

ESTIMACIÓN DE LA RIGIDEZ LATERAL ELÁSTICA DE MUROS CON ABERTURAS¹

Arturo Tena Colunga², Germán Rivera Hernández² y Jonathan Vergara Sánchez³

Resumen: Se comparan las aproximaciones obtenidas con distintos métodos simplificados propuestos en la literatura para estimar la rigidez lateral de muros con aberturas de cualquier material que se modele como elástico lineal, con los resultados obtenidos con el método del elemento finito para modelaciones hechas con mallados razonablemente finos. Se estudiaron muros de un nivel y de varios niveles, con distribuciones simétricas y asimétricas de aberturas con respecto a un eje vertical. De los resultados obtenidos se observa que cuando existen asimetrías en la distribución de una sola franja de aberturas en elevación, las mejores aproximaciones se obtienen con el método del marco equivalente más usado en México, el de Coull y Choudhury y el método de la columna ancha equivalente de sección variable propuesto por los autores, sobre todo a medida que aumenta la esbeltez de los muros.

Palabras claves: asimetría de aberturas en elevación, desplazamientos laterales, muros con aberturas, rigidez lateral elástica.

ASSESSMENT OF THE ELASTIC LATERAL STIFFNESS OF WALLS WITH OPENINGS

Abstract: Approximations obtained with different simplified methods to assess the lateral stiffness of walls with openings for any material that can be modeled as linear elastic are compared to results obtained with the finite element method using reasonably fine meshes. Both single story and multistory walls were studied, considering symmetric and asymmetric distribution of openings with respect to a vertical axis. From the obtained results it can be observed that for a single strip of asymmetric perforated walls, the best approximations are obtained using the equivalent frame method more commonly used in Mexico, the method proposed by Coull and Choudhury, as well as the method baptized as the equivalent nonprismatic wide column analogy, particularly as the slenderness of the wall increases.

Keywords: asymmetric distribution of openings in height, elastic lateral stiffness, lateral displacements, walls with openings.

INTRODUCCIÓN

El impacto que tienen las aberturas en el comportamiento de muros de cortante ante carga lateral fue un tema que capturó la atención de investigadores y diseñadores de los años sesenta. De hecho, muchas de las expresiones, aproximaciones y métodos simplificados de análisis datan de esas fechas. Esto se debió a que en esa década hubo un rápido incremento en el número de edificios de mediana altura construidos casi exclusivamente por muros de cortante, lo que fomentó el desarrollo de investigaciones de índole práctica sobre el comportamiento básico de tales estructuras y se desarrollaron algunos métodos simples de análisis para este tipo de elementos. Entre los que destacan desde ese entonces por su simplicidad son los métodos propuestos por Coull y Choudhury (1967a; 1967b) y Schwaighofer y Microys (1969) para muros acoplados de varios niveles (Tena, 2007). Las aproximaciones obtenidas con estos métodos se calibraron en ese entonces únicamente con los resultados de algunos cuantos muros de poca elevación con patrones de aberturas simétricos con respecto a un eje vertical.

En los años ochenta Schneider y Dickey (1987) presentaron una serie de métodos que se aplicaban desde hace tiempo para analizar muros con aberturas de un solo nivel, los cuales en teoría son simples y prácticos. Sin embargo,

¹ Artículo recibido el 18 de julio de 2011 y aceptado para publicación el 7 de noviembre de 2011.

² Universidad Autónoma Metropolitana, Departamento de Materiales, Col. Reynosa Tamaulipas, México, D.F., E-mail: atc@correo.azc.uam.mx

³ ICA Ingeniería, Minería 41, México, D.F., E-mail: vergara@icacc.com.mx

se han demostrado las grandes imprecisiones de tales métodos cuando se comparan con resultados obtenidos con elementos finitos (Tena-Colunga, 1992a; Vergara, 2005; Neunhofer, 2006; Tena-Colunga, 2007), pues normalmente sobrestiman notablemente y de manera inconsistente su rigidez lateral, además que son muy imprácticos cuando la geometría y distribución de aberturas no es simple (Schneider y Dickey, 1987).

Ciertamente, el modelado de muros con aberturas de manera simple es una labor compleja que aún no ha sido resulta completamente. En este caso el empleo del método del elemento finito resulta indispensable si se pretenden obtener resultados confiables, tanto para estimar deformaciones, rigideces y esfuerzos. Ante la ausencia de métodos analíticos simples que pudieran estimar fácil y razonablemente la matriz de rigidez lateral de muros con patrones complejos de aberturas, incluyendo asimetrías, Tena-Colunga (1992a; 1992b) propuso el método de la viga condensada equivalente (Tena, 2007), un método mixto donde se obtiene la matriz de rigidez lateral de vigas condensadas equivalentes a partir de utilizar el método de las flexibilidades junto con el método del elemento finito. Aunque el método es para fines prácticos exacto, dado que en esencia es una condensación estática realizada numéricamente, tiene el inconveniente que se requieren emplear forzosamente modelos con elementos finitos con cierto detalle.

En épocas recientes el desarrollo o mejora de modelos simples para analizar muros con aberturas ha recibido relativamente poca atención, en parte porque las capacidades de las computadoras personales desde 1997 a la fecha han facilitado el uso de programas comerciales de elementos finitos para modelarlos razonablemente. Sin embargo, aún hoy en día es poco práctico modelar con rigor, utilizando mallados razonablemente finos, edificios completos de mediana a gran altura que cuenten con una gran cantidad de muros con aberturas, sobre todo si la distribución de las aberturas en elevación es irregular o compleja. En muchas ocasiones, los ingenieros de la práctica no disponen del tiempo necesario para desarrollar modelos tridimensionales en elementos finitos rigurosos que les permitan analizar y diseñar este tipo de estructuras con tal detalle, aunque si cuentan actualmente con el software (por ejemplo, SAP 2000 o similares) y con el equipo de cómputo para realizar tales análisis.

Por ello, aun se requieren de métodos que sean relativamente simples de aplicar y que permitan obtener una aproximación razonable de la rigidez lateral de muros con aberturas. Lo anterior permitiría obtener estimaciones razonables de sus características dinámicas (periodos y modos), de los desplazamientos laterales, distorsiones de entrepiso y, a partir de ahí, obtener distribuciones relativas de fuerzas y esfuerzos con métodos simples que permitan concretar diseños estructurales adecuados, sin la necesidad imperiosa de requerir los resultados de análisis más complejos con elementos finitos.

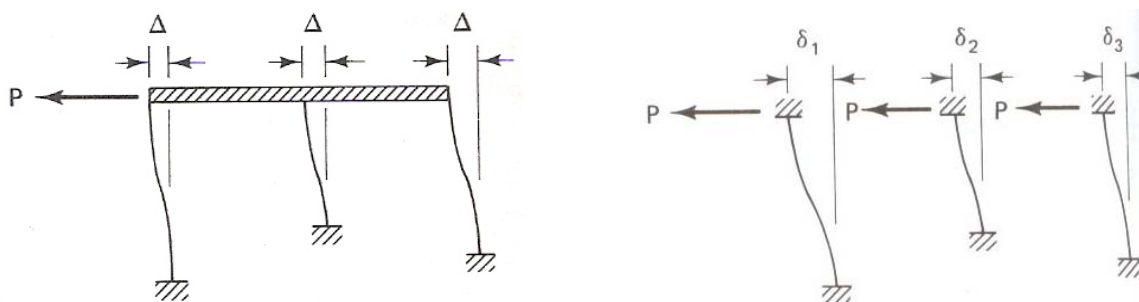
Como un primer paso en esta dirección, en este trabajo se reportan las aproximaciones obtenidas en la estimación de los desplazamientos laterales por los métodos simplificados propuestos previamente en la literatura y nuevas variantes propuestas por los autores, con los resultados obtenidos a partir de modelaciones con elementos finitos utilizando mallados razonablemente finos. Estos estudios, que se reportan con detalle en Vergara (2005) y Rivera (2006), se describen, resumen y comentan en las siguientes secciones.

MÉTODOS SIMPLIFICADOS EN EVALUACIÓN

Se evaluaron desde métodos simples, que se han propuesto exclusivamente para muros de uno a dos niveles, a métodos cuyo intervalo de aplicación propuesto es más amplio e incluye muros de uno a varios niveles. A continuación se describen brevemente los métodos en estudio.

Métodos simples

En Schneider y Dickey (1987) se presentan tres métodos supuestamente simples basados en que los desplazamientos laterales de muros paralelos conectados por medio de diafragmas rígidos son iguales. Uno de los métodos propuestos es sumamente complicado (método III), sobre todo para patrones de aberturas relativamente complejo, y dado que ya se ha demostrado fehacientemente las grandes imprecisiones obtenidas cuando se comparan con resultados obtenidos con elementos finitos (Neunhofer, 2006; Tena-Colunga, 2007), nos limitaremos a evaluar los dos métodos que realmente son simples de aplicar, y que se basan en las siguientes hipótesis: 1) ante cualquier carga lateral, los muros que estén conectados por una viga/colector/diafragma rígido deben experimentar el mismo desplazamiento (Figura 1a) y, 2) si los muros o porciones de muros (muretes) están conectados entre sí, existen deformaciones relativas entre ellos, por lo cual en rigor su deformación propia es distinta y ésta debe considerarse en la estimación de la deformación del conjunto (Figura 1b). En todos los métodos la rigidez lateral debe estimarse considerando obviamente las deformaciones por flexión y por cortante.



a) Desplazamiento lateral igual de tres muros conectados por un elemento rígido.

b) Desplazamiento lateral de un muro compuesto de muretes no conectados rígidamente.

Figura 1: Hipótesis sobre el comportamiento de muros ante carga lateral (adaptado de Schneider y Dickey, 1987)

Método I

Este método requiere de los siguientes pasos:

1. Obtener el desplazamiento lateral del muro como si fuera un muro sólido en voladizo.
2. Restarle al desplazamiento anterior el desplazamiento lateral de una franja equivalente en voladizo debido a la presencia de las aberturas, donde la altura de esta franja equivalente en voladizo es igual en dimensión a la altura de la mayor abertura existente en el muro.
3. Calcular el desplazamiento lateral de todas las secciones compuestas con muro y aberturas consideradas en la sección de la franja equivalente en voladizo.
4. Sumar los desplazamientos laterales de los muretes individuales con el desplazamiento lateral modificado obtenido en inciso dos, para obtener el desplazamiento lateral final.
5. Calcular el inverso del desplazamiento lateral final para obtener la rigidez lateral de entrepiso del muro.

Método II

Este método se basa en la hipótesis de que en muros con aberturas, los segmentos sólidos que se encuentran entre las aberturas o bordes libres son los que determinan la flexibilidad lateral del muro y, además, no se encuentran conectados rígidamente entre ellos (Figura 1b), pero se deforman en doble curvatura (muros continuos). Por ello, en este método se estima la rigidez lateral del muro con aberturas sólo considerando la suma de las rigideces de los muretes individualmente dentro de las aberturas y considerando la altura mínima del murete entre aberturas, si es que existen aberturas contiguas de distinta altura (por ejemplo, una puerta cercana a una ventana o dos ventanas de distinta altura) y se desprecia la rigidez de las franjas sólidas de los muros. Bajo estas hipótesis, la rigidez de cada murete (k_i) en condición de continuidad se calcula como:

$$k_i = \frac{E_i A_i}{h_i} \left[\frac{1}{(h_i/L_i)^2 + 3} \right] \quad (1)$$

donde E_i , A_i , h_i y L_i son respectivamente el módulo de elasticidad, el área gruesa ($L_i t_i$), la altura mínima entre aberturas y el ancho del murete en cuestión. La rigidez total del muro con aberturas se estima como la suma de las rigideces individuales. Por lo tanto, el desplazamiento lateral promedio ante una carga lateral P cualquiera se estima como:

$$\Delta = \frac{P}{\sum_{i=1}^n k_i} = \frac{P}{k_1 + k_2 + k_3 + \dots + k_n} \quad (2)$$

Este es el método más rápido de los propuestos en Schneider y Dickey (1987), y de acuerdo con ellos, es el de menor precisión, como se demostrará también en este trabajo.

Método del marco equivalente

El método del marco equivalente, que en México es conocido entre los ingenieros estructurales como el “método de la columna ancha equivalente”, fue propuesto originalmente por Schwaighofer y Microys (1969) para muros con aberturas conectados por vigas, como se muestra en la Figura 2, y cuyas hipótesis generales de modelado son las siguientes:

1. Los ejes centroidales de las secciones transversales de los muros y de las vigas de conexión forman un marco equivalente.
2. Las características de la sección transversal de todas las columnas del marco equivalente son idénticas a las correspondientes de las secciones de los muros.
3. Las porciones centrales de las vigas tienen las mismas propiedades (A_f e I_f , Figura 2) de las vigas de conexión de la estructura del muro de cortante.
4. Las secciones extremas de las vigas no rotan teóricamente (tienen rigidez infinita a flexión).

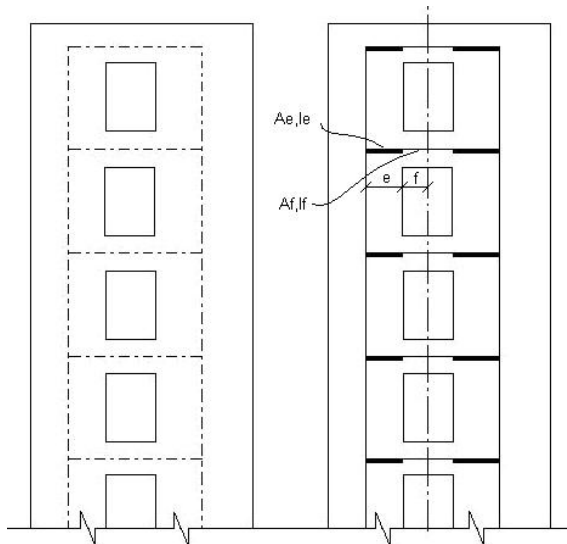


Figura 2: Marco equivalente propuesto por Schwaighofer y Microys.

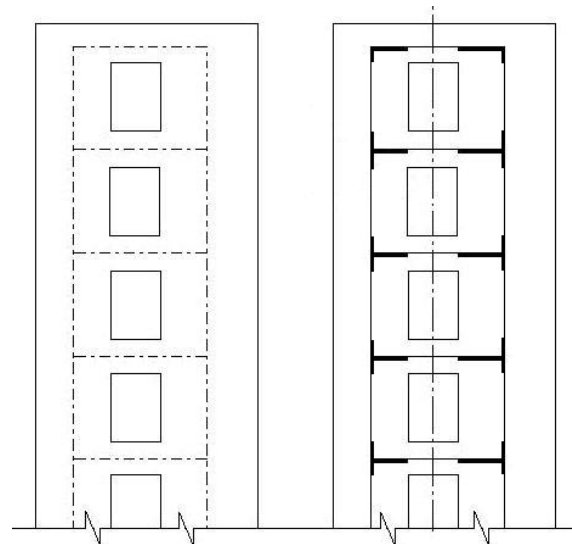


Figura 3: Marco modelado con el método SM3.

Schwaighofer y Microys (1969) proponen usar, alternamente a zonas infinitamente rígidas a flexión, áreas y momentos de inercia equivalentes (A_e e I_e , Figura 2) para las secciones extremas de las vigas de conexión en función de los parámetros e y f (Figura 2), donde e es la distancia entre el eje centroidal del muro y la abertura y f es la distancia del centro de la abertura al muro que le corresponde a dicha columna. Estas áreas y momentos de inercia equivalentes se calculan como:

$$A_e = K_1 A_f \quad (3)$$

$$I_e = K_2 I_f \quad (4)$$

donde los valores de K_1 y K_2 se obtienen de la Tabla 1.

