

ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR PELO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS UTILIZANDO-SE RELAXAÇÃO VISCOSA ACELERADA

LUIZ A. DE SOUZA
e
NELSON F.F. EBECKEN

*COPPE/UFRJ - Universidade Federal do Rio de Janeiro,
Cidade Universitária - CT, Bloco B,
21945 Rio de Janeiro, RJ,
Caixa Postal 68506,
Brasil.*

SUMÁRIO

Neste trabalho discute-se a utilização da técnica de relaxação viscosa para a solução de equações do método dos elementos finitos, visando-se a sua implementação em computadores de processamento paralelo/vetorial. Os problemas de convergência e número de iterações foram minimizados de modo a obter-se um algoritmo seguro e versátil, que oferece as seguintes vantagens: simplicidades de implementação, reduzida memória central e facilidade de refinamento e modificações da malha. São apresentados estudos relativos a dois casos clássicos de leitura, tanto em regime linear quanto elástico plástico.

SUMMARY

This paper discusses the implementation of the accelerated viscous relaxation technique to be used in nonlinear finite element analysis on vector/parallel computers. The resulted approach have significant advantages: reduced central storage, great efficiency and the suitability for adaptative finite element analysis. Two classic elasto-plastic cases are studied and the obtained performance are examined for the linear and nonlinear ranges. Is the authors opinion that the generated software can be considered as an engineering tool to treat complex problems with economy and versatility.

INTRODUÇÃO

Os métodos de solução iterativas das equações do método dos elementos finitos ficaram legados a segundo plano por longo tempo devido principalmente ao seu desempenho computacional e características de convergência. Porém, com o advento dos grandes computadores de processamento paralelo/vetorial, surgiu a necessidade de se desenvolver algoritmos que pudessem aproveitar todas as potencialidades oferecidas

Recibido: Septiembre 1990

por este tipo de computador. Com isto, renovou-se o interesse pelo uso de soluções iterativas, que permitem uma abordagem do problema num esquema elemento-por-elemento em computadores de processamento vetorial/paralelo.

Entre os métodos mais utilizados para a solução de sistemas de equações algébricas pode-se citar o método dos gradientes conjugados, o método de jacobi e as relaxações. Dos métodos relaxação, destacam-se a relaxação dinâmica, que se utiliza das equações de análise dinâmica (2) e a relaxação viscosa que se utiliza das equações da viscosidade (3). Assim, a solução do sistema de equações,

$$KU + F = 0 \quad (1)$$

pode ser obtido através de:

$$M\ddot{U} + KU + F = 0 \quad (2)$$

ou através de:

$$C\dot{U} + KU + F = 0 \quad (3)$$

onde:

K =matriz de rigidez global

F =vetor de cargas nodais aplicadas

C =matriz de amortecimento ou características viscosas

M =matriz de massa

U =vetor de deslocamentos nodais

$\dot{U}$ =vetor de velocidades nodais

$\ddot{U}$ =vetor de acelerações nodais

Em ambos os métodos, as derivadas dos deslocamentos em relação ao tempo são aproximadas por diferenças finitas e as equações (2) e (3) são integradas ao longo do tempo até que a solução estacionária seja alcançada com $\dot{U} = 0$ e $\ddot{U} = 0$. As matrizes M e C são escolhidas artificialmente na forma diagonal para que sua inversão seja imediata e conduza a solução com o menor número de iterações possível.

A solução exata da equação homogênea do problema dinâmico

$$M\ddot{U} + KU = 0 \quad (4)$$

é do tipo

$$U = a \cos \lambda t + b \sin \lambda t \quad (5)$$

enquanto que a solução da equação homogênea do problema viscoso

$$C\dot{U} + KU = 0 \quad (6)$$

é do tipo

$$U = ae^{-\lambda t} \quad (7)$$

e o tipo de convergência obtida nestes métodos está mostrado na Figura 1.a e 1.b.

Embora ambos os métodos possam explorar a capacidade de processamento em computadores paralelos/vetoriais, necessitam de uma criteriosa escolha de Δt , que deve obedecer a seguinte inequação (8), para que não ocorra problemas de instabilidade numérica.

