miles de variables de diseño. Adicionalmente, el coste computacional aumenta exponencialmente con el número de elementos involucrados. Por esta razón, los métodos de

optimización clásicos basados en información de gradiente pueden no resultar prácticos para resolver problemas de optimización topológica. Esto ha motivado el desarrollo de métodos numéricos especializados y computacionalmente eficientes. Dentro de estos, cabe mencionar los métodos de aproximación^{20,21,29}, el método de movimiento de asíntotas (MMA)²³ y los métodos basados en condiciones de optimalidad (OC)^{30,18,19}.

Con cualquiera de los métodos usados en optimización topológica se pueden presentar inestabilidades numéricas tales como la formación de *tableros de ajedrez* y la *dependencia de malla*. La formación de tableros de ajedrez hace referencia a regiones en la estructura final en las cuales se alternan elementos negros (sólidos) y blancos (vacíos). La dependencia de malla hace referencia al hecho de obtener estructuras cualitativamente distintas para distintos tamaños en la malla del dominio de diseño. Usualmente, técnicas de filtrado de imágenes, restricción de gradiente y control de perímetro se utilizan para contrarrestar esta inestabilidades numéricas²². El propósito de estas técnicas es suavizar las variaciones en los valores de las variables de diseño y así disminuir el riesgo de inestabilidad. Sin embargo, el uso de estas técnicas demora la convergencia y aumenta el número de elementos “grises”, es decir con densidad intermedia.

Este trabajo presenta una técnica de optimización topológica inspirada en un modelo fenomenológico para simular el proceso de adaptación funcional de la estructura ósea²⁷. Éste se ha denominado, el método de los autómatas celulares híbridos–*hybrid cellular automata* (HCA)²⁶. En este método, el dominio de diseño se discretiza en un arreglo de autómatas celulares–*cellular automata* (CAs). Asimismo, el comportamiento de células sensoras en los huesos, cada autómata tiene la capacidad de capturar un estímulo mecánico y de comunicarse con los autómatas cercanos. Simulando el proceso de remodelamiento óseo, cada autómata también puede variar la estructura a su alrededor mediante procesos de formación y resorción de material. Este trabajo muestra la implementación de esta metodología para la obtención de estructuras livianas de máxima rigidez.

PARADIGMA DE LOS AUTÓMATAS CELULARES

Los autómatas celulares (CAs) se han usado por más de 60 años para simular procesos biológicos⁹. La primera aplicación data de los año 40 cuando Weiner y Rosenblunth³¹ utilizaron CAs para describir el funcionamiento del músculo del corazón. Sin embargo, fue John von Neumann⁸ quien formalizó la teoría de los CAs a finales de los años 40. Recientemente los CAs han sido reconocidos como una tecnología que puede cambiar el paradigma actual del modelamiento de fenómenos físicos⁹. Wolfram por ejemplo se refiere a los CAs como un nuevo tipo de ciencia³².

Los CAs son una idealización de un sistema físico en la que el tiempo y el espacio son discretos. La premisa en el modelamiento con CAs es que un problema complejo puede discretizarse en una serie de reglas simples. Estas reglas operan sobre un gran número de autómatas que sólo conocen condiciones locales. Los CAs se componen de un arreglo de autómatas que se definen por su posición i y por un conjunto de J estados definidos como

$$\boldsymbol{\alpha}_i(t) = \begin{Bmatrix} \alpha_i^1(t) \\ \alpha_i^2(t) \\ \vdots \\ \alpha_i^J(t) \end{Bmatrix} \quad (1)$$

Para cada estado α_i^j hay una regla local R_i^j que define su evolución en el tiempo. Esta evolución puede expresarse como

$$\alpha_i^j(t+1) = R_i^j(\boldsymbol{\alpha}_i(t), \boldsymbol{\alpha}_{i+\Delta_1}(t), \dots, \boldsymbol{\alpha}_{i+\Delta_N}(t)) \quad (2)$$

donde $\alpha_{i+\Delta_1}(t), \dots, \alpha_{i+\Delta_{\hat{N}}}(t)$ denota los estados de los autómatas pertenecientes a un mismo vecindario. La forma del vecindario de un autómata celular no tiene ninguna restricción en forma o tamaño, exceptuando que éstos deben ser iguales para todos los autómatas del sistema. Ya que los cálculos se limitan a los vecindarios y las reglas locales son idénticas en todo el arreglo, los CAs tienen una capacidad inherente para la computación en paralelo.

En la práctica, el tamaño de los vecindarios se limita a los autómatas adyacentes, pero este puede modificarse (Figura 1). Los vecindarios más comunes son: el de von Neumann (Figura 1b), con cuatro vecinos ($\hat{N} = 4$), y el de Moore (Figura 1c), con ocho vecinos ($\hat{N} = 8$). El tamaño del vecindario puede ser extendido tanto como se requiera (Figura 1d) o reducido hasta conformarse como vacío (Figura 1a). En este trabajo se hace uso del vecindario de Moore y del vecindario vacío.

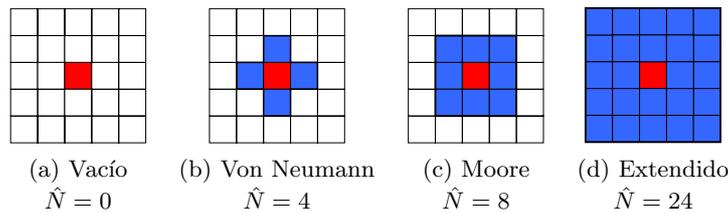


Figura 1. Vecindarios de los autómatas celulares.

Para definir la regla de evolución de los autómatas localizados en la frontera, el dominio de diseño se puede extender mediante distintas condiciones de frontera (Figura 2). Una condición de frontera fija se define con autómatas cuyos estados se encuentran pre-determinados (Figura 2a). Una condición de frontera adiabática se obtiene duplicando el estado del autómata en un vecino adicional (Figura 2b). En una condición reflectora, el estado del vecino opuesto se replica en el autómata adicional (Figura 2c). La condición de frontera periódica se utiliza cuando el dominio de diseño se asume conectado en forma de toroide (Figura 2d). En este trabajo se hace uso de condiciones de frontera fijas donde los autómatas adicionales por fuera del dominio de diseño son elementos estructurales vacíos sin propiedades mecánicas.

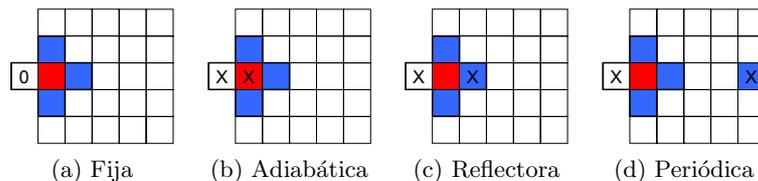


Figura 2. Condiciones de frontera en los autómatas celulares.

En la definición dada por la ecuación (2), el conjunto de reglas $\mathbf{R}_i = \{R_i^1, \dots, R_i^J\}^T$ es idéntico para todos los autómatas y se aplica simultáneamente en todos ellos. En este caso la regla de evolución es *homogénea*, ya no depende ni del tiempo ni de la posición de los autómatas. Esto origina una *dinámica sincrónica* del sistema⁹. En algunas aplicaciones es necesario introducir inhomogeneidades espaciales o temporales, por ejemplo fenómenos aleatorios. Los fenómenos asíncronos son útiles para modelar eventos que no necesariamente ocurren en paralelo. De hecho, puede ser deseable que estos eventos ocurran con una cierta probabilidad, por ejemplo remodelamiento óseo²⁶. CAs cuyas reglas de evolución dependen de una probabilidad externa se denominan *probabilísticos* mientras que si no hay una probabilidad involucrada estos se denominan *determinísticos*.