De la Tabla 1 se observa una clara relación lineal entre e/f y K_1 , por lo que se puede escribir:

$$K_1 = 100 \left(\frac{e}{f} \right) \quad (5)$$

Sin embargo, la relación entre e/f y K_2 no es apreciable a simple vista. Con los datos de la Tabla 1 se aproximó una relación polinomial de cuarto grado para K_2 (Rivera, 2006):

$$K_2 = 0.0593\left(\frac{e}{f}\right)^4 + 99.348\left(\frac{e}{f}\right)^3 + 302.43\left(\frac{e}{f}\right)^2 + 296\left(\frac{e}{f}\right) + 1.7778 \quad (6)$$

El método propuesto originalmente por Schwaighofer y Microys no considera el caso de varias aberturas en cada entrepiso y en diferente posición. Para esos casos, se propuso lo siguiente (Rivera, 2006):

Tabla 1: Constantes propuestas por Schwaighofer y Microys.

e/f	K_1	K_2
0.5	50	238
1.0	100	700
2.0	200	2600
3.0	300	6300
5.0	500	21500

1. Formar una abertura equivalente en cada nivel, conforme al procedimiento propuesto por Rivera (2006) y que se discute secciones más adelante.
2. La altura de cada muro será la altura total de entrepiso.
3. Los ejes centroidales de los muros que están a cada lado de la abertura equivalente formarán las columnas de un marco equivalente.
4. Las zonas de rigidez infinita se tomarán como las describen los autores (A_e e I_e , Figura 2).

Se consideraron tres variantes del método del marco equivalente, identificados en este estudio con la siguiente nomenclatura:

- *Método SM1.* Se trata del método de Schwaighofer y Microys tal y como fue originalmente propuesto por ellos y descrito líneas atrás.
- *Método SM2.* Corresponde al método del marco equivalente o “columna ancha equivalente” de mayor aplicación en México, donde se consideran las propiedades de las secciones brutas para los muros y se discretizan las zonas de rigidez infinita conforme se ilustra y explica en Tena (2007) o se recomienda en las NTCM-2004 (2004).
- *Método SM3.* Se utilizan las mismas zonas de rigidez infinita que en el método SM2, pero además se toman en cuenta las zonas rígidas de las columnas, como se ilustra en la Figura 3.

Método de Coull y Choudhury

Coull y Choudhury (1967-a; 1967-b) presentaron un método para determinar el desplazamiento lateral de edificios construidos enteramente por muros y losas de entrepiso, en los cuales las cargas laterales-flexionantes son soportadas completamente por los muros.

Su método de análisis lo obtuvieron considerando que el sistema discreto de conexiones, formado por las vigas de dintel o de acoplamiento, puede ser reemplazado por un medio continuo equivalente (Figura 4). El comportamiento del sistema es modelado con una ecuación diferencial de segundo orden, lo cual permite la obtención de una solución cerrada para el problema.

Considerando la estructura de muros de cortante de la Figura 4, las vigas de conexión individuales de rigidez EI_p son reemplazadas por un medio equivalente continuo o láminas de rigidez EI_p/h por unidad de altura.

Las aberturas pueden tener un efecto importante en el comportamiento de los muros de cortante. Las aberturas están normalmente en franjas verticales y en el caso más común de una sola franja de aberturas un parámetro para evaluar el efecto de las aberturas es αH , donde:

$$\alpha = \sqrt{\beta\mu l} \quad (7)$$

$$\beta = \frac{12I_p l}{hb^3(I_1 + I_2)} \quad (8)$$

$$\mu = 1 + \frac{(A_1 + A_2)(I_1 + I_2)}{A_1 A_2 l^2} \quad (9)$$

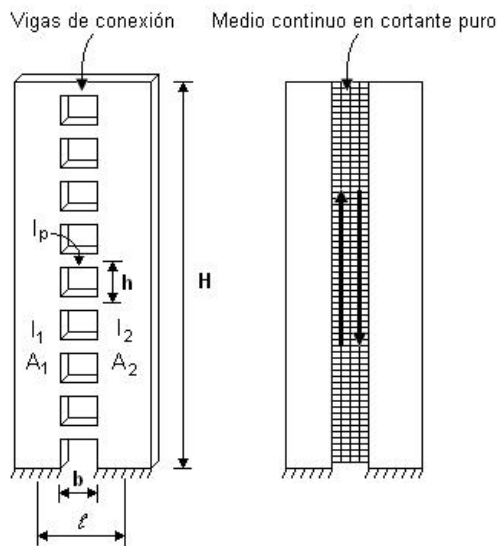


Figura 4: Modelo de Coull y Choudhury.

Cuando $\alpha H > 8$, los muros tienden a comportarse como un muro simple en voladizo; en cambio, para $\alpha H < 4$, el comportamiento es más parecido al de dos muros acoplados por una viga, por lo cual el comportamiento tipo marco equivalente con columnas anchas es más representativo.

Si se cuenta con una sola hilera de aberturas, el impacto de las aberturas en la rigidez lateral del muro se puede evaluar comparando los siguientes parámetros de rigidez:

$$K_w = \frac{3EI_w}{H^3} \quad (10)$$

$$K_{wo} = \frac{3E(I_1 + I_2)}{H^3 K_4}$$

(11)

donde K_w y K_{wo} son las rigideces laterales del muro sin o con aberturas, respectivamente, E es el módulo de elasticidad del muro, I_w es el momento de inercia del muro considerando que no tiene aberturas y:

$$K_4 = 1 - \frac{3}{\mu} \left(\frac{1}{3} + \frac{\sinh(\alpha H)}{(\alpha H)^3 \cosh(\alpha H)} - \frac{1}{(\alpha H)^2} \right) \quad (12)$$

El desplazamiento lateral máximo Δ en la parte superior del muro ante una carga lateral dada P se calcula con la ecuación:

$$\Delta = \frac{PH^3 K_4}{3E(I_1 + I_2)} \quad (13)$$

Con el método original de Coull y Choudhury sólo se estima el desplazamiento máximo en la parte superior del muro. Por lo tanto, para obtener los desplazamientos laterales en cada piso, se evaluaron las hipótesis siguientes que fueron propuestas por Rivera.

Método CCI. A partir de la ecuación (13), se propone que el desplazamiento lateral a cualquier altura x , $\Delta(x)$, se estime como:

$$\Delta(x) = \frac{Px^3 K_4}{3E(I_1 + I_2)}; \quad 0 \leq x \leq H \quad (14)$$

Método CC2. A partir de la ecuación (13) se propone la siguiente función para estimar el desplazamiento lateral $\Delta(x)$:

$$\Delta(x) = \frac{PH^{3/4} x^{7/4} K_4}{3E(I_1 + I_2)}; \quad 0 \leq x \leq H \quad (15)$$

Método CC3. Se obtiene de multiplicar la ecuación (15) por un factor que depende de la excentricidad normalizada del hueco, (e), como se explica secciones adelante:

$$\Delta(x) = \frac{PH^{3/4} x^{7/4} K_4}{3E(I_1 + I_2)} (1 - e^2); \quad 0 \leq x \leq H \quad (16)$$

Por lo tanto, en esta última propuesta se amplifica el desplazamiento obtenido con el método original de Coull y Choudhury, proponiéndose amplificar más los desplazamientos para los muros de pocos niveles y menos para los muros de más niveles.

MÉTODOS PROPUESTOS POR LOS AUTORES

Método de la columna ancha de sección variable

Se propone discretizar a los muros con aberturas como columnas anchas de sección variable (Figura 5), considerando que, en elevación, lo que ocasiona cada franja de aberturas es una disminución de sus propiedades de rigidez (inercia y área) y, por lo tanto, si se consideran éstas en el análisis, se puede tener una mejor estimación de su rigidez lateral.

Considérese el muro con aberturas de la Figura 5-a; éste se puede discretizar en elevación en cuatro tramos (Figura 5-b), donde se consideren los cambios que existen en su rigidez.

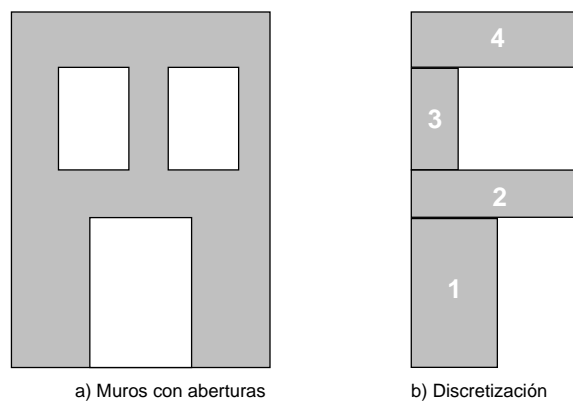


Figura 5: Discretización de muros con aberturas como una columna ancha de sección variable.

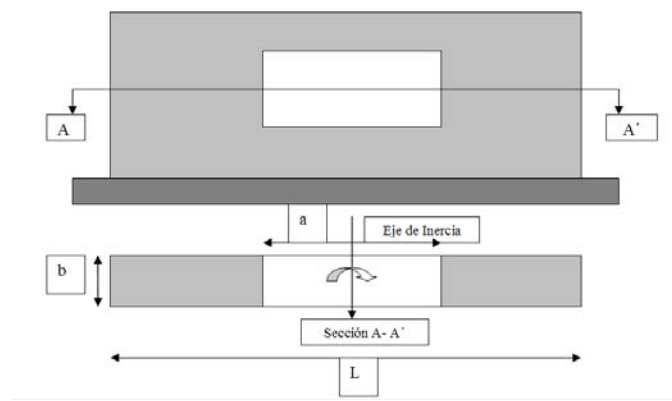


Figura 6: Sección transversal del muro en la zona de la abertura.

Toda vez definidas las propiedades equivalentes de cada tramo (inercias, áreas), la rigidez de estos elementos se determinan con procedimientos tradicionales, ya sea numéricamente utilizando el teorema área-momento (Rivera, 2006) o el método de las flexibilidades aplicando las integrales respectivas (Tena-Colunga, 1996; Tena 2007). Dado que las aberturas se discretizan en tramos prismáticos definidos (Fig. 5-b), también se puede utilizar sin mayor problema cualquier software comercial (ETABS, SAP2000, STAAD-PRO o similares).

Las propiedades de inercia, área de sección transversal y área de cortante de todos los segmentos del muro a lo largo de su eje longitudinal donde no existen aberturas se calculan conforme se hace para cualquier elemento prismático y continuo bien definido.

Para la obtención de las inercias equivalentes en los segmentos con aberturas, se propusieron y evaluaron las tres variantes que se enuncian a continuación.

Método CE1. En este método, denominado como el de la inercia completa de la sección transversal en la zona de la abertura, se considera la inercia efectiva de las secciones transversales con aberturas (o huecas, Figura 6), como si ésta fuera continua en toda su elevación, lo que dependería de que los segmentos adyacentes de muros proporcionen la suficiente rigidez y continuidad para que este comportamiento se produzca.

Por lo tanto, si la sección transversal del muro en la zona de la abertura es la que se ilustra en la Figura 6, las propiedades equivalentes en esa zona se calcularían como:

$$I_{eq} = \frac{b}{12}(L^3 - a^3) \quad (17)$$

$$A_{eq} = b(L - a) \quad (18)$$

$$A_{ceq} = \frac{A_{eq}}{1.2} \quad (19)$$

Método CE2. En esta variante, nombrada como el método de la inercia conjunta reducida de la sección transversal en la zona de la abertura, se calcula una sección efectiva equivalente, donde la inercia se reduce en función de considerar que la presencia de la abertura flexibiliza tanto al muro que, en la zona de la abertura, la inercia sería equivalente a la de una sección rectangular cuya longitud es igual a la longitud efectiva de los tramos sólidos del muro. Por lo tanto, si el muro fuera el de la Figura 6, la inercia equivalente reducida sería:

$$I_{eq} = \frac{b}{12}(L - a)^3 \quad (20)$$

Las áreas axial y de cortante equivalentes se calcularían con las ecuaciones (18) y (19), pues esta hipótesis no afecta su definición.

Método CE3. Esta variante se denomina como el método de las inercias individuales de los segmentos de muretes en la zona de la abertura, y en él se considera que la abertura provoca un desacoplamiento completo de los segmentos de muro aledaños a la misma, por lo que cada segmento de muro o murete aporta individualmente a la rigidez lateral del muro en función de las propiedades de su sección transversal, es decir, se considera que la inercia de una sección con aberturas es la suma de las inercias de las distintas secciones sólidas. Para el muro de la Figura 6, se tendría entonces que la inercia efectiva del muro en la zona de la abertura sería igual a la suma de las rigideces de los segmentos de muros (dos en este caso), por lo tanto, ésta se calcularía como:

$$I_{eq} = 2 \left[\frac{b}{12} \left(\frac{L - a}{2} \right)^3 \right] \quad (21)$$

Las áreas se calculan igual que en los dos métodos anteriores.

Método CE4. Este método es básicamente el método CE1 o de la inercia completa, pero para tomar en cuenta la excentricidad del hueco, la inercia calculada con la ecuación (17) se multiplica por $(1 - e^2)$, donde e es una excentricidad normalizada (fracción), como se detalla secciones más adelante.

Método CE5. Se denomina como método de la inercia completa reducida con rigidez variable, y es casi igual al anterior (CE4), con la salvedad de que el desplazamiento obtenido con el método anterior es amplificado por el factor $1/(1-1/N)$, donde N es el número de niveles del muro.

Superelemento muro con abertura condensado

Una manera razonable de analizar un muro con aberturas es a partir de dividir éste en unos cuantos segmentos de distintas longitudes con el método del elemento finito, como se ilustra en la Figura 7. En ella se observa que se discretiza al muro en nueve segmentos (mínimo requerido para definir una abertura), donde el segmento más central comprende a la abertura, por lo cual se requiere en realidad de ocho segmentos sólidos para definir la rigidez del mundo. Bajo esta hipótesis se puede emplear cualquier elemento finito para estado plano de esfuerzos o tridimensional (membrana, cascarón, sólido, etc.); sin embargo, con la finalidad de hacerlo relativamente simple, inicialmente se empleó un elemento tipo placa de cuatro nodos y ocho grados de libertad, dado que su matriz de rigidez es muy conocida (véase por ejemplo: Przemieniecki, 1985).

Toda vez que se ensambla la matriz de rigidez de este elemento, a través de una condensación estática se puede determinar un superelemento en función de los desplazamientos laterales exclusivamente, o hacer transformaciones para desarrollar una columna ancha equivalente con al menos grados de rotación y de traslación, utilizando procedimientos que están perfectamente documentados en la literatura (véase por ejemplo: Tena, 2007).

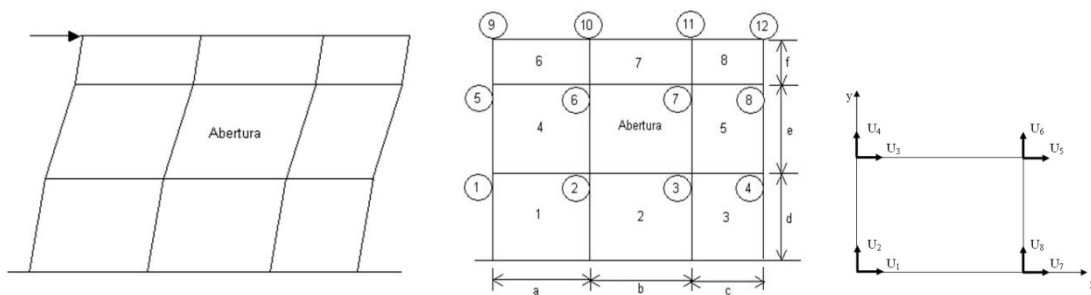


Figura 7: Discretización de los muros con aberturas en estudio.

