

Resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden utilizando diferencias finitas generalizadas

Francisco Ureña y Juan José Benito

ETS Ingenieros Industriales de la UNED
Apdo. de Correos 60149, 28080 Madrid, España
Tel.: 34-91-398 64 57; Fax: 34-91-398 60 46
e-mail: jbenito@ind.uned.es

Luis Gavete

ETS Ingenieros de Minas de Madrid UPM
c/ Ríos Rosas 21, 28003 Madrid, España
Tel. 34-91-336 64 64; Fax: 34-91-336 32 30
e-mail: gavete@dmarn.upm.es

Ramón Álvarez

ETS Ingenieros Industriales de Madrid UPM
c/ José Gutiérrez Abascal 3, 28006 Madrid, España
Tel.: 34-91-310 51 58; Fax: 34-91-398 60 46

Resumen

En este artículo se muestra la eficiencia del método de diferencias finitas generalizadas (MDFG) en la resolución, por el método explícito, de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo de segundo orden para una o dos dimensiones espaciales. La obtención de fórmulas explícitas en diferencias finitas generalizadas permite establecer un sencillo criterio de estabilidad, que viene expresado en función de los coeficientes de la ecuación de la estrella.

Palabras clave:

Diferencias finitas generalizadas, métodos sin malla, mínimos cuadrados móviles.

RESOLUTION OF SECOND ORDER PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATION TIME DEPENDENTS BY GENERALIZED FINITE DIFFERENCE METHOD

Summary

This paper shows the efficiency of generalized finite difference method (MDFG) in the solution, by the explicit method, of second order partial differential equation time dependents for one or two space dimensions. The explicit finite difference formulae obtained allows us to establish an easy criterion of stability, which is expressed in function of the coefficients of the star equation.

Key words:

Generalized finite differences, meshless methods, moving least squares.

INTRODUCCIÓN

La aparición de potentes computadoras ha permitido la utilización del método de diferencias finitas para resolver ecuaciones diferenciales en derivadas parciales en mallas irregulares. Al desarrollo de este método, incluido en los llamados Métodos sin Malla^{1,4,10}, han contribuido los trabajos de Forsythe y Wasow³, Jensen⁶, Perrone y Kao¹², Kaczowski⁷, Liska^{8,9} y Orkisz¹¹.

Las expresiones explícitas de las fórmulas en diferencias finitas utilizadas en el Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG), así como la influencia de los parámetros que intervienen han sido estudiadas en la referencia 2. En este artículo se resuelven ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo, en una y dos dimensiones espaciales, utilizando el método de diferencias finitas generalizadas y el método explícito, desarrollándose, también un criterio de estabilidad.

FÓRMULAS EXPLÍCITAS EN DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS

En este apartado se presentan las expresiones lineales explícitas que aproximan las derivadas parciales en un punto del dominio (fórmulas en diferencias finitas) con el objeto de sustituir dichas expresiones en la siguiente ecuación diferencial en derivadas parciales de segundo orden

Caso unidimensional

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial U}{\partial x} \quad t > 0, \quad a \leq x \leq b \quad (1.a)$$

con la condición de contorno

$$\begin{cases} U(a, t) = g(t) \\ U(b, t) = h(t) \end{cases} \quad t > 0 \quad (1.b)$$

con la condición inicial

$$U(x, 0) = f(x) \quad (1.c)$$

donde $g(t)$, $h(t)$ y $f(x)$ son funciones conocidas.

Caso bidimensional

$$\frac{\partial U}{\partial t} = A \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + B \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + C \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} + D \frac{\partial U}{\partial x} + E \frac{\partial U}{\partial y} \quad t > 0, \quad (x, y) \in \Omega \subset R^2 \quad (2.a)$$

con la condición de contorno

$$\alpha \frac{\partial U}{\partial n} + \beta U = G(t) \quad \text{en } \Gamma \quad (2.b)$$

con la condición inicial

$$U(x, y, 0) = F(x, y) \quad (2.c)$$

donde $G(t)$ y $F(x, y)$ son funciones conocidas y Γ es la frontera de Ω .