En la definición de la regla de evolución dada por la ecuación (2) el nuevo estado en el tiempo $t + 1$ depende únicamente de los estados actuales en el tiempo t . En algunas ocasiones es necesario adicionar memoria a los autómatas y definir reglas que dependen de estados anteriores $t - 1, t - 2, \dots, t - T^{27}$. Dependiendo de su definición, esta regla puede ser *reversible* o *irreversible* en el tiempo.

AUTÓMATAS CELULARES EN OPTIMIZACIÓN ESTRUCTURAL

Los modelos de autómatas celulares han inspirado diferentes técnicas de síntesis y optimización estructural. Inou *et al.*¹² implementan un algoritmo simple que usa algunos elementos de los CAs. En este algoritmo una regla de evolución local modifica el valor módulo de Young de los autómatas. Una regla de evolución basada en mecanismos de crecimiento y formación se usa para definir los detalles de la estructura. Los autómatas con un bajo módulo de elasticidad se remueven, mientras que las que tienen un módulo de elasticidad alto crean una célula en algún espacio libre alrededor. Según anotan Inou *et al.*¹³, este algoritmo permite obtener estructuras parecidas a las observadas en los huesos de las aves.

Kita y Toyoda¹⁵ presentan un algoritmo de optimización topológica basado en autómatas celulares que utiliza el espesor del autómata como variable de diseño. La regla de evolución local se deriva de las condiciones de optimalidad de una función multiobjetivo que minimiza tanto el peso de la estructura como la desviación entre el esfuerzo a la fluencia y un esfuerzo equivalente medido en un vecindario de Moore. Este algoritmo requiere cientos de iteraciones para converger a una estructura final.

Tatting y Gürdal²⁴ implementan un algoritmo para hacer diseño y análisis simultáneamente en cada iteración—*simultaneous analysis and design* (SAND). En este algoritmo las variables de diseño y las variables de estado (esfuerzo) se actualizan en cada iteración. El uso de condiciones de equilibrio local elimina la necesidad de utilizar la técnica de los elementos finitos para el análisis. El optimizador reduce iterativamente el valor del residuo entre energía de deformación interna y trabajo externo, mientras que optimiza la distribución de material en el dominio de diseño. Cientos de miles de iteraciones se requieren para conseguir convergencia, pero el tiempo computacional total puede ser menor al requerido por las técnicas que se basan en análisis por elementos finitos¹. En este algoritmo la convergencia se deteriora con el aumento del número de elementos, ya que la información de las variables de diseño se propaga muy lentamente. Estrategias de aceleración basadas en *multigrid* se han implementado para mitigar este problema¹⁵. Abdalla y Gürdal² demuestran la aplicación de este algoritmo en el diseño de una columna con restricciones en el pandeo.

Hajela y Kim¹¹ proponen una estrategia de análisis que combina autómatas celulares (CAs) con algoritmo genéticos (GAs). En este algoritmo las reglas de evolución locales se derivan usando optimización basada en GAs con principios energéticos. Los resultados del estado de deformación en los elementos del dominio de diseño muestran resultados similares a los de la solución analítica. Aún cuando este no es un método de optimización estructural, este desarrollo ilustra una alternativa al uso de los elementos finitos como herramienta para análisis estructural.

El método desarrollado en el presente trabajo se ha denominado algoritmo de los autómatas celulares híbridos (HCA). En los métodos convencionales basados en autómatas celulares no se utiliza un análisis global para determinar el estado de los autómatas. El algoritmo presentado en esta investigación se diferencia de los autómatas celulares convencionales, ya que requiere un análisis global, el cual se realiza mediante la técnica de los elementos finitos. En este contexto el trabajo de Kita y Toyoda¹⁵ puede ser considerado también una técnica híbrida, puesto que combina reglas de autómatas celulares clásicos con análisis global por elementos finitos.

El algoritmo de los HCA son una técnica de optimización basada en análisis por elementos finitos, de tal forma que el residuo entre energía de deformación interna y trabajo de las fuerzas externas se hace cero en cada iteración. Esto lo diferencia del método presentado por Tatting y Gürdal²⁴ en el que este residuo se reduce iterativamente a cero.

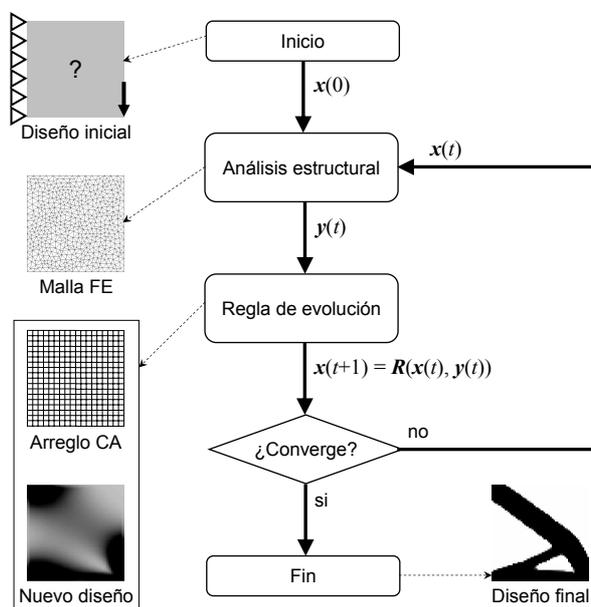


Figura 3. Algoritmo de los autómatas celulares híbridos (HCA). El algoritmo inicia con la definición del dominio de diseño, material, condiciones de carga y el valor inicial de las variables de diseño $x(0)$. Mediante un análisis por elementos finitos (FEM) se determinan las variables de estado $y(t)$. El diseño de la estructura se actualiza mediante la aplicación de una regla de diseño $x(t+1) = R(x(t), y(t))$. La condición de convergencia se satisface cuando no hay cambio en las variables de diseño.

AUTÓMATAS CELULARES HÍBRIDOS

El uso de los autómatas celulares híbridos (HCA) presenta dos grandes ventajas respecto a otras técnicas de optimización estructural. Primero, converge mucho más rápidamente. Segundo, evita inestabilidades numéricas minimizando zonas grises por lo que la estructura final es mucho más definida.

El objetivo del método de los HCA es resolver problemas complejos de optimización estructural. Para este fin, la estructura se divide en un arreglo regular de CAs. El estado de cada CA, $\alpha_i(t)$ está definido por las variables de diseño $x_i(t)$ (por ejemplo densidad, espesor) y por variables de estado $y_i(t)$ (por ejemplo esfuerzo, deformación, energía de deformación). Esto es

$$\alpha_i(t) = \left\{ \begin{array}{l} x_i(t) \\ y_i(t) \end{array} \right\} \quad (3)$$

La definición de las variables de diseño y variables de estado depende del tipo de problema de optimización a resolver. En este algoritmo cada autómata modifica sus variables de diseño de acuerdo con una regla de evolución local. El algoritmo, tal como se ilustra en la Figura 3, consiste en los siguientes pasos²⁶:

1. Definición del dominio de diseño, las características del material, las condiciones de carga y un valor inicial de las variables de diseño.
2. Evaluación de las variables de estado usando el método de los elementos finitos.
3. Aplicación de una regla de evolución local que modifica las variables de diseño.
4. Verificación de la convergencia. Se obtiene una estructura óptima si la nueva estructura no presenta ningún cambio con respecto a la estructura anterior; en caso contrario el algoritmo continúa en el paso 2.