DETERMINACIÓN DE UNA ABERTURA EQUIVALENTE

Por simplicidad, muchos de los métodos simplificados propuestos para estimar la rigidez lateral de muros de varios niveles con aberturas consideran sólo una franja central de aberturas, por ejemplo, los métodos de Coull y Choudhury o el del marco equivalente. Para adaptar dichos métodos a la evaluación de muros que disponen de varias aberturas, Rivera (2006) propuso un método para definir una abertura equivalente (Figuras 8 y 9).

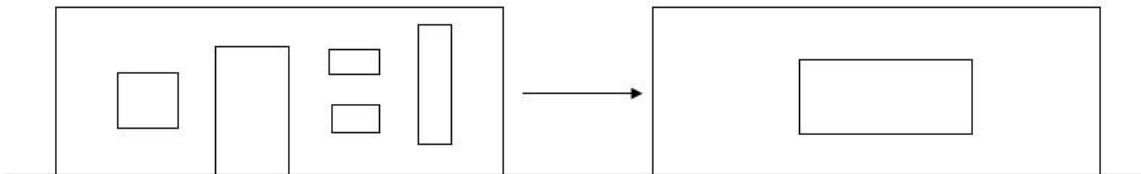


Figura 8: Simplificación de muros con múltiples aberturas en uno con una abertura equivalente.

El procedimiento propuesto es el que se enumera a continuación:

1. Se forma una sola abertura desplazando las aberturas individuales, o partes de ellas (teniendo cuidado de no intercambiarlas o traslaparlas), hasta formar un gran rectángulo con algunos apéndices rectangulares (Figura 9).
2. El área de la abertura equivalente (A_e) es simplemente la suma de las áreas individuales.
3. Se calcula el área del rectángulo mayor y la de sus apéndices (A_i)
4. La proporción largo-alto de la abertura equivalente se obtiene calculando un promedio pesado de las alturas y largos de la nueva discretización.

$$\frac{H_e'}{L_e'} = \frac{\sum_{i=1}^n H_i A_i}{\sum_{i=1}^n L_i A_i} \quad (22)$$

5. Las dimensiones de la abertura quedan dadas por las fórmulas:

$$L_e = \sqrt{A_e \left(\frac{L_e'}{H_e'} \right)} \quad (23)$$

$$H_e = \sqrt{A_e \left(\frac{H_e'}{L_e'} \right)} \quad (24)$$

6. El centroide de la nueva abertura se ubica en el centroide de las aberturas originales.

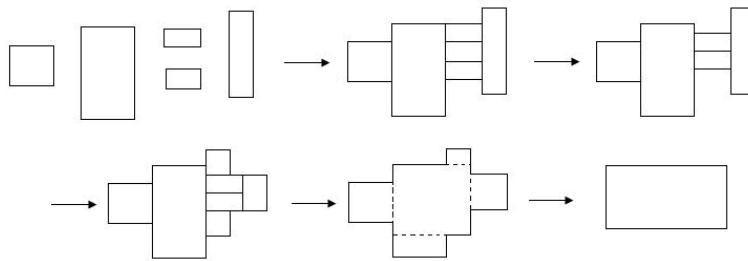


Figura 9: Ejemplo de la obtención de una abertura equivalente.

La aplicación del procedimiento propuesto para obtener la abertura equivalente se ilustra con el muro presentado en la Figura 10.

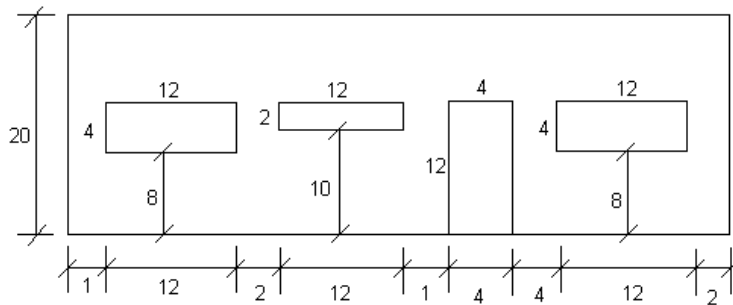


Figura 10: Muro 16 en estudio (dimensiones generales del muro en pies).

Primero se toman sólo las aberturas y se recorren horizontalmente hasta que se juntan (Figura 11-a). Después se recorren algunas secciones de los huecos para que no queden espacios sólidos entre ellos (Figura 11-b). Posteriormente se identifica el rectángulo mayor y sus apéndices. Con estos rectángulos se calcula la proporción alto-largo de la abertura equivalente (Figura 11-c).

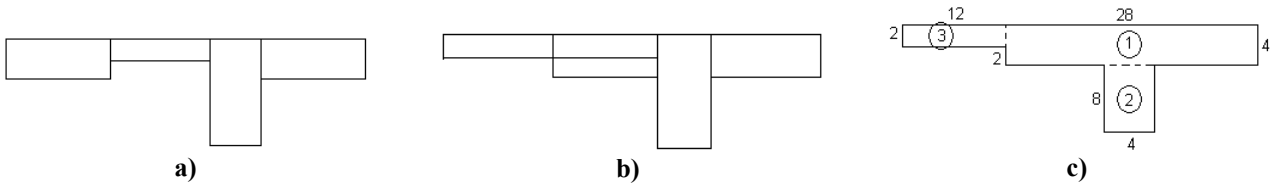


Figura 11: Agrupado de las aberturas del muro 16 en estudio.

Empleando las ecuaciones (22) a (24) y calculando el centroide de las aberturas con respecto a la esquina inferior izquierda del muro, se llega a que el muro con abertura equivalente es el que se presenta en la Figura 12.

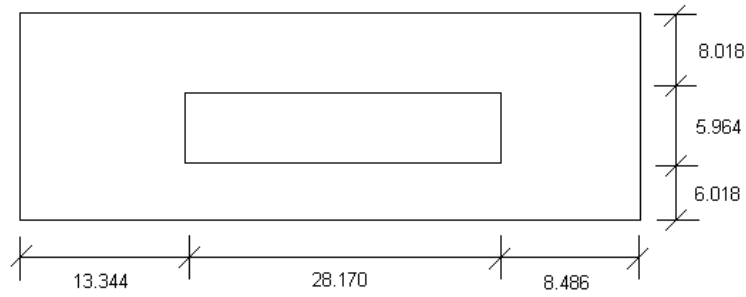


Figura 12: Muro equivalente al muro 16 (dimensiones en pies).

DESCRIPCIÓN GEOMÉTRICA DE LOS MUROS

Para describir de la mejor manera posible los muros estudiados, sobre todo los de varios niveles, se hacen las siguientes definiciones.

Parámetro de abertura λ

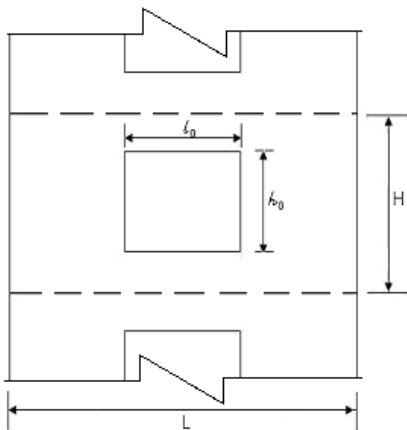


Figura 13: Definición del parámetro λ .

Se define como parámetro de abertura, λ , a la relación entre el área de la abertura y el área gruesa del muro, como se ilustra en la Figura 13.

Así, se tiene que, expresado en porcentaje, el parámetro de abertura se calcula como:

$$\lambda = 100 \left(\frac{l_0 h_0}{Lh} \right) \quad (25)$$

donde L y h son respectivamente la longitud y la altura de entepiso del muro considerado, mientras que l_0 y h_0 son la longitud y altura de la abertura respectivamente.

Parámetro de excentricidad e

El parámetro de excentricidad, e , se define como la relación entre la distancia (d) desde el centroide del muro y el centroide de la abertura, y la distancia disponible para que la orilla de la abertura quede en la orilla del muro, como se ilustra en la Figura 14.

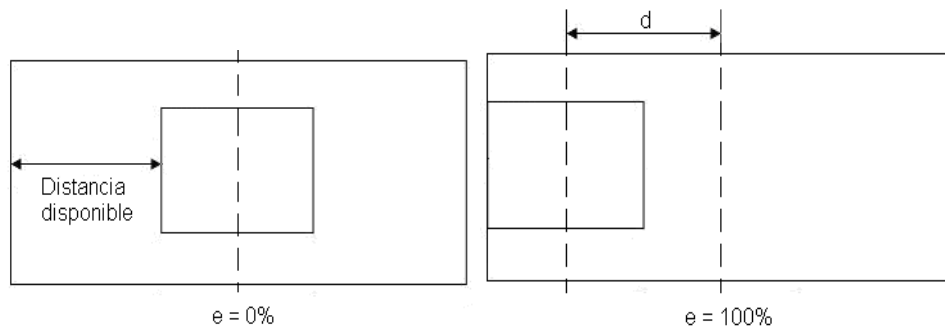


Figura 14: Definición del parámetro de excentricidad e .

Así, el parámetro de excentricidad, expresado en porcentaje, se calcula a partir de las definiciones hechas en las Figuras 13 y 14 como:

$$e = 100 \left(\frac{2d}{L - l_0} \right) \quad (26)$$

ESTUDIO DE MUROS CON ABERTURAS DE UN SOLO NIVEL

Para el estudio se seleccionaron 19 muros de un nivel con distintas configuraciones de aberturas, los cuales se presentan en las Figuras 15 y 16 y de los cuales se resumen sus dimensiones principales en la Tabla 2. La geometría de los muros 1 a 15 (Figura 15) corresponde a aquellos muros estudiados por Álvarez (2000), mientras que la geometría de los muros 16 a 19 (Figura 16) corresponde a la que se presenta en el libro de Schneider y Dickey (1987).

Dado que los muros 16, 18 y 19 disponen de más de una abertura (Figura 16), se determinaron aberturas equivalentes para su empleo en aquellos métodos que están completamente definidos con una abertura central. En la Tabla 3 se dan las dimensiones de los muros equivalentes conforme a la notación empleada en la Figura 17. En el resto de los casos las dimensiones corresponden a las del muro original.

Los 19 muros se discretizaron con mallas razonablemente finas de elementos finitos cuadriláteros tipo cascarón (Shell) de cuatro nodos, disponible en la librería del programa SAP2000. Los muros se supusieron de mampostería de bloques de concreto con $E = 1.728 \times 10^8$ lb/ft², $\nu = 0.15$ y espesor $t = 0.7083$ ft y se les aplicó una carga lateral en la parte superior $F = 1 \times 10^6$ lb. Los detalles de los modelos y los análisis con elementos finitos se reportan en Vergara (2005) y Rivera (2006). La condición de frontera en el apoyo es de restricción total (empotramiento en todos los nodos), como se aprecia en las Figuras 15 y 16. Los modelos del SAP2000 se calibraron con los resultados obtenidos en una modelación previa reportada en Tena-Colunga (1992) con elementos finitos utilizando elementos tipo cascarón isoparamétricos de ocho nodos utilizando el programa POLO-FINITE para los muros presentados en la Figura 16 y se encontraron en muy buena concordancia.

Tabla 2: Dimensiones generales de los muros en estudio.

MURO	DIMENSIONES $H \times L$ (FT)	RELACIÓN H/L	DIMENSIÓN DE LA ABERTURA $h_0 \times l_0$			λ
1	7.88 x 7.88	1	0.98x0.98			1.55
2	7.88 x 7.88	1	1.97x 1.97			6.25
3	7.88 x 7.88	1	2.95x2.95			14.30
4	7.88 x 7.88	1	3.94x3.94			25.38
5	7.88 x 7.88	1	0.98x0.98			1.55
6	7.88 x 7.88	1	1.97x1.97			6.25
7	7.88 x 7.88	1	2.95x2.95			25.38
8	7.88 x 11.82	0.67	1.97 x 2.95			6.25
9	7.88 x 11.82	0.67	2.95 x 4.43			14.03
10	7.88 x 11.82	0.67	1.97 x 2.95			6.25
11	7.88 x 11.82	0.67	2.95 x 4.43			14.03
12	7.88 x 3.94	2	1.97 x 0.98			6.22
13	7.88 x 3.94	2	2.95 x 1.48			14.06
14	7.88 x 3.94	2	1.97 x 0.98			6.22
15	7.88 x 3.94	2	2.95 x 1.48			14.06
16	20 x 50	0.4	1)4 x 12	2)2 x 12	3)4 x 12 4)4 x 12	16.80
17	20 x 50	0.4	1)8 x 20	N/A	N/A N/A	16.00
18	20 x 50	0.4	1)10 x 10	2)4 x 10	3)12 x 6 N/A	21.2
19	20 x 50	0.4	1)8 x 9	2) 8 x 9	N/A N/A	14.40

Por ello, los desplazamientos laterales promedio obtenidos para cada muro se reportan en la Tabla 4 bajo las siglas FEM y, para fines de este estudio, éstos se consideran como exactos, o dicho de otra manera, son los desplazamientos de referencia por ser los más cercanos a una respuesta teóricamente exacta.

En la Tabla 4 se comparan los resultados obtenidos con elementos finitos con las estimaciones hechas con los distintos métodos presentados. Cabe destacar que los muros de un nivel no se comparan con el método de Coull y

Choudhury, dado que éste fue propuesto inicialmente para muros de varios niveles (Figura 4). De igual manera, no se deberían comparar con el método del marco equivalente, que también ha sido propuesto para muros acoplados de varios niveles (con una abertura central muy bien definida, Figura 3); sin embargo, en este caso si se hace, dado que es una práctica muy común en México querer utilizar el “método de la columna ancha equivalente” para todo, sin razonar mucho si las bases analíticas y geométricas del mismo corresponden o no a la realidad del muro con aberturas en estudio y, por ello, es interesante demostrar con números que no se puede emplear indiscriminada e irreflexivamente.

De la comparación de los resultados obtenidos con el método del elemento finito (FEM) con los obtenidos con los distintos métodos aproximados se pueden hacer las siguientes observaciones.

El Método II presentado en Schneider y Dickey es totalmente desconfiable para estimar la rigidez lateral de muros con aberturas, pues subestima notablemente los desplazamientos laterales, independiente de la relación de esbeltez del muro (H/L) y de las dimensiones y geometrías de las aberturas.

El Método I definido en Schneider y Dickey es muy inconsistente, normalmente sobrestima notablemente la rigidez de los muros, sobre todo cuando son esbeltos (muros 12 a 16, $H/L = 2$) y, cuando son robustos ($H/L \leq 1$), a medida que las aberturas son grandes y/o asimétricas (muros 4, 7, 9 y 11), o si son largos y su patrón es muy complejo (muro 18). Aun así, sus estimaciones son razonables cuando la abertura es pequeña en muros donde $H/L \leq 1$, independientemente de si es asimétrica o simétrica (muros 1, 5 y 10). Algo digno de mencionar es que se observa que el método tiende a estimar de mejor manera la rigidez lateral de muros con varias aberturas de tamaño relativamente reducido (muros 16 y 19), que una sola abertura de mayores dimensiones, pero con factor de abertura similar (muro 17).