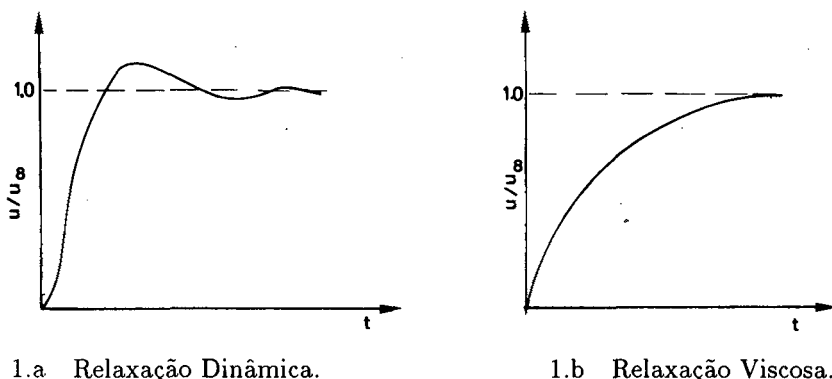


Figura 1. Convergência dos Métodos.

$$\Delta t \leq \frac{2}{\lambda_{\max}} \quad (8)$$

O cálculo de $\lambda_{\max}$ requer a solução do problema de autovalores de (4) ou (6) dependendo do método utilizado. Em geral isto é contornado utilizando-se fórmulas expeditas, que levam em conta as características físicas e geométricas do elemento finito utilizado na discretização do problema. Ou, pelo teorema de Gerschgorin expresso por:

$$\lambda_{\max} \leq \max \sum_{i=1}^n |a_{ij}| \quad (9)$$

sendo a_{ij} os coeficientes da matriz A decorrente do problema de autovalor associado a (4) e (6).

Estas formas de avaliação de Δt embora resultem em valores seguros, superestimam o valor de $\lambda_{\max}$, tornando a solução demasiadamente lenta.

Quando se deseja uma análise estática em regime elasto-plástico, as matrizes M e C da relaxação dinâmica devem ser escolhidas o mais próximo possível do amortecimento crítico da estrutura, para que não ocorram oscilações que deteriorariam os resultados.

Já este problema não ocorre na relaxação viscosa (R.V.) visto que sua convergência é assintótica. Este fato torna a R.V. particularmente atrativa para a análise estática em regime elasto-plástico e tem passado aparentemente despercebido pela maioria dos pesquisadores que trabalham com procedimentos de relaxação.

Neste trabalho procurou desenvolver-se a R.V. propondo-se artifícios que eliminam as dificuldades de escolha de Δt e minimizam o número de iterações.

IMPLEMENTAÇÃO DO MÉTODO DE RELAXAÇÃO VISCOSA

Partindo-se da equação (3), transcrita abaixo,

$$\mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} + \mathbf{F} = \mathbf{0}$$

a velocidade $\dot{\mathbf{U}}$ é aproximada por diferenças finitas por:

$$\dot{\mathbf{U}} = (\mathbf{U}^{t+\Delta t} - \mathbf{U}^t)/\Delta t \quad (10)$$

e chega-se a seguinte expressão:

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t - \Delta t \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot (\mathbf{K}\mathbf{U}^t + \mathbf{F}) \quad (11)$$

ou equivalentemente

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \Delta \mathbf{U} \quad (12)$$

sendo

$$\Delta \mathbf{U}^t = -\Delta t \mathbf{C}^{-1} \boldsymbol{\Psi}^t \quad (13)$$

O vetor $\boldsymbol{\Psi}^t$ (vetor de resíduos de forças) é avaliado por:

$$\boldsymbol{\Psi}^t = \int \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} dv + \mathbf{F} = \sum_{e=1}^{NE} \int \mathbf{B}_e^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_e^T \cdot dV_e + \mathbf{F} \quad (14.a)$$

com a notação :

- $\boldsymbol{\sigma}$ = vetor de tensões do elemento
- $\mathbf{B}$ = matriz das relações geométricas entre tensão deformação
- $\mathbf{D}$ = matriz de características físicas do material
- V_e = volume do elemento
- e = índice de elemento
- NE = número de elementos

ou

$$\boldsymbol{\Psi}^t = \sum_{e=1}^{NE} \mathbf{K}_e \mathbf{U}_e^t + \mathbf{F} \quad (14.b)$$

Uma escolha apropriada para $\mathbf{C}$ é:

$$\mathbf{C} = \text{diag}(\mathbf{K}) \quad (15)$$

Assim vê-se claramente que a equação (13), torna-se um produto de vetores e as equações (14.a) e (14.b) são avaliadas a nível de elemento por elemento o que propicia a sua utilização em processadores vetorial/paralelo, sem a necessidade de armazenar os coeficientes do sistema de equações.

Convém ressaltar que as matrizes de rigidez de elemento calculadas para a montagem do vetor $\mathbf{C}$, são utilizadas para a avaliação de Ψ em regime linear elástico através da equação (14.b), com grande redução do tempo de processamento em relação à equação (14.a). A equação (14.a) é então utilizada apenas em regime elasto-plástico.