Antes de exponer su implementación es necesario definir las variables de diseño, las variables de estado y la regla de evolución del algoritmo.

VARIABLES DE DISEÑO

La selección de las variables de diseño depende de la forma como se modele el material de la estructura. Las dos formas de modelamiento más comunes son la técnica de *homogeneización*^{5,25} y la técnica de *densidad artificial*^{4,33,17}.

La técnica de homogeneización fue originalmente presentada por Bendsoe y Kikuchi⁵. Esta técnica consiste en asignar una microestructura a cada elemento del dominio de diseño. La microestructura está formada por una serie de agujeros periódicamente distribuidos en el material base. El problema de optimización topológica se plantea como la búsqueda de la distribución óptima de estos agujeros. A nivel microestructural las variables de diseño son parámetros geométricos tales como tamaño, forma y orientación de los agujeros. A nivel macroestructural la microestructura se presenta como un continuo homogeneizado y las variables de diseño son las densidades de cada elemento. El programa de optimización OPTISHAPE, originalmente desarrollado por Bendsoe y Kikuchi y actualmente comercializado por Quint Co., utiliza la técnica de homogeneización.

La técnica de la densidad artificial, también conocida como técnica del material sólido, isotrópico con penalización—*solid isotropic material with penalization* (SIMP), fue presentada por Bendsoe⁴. En esta técnica las propiedades del material en cada elemento se suponen constantes. La densidad artificial, también llamada densidad relativa, se utiliza como variable de diseño. El módulo de Young de cada elemento E_i se representa como una función de su densidad relativa x_i . Esto es

$$E_i(x_i) = x_i^p E_0 \quad (p \geq 1) \quad (4)$$

$$\rho_i(x_i) = x_i \rho_0 \quad (0 \leq x_i \leq 1) \quad (5)$$

donde E_0 es el módulo de Young del material base, ρ_0 su densidad, ρ_i la densidad variable del elemento y p una potencia de penalización. El objetivo de la potencia p es penalizar los valores intermedios de densidad y así conseguir una estructura “blanco y negro,” i.e, conformada únicamente por elementos sólidos y vacíos⁷. El programa de optimización comercial GENESIS, desarrollado por Vanderplaats, Miura & Asociados y actualmente comercializado por VR & D Inc., usa la técnica de la densidad artificial. El programa OPTISTRUCT, originalmente desarrollado por Kikuchi y Díaz y actualmente por Altair Computing Inc., utilizó inicialmente homogeneización de celdas cuadradas, pero luego cambió a la técnica de densidad artificial. El algoritmo de los HCA utiliza la densidad relativa como variable de diseño.

VARIABLES DE ESTADO

La selección de las variables de estado depende del problema de optimización a resolver. El problema de diseñar una estructura óptima consiste en determinar la mejor distribución de material dentro de un dominio de diseño de forma que el peso de la estructura sea mínimo y su resistencia sea máxima. Esta condición se puede expresar como un problema multiobjetivo, en el cual la rigidez y el peso son funciones en conflicto. Maximizar rigidez es equivalente a minimizar energía de deformación. Siguiendo una formulación similar a la planteada por Saxena y Ananthasuresh¹⁹, el problema de optimización se puede plantear como la minimización de la función de coste $c(\mathbf{x})$ definida por

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & c(\mathbf{x}) = f(U) + g(M) \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{0} \leq \mathbf{x} \leq \mathbf{1} \end{aligned} \quad (6)$$

donde $f(U)$ es una función de la energía de deformación y $g(M)$ una función de la masa. La densidad relativa x_i está definida como el radio entre ρ_0 y ρ_i (5). Esto es

$$x_i = \frac{\rho_i}{\rho_0} \quad (7)$$

la cual varía entre los límites 0 y 1. En la práctica el valor mínimo de x_i no es exactamente cero sino un valor cercano, por ejemplo 1×10^{-3} . De esta forma se evita la singularidad de la matriz de rigidez en el análisis por elementos finitos.

Despreciando las fuerzas de campo, en un dominio discreto el vector de desplazamientos nodales puede determinarse a partir de la relación

$$\mathbf{K}\mathbf{D} - \mathbf{F} = 0 \quad (8)$$

donde \mathbf{D} es el vector de desplazamientos nodales del dominio discreto, \mathbf{K} su matriz de rigidez y \mathbf{F} el vector de fuerzas nodales. Si el dominio se discretiza en N elementos, la energía de deformación puede expresarse como

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \mathbf{K} \mathbf{D} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_i \mathbf{d}_i \quad (9)$$

donde \mathbf{d}_i es el vector de desplazamientos nodales del elemento i y \mathbf{k}_i su matriz de rigidez. Asimismo, la masa de la estructura puede expresarse como

$$M = \sum_{i=1}^N m_i = \sum_{i=1}^N x_i m_0 \quad (10)$$

donde m_i es la masa variable de cada elemento y m_0 la masa del elemento sólido. Notese que $m_0 = \rho_0 v_0$ y $m_i = \rho_i v_0$, donde v_0 es el volumen de un elemento. Como v_0 permanece constante, se puede decir que $m_i = x_i m_0$. Por esta razón, x_i también recibe el nombre de masa relativa.

El lagrangiano del problema descrito en la (6) está dado por

$$\mathcal{L} = f(U) + g(M) + \boldsymbol{\lambda}_1^T (\mathbf{x} - \mathbf{1}) - \boldsymbol{\lambda}_0^T \mathbf{x} \quad (11)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}_0$ y $\boldsymbol{\lambda}_1$ son los vectores de multiplicadores de Lagrange asociados con las restricciones de desigualdad. Las condiciones necesarias de optimalidad o condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) están dadas por

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x_i} = \frac{\partial f(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial g(M)}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial x_i} + \lambda_{1i} - \lambda_{0i} = 0 \quad (12)$$

y

$$\lambda_{1i} \geq 0 \quad (13)$$

$$\lambda_{0i} \geq 0 \quad (14)$$

$$\lambda_{1i}(x_i - 1) = 0 \quad (15)$$

$$\lambda_{0i}x_i = 0 \quad (16)$$

Para un punto interior $0 < x_i < 1$ las ecuaciones (6) a (13) se satisfacen, ya que $\lambda_{1i} = \lambda_{0i} = 0$. La condición de optimalidad dada por la (12) se satisface si

$$\frac{\partial f(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial g(M)}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial x_i} = 0 \quad (17)$$

Esta condición conduce a que

$$\frac{\partial U / \partial x_i}{\partial M / \partial x_i} = - \frac{\partial g(M) / \partial M}{\partial f(U) / \partial U} \quad (18)$$

Usando la (9), el numerador en la (18) puede escribirse como

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{D}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{D} + \mathbf{D}^T \frac{\partial (\mathbf{K} \mathbf{D})}{\partial x_i} \right) \quad (19)$$

Usando la (8) y tomando en cuenta que las fuerzas externas $\mathbf{F} = \mathbf{K} \mathbf{D}$ son independientes de x_i , entonces

$$\frac{\partial (\mathbf{K} \mathbf{D})}{\partial x_i} = 0 \quad (20)$$

De esta forma la (19) puede expresarse como

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = \frac{1}{2} \frac{\partial \mathbf{D}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} \mathbf{D} \quad (21)$$