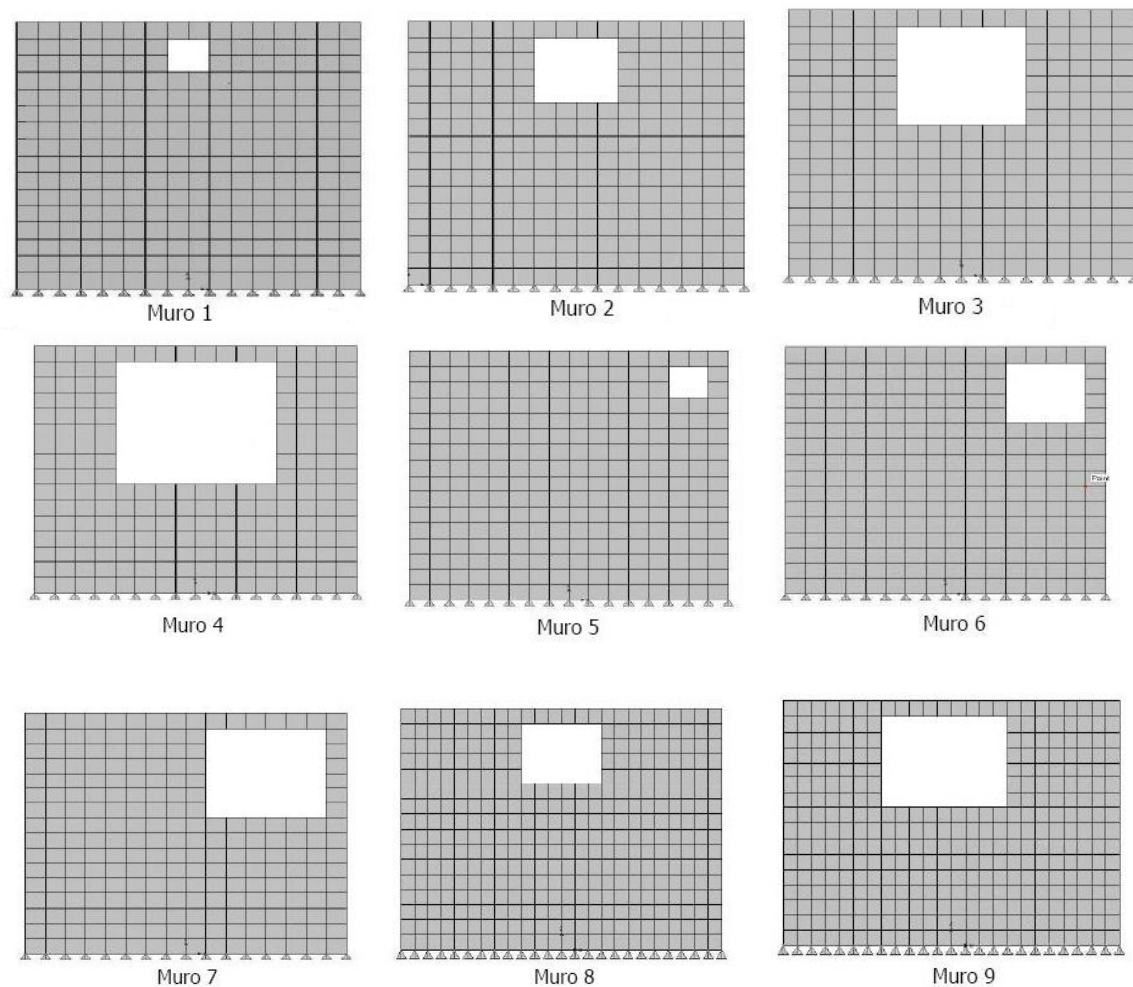


Figura 15: Muros estudiados por Álvarez (2000).

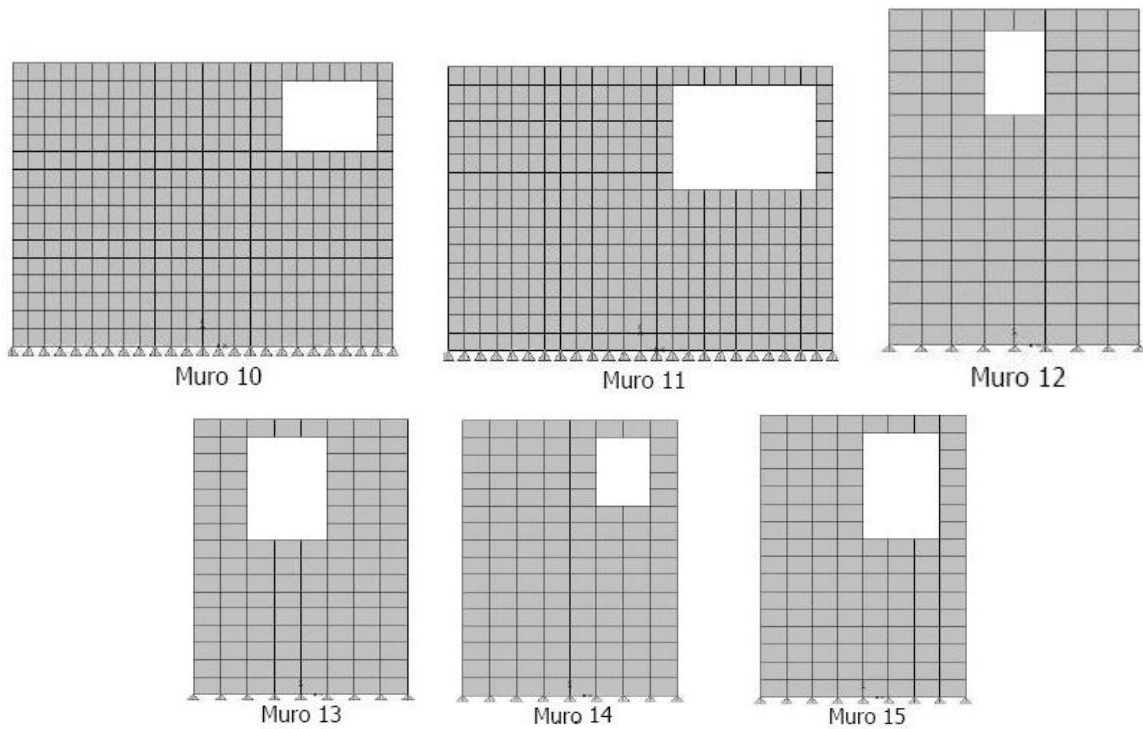


Figura 15: Muros estudiados por Álvarez (2000), continuación.

Como se esperaba, las variantes del método del marco equivalente, tal y como se aplica en México (SM2) o como lo propusieron originalmente Schwaighofer y Microys (SM1), sobrestiman notablemente los desplazamientos laterales (y en consecuencia, subestiman la rigidez lateral) de todos los muros en estudio, dado que la geometría de los muros, incluyendo los simétricos (Figuras 15 y 16), no se parecen en nada a las hipótesis hechas por Schwaighofer y Microys a la hora de definir el método (Figura 2). El considerar zonas de rigidez infinita también en las columnas del marco equivalente (SM3, Figura 3) hace mucho más rígido al método con respecto al modelado más riguroso con elementos finitos (Tabla 4); sin embargo, las imprecisiones son muy grandes, salvo en el caso excepcional del muro 18, donde parece que lo que más ayudó fue la propuesta de calcular una abertura equivalente para poder emplear este método. Con respecto al tamaño de la abertura, si se aprecia que el método SM3 mejora a medida que la abertura es más grande y simétrica (por ejemplo, muro 4), pero es totalmente desconfiable para aberturas pequeñas (por ejemplo, muro 1), sobre todo en muros donde dominan las deformaciones por cortante sobre las deformaciones por flexión ($H/L < 2$).

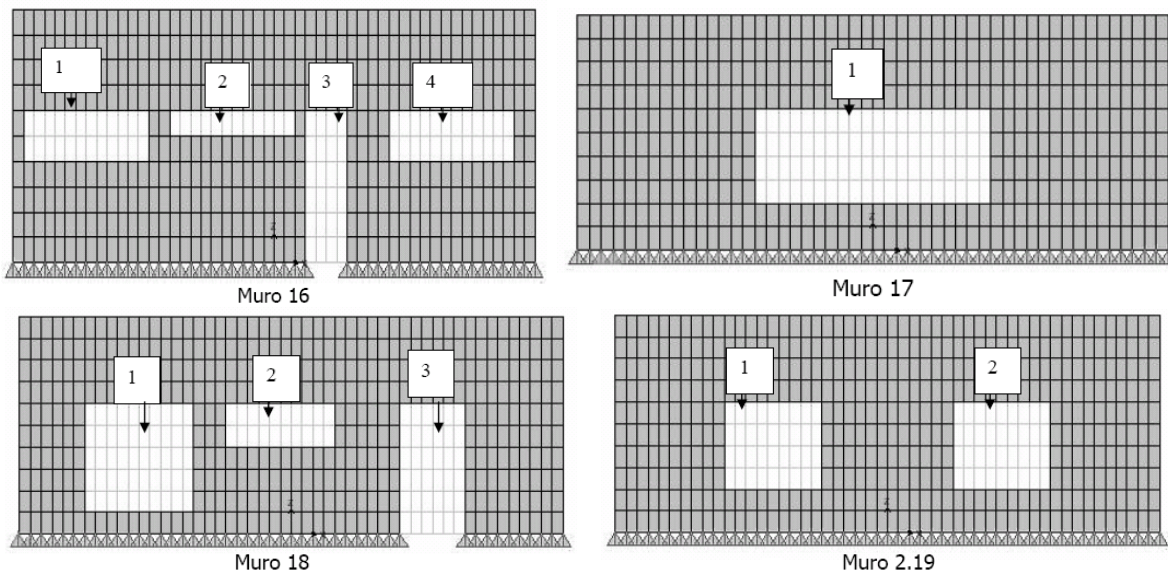


Figura 16: Muros estudiados por Schneider y Dickey (1987).

Con respecto a los métodos propuestos por los autores, éstos en general tienen mejores aproximaciones, pero por supuesto, tienen imprecisiones en aras de ser simples.

Por ejemplo, aunque el método del superelemento tiene la ventaja que, en teoría, puede discretizar la ubicación de la abertura y sus probables asimetrías en longitud y elevación (Figura 7), también tiene el inconveniente de que no puede modelar adecuadamente la flexibilidad de las zonas cercanas a las aberturas empleando tan pocos elementos finitos, sobre todo si se emplea uno tan rígido y limitado como el considerado en el estudio, un elemento tipo placa de cuatro nodos y ocho grados de libertad. Es por ello que en su gran mayoría, los resultados obtenidos con SE-TP son más rígidos que los obtenidos con discretizaciones más finas de elementos finitos (Tabla 4, Figura 18), y que la imprecisión crece a medida que las aberturas son más grandes en muros simétricos (muros 1 a 4, Figura 18). La aproximación se puede mejorar utilizando elementos finitos de mayor jerarquía (isoparamétricos o lagrangianos de interpolación cuadrática), aunque esto obviamente involucra un esfuerzo computacional adicional para definir al superelemento.

Tabla 3: Dimensiones del muro equivalente (ft).

Muro	a	b	c	d	e	f
1	3.4475	0.985	3.4475	6.4025	0.985	0.4925
2	2.955	1.97	2.955	5.4175	1.97	0.4925
3	2.4625	2.955	2.4625	4.4325	2.955	0.4925
4	1.97	3.94	1.97	3.4475	3.94	0.4925
5	6.4025	0.985	0.4925	6.4025	0.985	0.4925
6	5.4175	1.97	0.4925	5.4175	1.97	0.4925
7	4.4325	2.955	0.4925	4.4325	2.955	0.4925
8	4.4325	2.955	4.4325	5.4175	1.97	0.4925
9	3.4475	4.4325	3.94	4.4325	2.955	0.4925
10	8.3725	2.955	0.4925	5.4175	1.97	0.4925
11	6.895	4.4325	0.4925	4.4325	2.955	0.4925
12	1.4775	0.985	1.4775	5.4175	1.97	0.4925
13	0.985	1.4775	1.4775	4.4325	2.955	0.4925
14	2.4625	0.985	0.4925	5.4175	1.97	0.4925
15	1.97	1.4775	0.4925	4.4325	2.955	0.4925
16	13.334	28.170	8.486	6.018	5.964	8.018
17	15	20	15	4	8	8
18	11.132	18.982	19.886	1.642	11.169	7.189
19	16	18	16	4	8	8

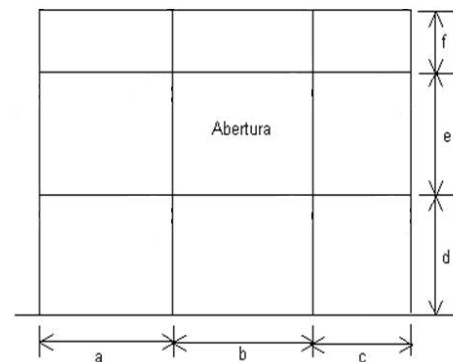


Figura 17: Muro con abertura equivalente.

Con respecto al método de la columna ancha equivalente de sección variable propuesto y sus variantes, tienen la ventaja de poder tomar en cuenta los abruptos cambios de rigidez en elevación, pero obviamente no puede cuantificar con exactitud la flexibilidad del muro en las zonas aledañas a las aberturas, ni cómo afectan, con rigor, las asimetrías de las aberturas en longitud. A pesar de estas limitaciones, las aproximaciones son bastantes razonables y consistentes para las tres variantes del método en estudio, pero indiscutiblemente las mejores aproximaciones se obtienen con el método CE3 (Tabla 4 y Figura 18), es decir, el método donde se consideran las inercias individuales de los segmentos de muretes en la zona de la abertura. Al igual que en el método SE-TP, la imprecisión crece a medida que las aberturas son más grandes en muros simétricos (muros 1 a 4, Figura 18). Sin embargo, a diferencia de ese método, la precisión mejora notablemente a medida que el muro es más esbelto ($H/L = 2$, muros 12 a 15, Figura 18) y, por tanto, las deformaciones por cortante, aunque significativas, comienzan a ser menos importantes que las de flexión. Por ejemplo, para un muro sólido en voladizo de sección rectangular y $\nu = 0.2$, la deformación por cortante aporta sólo el 15.3% del desplazamiento total cuando $H/L = 2$. En general, el método CE3 es el de mejor aproximación con respecto a las soluciones obtenidas con elementos finitos para todos los muros en estudio (Tabla 4, Figura 18) y, definitivamente, es más simple de aplicar que el método SE-TP. Cabe señalar que en las Figuras 18, 21, 22 y 23, el 100% en la escala vertical indica la respuesta teóricamente exacta en desplazamiento, que como se explicó anteriormente, corresponden a los resultados obtenidos con elementos finitos utilizando el programa SAP2000, por lo que cantidades inferiores al 100% indican subestimaciones de los desplazamientos laterales y cantidades mayores al 100% indican sobrestimaciones de los desplazamientos laterales.

Tabla 4: Desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos en estudio (pulgadas).