A cada nodo de la malla se le asocia un número de nodos N , también de la malla, escogidos siguiendo un determinado criterio (distancia y cuadrante)². Al conjunto de estos $N + 1$ nodos se le denomina estrella y al nodo a partir del cual se define la estrella, nodo central.

El criterio de la distancia consiste en seleccionar los N nodos más próximos al central, mientras que en el criterio del cuadrante se eligen $N/4$ nodos más próximos de cada uno de los cuadrantes definidos por unos ejes cartesianos situados con el origen en el nodo central (caso bidimensional) o $N/2$ en cada semieje a partir del nodo central (caso unidimensional).

Si U_0 es el valor de la función en el nodo central y U_i el valor de la función en el resto de los nodos, con $i = 1, \dots, N$, entonces, de acuerdo con el desarrollo del polinomio de Taylor se tiene para el caso unidimensional (3.a) y para el caso bidimensional (3.b)

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + \dots \quad (3.a)$$

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots \quad (3.b)$$

donde para el caso unidimensional se tiene que x_0 es la coordenada del nodo central y x_i las coordenadas del nodo i de la estrella y $h_i = x_i - x_0$. Para el caso bidimensional (x_0, y_0) son las coordenadas del nodo central, (x_i, y_i) las coordenadas del nodo i de la estrella y $h_i = x_i - x_0$, $k_i = y_i - y_0$.

Si en (3.a) y (3.b) se truncan los segundos miembros a partir de los términos superiores al de segundo orden, se obtienen las aproximaciones de segundo orden del valor U_i que se indicará por u_i (tanto en el caso unidimensional como en el bidimensional). De esta manera se pueden definir las funciones $B_2(u)$ y $B_5(u)$ de la forma siguiente

$$B_2(u) = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right) w(h_i) \right]^2 \quad (4.a)$$

$$B_5(u) = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{h_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + \frac{k_i^2}{2} \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) w(h_i, k_i) \right]^2 \quad (4.b)$$

donde $w(h_i)$ y $w(h_i, k_i)$ son funciones de ponderación.

Si se minimizan las normas (4.a) y (4.b) con respecto a las derivadas parciales, se obtienen los siguientes sistemas de ecuaciones lineales, que en forma matricial son

$$\mathbf{A}_2 \mathbf{D}_{u2} = \mathbf{b}_2 \quad (5.a)$$

$$\mathbf{A}_5 \mathbf{D}_{u5} = \mathbf{b}_5 \quad (5.b)$$

Las matrices $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_5$ tienen dimensiones de 2×2 y 5×5 respectivamente, de ahí los subíndices empleados y los vectores $\mathbf{D}_{u2}$ y $\mathbf{D}_{u5}$ son respectivamente

$$\mathbf{D}_{u2} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \right\}^T \quad (6.a)$$

$$\mathbf{D}_{u5} = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (6.b)$$

Puesto que las matrices $\mathbf{A}_2$ y $\mathbf{A}_5$ son simétricas, es posible utilizar el método de Cholesky para resolver los sistemas de ecuaciones (5.a) y (5.b), descomponiéndolas en producto de matrices triangulares

$$\mathbf{A}_2 = \mathbf{L}_2 \mathbf{L}_2^T \quad (7.a)$$

$$\mathbf{A}_5 = \mathbf{L}_5 \mathbf{L}_5^T \quad (7.b)$$

donde los elementos de las matrices $\mathbf{L}_2$ y $\mathbf{L}_5$ son denotados por $l(i, j)$.