Como la matriz \mathbf{K} es simétrica, entonces

$$(\mathbf{K} \mathbf{D})^T = \mathbf{D}^T \mathbf{K} \quad (22)$$

Combinando las ecuaciones (22) y (20), se obtiene

$$\frac{\partial (\mathbf{K} \mathbf{D})^T}{\partial x_i} = \frac{\partial (\mathbf{D}^T \mathbf{K})}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{D}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} + \mathbf{D}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = 0 \quad (23)$$

por lo tanto

$$\frac{\partial \mathbf{D}^T}{\partial x_i} \mathbf{K} = - \mathbf{D}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \quad (24)$$

Substituyendo este resultado en la (21) se obtenemos

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = - \frac{1}{2} \mathbf{D}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} \mathbf{D} \quad (25)$$

Como cada término x_i se encuentra únicamente en su correspondiente matriz de rigidez \mathbf{k}_i , se obtiene que

$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial x_i} = \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} \quad (26)$$

Utilizando únicamente los componentes activos de los vectores de desplazamiento \mathbf{D} , la (25) puede simplificarse como

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_i^T \frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} \mathbf{d}_i. \quad (27)$$

Del modelo de la densidad artificial descrito por la (4) se deduce que

$$\mathbf{k}_i = \mathbf{k}_0 x_i^p \quad (28)$$

donde \mathbf{k}_0 es la matriz de rigidez de un elemento sólido. Derivando la (28) respecto a x_i , se obtiene

$$\frac{\partial \mathbf{k}_i}{\partial x_i} = p \mathbf{k}_0 x_i^{p-1} \quad (29)$$

Usando este resultado en la (27), se observa que

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -\frac{1}{2} \mathbf{d}_i^T p \mathbf{k}_0 x_i^{p-1} \mathbf{d}_i \quad (30)$$

Expresando el aporte a la energía de deformación u_i del elemento i como

$$u_i = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_0 x_i^p \mathbf{d}_i \quad (31)$$

entonces, la (30) se puede escribir finalmente como

$$\frac{\partial U}{\partial x_i} = -p \frac{u_i}{x_i} \quad (32)$$

Por otro lado, usando la definición dada por la (10), el denominador de la (18) se puede expresar por

$$\frac{\partial M}{\partial x_i} = m_0 \quad (33)$$

donde m_0 es la masa de un elemento sólido. Finalmente, sustituyendo las ecuaciones (32) y (33) en la (18), la condición de optimalidad para un punto interior se puede describir como

$$\frac{\partial U / \partial x_i}{\partial M / \partial x_i} = -\frac{\partial g(M) / \partial M}{\partial f(U) / \partial U} = -\frac{p}{m_0} \frac{u_i}{x_i} \quad (34)$$

Una forma convencional de definir las funciones $f(U)$ y $g(M)$ en la (6) es

$$f(U) = \omega \frac{U}{U_0} \quad (35)$$

y

$$g(U) = (1 - \omega) \frac{M}{M_0} \quad (36)$$

donde U_0 y M_0 representan la energía de deformación y la masa del dominio sólido, respectivamente. El coeficiente ω balancea la participación de los cocientes U/U_0 y M/M_0 en la

función objetivo, de forma que $0 \leq \omega \leq 1$. Así la condición de optimalidad descrita por la (34) se puede expresar de la forma

$$\frac{p}{m_0} \frac{u_i}{x_i} = \frac{(1-\omega)}{\omega} \frac{U_0}{M_0} \quad (37)$$

Si se define la variable de estado y_i como

$$y_i = \frac{u_i}{x_i} \quad (38)$$

y su valor óptimo y_i^* como

$$y_i^* = \frac{(1-\omega)}{\omega} \frac{m_0}{p} \frac{U_0}{M_0} \quad (39)$$

la condición de optimalidad para un punto interior puede escribirse

$$y_i = y_i^* \quad (40)$$

Si la variable de diseño alcanza su valor límite inferior, $x_i = 0$, entonces $\lambda_{1i} = 0$. De esta forma las ecuaciones (13), (15) y (16) se satisfacen. Combinando las ecuaciones (12) y (13), la condición de optimalidad se tiene

$$\lambda_{0i} = \frac{\partial f(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{\partial g(M)}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial x_i} \geq 0 \quad (41)$$

Usando los resultados de las ecuaciones (32) y (33) y las definiciones de las ecuaciones (35) y (36), el multiplicador de Lagrange λ_{0i} se puede determinar a partir de la expresión

$$\lambda_{0i} = -p \frac{\omega}{U_0} \frac{u_i}{x_i} + m_0 \frac{(1-\omega)}{M_0} \geq 0 \quad (42)$$

Reorganizando términos en la (42) y haciendo uso de las definiciones de las ecuaciones (38) y (39), la condición de optimalidad para $x_i = 0$ puede expresarse

$$y_i \leq y_i^* \quad (43)$$

Ahora en el caso en que la variable de diseño alcance su límite superior $x_i = 1$ se tiene que $\lambda_{0i} = 0$. De esta forma las ecuaciones (14), (15) y (16) se satisfacen. Combinando las ecuaciones (12) y (13), la condición de optimalidad, se tiene

$$\lambda_{1i} = -\frac{\partial f(U)}{\partial U} \frac{\partial U}{\partial x_i} - \frac{\partial g(M)}{\partial M} \frac{\partial M}{\partial x_i} \geq 0 \quad (44)$$

Simplificando como se hizo anteriormente, la (44) puede escribirse como

$$\lambda_{1i} = p \frac{\omega}{U_0} \frac{u_i}{x_i} - m_0 \frac{(1-\omega)}{M_0} \geq 0 \quad (45)$$

Reorganizando términos, la condición de optimalidad para $x_i = 1$ puede expresarse

$$y_i \geq y_i^* \quad (46)$$

Por la definición de y_i en la (38) se puede observar que y_i es monótonica e inversamente proporcional a x_i si la potencia de penalización $p > 1$. De esta forma, si existe un valor $y_i = y_i^*$ cuando $0 < x_i < 1$, entonces $y_i > y_i^*$ cuando $x_i = 0$ y $y_i < y_i^*$ cuando $x_i = 1$. De esta forma se puede plantear una regla de evolución local que lleve la variable de estado a un valor en el que se cumplan las condiciones de optimalidad.

REGLA DE EVOLUCIÓN LOCAL

La regla de evolución local busca satisfacer las condiciones de optimalidad dadas por las ecuaciones (40), (43) y (46). Este problema puede plantearse de la forma

$$\begin{aligned} \min_{x_i} \quad & |y_i - y_i^*| \\ \text{s.t.} \quad & 0 \leq x_i \leq 1 \end{aligned} \quad (47)$$

De este modo para un punto interior $0 < x_i < 1$ se cumplirá que $y_i - y_i^* = 0$. También se puede observar que si $x_i = 0$, entonces $y_i - y_i^* > 0$ y que si $x_i = 1$, entonces $y_i - y_i^* < 0$. Este problema comparte similitudes con la formulación de un diseño completamente esforzado—*fully stressed design* (FSD). En la formulación del FSD se establece que *el diseño óptimo de cada miembro de una estructura que no se encuentre en su medida inferior está completamente esforzado bajo al menos una de las condiciones de carga del diseño*¹⁰.