Muro	FEM	Schneider y Dickey		Sección Variable			Placas	Marco Equivalente		
		Método I	Método II	CE1	CE2	CE3	SE-TP	SM1	SM2	SM3
1	0.701	0.575	0.035	0.668	0.668	0.674	0.509	1.990	1.674	0.052
2	0.931	0.625	0.115	0.685	0.697	0.757	0.638	2.899	3.086	0.202
3	1.668	0.680	0.220	0.725	0.804	1.121	0.932	5.570	5.509	0.641
4	3.897	0.990	0.590	0.806	1.206	2.603	1.529	10.465	10.409	2.196
5	0.677	0.569	0.039	0.668	0.668	0.669	0.578	1.060	1.278	0.215
6	0.793	0.599	0.089	0.685	0.697	0.703	0.676	1.643	1.782	0.353
7	1.206	0.648	0.188	0.725	0.804	0.843	0.880	2.735	2.849	0.606
8	0.448	0.295	0.065	0.312	0.315	0.453	0.320	1.259	1.336	0.094
9	0.791	0.317	0.127	0.338	0.361	0.453	0.475	2.075	2.076	0.266
10	0.387	0.309	0.079	0.312	0.315	0.316	0.423	0.724	0.941	0.406
11	0.607	0.316	0.126	0.338	0.361	0.368	0.556	1.108	1.286	0.550
12	4.331	1.675	0.265	3.725	3.816	4.295	2.251	14.138	12.930	0.706
13	6.361	2.229	0.979	3.812	4.441	6.619	3.033	22.126	21.343	2.409
14	4.071	1.641	0.231	3.725	3.816	3.930	2.228	10.394	10.198	0.618
15	5.789	1.963	0.713	3.812	4.441	5.223	2.965	18.472	18.280	2.029
16	0.307	0.280	0.089	0.175	0.197	0.257	0.274	0.799	0.797	0.265
17	0.268	0.156	0.075	0.190	0.204	0.260	0.215	0.440	0.425	0.198
18	0.330	0.201	0.086	0.171	0.198	0.278	0.227	0.404	0.465	0.326
19	0.158	0.156	0.060	0.158	0.169	0.215	0.199	0.388	0.372	0.173

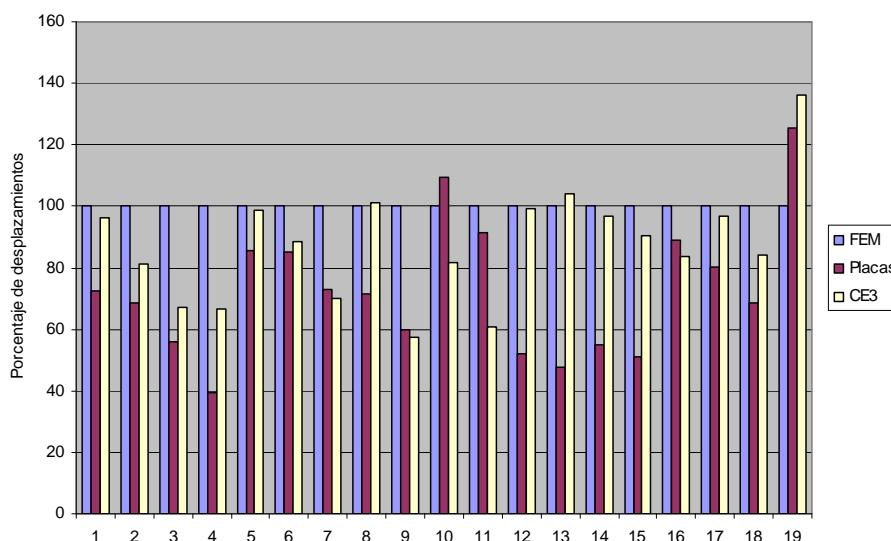


Figura 18: Comparación de los dos métodos con mejor aproximación con el método de elementos finitos (FEM) para muros de un solo nivel.

ESTUDIO DE MUROS DE VARIOS NIVELES CON ABERTURAS

Patrones de abertura y excentricidad

Se estudiaron doce muros de varios niveles divididos en tres grupos de cuatro muros (Rivera, 2006), como se ilustra en las Figuras 19 y 20. Cada grupo de muros tiene en común un entrepiso característico (Figura 19). Los cuatro muros de cada grupo se diferencian por el número de entrepisos (3, 6, 12 y 18, Figura 20). Los muros del grupo 1 son muros con una sola abertura ($\lambda = 18.4$) ubicada simétricamente (Figura 19a) y se identifican, en función

del número de pisos, como muros A, B, C y D (Figura 20). Los muros del grupo 2 son muros con una sola abertura ($\lambda = 18.4$) ubicada asimétricamente (Figura 19b) y se identifican, en función del número de pisos, como muros E, F, G y H (Figura 20). Los muros del grupo 3 son muros con varias aberturas ($\lambda = 26.5$) ubicadas asimétricamente (Figura 19c) y se identifican, en función del número de pisos, como muros I, J, K y L (Figura 20). Para este último caso, se calculó una abertura equivalente para todos los métodos conforme se explica en secciones anteriores. Los entrepisos de todos los muros tienen una altura de 7.88 pies y una longitud de 16.745 pies. Por lo tanto, las relaciones de aspecto (altura total entre longitud, H/L) de los muros son $H/L = 1.41$ para los muros de tres niveles, $H/L = 2.82$ para los muros de seis niveles, $H/L = 5.65$ para los muros de 12 niveles y $H/L = 8.47$ para los muros de 18 niveles.

Los muros de varios niveles se modelaron en el SAP2000 utilizando elementos tipo cascarón (“shell”), utilizando los mismos espesores y propiedades de los materiales que en los muros modelados de un nivel. Se consideró que la base de los muros está totalmente empotrada. La carga lateral aplicada en este caso fue $F = 35,000$ lb (15.89 toneladas) en la parte superior de los muros y dado que se trata de un análisis elástico, la magnitud de la fuerza se seleccionó para facilitar el procesamiento de los desplazamientos laterales obtenidos en los análisis, para que no fueran números muy pequeños donde se pudieran tener imprecisiones por truncado numérico. Los desplazamientos laterales promedio en la parte superior de los muros obtenidos con el SAP2000 bajo estas hipótesis de modelado se reportan en la Tabla 5 con la leyenda FEM. Se comprueba que el efecto de la asimetría en aberturas de las mismas dimensiones y geometría (muros del grupo 1 vs. muros del grupo 2) se manifiesta en un aumento de los desplazamientos laterales promedio (Tabla 5).

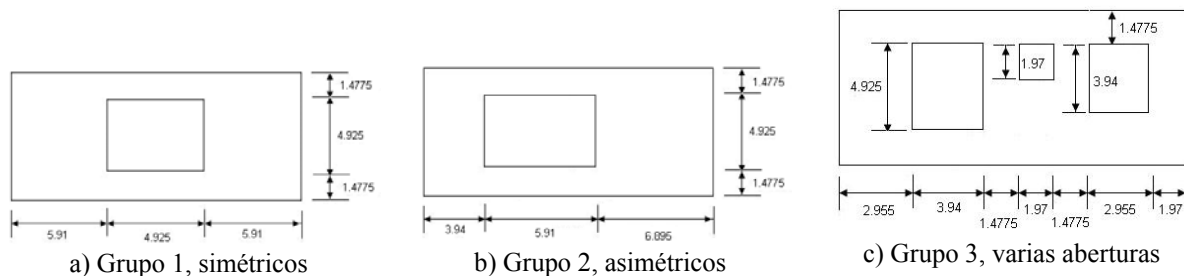


Figura 19: Grupos de muros de varios niveles en estudio (dimensiones en ft).

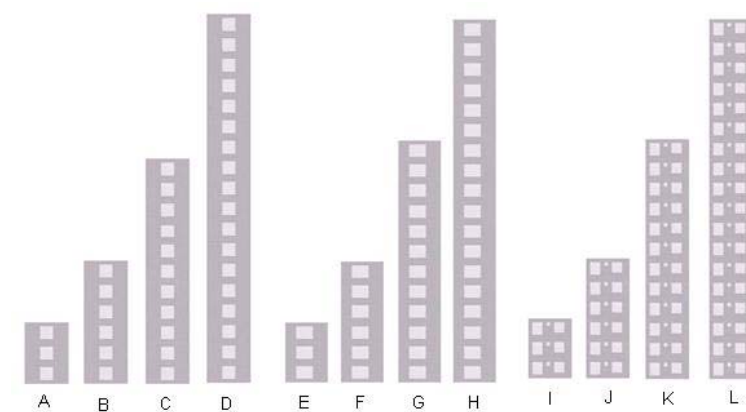


Figura 20: Elevaciones características de los tres grupos de muros.

En la Tabla 5 se comparan los resultados obtenidos con elementos finitos con las estimaciones hechas con los distintos métodos presentados que aplican para muros de varios niveles, con la salvedad del superelemento, dado que se consideró de poco interés incluirlo en esta fase del estudio dada la pobre aproximación que se obtuvo en muros de un nivel, por lo que se considera más pertinente calibrar primero un elemento finito de aproximación superior para muros de un nivel antes de calibrarlo en muros de varios niveles. Por lo tanto, los métodos calibrados son el originalmente propuesto por Coull y Choudhury (CC), las tres variantes estudiadas del método del marco equivalente (SM1, SM2 y SM3), así como las tres variantes del método de la columna ancha equivalente de sección variable propuesta por los autores (CE1, CE2 y CE3). Las aproximaciones también se comparan gráficamente en las Figuras

21 a 23, donde se usan números para identificar a las letras, equivalencia que se identifica en paréntesis en la Tabla 5.

Tabla 5: Desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos en estudio (pulgadas).

Muro	FEM	CC	SM1	SM2	SM3	CE1	CE2	CE3
A (1)	0.1115	0.0577	0.1106	0.0968	0.0841	0.0556	0.0629	0.0973
B (2)	0.4710	0.3560	0.4842	0.4458	0.4062	0.3431	0.3715	0.5046
C (3)	2.8477	2.6170	2.8969	2.8084	2.6376	2.5408	2.6524	3.1760
D (4)	9.0175	8.6826	9.1142	8.9754	8.4886	8.4471	8.6966	9.8682
E (5)	0.1314	0.0703	0.1254	0.1142	0.0974	0.0567	0.0674	0.1012
F (6)	0.5347	0.40188	0.5384	0.5066	0.4558	0.3456	0.3868	0.5177
G (7)	3.1178	2.8573	3.1584	3.0842	2.8805	2.5464	2.7088	3.2232
H (8)	9.7684	9.40938	9.8749	9.8585	9.2494	8.4563	8.8196	9.9706
I (9)	0.1299	0.0870	0.1532	0.1446	0.11796	0.0565	0.0742	0.1351
J (10)	0.5916	0.4519	0.5966	0.5730	0.50544	0.3454	0.4153	0.6547
K (11)	3.8262	3.0848	3.3134	3.2624	3.0562	2.5474	2.8247	3.7741
L (12)	12.3451	10.0670	10.2124	10.1332	9.6601	8.4601	9.0821	11.2121

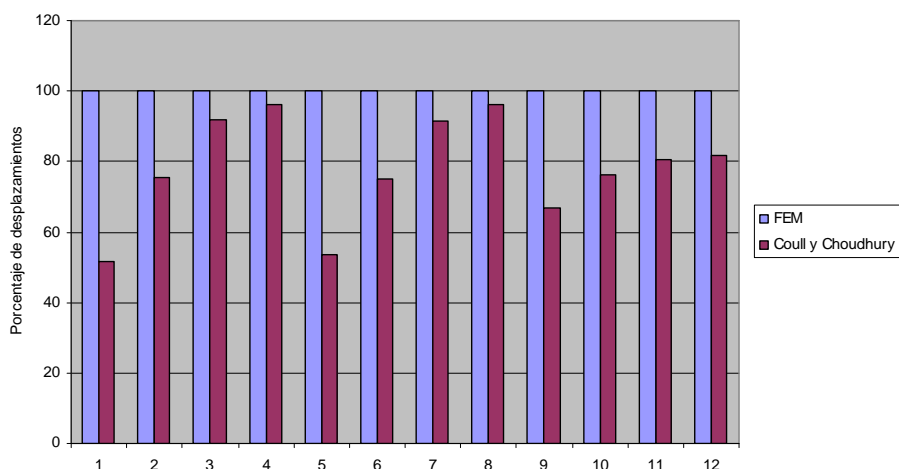


Figura 21: Comparación del método del elemento finito (FEM) con las aproximaciones obtenidas con el método de Coull y Choudhury.

Se aprecia de las Figuras 21 a 23 que para todos los métodos simplificados, las aproximaciones mejoran notablemente a medida que aumenta la altura del modelo, es decir, a medida que la relación de esbeltez (H/L) del muro aumenta. Las aproximaciones son muy razonables (superiores al 70%) a partir de los modelos de seis niveles, es decir, cuando $H/L \geq 2.82$.

En el método de Coull y Choudhury se aprecia que la aproximación obtenida con respecto al FEM para aberturas simples bien definidas (Grupo 1 y Grupo 2) es muy similar (Figura 21), lo que es de destacar. La aproximación es menor para muros con varias aberturas, en parte por las hipótesis simplistas en el cálculo de una apertura equivalente.

Con respecto al método del marco equivalente, se observa que la aproximación es prácticamente exacta para los muros de varios niveles con una sola franja de aberturas en elevación bien definida si se emplea la propuesta original de Schwaighofer y Microys (modelos SM1), independientemente de si ésta es simétrica o asimétrica (Tabla 5, Figura 22). Sin embargo, si se tiene un patrón complicado de varias aberturas, el método pierde aproximación cuando se define una abertura equivalente (Figura 22). Por su parte, si se emplea el método del marco equivalente tal y cual se entiende en México como “columna ancha” (modelos SM2), la aproximación se reduce y, al igual que el método de Coull y Choudhury, las aproximaciones mejoran notablemente a medida que aumenta la altura del modelo, es decir, a medida que la relación de esbeltez (H/L) del muro aumenta, salvo el caso que se tengan varias aberturas y se obtenga una equivalente, donde se observa el fenómeno contrario (Figura 22). Las peores aproximaciones se

obtienen cuando se consideran zonas infinitamente rígidas en vigas y columnas (modelos SM3), como se aprecia en la Figura 22.

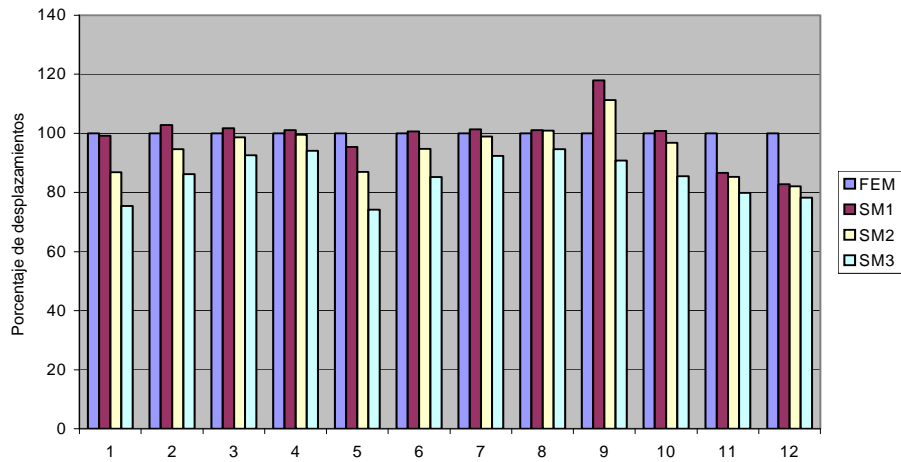


Figura 22: Comparación del método del elemento finito (FEM) con las aproximaciones obtenidas con el método del marco equivalente.