O valor de Δt inicial é tomado igual a 1.0, e caso ocorra uma divergência no processo, que é constatada pelo crescimento das normas de Ψ ou de $\Delta \mathbf{U}$, propõe-se corrigir seu valor para:

$$\overline{\Delta t} = \frac{|\Psi^{t-\Delta t}|}{2 \cdot |\Psi^t|} \cdot \Delta t \quad (16)$$

A obtenção da equação (16) é comentada no Apêndice. Nos exemplos analisados, apenas uma correção de Δt foi eficiente para a convergência da solução sem que ocorresse instabilidade numérica. E, se a estrutura encontra-se ainda em regime elástico, o algoritmo autocorriga a solução.

É possível ainda acelerar o processo, introduzindo-se correções no valor de $\Delta \mathbf{U}^t$ quando a sua magnitude torna-se aproximadamente constante e os resíduos atingem valores pequenos em relação às cargas aplicadas. Assim escreve-se,

$$\mathbf{U}^t = \mathbf{U}^{t-\Delta t} + \alpha \cdot \Delta \mathbf{U}^t \quad (17)$$

sendo α um escalar calculado por:

$$\alpha = - \frac{(\Delta \mathbf{U})^T \cdot \Delta \mathbf{U}^t}{(\Delta \mathbf{U}^t)^T \cdot \Delta(\Delta \mathbf{U}^t)} \quad (18)$$

Desta forma a solução é acelerada cada vez que $|\Delta \alpha|/\alpha$ for menor que uma tolerância TOLS pré-estabelecida. A obtenção da equação (18) é mostrada com detalhes no Apêndice.

Nas formulações incrementais de plasticidade a carga é aplicada em incrementos. Na R.V., a cada incremento de carga, um número igual ou maior de iterações é requerido, dependendo do nível da plastificação da estrutura. Como o carregamento é monotônico e os incrementos de carga são idênticos, os deslocamentos $\Delta \mathbf{U}^t$, são utilizados como vetor de partida para as iterações do incremento $t + \Delta t$. Com isso, a solução para o incremento de cargas $t + \Delta t$ é obtida com um reduzido número de iterações.

Desta forma o algoritmo de relaxação viscosa como proposto neste trabalho está mostrado no Diagrama 1.

INICIALIZAÇÃO

$\Delta t = 1.0$ (NINCR=número de incrementos)
 $\Delta F = F/NINCR$ (NITEMAX= número máximo de iterações)