Una vez resueltos los sistemas (5.a) y (5.b) se obtienen las expresiones explícitas de las fórmulas en diferencias finitas generalizadas de segundo orden² con $P = 2$ para el caso unidimensional y $P = 5$ para el caso bidimensional

$$\mathbf{D}_{uP} = \frac{1}{l(k, k)} \left(-u_0 \sum_{i=1}^N M(k, i) c_i + \sum_{j=1}^N u_j \left(\sum_{i=1}^5 M(k, i) d_{ji} \right) \right) \quad (k = 1, \dots, P) \quad (8)$$

$$M(i, j) = (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{l(i, i)} \sum_{k=j}^{i-1} l(i, k) M(k, j) \quad \text{con } j < i \quad (i, j = 1, \dots, P)$$

$$M(i, j) = \frac{1}{l(i, i)} \quad \text{con } j = i \quad (i, j = 1, \dots, P)$$

$$M(i, j) = 0 \quad \text{con } j > i \quad (i, j = 1, \dots, P)$$

con δ_{ij} función delta de Kronecker y

$$c_i = \sum_{j=1}^N d_{ji}, d_{j1} = h_j W^2, d_{j2} = \frac{h_j^2}{2} W^2, d_{j3} = k_j W^2, d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} W^2, d_{j5} = h_j k_j W^2$$

en los que $W = w(h_i)$ para el caso unidimensional y $W = w(h_i, k_i)$ para el bidimensional.

Si la expresión (8) se sustituye en la ecuación (1.a) o (2.a) según sea el caso unidimensional o bidimensional, se obtiene la expresión siguiente

$$u_0^{n+1} = u_0^n (1 - \Delta t m_0) + \Delta t \left(\sum_{i=1}^N m_i u_i^n \right) \quad (9)$$

donde se ha designado por u_0^{n+1} el valor de la solución numérica en el nodo central en el instante $n + 1$; u_0^n el valor de la solución numérica en el nodo central en el instante n ; u_i^n el valor de la solución numérica de los nodos de la estrella en el instante n ; m_0 coeficiente del valor de la solución numérica en el nodo central u_0^n , que para el caso de la ecuación (1.a) viene dado por la expresión

$$m_0 = \sum_{i=1}^N \left(A \frac{M(2, i)}{l(2, 2)} + B \frac{M(1, i)}{l(1, 1)} \right) c_i \quad (10)$$

y el de la ecuación (2.a) por

$$m_0 = \sum_{i=1}^N \left(A \frac{M(2, i)}{l(2, 2)} + B \frac{M(4, i)}{l(4, 4)} + C \frac{M(5, i)}{l(5, 5)} + D \frac{M(1, i)}{l(1, 1)} + E \frac{M(3, i)}{l(3, 3)} \right) c_i \quad (11)$$

donde m_i es el coeficiente del valor de la solución numérica del nodo i en la estrella cuyo nodo central tiene por solución numérica u_0^n . Para el caso de la ecuación (1.a) viene dado por la expresión

$$m_i = \sum_{j=1}^N \left(A \frac{M(2,i)}{l(2,2)} + B \frac{M(1,i)}{l(1,1)} \right) d_{ij} \quad (12)$$

y para el de la ecuación (2.a) por

$$m_i = \sum_{j=1}^N \left(A \frac{M(2,i)}{l(2,2)} + B \frac{M(4,i)}{l(4,4)} + C \frac{M(5,i)}{l(5,5)} + D \frac{M(1,i)}{l(1,1)} + E \frac{M(3,i)}{l(3,3)} \right) d_{ij} \quad (13)$$