Las aproximaciones con el método de la columna ancha equivalente de sección variable (Figura 23) siguen un patrón similar al método de Coull y Choudhury, es decir, éstas mejoran notablemente a medida que aumenta la relación de esbeltez (H/L) del muro, sobre todo para las opciones de modelado CE1 y CE2. Al igual que para los muros de un nivel, las mejores aproximaciones se obtienen para el modelo CE3, donde se consideran las inercias individuales de los segmentos de muretes en la zona de la abertura. Sin embargo, en ocasiones se pueden sobreestimar los desplazamientos con respecto a modelaciones más rigurosas con elementos finitos (Figura 23).

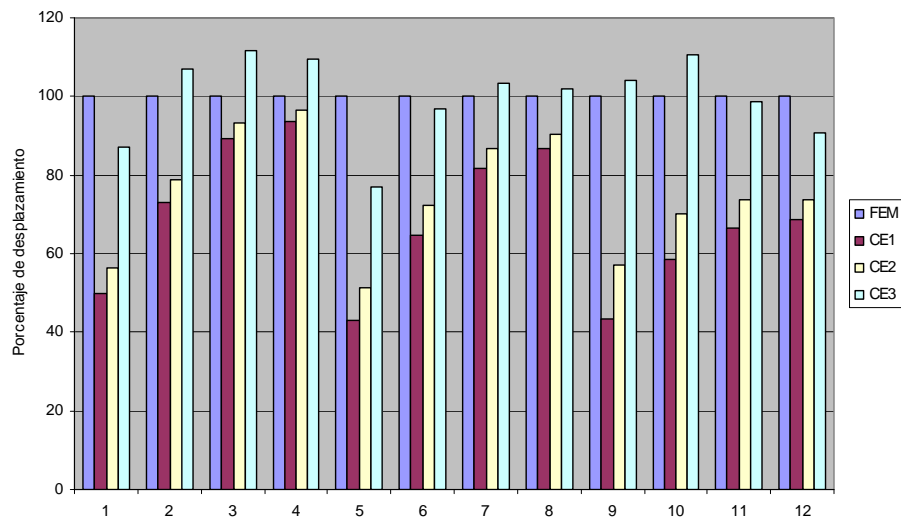


Figura 23: Comparación del método del elemento finito (FEM) con las aproximaciones obtenidas con el método de la columna ancha equivalente de sección variable.

Evaluación del parámetro de excentricidad

Toda vez que se tuvo una idea de la aproximación obtenida para el desplazamiento máximo en la parte superior del muro con los distintos métodos en evaluación en función de su altura (relación de esbeltez) y de la geometría de la abertura (simétrica y asimétrica), se inició un estudio más ambicioso para muros con una sola abertura por piso donde se evalúa, además del tamaño de abertura, la magnitud de la excentricidad. Para ello se consideraron muros con altura típica de entrepiso $h = 7.88$ pies (2.40 m) y longitud $L = 16.745$ pies (5.10 m). El parámetro de abertura estudiado es $\lambda = 25\%$, que como puede observarse, corresponde a huecos importantes y representativos de muros con aberturas (por ejemplo, Tabla 2). Los parámetros de excentricidad estudiados son $e = 0\%$ (sistema simétrico), 20% ,

40%, 60% y 80%. Se modelaron muros con 3, 6, 9, 12, 15 y 18 niveles, por los que sus respectivas relaciones de esbeltez altura total entre longitud son $H/L = 1.41, 2.82, 4.24, 5.65, 7.06$ y 8.74 . En este caso se calcularon los desplazamientos laterales en cada nivel. En el caso del método de Coull y Choudhury, se evaluaron las distintas hipótesis propuestas para estimar cómo es esta variación con la altura, como se explicó en secciones anteriores.

En los análisis con elementos finitos utilizando el SAP2000 se emplearon en cada entrepiso mallas de 40×40 elementos tipo cascarón ("shell"), considerando que los muros tenían un espesor $t = 0.7083$ ft (21.59 cm), y que las propiedades del material modelado como elástico lineal, homogéneo e isotrópico eran $E = 1.728 \times 10^8$ lb/ft² (84,444 kg/cm²) y $\nu = 0.15$. Los muros se consideraron empotrados en su base y se modeló continuidad perfecta de los elementos en elevación, es decir, no se consideraron restricciones adicionales en rigidez por la posible presencia de los sistemas de piso. La carga lateral aplicada de forma distribuida en la parte superior de los muros fue en todos los casos $F = 1 \times 10^6$ lb (454 toneladas). En la Figura 24 se presentan los perfiles de los desplazamientos laterales promedio de entrepiso calculados con las mallas de elementos finitos descritos, donde se aprecia claramente para todos los modelos que, a medida que aumenta la excentricidad de la abertura, aumenta el desplazamiento lateral promedio, principalmente a partir de parámetros de excentricidad mayores al 40% ($e > 40\%$). También se aprecia que los desplazamientos laterales en los modelos de más de 12 niveles son muy grandes, como consecuencia directa de la magnitud de la carga aplicada y de la alta flexibilidad lateral de estos modelos, dada su esbeltez y al hecho de que no se modeló la presencia de algún sistema de piso que restringiera estos desplazamientos, por lo que todos los muros en estudio se comportan esencialmente como voladizos con perforaciones.

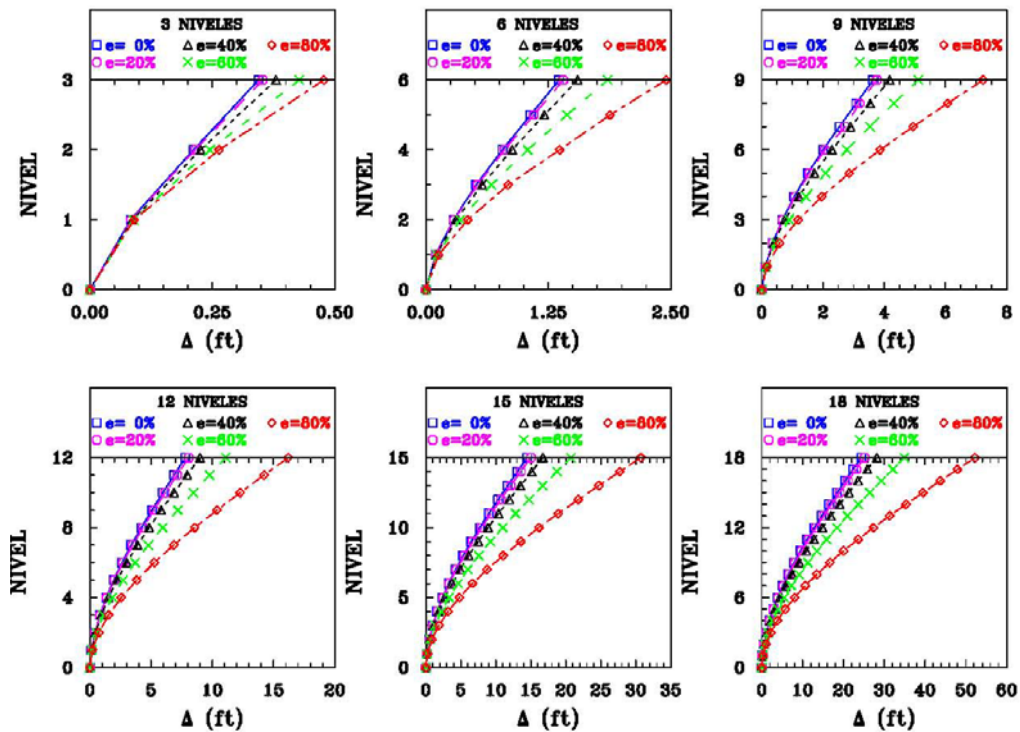


Figura 24: Perfil de desplazamientos laterales promedio para los muros asimétricos en estudio obtenidos con el método del elemento finito (FEM).

En las Figuras 25 a 30 se comparan los perfiles de los desplazamientos laterales promedio calculados con los distintos métodos aproximados con respecto al método del elemento finito. Con la finalidad de facilitar su comparación, para cada modelo en estudio (número de niveles, excentricidad en estudio) los desplazamientos laterales se normalizaron con respecto al desplazamiento de azotea obtenido con el método del elemento finito para cada modelo (Δ_{FEM}). De hecho, en cada subgráfica se presenta el perfil normalizado obtenido con el método del elemento finito bajo la leyenda FEM (línea continua con cuadros vacíos).

Con respecto al método de Coull y Choudhury (CC1, CC2 y CC3), se aprecia que la precisión del método depende de la altura o relación de esbeltez, por lo que las estimaciones para los modelos de tres niveles ($H/L = 1.41$,

Figura 25) son muy pobres (alrededor del 50% del desplazamiento obtenido con elementos finitos) aún para sistemas simétricos ($e = 0\%$). Sin embargo, la precisión crece a medida que se aumenta el número de niveles, siendo superiores al 70% en los modelos de seis niveles ($H/L = 2.82$, Figura 25), del 80% para los modelos de nueve niveles ($H/L = 4.24$, Figura 27), del 90% para los modelos de 12 niveles ($H/L = 5.65$, Figura 28) y superiores al 95% para los modelos de 15 niveles ($H/L = 7.06$, Figura 29) y 18 niveles ($H/L = 8.74$, Figura 30). Cabe resaltar que no se aprecia una disminución significativa en la aproximación en la estimación del desplazamiento lateral promedio del método a medida que aumenta el parámetro de excentricidad e , es decir, las aproximaciones obtenidas para $e = 20$, 40, 60 y 80% son similares a las obtenidas para $e = 0\%$ para cada altura en estudio (Figuras 25 a 30). Referente a la hipótesis sobre la variación del perfil de desplazamiento con la altura, se aprecia de las Figuras 25 a 30, pero sobre todo de las Figuras 28 a 30, que la hipótesis de variación del método CC2 (ecuación (15)) es muy razonable y no se aprecia ninguna diferencia significativa con el modelo CC3, cuando se corrige el desplazamiento por excentricidad relativa también (ecuación (16)). Por lo tanto, por simplicidad, se propone emplear la variante del método CC2 para relaciones de esbeltez $H/L \geq 4$ y cualquier valor de la excentricidad relativa e para muros con una sola abertura por nivel bien definida en elevación, para obtener estimaciones cercanas o mayores al 80% del desplazamiento lateral.

Con respecto al método del marco equivalente, de las Figuras 25 a 30 se aprecia que la propuesta original de Schwaighofer y Microys (SM1) es bastante buena para muros con aberturas localizadas simétricamente ($e = 0\%$), subestimando y sobrestimando relativamente poco los desplazamientos laterales promedio.

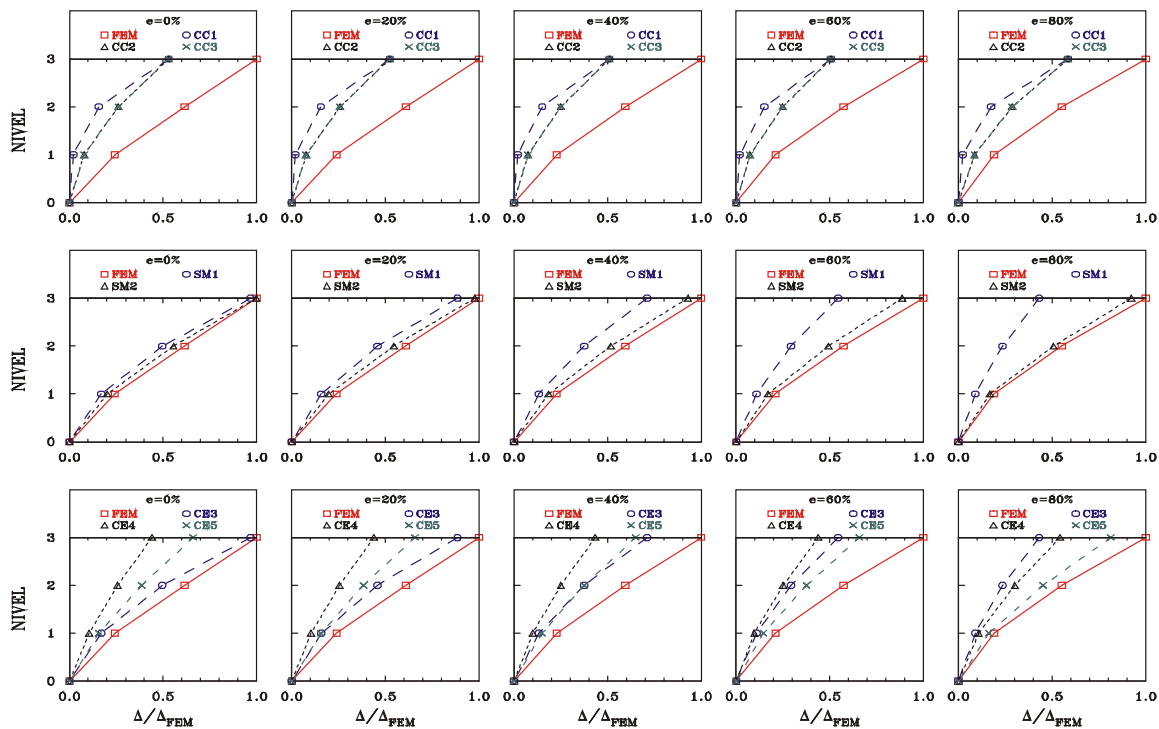


Figura 25: Comparación de los perfiles de desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos aproximados en estudio con respecto al método del elemento finito para los muros asimétricos de tres niveles en estudio.

Se observa de la Figura 25 que el desplazamiento lateral promedio de muros de tres niveles calculados con el método SM1 se subestima en menos del 5% y de las Figuras 26 a 30 se observa que se sobrestima en poco más del 10% para muros de seis a 18 niveles cuando $e = 0\%$, y aún es razonable para $e=20\%$ y quizá hasta para $e = 40\%$. Sin embargo, también se aprecia de las Figuras 25 a 30 que la aproximación del método SM1 se reduce notablemente a medida que aumenta el parámetro de excentricidad e . Esto se debe a que a medida que aumenta el parámetro de excentricidad, aumenta la relación e/f propuesta por Schwaighofer y Microys, lo que ocasiona que se aumenten la constante K_1 y sobre todo la constante K_2 del método (Tabla 1, ecuación (6)), lo que aumenta significativamente la inercia equivalente (ecuación (4)) del muro y, por lo tanto, su rigidez lateral. De la Tabla 1 y las ecuaciones (3) a (6)

es muy claro que un aumento en la relación e/f afecta de manera más importante la rigidez a flexión que la rigidez a cortante, lo que se confirma porque las imprecisiones observadas para grandes excentricidades (por ejemplo, $e = 80\%$) son similares para los modelos de tres niveles (alrededor de 42%, Figura 24), donde en teoría dominan las deformaciones por cortante ($H/L = 1.41$), que para los modelos de 9 a 18 niveles (también cercanas a 42-45%, Figuras 27 a 30) donde dominan claramente las deformaciones por flexión ($H/L > 4$).

Lo que también cabe destacar de las Figuras 25 a 30 con respecto al método del marco equivalente es que el método más empleado en la práctica profesional de México (método SM2) tiene una aproximación muy razonable para todos los muros y excentricidades en estudio, aunque si se aprecia una ligera disminución en su aproximación a medida que se aumenta el factor de excentricidad e . También cabe señalar que lo anterior también se debe a que en este fase del estudio se consideraron muros con una sola abertura bien definida geoméricamente, que es la hipótesis central del desarrollo de este método (Figura 2), el cual no puede lograr aproximaciones similares para patrones de aberturas más complejos, aún estimado una abertura equivalente, como se discutió en secciones previas.