La técnica de la relación—*ratio technique* se ha usado para optimizar parámetros de los elementos que conforman una estructura tipo cercha bajo el criterio de optimización FSD¹⁰. Esta técnica establece una forma de actualizar el valor de las variables de diseño en cada iteración con base en la relación entre el valor del esfuerzo actual y el valor del esfuerzo deseado. En este trabajo, se deriva una técnica equivalente que es aplicable al diseño óptimo de una estructura en un dominio de diseño continuo.

Usando la definición dada por la (38), la variable de estado puede expresarse como

$$y_i = \frac{u_i}{x_i} = \frac{x_i^p}{x_i} u_0 \quad (48)$$

donde u_0 es la energía de deformación que aportaría el elemento sólido, es decir

$$u_0 = \frac{1}{2} \mathbf{d}_i^T \mathbf{k}_0 \mathbf{d}_i \quad (49)$$

El valor óptimo de la variable de estado y_i^* descrito por la (39) puede expresarse como la relación entre un valor óptimo de energía de deformación u_i^* y un valor óptimo de densidad relativa x_i^* . Es decir

$$y_i^* = \frac{u_i^*}{x_i^*} = \frac{x_i^{*p}}{x_i^*} u_0 \quad (50)$$

Usando las definiciones en las ecuaciones (48) y (50), la relación entre y_i y y_i^* puede expresarse como

$$\frac{y_i^*}{y_i} = \left(\frac{x_i^*}{x_i} \right)^{p-1} \quad (51)$$

Resolviendo para x_i^* , se obtiene que

$$x_i^* = x_i \left(\frac{y_i^*}{y_i} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (52)$$

Usando la ((52), la regla de evolución puede escribirse como

$$x_i(t+1) = x_i(t) \left(\frac{y_i^*}{y_i(t)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (53)$$

donde t es el tiempo discreto que determina cada iteración y el poder de penalización $p > 1$. De acuerdo con la técnica de la densidad artificial puede considerarse un modelo de material si la potencia p satisface la siguiente relación

$$p \geq \max \left\{ \frac{2}{1 - \nu_0}, \frac{4}{1 + \nu_0} \right\} \quad (\text{en 2D}) \quad (54)$$

$$p \geq \max \left\{ 15 \frac{1 - \nu_0}{7 - 5\nu_0}, \frac{3(1 - \nu_0)}{2(1 - 2\nu_0)} \right\} \quad (\text{en 3D}) \quad (55)$$

donde ν_0 es el módulo de Poisson del material base. De la (54) para un valor de $\nu_0 = 0,3$ se tiene que $p \geq \max\{2,857, 3,077\}$ en 2D y $p \geq \max\{1,909, 2,625\}$ en 3D. Según Bendsoe y Sigmund⁶ la violación de estas condiciones significa que la técnica de la densidad artificial no podría considerarse un modelo de material. Este trabajo utiliza un valor $p = 3$ para el modelo bidimensional desarrollado a continuación.

IMPLEMENTACIÓN

Para el problema de optimización propuesto el estado de cada autómatas, $\alpha_i(t)$ se define por la variable de diseño $x_i(t)$ dada por la (7) y por la variable de estado $y_i(t)$ dada por la (38). Esto es

$$\alpha_i(t) = \left\{ \begin{array}{c} x_i(t) \\ y_i(t) \end{array} \right\} \quad (56)$$

Usando condiciones de frontera fijas, el estado de los autómatas por fuera del dominio de diseño está dado por

$$\alpha_i(t) = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \quad (57)$$

En el algoritmo de los HCA la ley de evolución hace uso de una variable de diseño efectiva $\bar{x}_i(t)$ y de una variable de estado efectiva $\bar{y}_i(t)$. Estos valores efectivos se determinan como el valor promedio en el vecindario del autómatas. Esto es

$$\bar{x}_i(t) = \frac{x_i(t) + \sum_{k=1}^{\hat{N}} x_k(t)}{\hat{N} + 1} \quad (58)$$

y

$$\bar{y}_i(t) = \frac{y_i(t) + \sum_{k=1}^{\hat{N}} y_k(t)}{\hat{N} + 1} \quad (59)$$

De esta forma la regla de evolución presentada en la (53) puede escribirse como

$$x_i(t + 1) = \bar{x}_i(t) \left(\frac{y_i^*}{\bar{y}_i(t)} \right)^{\frac{1}{p-1}} \quad (60)$$

Para ilustrar la implementación del algoritmo de los HCA, considérese la optimización de una estructura bidimensional tipo Michell¹⁶. El dominio de diseño se define de un área de $50 \times 25 \text{ mm}^2$ con un espesor de 1 mm (Figura 4). El movimiento de su esquina inferior izquierda se encuentra completamente restringido, mientras que el movimiento de su esquina inferior derecha se encuentra restringido en dirección vertical. Una fuerza vertical de 1000 N se aplica en medio de su borde inferior. Las propiedades mecánicas del material isotrópico de la estructura son las correspondientes al material del hueso cortical, es decir módulo de Young de $E_0 = 20 \text{ GPa}$ y módulo de Poisson de $\nu_0 = 0,3$.

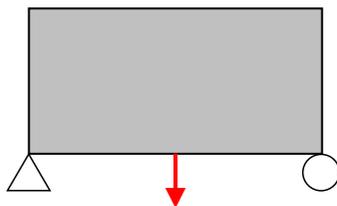


Figura 4. Estructura tipo Michell. El dominio de diseño de $50 \times 25 \times 1 \text{ mm}^3$ está discretizado en 50×25 autómatas idénticos. El material isotrópico tiene un módulo de Young de $E_0 = 20 \text{ GPa}$ y un módulo de Poisson de $\nu_0 = 0.3$. La fuerza vertical aplicada en el centro de su borde inferior es de 100 N .

Considerando una densidad para el hueso cortical de $\rho_0 = 2.0 \times 10^{-3} \text{ g/mm}^3$ y el volumen de cada autómata $v_0 = 1 \text{ mm}^3$, la masa del dominio de diseño sólido es $M_0 = 50 \times 25 \times 2 \times 10^{-3} \text{ g}$. La energía de deformación del dominio sólido, calculada con un análisis por elementos finitos, tiene un valor de $U_0 = 2261 \text{ Nmm}$. Reemplazando estos valores en la (39), el valor del estado óptimo de las variables de estado es $y_i^* = 1,8084 \text{ Nmm/mm}^3$.

El criterio de convergencia se satisface cuando no hay una mejora en el diseño de la estructura. Tomando en cuenta el cambio en las variables de diseño, el criterio de convergencia se considera satisfecho cuando

$$\Delta M(t) = M(t) - M(t-1) \approx 0 \quad (61)$$

Sin embargo, para proveer uniformidad con otras reglas de evolución incorporadas en el algoritmo de los HCA²⁸, este trabajo hace uso de un criterio de convergencia más estricto. Con este criterio se verifica el cambio de la masa en dos iteraciones consecutivas. Esto es

$$\frac{|\Delta M(t)| + |\Delta M(t-1)|}{2} \leq \varepsilon \quad (62)$$

donde ε es una pequeña fracción de la masa total de la estructura sólida. En esta aplicación este valor se define como $\varepsilon = 0,001 \times M_0$, es decir $\varepsilon = 2,5 \times 10^{-3} \text{ g}$. Si el criterio de convergencia no se satisface después de 60 iteraciones, el algoritmo se interrumpe.