CRITERIO DE ESTABILIDAD EN DIFERENCIAS FINITAS GENERALIZADAS

Un método de diferencias para un problema con valor inicial en la frontera, como se sabe, es estable en el sentido von Neumann, si cualquier solución para la ecuación en diferencias (9) de la forma

$$u_j^n = \xi^n e^{i\alpha l_j h} \quad (14)$$

tiene la propiedad

$$|\xi| \leq 1 \quad (15)$$

Si se aplica el criterio de von Neumann a la ecuación (9) de la siguiente manera

$$u_0^n = \xi^n e^{i\alpha l h}, \quad u_j^n = \xi^n e^{i\alpha l_j h}, \quad l_j = 1 + \lambda_j \quad (16)$$

$$\xi^{n+1} e^{i\alpha l h} = \xi^n e^{i\alpha l h} (1 - \Delta t m_0) + \Delta t \left(\xi^n e^{i\alpha l h} \sum_{j=1}^N e^{i\alpha \lambda_j h} m_j \right) \quad (17)$$

Al simplificar, efectuar operaciones y tomar valor absoluto, se tiene

$$|\xi| = 1 + \Delta t \left| \sum_{j=1}^N e^{i\alpha \lambda_j h} m_j - m_0 \right| \quad (18)$$

teniendo en cuenta (15) y que

$$m_0 = \sum_{j=1}^N m_j \quad (19)$$

se tiene

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{2}{\sum_{j=1}^N |m_j (1 - e^{i\alpha \lambda_j h})|} \Rightarrow 0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{|m_0|} \quad (20)$$

Puesto que las mallas son irregulares, los m_0 son distintos para cada estrella por lo tanto se escoge como criterio de estabilidad el siguiente

$$0 \leq \Delta t \leq \frac{1}{|m_0|_{\max}} \quad (21)$$

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se presenta en este apartado la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo tanto en el caso unidimensional como en el bidimensional

CASO UNIDIMENSIONAL

Resolución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0,0001 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial u}{\partial x} \quad t > 0 \quad 0 < x < 2 \quad (22)$$

con condiciones Dirichlet homogéneas

$$\begin{cases} u(0, t) = 0 \\ u(2, t) = 0 \end{cases} \quad (23)$$

y condición inicial $u(x, 0)$ de manera que la solución analítica es conocida⁵.

La ecuación (22) con las condiciones de contorno e inicial indicadas se ha resuelto aplicando el método de diferencias finitas generalizadas descrito, utilizando el criterio de la distancia y la siguiente función de ponderación

$$w(h) = \frac{1}{(\text{dist})^3} \quad (24)$$

siendo “dist” la distancia de cada nodo de la estrella al nodo central. Los resultados obtenidos para el presente caso unidimensional con la aplicación del MDFG mejoran el método clásico al permitir elegir distintos tipos de estrella. Pero además es fundamental la utilización del criterio de estabilidad dado en (21) que, si bien, da unos valores de paso de tiempo muy pequeños, menores cuanto más irregular sea la estrella, permite la obtención de buenos resultados sin necesidad de estabilizar el método numérico.