Con base en estos resultados, se puede concluir que la versión del marco equivalente más utilizada en México (SM2) es más confiable que el método originalmente propuesto por Schwaighofer y Microys (SM1) para muros que contienen una sola franja de aberturas bien definida en elevación (una por nivel), sobre todo si el parámetro de excentricidad de éstas es $e \geq 40\%$. Para $e \leq 20\%$, ambas opciones proporcionan aproximaciones razonables.

De las Figuras 25 a 30 se aprecia también que las aproximaciones con el método de la columna ancha equivalente de sección variable donde se consideran las inercias individuales de los segmentos de muretes en la zona de la abertura (CE3) siguen un patrón similar al método originalmente propuesto por Schwaighofer y Microys (SM1), es decir, se obtienen aproximaciones muy razonables cuando la abertura es simétrica ($e = 0\%$) o con poca asimetría ($e = 20\%$), pero subestima notablemente los desplazamientos laterales a medida que se aumenta el factor de excentricidad e , dado que la rigidez a flexión también aumenta significativamente, pues la inercia considerada aumenta cúbicamente.

Con respecto a las otras dos opciones evaluadas (CE4 y CE5), donde básicamente se valoran correcciones en el método de la inercia completa (CE1) para tomar en cuenta la excentricidad del hueco y el aumento de la flexibilidad en función de la altura (evaluado simplistamente con el número de niveles), se aprecia lo siguiente. Resulta muy claro de las Figuras 25 a 30 que la corrección por excentricidad propuesta (modelos CE4) por sí sola no tiene un impacto muy significativo en la mejora de la precisión del método, independientemente del número de niveles o relación de esbeltez de los muros en estudio, es decir, no se aprecia un cambio notable en la precisión cuando $e = 0\%$ y cuando $e = 80\%$, excepto para los modelos de tres niveles (Figura 25). Sin embargo, cuando además se corrige el desplazamiento y se amplifica en función del número de niveles (modelos CE5), la aproximación mejora substancialmente, sobre todo corrige muy notablemente a los modelos del menor número de niveles (Figuras 25 y 26), donde las imprecisiones son mayores si no se considera este factor (modelos CE4).

Con base en estos resultados, se concluye que cuando se emplee el método de la columna ancha equivalente de sección variable considerando la inercia completa, es recomendable tomar en cuenta que como el método sobrestima de inicio la rigidez a flexión y a cortante de los muros en las zonas aledañas a las aberturas, sobre todo cuando la relación de esbeltez es baja ($H/L < 2$), entonces es razonable amplificar los desplazamientos obtenidos tanto en función del número de niveles, o más correctamente, de la esbeltez, lo cual lo haría más general para alturas de entepiso distintas a las consideradas en este estudio. Así, se propone en el método de la columna ancha equivalente de sección variable utilizar un factor de amplificación por esbeltez F_{esb} dado por:

$$F_{esb} = \frac{1}{1 - \frac{1}{N}} = \frac{1}{1 - \frac{0.47}{H/L}} \quad \text{si } N > 1 \quad \text{ó} \quad H/L > 0.47 \quad (26)$$

La corrección por excentricidad, aunque menos apreciable, también es importante, y por ello debe emplearse el factor de corrección por este concepto, dado por:

$$F_{exc} = 1 - e^2 \quad (27)$$

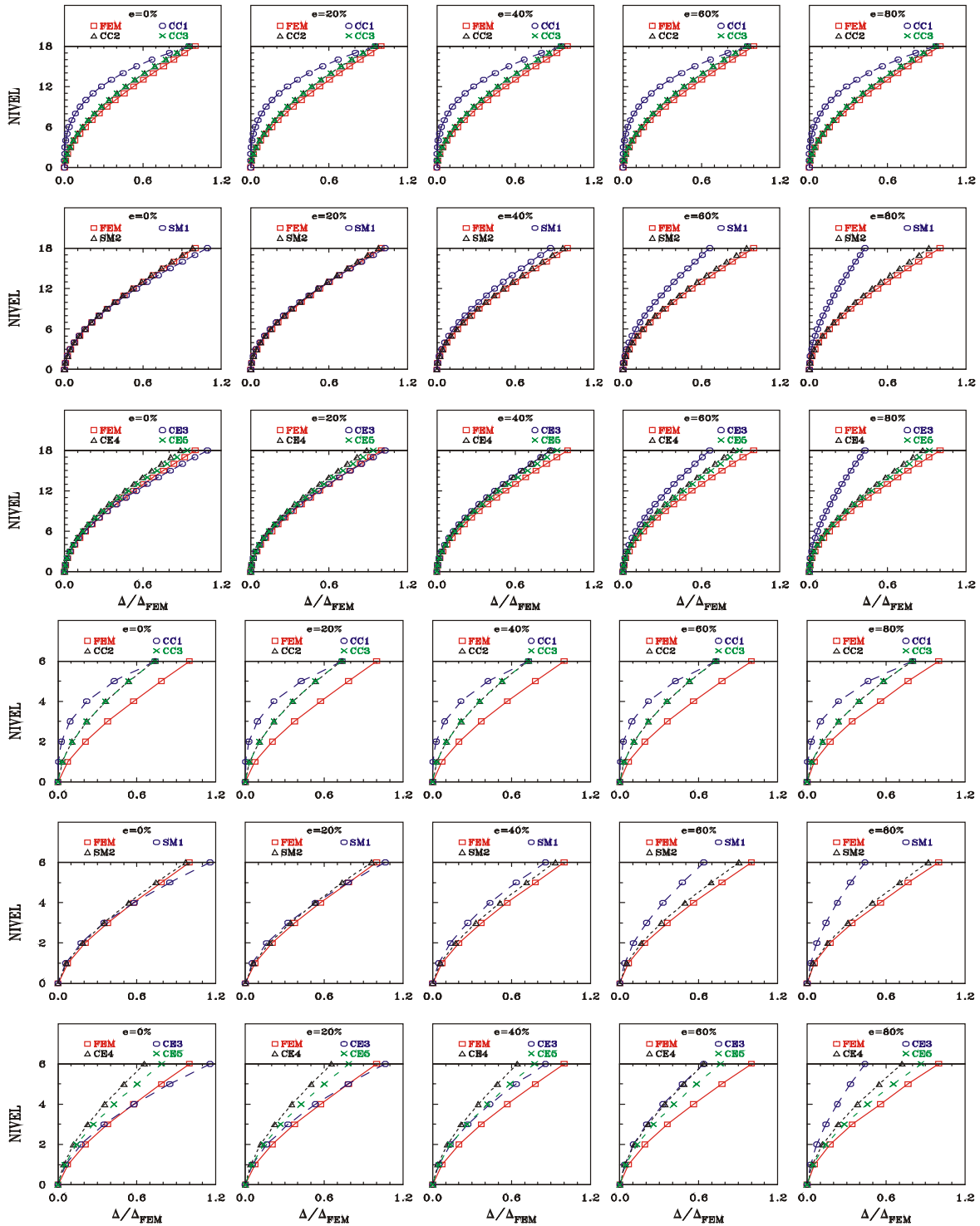


Figura 26: Comparación de los perfiles de desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos aproximados en estudio con respecto al método del elemento finito para los muros asimétricos de seis niveles en estudio.

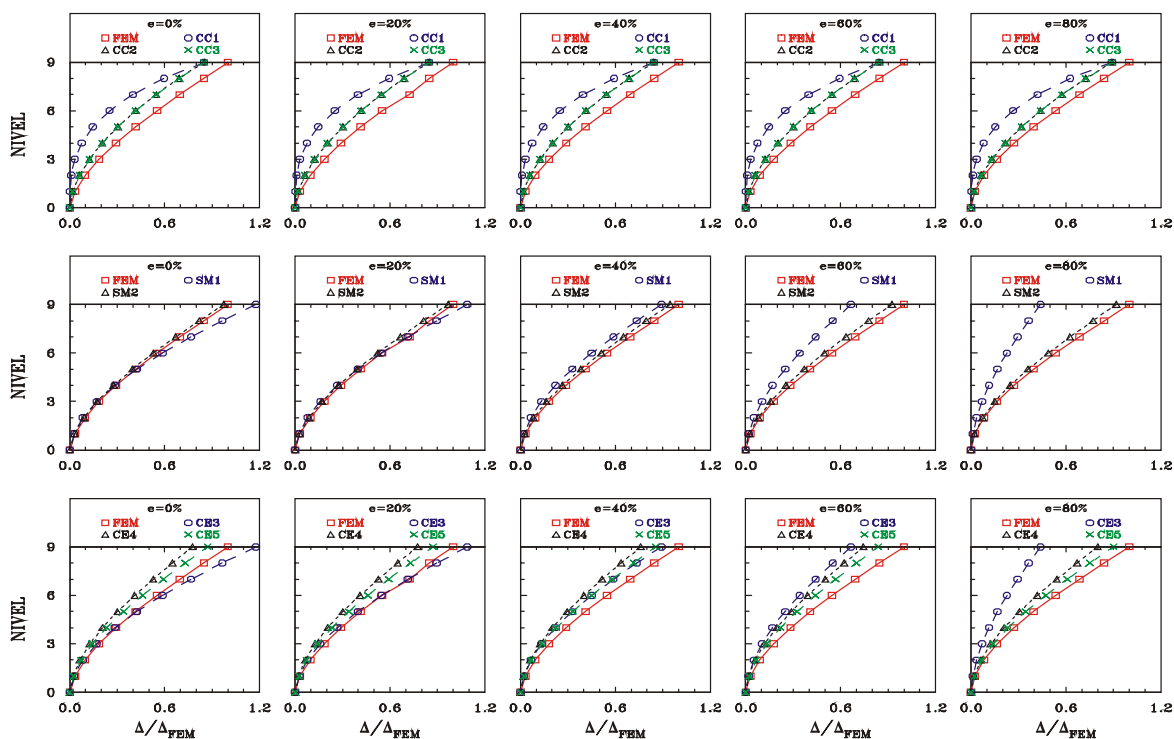


Figura 27: Comparación de los perfiles de desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos aproximados en estudio con respecto al método del elemento finito para los muros asimétricos de nueve niveles en estudio.

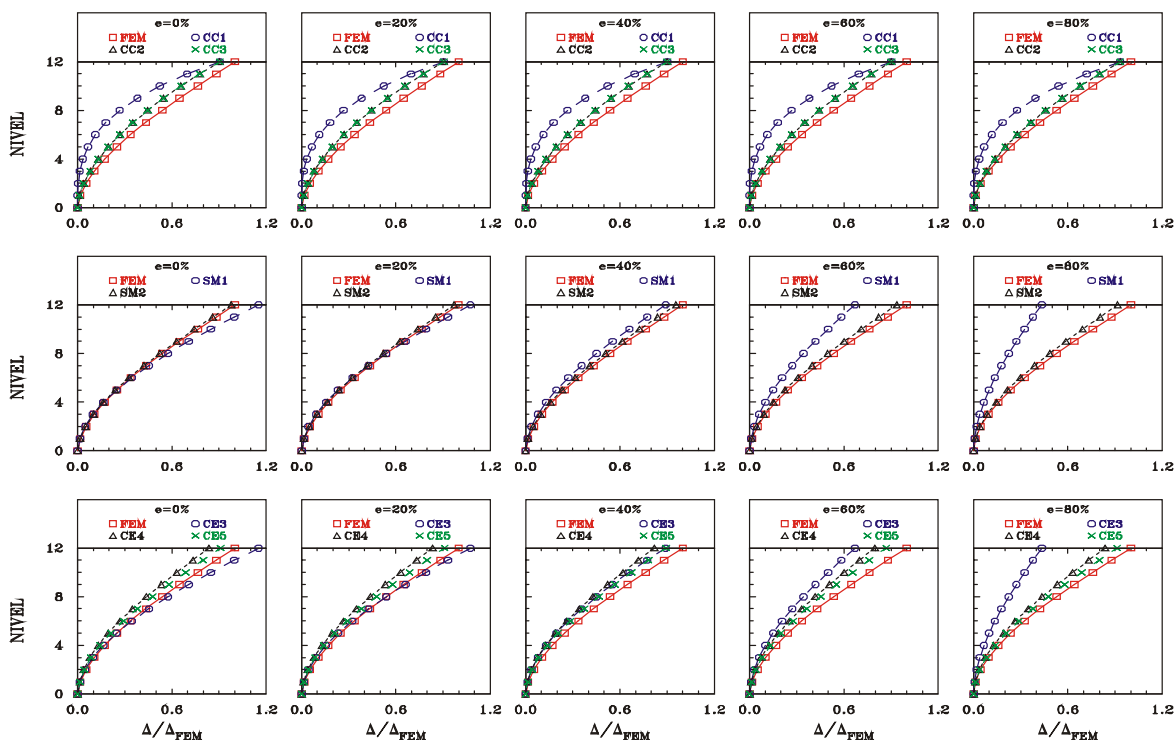


Figura 28: Comparación de los perfiles de desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos aproximados en estudio con respecto al método del elemento finito para los muros asimétricos de 12 niveles en estudio.

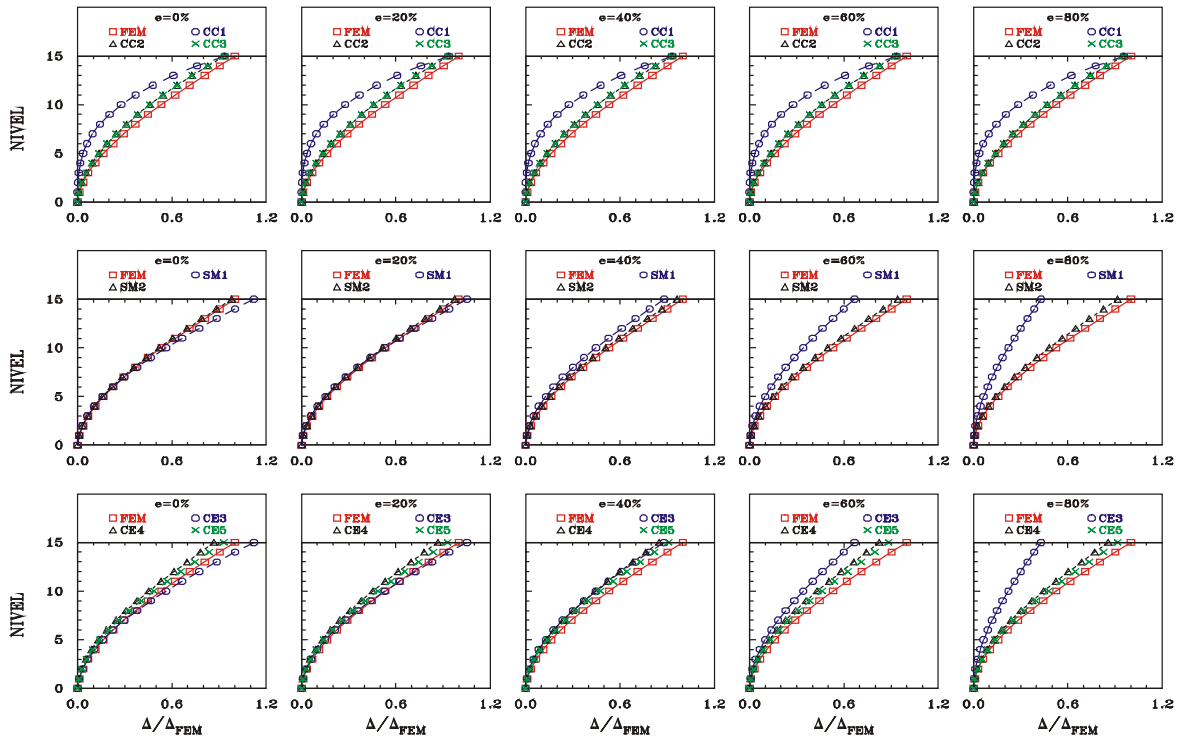


Figura 29: Comparación de los perfiles de desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos aproximados en estudio con respecto al método del elemento finito para los muros asimétricos de 15 niveles en estudio.