La Tabla I resume los parámetros por defecto utilizados en el algoritmo de los HCA para resolver el problema de optimización de la estructura tipo Michell. El desempeño de este algoritmo se demuestra a continuación.

Parámetro	Símbolo	Valor
Número de autómatas	N	50×25
Módulo de Young	E_0	20 GPa
Módulo de Poisson	ν_0	$0,3$
Penalización	p	$3,0$
Diseño inicial	$x_i(0)$	$1,0$
Coefficiente de peso	ω	$0,25$
Valor óptimo	y_i^*	$1,8084 \text{ GPa}$
Vecindario	\hat{N}	8 (Moore)
Convergencia	ε	$2,5 \times 10^{-3} \text{ g}$

Tabla I. Parámetros por defecto del algoritmo HCA para la optimización de la estructura tipo Michell

RESULTADOS

En esta investigación el algoritmo de los HCA implementa la regla de evolución $x_i(t+1)$ descrita por la (60). Esta regla utiliza valores efectivos de las variables de diseño $\bar{x}_i(t)$ y de las variables de estado $\bar{y}_i(t)$ descritos por las ecuaciones (58) y (59), respectivamente. La definición de estos valores efectivos depende del tipo de vecindario de los autómatas.

Se considera un primer caso en el que se utiliza el vecindario vacío $\hat{N} = 0$ para el cálculo de los valores efectivos tanto de las variables de diseño como de las variables de estado. En este caso el valor efectivo corresponde al valor asignado a cada autómata, es decir, $\bar{x}_i(t) = x_i(t)$ y $\bar{y}_i(t) = y_i(t)$. El algoritmo converge en 23 iteraciones con un valor final de la función objetivo $c(\mathbf{x}) = 0,7455$. La topología resultante contiene una región en forma de tablero de ajedrez. Ésta constituye una formación estructural artificialmente liviana y rígida, consecuencia de un modelamiento deficiente que sobre estima la rigidez de elementos blancos y negros alternados²². La Figura 5 muestra la topología final y los valores de $f(U)$, $g(M)$ y $c(\mathbf{x})$ durante el proceso iterativo.

Se considera ahora un segundo caso en el que el valor efectivo de las variables de diseño $\bar{x}_i(t)$ se determina con un vecindario Moore $\hat{N} = 8$, mientras que el valor efectivo de las variables de estado $\bar{y}_i(t)$ se determina con un vecindario vacío $\hat{N} = 0$. En este caso el algoritmo converge en 45 iteraciones con un valor final de la función objetivo $c(\mathbf{x}) = 0,7634$. Como se aprecia en la Figura 6, la topología final está libre de formación de tableros de ajedrez. Adicionalmente, la topología es distinta a la obtenida en el caso anterior (Figura 5). Mientras que la primera solución muestra una estructura con cinco agujeros interiores (sin considerar la porosidad de la formación en tablero de ajedrez), esta nueva estructura contiene tan sólo tres agujeros. Las dos topologías representan mínimos locales distintos del mismo problema de optimización.

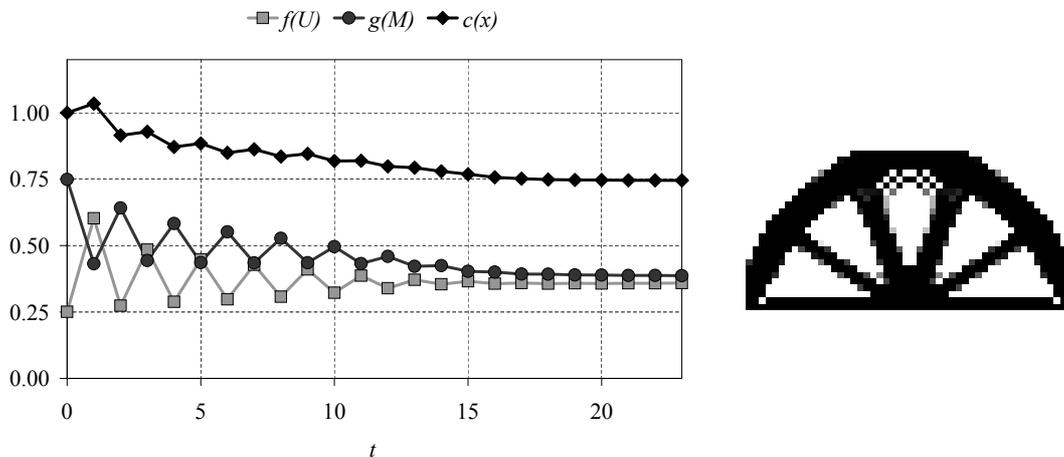


Figura 5. Optimización topológica con la técnica de la relación—caso 1. El vecindario vacío, $\hat{N} = 0$, se utiliza para calcular el valor efectivo tanto de las variables de diseño, $\bar{x}_i(t)$, como de las variables de estado, $\bar{y}_i(t)$. La topología final se caracteriza por la presencia de formaciones de tablero de ajedrez. El algoritmo converge en 23 iteraciones. El valor final de la función objetivo es $c(\mathbf{x}) = 0.7455$.

Se considera un tercer caso en el que el valor efectivo de las variables de diseño $\bar{x}_i(t)$ se determina con un vecindario vacío $\hat{N} = 0$, y el valor efectivo de las variables de estado $\bar{y}_i(t)$ se determina con un vecindario Moore $\hat{N} = 8$. En este caso el algoritmo converge en

39 iteraciones con un valor final de la función objetivo $c(\mathbf{x}) = 0,7511$. Como se aprecia en la Figura 7, la topología se encuentra libre de formaciones de tableros de ajedrez. En comparación con la topología obtenida en el caso anterior (Figura 6) aquí se observa una disminución tanto en el número de iteraciones como en el valor de la función objetivo.

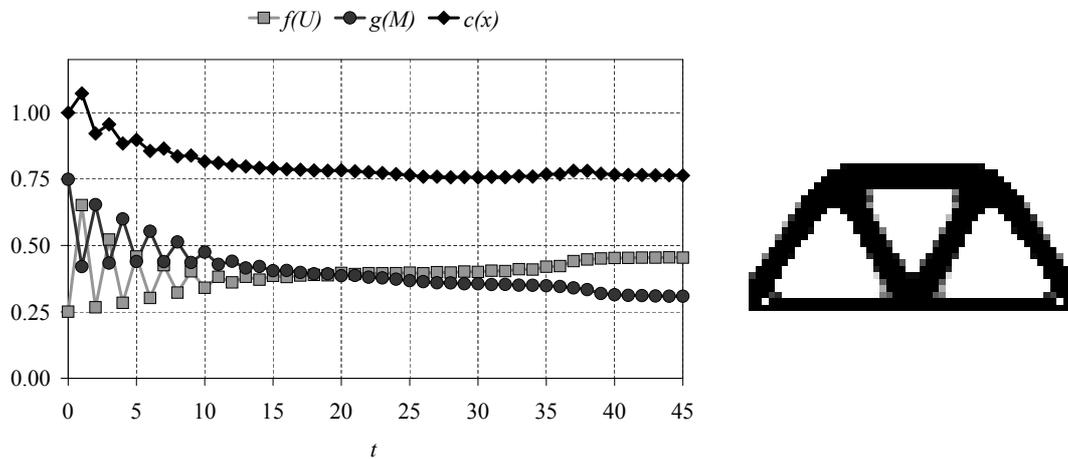


Figura 6. Optimización topológica con la técnica de la relación—caso 2. El vecindario de Moore, $\hat{N} = 8$, se utiliza para calcular el valor efectivo de las variables de diseño, $\bar{x}_i(t)$, mientras que el valor de las variables de estado, $\bar{y}_i(t)$, se calcula con un vecindario vacío, $\hat{N} = 0$. La topología final no presenta formaciones de tablero de ajedrez. El algoritmo converge en 45 iteraciones. El valor final de la función objetivo es $c(\mathbf{x}) = 0.7634$.