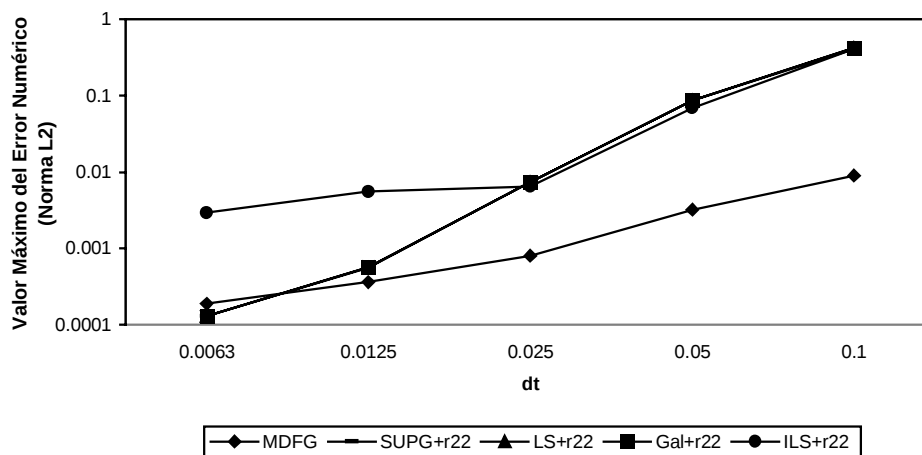


Figura 1. Comparación del error utilizando distintos métodos

El error se ha evaluado según la norma L2 y en la Figura 1 se muestra la evolución del mismo al variar el paso de tiempo (dt), utilizando ILS (formulación de “mínimos cuadrados incompleta”), Galerkin (Gal+r22), LS (mínimos cuadrados), SUPG, todos ellos aportados por Huerta y Fernández⁵ con $h = 0,01$, a los que se añaden los obtenidos mediante el Método de Diferencias Finitas Generalizadas (MDFG) utilizando mallas regulares con los siguientes números de nodos: 41 ($dt = 0,1$), 67 ($dt = 0,05$), 89 ($dt = 0,025$), 127 ($dt = 0,0125$) y 179 ($dt = 0,00625$), donde resulta inevitable variar el número de nodos para ajustar el paso de acuerdo con (20). En la Figura 1 no se distinguen las gráficas SUPG+r22, LS+r22 y Gal+r22, ya que, como se aprecia en la Tabla I, tienen valores prácticamente iguales.

dt	MDFG	SUPG+r22	LS+r22	Gal+r22	ILS+r22
0,1	$8,974 \times 10^{-3}$	$4,195 \times 10^{-1}$	$4,195 \times 10^{-1}$	$4,195 \times 10^{-1}$	$4,125 \times 10^{-1}$
0,05	$3,223 \times 10^{-3}$	$8,591 \times 10^{-2}$	$8,591 \times 10^{-2}$	$8,592 \times 10^{-2}$	$6,945 \times 10^{-2}$
0,025	$7,892 \times 10^{-4}$	$7,293 \times 10^{-3}$	$7,295 \times 10^{-3}$	$7,296 \times 10^{-3}$	$6,503 \times 10^{-3}$
0,0125	$3,627 \times 10^{-4}$	$5,678 \times 10^{-4}$	$5,705 \times 10^{-4}$	$5,705 \times 10^{-4}$	$5,579 \times 10^{-3}$
0,00625	$1,965 \times 10^{-4}$	$1,314 \times 10^{-4}$	$1,335 \times 10^{-4}$	$1,335 \times 10^{-4}$	$2,920 \times 10^{-3}$

Tabla I. Comparación del error utilizando distintos métodos

La influencia del número de nodos de la estrella (sin contar el nodo central) en el error de la solución (evaluado según la norma L2) al resolver la ecuación (22) se puede ver en la Figura 3. En ella se aprecia como disminuye el error al aumentar el número de nodos en la estrella, tanto en el caso de malla regular ($dt = 0,05$) como irregular ($dt = 0,031$) del mismo número de nodos. Se observa también que los resultados del error en el caso de malla regular son mejores que en malla irregular (donde también el valor del paso de tiempo es menor para un mismo número de nodos de la malla).

El hecho de aumentar el número de nodos en la estrella para mallas irregulares proporciona mejoras importantes para el caso unidimensional, pero resulta aún más ventajosa en su aplicación a los casos bidimensional² y fácilmente extensible al caso tridimensional.