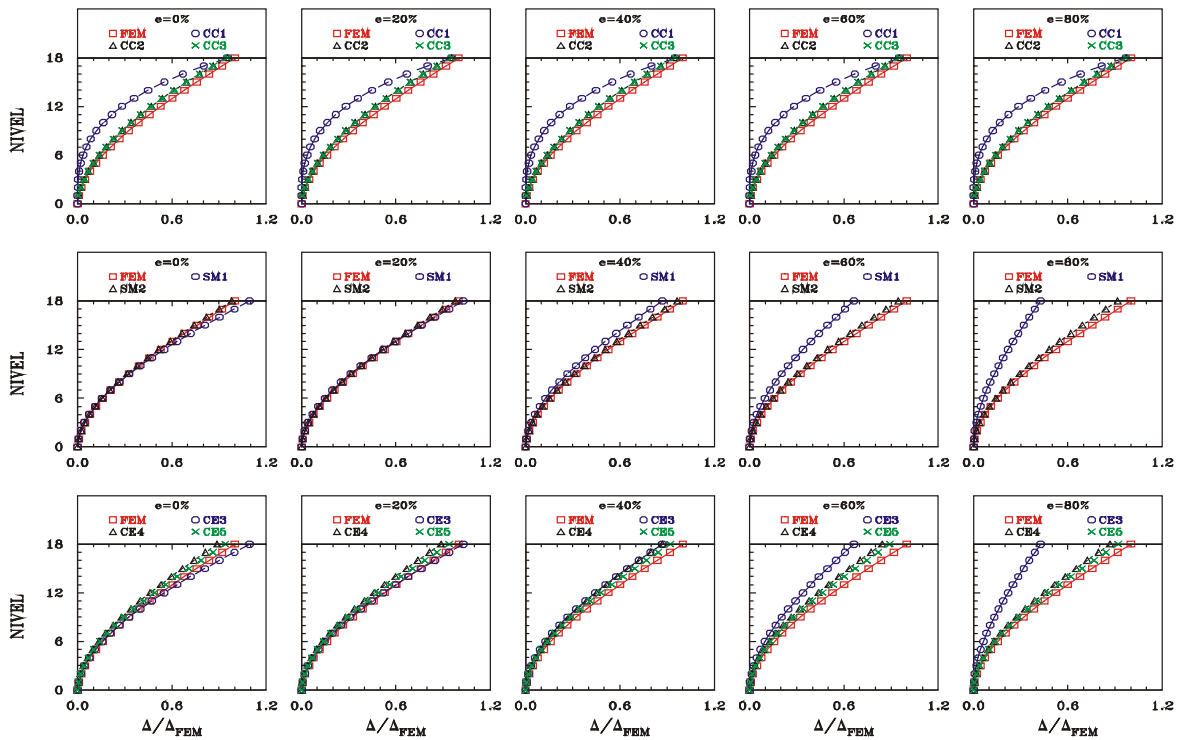


Figura 30: Comparación de los perfiles de desplazamientos laterales promedio obtenidos con los métodos aproximados en estudio con respecto al método del elemento finito para los muros asimétricos de 18 niveles en estudio.

COMENTARIOS FINALES

De los resultados obtenidos en el estudio que se reporta se pueden hacer las siguientes conclusiones.

El Método I presentado en Schneider y Dickey es poco confiable y muy inconsistente. Normalmente sobrestima notablemente la rigidez de los muros, sobre todo cuando tienden a ser esbeltos y, cuando son robustos ($H/L \leq 1$), a medida que las aberturas son grandes y/o asimétricas.

El Método II presentado en Schneider y Dickey es totalmente desconfiable para estimar la rigidez lateral de muros con aberturas, pues subestima notablemente los desplazamientos laterales, independiente de la relación de esbeltez del muro (H/L) y de las dimensiones y geometrías de las aberturas.

Con respecto al método de Coull y Choudhury, se aprecia que cuando se cuenta con una sola franja de aberturas bien definida en elevación (una por nivel), la precisión del método depende de la altura o relación de esbeltez, por lo que las estimaciones para los modelos que tienden a ser robustos ($H/L < 2$) son pobres (alrededor del 50% del desplazamiento obtenido con elementos finitos) aún para sistemas simétricos ($e = 0\%$). Sin embargo, la precisión aumenta a medida que se aumenta su esbeltez, siendo superiores al 80% para modelos esbeltos ($H/L < 4$). Cabe resaltar que no se aprecia una disminución significativa en la aproximación de la estimación del desplazamiento lateral promedio del método a medida que aumenta el parámetro de excentricidad e . La aproximación obtenida es menor para muros de varios niveles con varias aberturas por nivel, en parte por las hipótesis simplistas en el cálculo de una apertura equivalente. Referente a la hipótesis sobre la variación del perfil del desplazamiento con la altura, se observó que la hipótesis de variación del método CC2 dada por la ecuación (15) propuesta es muy razonable. Por lo tanto, por simplicidad, se propone emplear la variante del método CC2 para relaciones de esbeltez $H/L \geq 4$ y cualquier valor de la excentricidad relativa e para muros con una sola franja de aberturas bien definida en elevación (una por nivel), para obtener estimaciones cercanas o mayores al 80% del desplazamiento lateral.

Con respecto al método del marco equivalente, se pueden hacer las siguientes observaciones. Para muros de un solo nivel, el método del marco equivalente tal y como se aplica en México (SM2) o como lo propusieron originalmente Schwaighofer y Microys (SM1) sobrestiman notablemente los desplazamientos laterales (y en consecuencia, subestiman la rigidez lateral) de todos los muros en estudio, dado que la geometría de los muros, incluyendo los simétricos, no se parecen en nada a las hipótesis hechas por Schwaighofer y Microys a la hora de definir el método. En contraste, para modelos de tres o más niveles, se observa que la aproximación aumenta conforme aumenta su esbeltez y es razonablemente exacta para fines prácticos cuando se cuenta con una sola franja de aberturas bien definida (una por nivel) y si no existe excentricidad o ésta es relativamente pequeña ($e \leq 20\%$), si se emplea la propuesta original de Schwaighofer y Microys (modelo SM1). Sin embargo, si el parámetro de excentricidad de la franja de aberturas es grande ($e > 40\%$) o si se dispone de un patrón complicado con varias aberturas, el modelo SM1 pierde aproximación.

Por su parte, si se emplea el método del marco equivalente tal y cual se entiende en México como “columna ancha” (modelo SM2), las aproximaciones son razonablemente buenas y mejoran notablemente a medida que aumenta la relación de esbeltez (H/L) del muro, salvo el caso de que se tengan varias aberturas y se obtenga una equivalente, donde se observa el fenómeno contrario. Cabe destacar que para muros con una sola franja de aberturas bien definida (una por nivel), la precisión del modelo SM2 no se reduce dramáticamente a medida que se aumenta el factor de excentricidad e , ya que ésta es la hipótesis central en que se fundamenta este método, el cual no puede lograr aproximaciones similares para patrones de aberturas más complejos, aún estimado una apertura equivalente, como se ilustra y discute en este trabajo. Las peores aproximaciones con el método del marco equivalente en muros de varios niveles ($N \geq 3$) se obtienen cuando se consideran zonas infinitamente rígidas en vigas y columnas (modelo SM3).

Con base en estos resultados, se puede concluir que la versión del marco equivalente más utilizada en México (SM2) es más confiable que el método originalmente propuesto por Schwaighofer y Microys (SM1) para muros que contienen una sola franja de aberturas bien definida en elevación (una por nivel), sobre todo si el parámetro de excentricidad de ésta es $e \geq 40\%$. Para $e \leq 20\%$, ambas opciones proporcionan aproximaciones razonables.

Con respecto a los métodos propuestos por los autores, éstos en general tienen las mejores aproximaciones para muros de un nivel, pero por supuesto, tienen imprecisiones en aras de ser simples.

El método del superelemento ofrece ventajas conceptuales al tener una mejor discretización de la ubicación de la abertura y sus probables asimetrías en longitud y elevación, pero tiene el inconveniente de no poder modelar

adecuadamente la flexibilidad de las zonas cercanas a las aberturas empleando tan pocos elementos finitos, sobre todo cuando se emplea uno tan rígido y limitado como el considerado inicialmente en este estudio, un elemento tipo placa de cuatro nodos y ocho grados de libertad. La imprecisión crece a medida que las aberturas son más grandes en muros simétricos. La aproximación se puede mejorar utilizando elementos finitos de mayor jerarquía (isoparamétricos o lagrangianos de interpolación cuadrática), lo que deberá evaluarse en estudios futuros.

Con respecto al método de la columna ancha equivalente de sección variable propuesto y sus variantes, tiene la ventaja de poder intentar tomar en cuenta los abruptos cambios de rigidez en elevación, pero obviamente no puede cuantificar con exactitud la flexibilidad del muro en las zonas aledañas a las aberturas, ni cómo afectan, con rigor, las asimetrías de las aberturas en longitud. A pesar de estas limitaciones, las aproximaciones son bastantes razonables y consistentes. Las mejores aproximaciones se obtienen con el modelo donde se consideran las inercias individuales de los segmentos de muretes en la zona de la abertura (modelo CE3), sobre todo para muros de un solo nivel. La imprecisión crece a medida que las aberturas son más grandes en muros simétricos; sin embargo, la precisión mejora notablemente a medida que el muro es más esbelto ($H/L > 2$) y, por tanto, las deformaciones por flexión comienzan a ser más importantes que las de cortante. En general, el modelo CE3 es el de mejor aproximación con respecto a las soluciones obtenidas con elementos finitos para muros simétricos o con asimetrías relativamente pequeñas ($e = 20\%$), cuando se dispone de una sola franja de aberturas bien definida en elevación (una por nivel). Sin embargo, se subestiman notablemente los desplazamientos laterales a medida que se aumenta el factor de excentricidad e , dado que la rigidez a flexión también aumenta significativamente, pues la inercia considerada aumenta exponencialmente.

Cuando se emplea el método de la columna ancha equivalente de sección variable considerando la inercia completa (modelo CC1), es recomendable corregir las estimaciones tomando en cuenta que, dadas las hipótesis en que se basa, el método sobrestima de inicio la rigidez a flexión y a cortante de los muros, sobre todo cuando la relación de esbeltez es baja ($H/L < 2$), por lo que es razonable amplificar los desplazamientos obtenidos, en función tanto de la relación de esbeltez como de la excentricidad relativa, empleando los factores propuestos en las ecuaciones (26) y (27) (modelo CC5).

Finalmente, se puede concluir que los métodos de Coull y Choudhury, del marco equivalente y de la columna ancha equivalente de sección variable son bastante confiables cuando se dispone de una sola franja de aberturas bien definidas en elevación (una por nivel) y los muros son: a) esbeltos ($H/L \geq 4$), b) simétricos o su parámetro de excentricidad es relativamente bajo ($e \leq 20\%$) y, c) la abertura es razonablemente grande ($\lambda > 18$). Con excepción del método del marco equivalente más utilizado en México (SM2), la precisión de estos métodos se reduce a medida que se aumenta el parámetro de excentricidad (e), sobre todo cuando $e \geq 40\%$, y cuando los muros tienden a ser robustos ($H/L < 2$).

Todos los métodos pierden precisión cuando existen múltiples aberturas, sobre todo si su patrón es complejo a lo largo y a lo ancho del muro, aún con la definición de una abertura equivalente. Por ello, es importante continuar estudiando expresiones simples para tomar en cuenta: a) el impacto de la excentricidad de la abertura en la amplificación del desplazamiento lateral promedio de los muros cuando se emplean métodos simplificados y, b) en el caso de muros con varias aberturas, definir una abertura equivalente que permita mejorar las aproximaciones obtenidas con la propuesta valorada en este trabajo. También sería relevante estudiar el impacto de modelar la rigidez adicional que aportan las conexiones con distintos sistemas de piso (losas de concreto perimetrales, losa-acero, prefabricados, sistemas de piso de madera, etc.), lo cual debido a su complejidad y variantes, no se consideró en este estudio inicial. Esto deberá valorarse en investigaciones futuras que consideren, además de los modelos de varios niveles aquí presentados, modelos de muros con varias aberturas por nivel y con distintos sistemas de piso que sean representativos de los que se construyen en edificios existentes.

REFERENCIAS

- Álvarez, J. J. (2000). "Estudio Analítico sobre el Comportamiento No Lineal de Muros de Mampostería Confinada con y sin Aberturas", Tesis de Maestría, División de Estudios de Posgrado de la Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México, México, D.F.
- Coull, A. y J. R. Choudhury (1967a). "Stresses and deflections in coupled shear walls", *ACI Journal*, Vol. 64, No. 2, pp. 65-72.
- Coull, A. y J. R. Choudhury (1967b). "Analysis of coupled shear walls", *ACI Journal*, Vol. 64, No. 9, pp. 587-593.
- Neunhofer, A. (2006). "Lateral stiffness of shear walls with openings", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 132, No. 11, pp. 1846-1851.

- NTCM-2004 (2004), "Normas Técnicas Complementarias para Diseño y Construcción de Estructuras de Mampostería", *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, México, D.F.
- Przemieniecki, J. S. (1985). *Theory of Matrix Structural Analysis*, Dover Publications, Inc., New York.
- Rivera, G. (2006). "Determinación de la Rigidez Lateral en Muros con Aberturas", Proyecto Terminal I, Departamento de Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana, México, D.F.
- Schneider, R. y W. L. Dickey (1987). *Reinforced Masonry Design*, 2nd Edition, Prentice Hall.
- Schwaighofer, J. y H. F. Microys (1969). "Analysis of shear walls using standard computer programs", *ACI Journal*, Vol. 66, No. 12, pp. 1005-1007.
- Tena-Colunga, A. (1992a). "Response of an unreinforced masonry building during the Loma Prieta Earthquake", Ph.D. Dissertation, Department of Civil Engineering, University of Illinois at Urbana-Champaign.
- Tena-Colunga, A. (1992b). "Seismic evaluation of unreinforced masonry structures with flexible diaphragms", *Earthquake Spectra*, Vol. 8, No. 2, pp. 305-318.
- Tena-Colunga, A. (1996). "Stiffness formulation for nonprismatic beam elements", *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 122, No. 12, pp. 1484-1489.
- Tena-Colunga, A. (2007). Discusión al artículo "Lateral stiffness of shear walls with openings" por A. Neunhofer, *ASCE Journal of Structural Engineering*, Vol. 133, No. 12, pp. 1853-1854.
- Tena, A. (2007). *Análisis de Estructuras con Métodos Matriciales*, Primera Edición, Limusa, México, 559 p.
- Vergara, J. (2005). "Determinación de la Matriz de Rigidez Lateral en el Intervalo Elástico (MRLE) de Muros con Aberturas", Proyectos Terminales I y II, Departamento de Materiales, Universidad Autónoma Metropolitana, México, D.F.