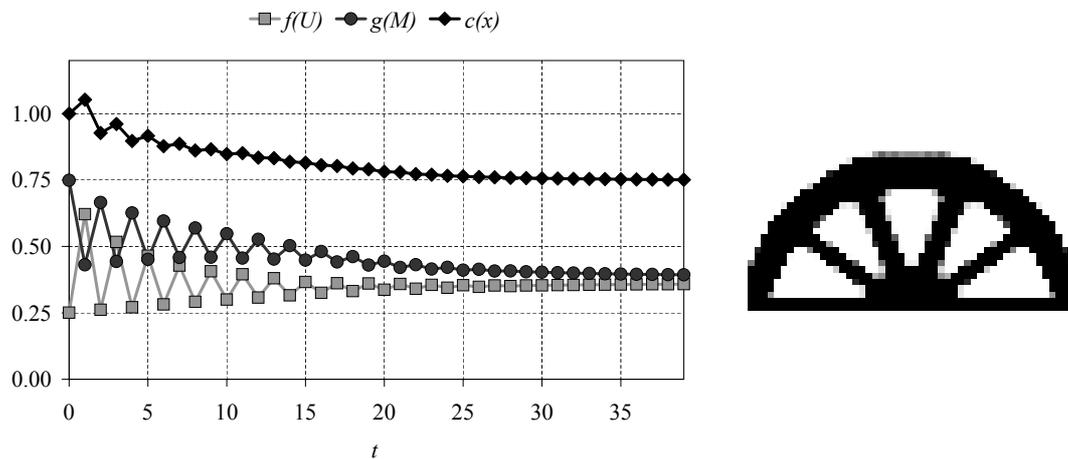


Figura 7. Optimización topológica con la técnica de la relación—caso 3. El vecindario vacío, $\hat{N} = 0$, se utiliza para calcular el valor efectivo de las variables de diseño, $\bar{x}_i(t)$, mientras que el valor de las variables de estado, $\bar{y}_i(t)$ se calcula con un vecindario Moore, $\hat{N} = 8$. El algoritmo converge en 39 iteraciones. El valor final de la función objetivo es $c(\mathbf{x}) = 0.7511$.

Finalmente se considera un cuarto caso en el que el vecindario Moore $\hat{N} = 8$ se utiliza para calcular el valor efectivo de las variables de diseño $\bar{x}_i(t)$ y las variables de estado $\bar{y}_i(t)$. La topología resultante se muestra en la Figura 8. El uso de esta condición impone un criterio de diseño que incrementa el tamaño de los componentes estructurales en la geometría final. En comparación con las topologías anteriormente obtenidas esta presenta una mayor cantidad de autómatas con densidades intermedias. En este caso el algoritmo no converge después de 60 iteraciones.

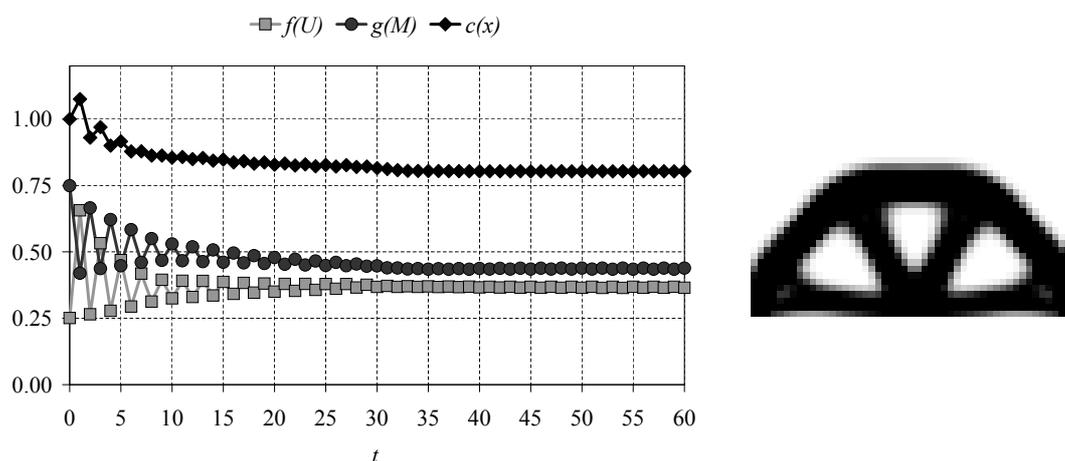


Figura 8. Optimización topológica con la técnica de la relación—caso 4. El vecindario Moore, $\hat{N} = 8$, se utiliza para calcular el valor efectivo de las variables de diseño, $\bar{x}_i(t)$, y de las variables de estado, $\bar{y}_i(t)$. Una pequeña oscilación en la variación de la masa impide la convergencia del algoritmo antes de 60 iteraciones. El valor final de la función objetivo es $c(\mathbf{x}) = 0.8033$.

COMENTARIOS FINALES Y CONCLUSIONES

Una nueva técnica para optimización topológica, denominada autómatas celulares híbridos (HCA), es presentada en este trabajo. Ésta es una técnica basada en análisis por elementos finitos, que no requiere información de gradiente y que utiliza los principios de los autómatas celulares. Este algoritmo ha demostrado ser numéricamente eficiente y de fácil implementación. En este trabajo se utilizó el programa MATLAB para controlar el flujo del algoritmo y la aplicación de la regla de evolución de las variables de diseño. Para el análisis por elementos finitos y la determinación de los valores de las variables de estado se utilizó el programa FEMLAB.

En la técnica de los HCA el dominio de diseño se discretiza en un arreglo de autómatas, cuya distribución espacial es independiente del enmallado usado por los elementos finitos. La aplicación del algoritmo de los HCA se demuestra a través del diseño de una estructura bidimensional continua tipo Michell. En este trabajo se ha mostrado el efecto de algunos de los parámetros del algoritmo en la topología final, es decir tamaño de los vecindarios de los autómatas.

El algoritmo de los HCA requiere de la definición de variables de estado y de su valor óptimo así como de la definición de una regla de evolución. La definición de las variables de estado depende del problema de optimización a resolver. En este trabajo se presentan los resultados para el diseño de una estructura de máxima rigidez y mínima masa. La regla de evolución no requiere de factores multiplicadores o exponentes heurísticos definidos por

el usuario; sin embargo, por esta razón no es posible acelerar su convergencia.

La regla de evolución desarrollada en este trabajo sigue los principios de los autómatas celulares. Esta regla está basada en la técnica de la relación, la cual ha sido hasta ahora usada sólo en el diseño de estructuras tipo cercha bajo el criterio de diseño completamente esforzado. El uso de esta regla minimiza el número de elementos con densidades intermedias con lo cual provee estructuras claramente definidas. La regla de evolución hace uso del valor efectivo de las variables de diseño así como de la relación entre el valor efectivo de las variables de estado y su valor óptimo.