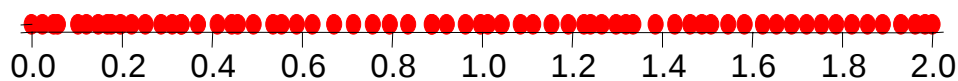


Figura 2. Malla irregular de 67 nodos

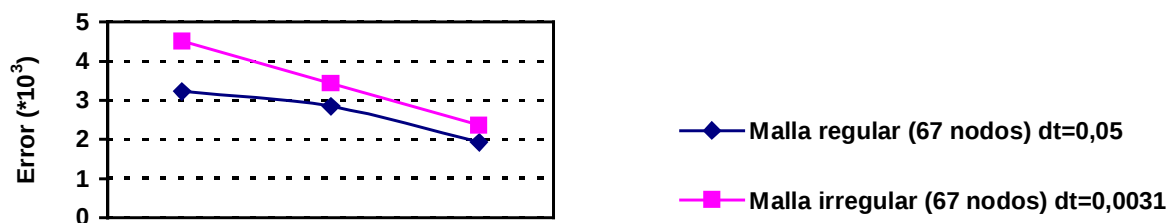


Figura 3. Comparación del error al aumentar el número de nodos

Caso bidimensional

Resolución de la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad t > 0; \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1 \quad (25.a)$$

condición inicial

$$u(x, y, 0) = \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) \quad 0 < x < 1; \quad 0 < y < 1 \quad (25.b)$$

condición de contorno

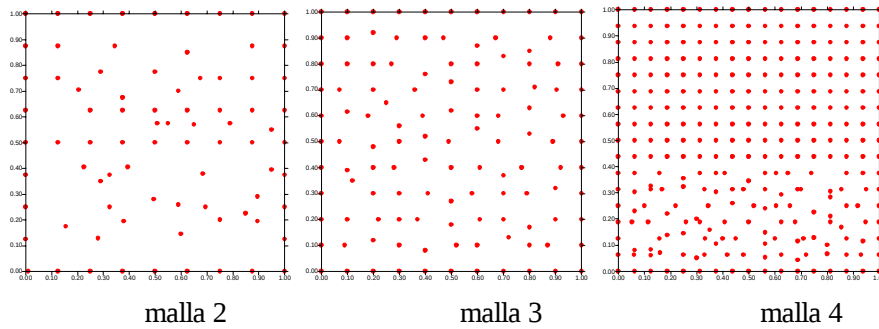
$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi y), x = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= -\pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi y), x = 1 \end{aligned} \right\} 0 \leq y \leq 1, \quad t > 0$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial y} &= \pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x), y = 0 \\ \frac{\partial u}{\partial y} &= -\pi e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x), y = 1 \end{aligned} \right\} 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0 \quad (25.c)$$

cuya solución analítica

$$u(x, y, t) = e^{-2\pi^2 t} \text{sen}(\pi x)\text{sen}(\pi y) \quad (26)$$

La Figura 5 muestra el error en el valor obtenido para la función u y sus derivadas parciales primeras respecto de $x(dx)$, $y(dy)$ y $t(dt)$. Se utilizan para su resolución las mallas irregulares indicadas como malla 2 (81 nodos), malla 3 (121 nodos) y malla 4 (289 nodos) en la Figura 4.

**Figura 4.** Mallas irregulares

La fórmula de error empleada es

$$\text{Error} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^N (\text{sol}(i) - \text{exac}(i))^2}}{|\text{exac}_{\max}|} \times 100$$

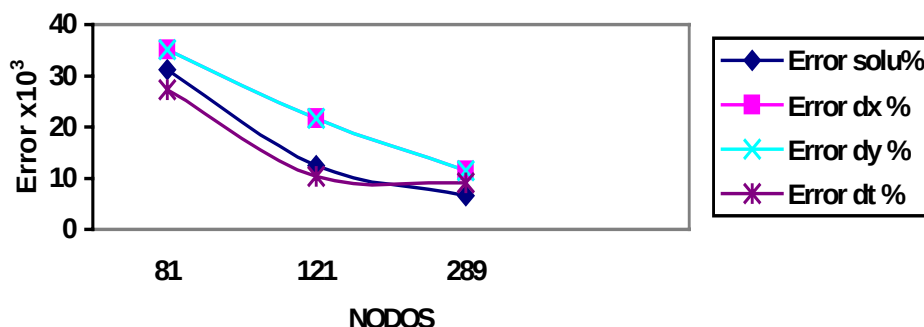


Figura 5. Error al aumentar el número de nodos en la malla

En la Figura 5 se puede apreciar cómo disminuye el error de la solución y de las derivadas parciales primeras al aumentar el número de nodos en la malla.

Aunque la utilización de mallas irregulares con un número de nodos cada vez más elevado conlleva un menor error, tanto en la solución como en las derivadas parciales primeras, cada vez que se aumenta el número de nodos se hace más pequeño el incremento de tiempo Δt , con lo que se deben efectuar más pasos para llegar al mismo valor de t y, por lo tanto, un mayor número de cálculos. Se debe por lo tanto establecer un compromiso entre ambos factores.

CONCLUSIONES

La obtención de las fórmulas en diferencias finitas para cualquier tipo de malla en forma explícita permite su aplicación a la resolución de ecuaciones diferenciales en derivadas parciales dependientes del tiempo, mostrándose en este artículo los casos unidimensional y bidimensional.

Además, se ha obtenido el criterio de estabilidad de gran utilidad, ya que permite una sencilla programación para su aplicación dentro del programa general.

Los resultados obtenidos para el caso unidimensional se han comparado con los obtenidos por otros investigadores⁵, pudiéndose apreciar la eficiencia del método.

Se ha analizado la influencia del aumento del número de nodos en la estrella en la disminución del error, pudiéndose apreciar mayores ventajas en el caso bidimensional, aunque los resultados en el caso unidimensional son muy buenos.

REFERENCIAS

- 1 J.J. Benito *et al.*, "Approximation of functions in a methods of finite points", in: S. Idelson, E. Oñate y E. Dvorkin (eds.), *Computational Mechanics*, IACM, CIMNE, (1998).
- 2 J.J. Benito, F. Ureña y L. Gavete, "Influence of several factors in the generalized finite difference method", *Applied Mathematical Modelling*, Vol. **25**, pp. 1039–1053, (2001).
- 3 G.E. Forsythe y W.R. Wasow, "*Finite-difference methods for partial differential equations*", Wiley, New York, (1960).
- 4 L. Gavete, J.J. Benito, S. Falcón y A. Ruiz, "Implementation of essential boundary conditions in a meshless method", *Communications in Numerical Methods Engineering*, Vol. **16**, pp. 409–421, John Wiley & Sons, (2000).

- 5 A. Huerta y S. Fernández, “Métodos sin malla de alto orden en espacio y tiempo para problemas con convección dominante”, Sesión monográfica sobre avances en el desarrollo y aplicaciones de métodos sin malla, *XVII Congreso de Ecuaciones Diferenciales y Aplicaciones*, Salamanca, 24-28 Setiembre, (2001).
- 6 P.S. Jensen, “Finite difference technique for variable grids”, *Computer and Structures*, Vol. **2**, 17–29, (1972).
- 7 Z. Kaczkowski y R. Tribillo, “A generalization of the finite difference method”, en polaco, *Archiwum Inzynierii Ladowej*, Vol. **2**, N° 21, pp. 287–293, (1975).
- 8 T. Liszka y J. Orkisz, “The finite difference method at arbitrary irregular grids and its application in applied mechanics”, *Computers & Structures*, Vol. **II**, pp. 83–95, Pergamon Press, (1980).
- 9 T. Liszka, “An interpolation method for an irregular net of nodes”, *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, Vol. **20**, pp. 1599–1612, (1984).
- 10 E. Oñate, S. Idelson, D.C. Zienkiewicz y R.L. Taylor, “A finite point method in computational mechanics. Applications to conductive transport and fluid flow”, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. **39**, pp. 3839–3866, (1996).
- 11 J. Orkisz, “Meshless finite difference method I. Basic approach”, *Computational Mechanics*, S. Idelson, E. Oñate y E. Dvorkin (eds.), IACM, CIMNE, (1998).
- 12 N. Perrone y R. Kao, “A general finite difference method for arbitrary meshes”, *Comp. Structures*, Vol. **5**, pp. 45–58, (1975).