La determinación de los valores efectivos de las variables se define como el promedio en la vecindad de cada autómata. El uso de estos valores efectivos ha demostrado ser efectivo para inestabilidades numéricas tales como la formación de tableros de ajedrez en la topología final. A diferencia de las técnicas relacionadas con filtrado de imágenes, es decir promedios ponderados de las variables de diseño, las técnicas que utilizan variaciones espaciales de las variables se encuentran considerablemente menos exploradas en el campo de la optimización topológica.

En este trabajo se ha comparado la utilización de valores efectivos de las variables de estado y de las de diseño. Los resultados obtenidos muestran que hay un mejor resultado tanto en términos de optimalidad como en términos de convergencia al hacer uso únicamente de los valores efectivos en las variables de estado.

En la actualidad se adelantan trabajos para la aplicación de este algoritmo en otros tipos de problemas de optimización, tales como diseño de mecanismos flexibles y de estructuras para absorción de choques.

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo ha contado con la financiación de la Dirección Nacional de Investigación de la Universidad Nacional de Colombia (DINAIN) y del Instituto Colombiano para el Desarrollo de la Ciencia y la Tecnología Francisco José de Caldas (COLCIENCIAS).

REFERENCIAS

- 1 M.M. Abdalla y Z. Gürdal, "Structural design using optimality based cellular automata", *Proceedings of 43rd AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics and Materials Conference*, (2002).
- 2 M.M. Abdalla y Z. Gürdal, "Structural design using cellular automata for eigenvalue problems", *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. **26**, N° 3, pp. 200–208, (2004).
- 3 G. Allaire, "Shape optimization by the homogenization method", Vol. **146**, *Applied mathematical sciences*, Springer, (2002).
- 4 M.P. Bendsøe, "Optimal shape design as a material distribution problem", *Struct. Optim.*, Vol. **1**, pp. 193–200, (1989).
- 5 M.P. Bendsøe y N. Kikuchi, "Generating optimal topologies in optimal design using a homogenization method", *Comp. Meth. Appl. Mech. Engng.*, Vol. **17**, pp. 197–224, (1988).
- 6 M.P. Bendsøe y O. Sigmund, "Material interpolations in topology optimization", *Arch. Appl. Mech.*, Vol. **69**, pp. 635–654, (1999).
- 7 M.P. Bendsøe y O. Sigmund, "*Topology optimization theory, method and applications*", Springer, (2003).

- 8 .W. Burks, "Essays on cellular automata", cap. "Von Neumann's self-reproducing automata", pp. 3–64, University of Illinois Press, (1970).
- 9 B. Chopard y M. Droz, "*Cellular automata modeling of physical systems*", Cambridge University Press, (1998).
- 10 .T. Haftka, Z. Gürdal y M.P. Kamat, "*Elements of structural optimization*", Dordrecht, Kluwer Academic Publishers, 2^a edición, (1990).
- 11 P. Hajela y B. Kim, "On the use of energy minimization for ca based analysis in elasticity", *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. **23**, pp. 24–33, (2001).
- 12 N. Inou, N. Shimotai y T. Uesugi, "A cellular automaton generating topological structures", *Proceedings of Second European Conference on Smart Structures and Materials*, pp. 47–50, (1994).
- 13 N. Inou, T. Uesugi, A. Iwasaki y S. Ujihashi, "Self-organization of mechanical structure by cellular automata", *Fracture and Strength of Solids*, Vol. **145**, N^o 9, pp. 1115–1120, (1998).
- 14 S. Kim, M.M. Abdalla, Z. Gürdal y M. Jones, "Multigrid accelerated cellular automata for structural design optimization: A 1-d implementation", *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, Palm Springs, California, (2004).
- 15 E. Kita y T. Toyoda, "Structural design using cellular automata", *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. **19**, pp. 64–73, (2000).
- 16 A. Michell, "The limits of economy of material in frame-structures", *Phil. Mag.*, Vol. **8**, N^o 47, pp. 589–597, (1904).
- 17 G.I.N. Rozavany, "Aims, scope, methods, history and unified terminology of computer-aided topology optimization in structural mechanics", *Structural and Multidisciplinary Optimization*, Vol. **21**, N^o 2, pp. 90–108, (2001).
- 18 G.I.N. Rozavany, M. Zhou y W. Gollub, "Continuum-type optimality criteria methods for large finite-element systems with a displacement constraint", *Struct. Optim.*, Vol. **2**, N^o 2, pp. 77–104, (1990).
- 19 A. Saxena y G.K. Ananthasuresh, "On an optimal property of compliant topologies", *Struct. Multidisc. Optim.*, Vol. **19**, pp. 36–49, (2000).
- 20 L.A. Schmit y B. Farsi, "Some approximation concepts for structural synthesis", *AIAA J.*, Vol. **12**, N^o 5, pp. 692–699, (1974).
- 21 L.A. Schmit y H. Miura, "Approximation concepts for efficient structural synthesis", *NASA CR-2552*, (1976).
- 22 O. Sigmund y J. Peterson, "Numerical instabilities in topology optimization: a survey on procedures dealing with checkerboards, mesh-dependencies and local minima", *Struct. Optim.* Vol. **16**, pp. 68–75, (1998).
- 23 K. Svanberg, "The method of moving asymptotes – a new method for structural optimization", *Int. J. Num. Meth. Engng.*, Vol. **24**, pp. 359–373, (1987).
- 24 B. Tatting y Z. Gürdal, "Cellular automata for design of two-dimensional continuum structures", *Proceedings of 8th AIAA/USAF/NASA/ISSMO Symposium on Multidisciplinary Analysis and Optimization*, (2000).

- 25 P.S. Theocaris y G.E. Stavroulakis, “Optimal material design in composites: an iterative approach based on homogenized cells”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **169**, pp. 31–42, (1999).
- 26 A. Tovar, “*Bone remodeling as a hybrid cellular automaton optimization process*”, University of Notre Dame, Aerospace and Mechanical Engineering, (2004).
- 27 A. Tovar, G.L. Niebur, M. Sen y J.E. Renaud, “Bone structure adaptation as a cellular automaton optimization process”, *45th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics & Materials Conference*, Palm Springs, California, (2004).
- 28 A. Tovar, N.M. Patel, H. Agarwal y J.E. Renaud, “Optimality of the hybrid cellular automata”, *1st AIAA Multidisciplinary Design Optimization Specialist Conference*, Austin, Texas, (2005).
- 29 G.N. Vanderplaats y E. Salajegheh, “A new approximation method for stress constraints in structural synthesis”, *AIAA J.*, Vol. **27**, N° 3, pp. 352–358, (1989).
- 30 V.B. Venkayya, “Optimality criteria: a basis for multidisciplinary design optimization”, *Comp. Mech.*, Vol. **5**, pp. 1–21, (1989).
- 31 N. Weiner y A. Rosenblunth, “The mathematical formulation of the problem of conduction of impluses in a network of connected excitable elements, specifically in cardiac muscle”, *Arch. Inst. Cardiol. Mexico*, Vol. **1**, pp. 205–265, (1946).
- 32 S. Wolfram, “*A new kind of science*”, Wolfram Media, (2002).
- 33 M. Zhou y G.I.N. Rozvany, “The coc algorithm, part II: Topological, geometry and generalized shape optimization”, *Comput. Methods Appl. Mech. Engng.*, Vol. **89**, pp. 197–224, (1991).