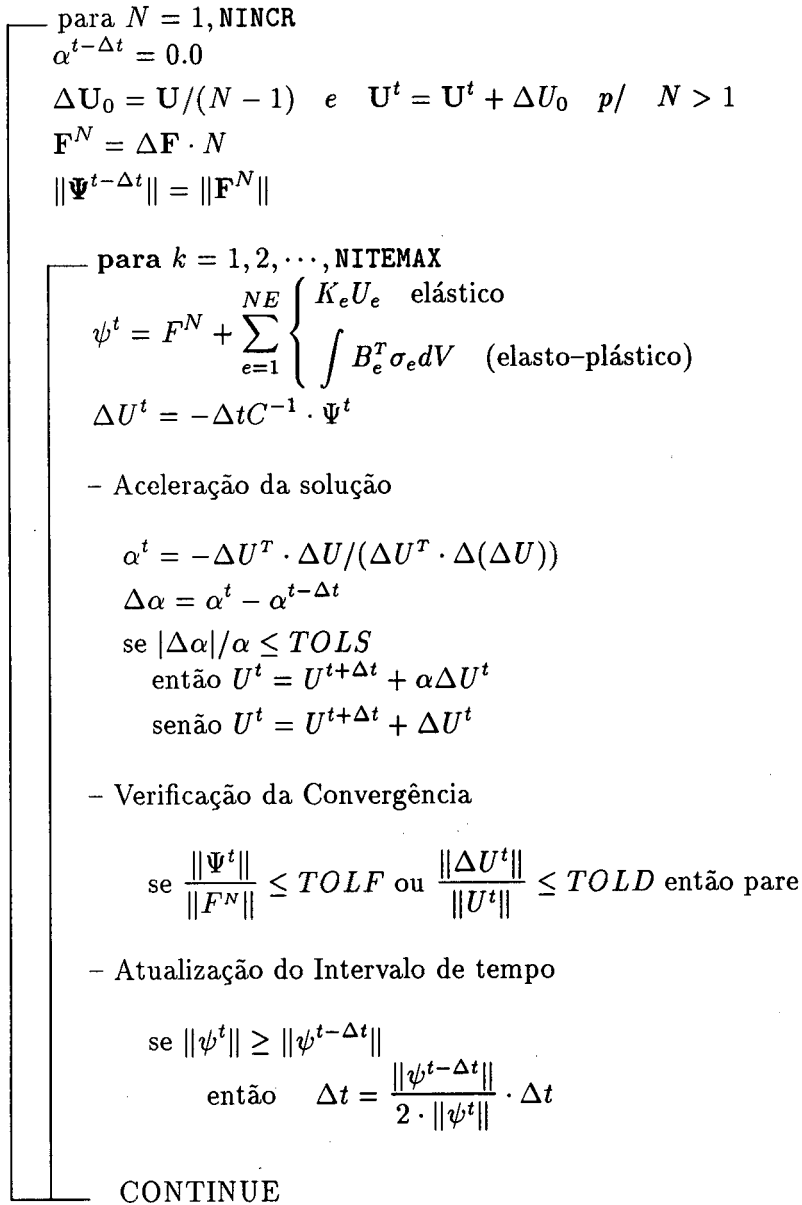
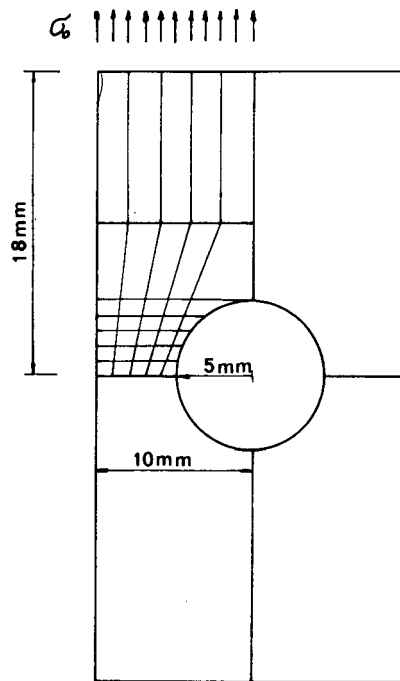


Diagrama 1.

Estudo de Casos

a) Chapa Perfurada

O primeiro caso analisado é a chapa perfurada centralmente, que é um dos problemas bastante utilizados em benchmarks do método dos elementos finitos. A geometria e propriedades do material estão indicados na Figura 2.



$$E = 7000 \text{ Kg}f/mm^2$$

$$\nu = 0.3$$

$$\sigma_y = 24.3 \text{ kg}f/mm^2$$

$$h = 0.645 \text{ mm (espessura)}$$

$$H' = 0.0$$

$$H' = 225 \text{ Kg}f/mm^2 \text{ (endurecimento)}$$

$$87 \text{ equações}$$

Figura 2.

A título de comparação, calculou-se os valores do maior e do menor autovalores, utilizando-se iteração inversa, obtendo-se:

$$\lambda_{\max} = 2.75257 \text{ e } \lambda_{\min} = 5.37446 \text{ E} - 3,$$

$$\text{e } \frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 513$$

$$\Delta t(\text{ótimo}) = 0.727$$

O valor de Δt foi inicializado igual a 1.0 e corrigido na 8ª iteração para $4.25009 E-1$, em todas as análises realizadas, e a tolerância para resíduos e deslocamentos foi adotada igual a 10^{-4} .

Na análise elástica sem aceleração foram necessários 1229 iteração. A seguir analisou-se a chapa com aceleração do algoritmo, variando-se os valores de TOLS. Os resultados estão mostrados na tabela 1.

$\Delta\alpha/\alpha$	0.05	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50
NITER	198	176	132	109	140	141

Tabela I. Número de Iterações x Tolerância para Aceleração.

Para as análise em regime elasto-plástico, utilizou-se TOLS = 0.30 e a carga foi dividida em 10 incrementos. Os resultados, considerando-se o material sem e com endurecimento, convergiram para resultados coerentes com os de Zienkiewicz¹. A tabela 2 mostra o número de iterações necessárias para cada incremento sem endurecimento. O critério de plasticidade adotado foi o de Von-Mises.

$2\sigma_0/\sigma_y$	INCREM	NITER
0.1	1	109
0.2	2	2
0.3	3	2
0.4	4	2
0.5	5	2
0.6	6	11
0.7	7	11
0.8	8	24
0.9	9	48
1.0	10	150

(OBS.: Começa a plastificação)

Atingiu a norma de TOLD mas TOLF $\geq 10^{-2}$

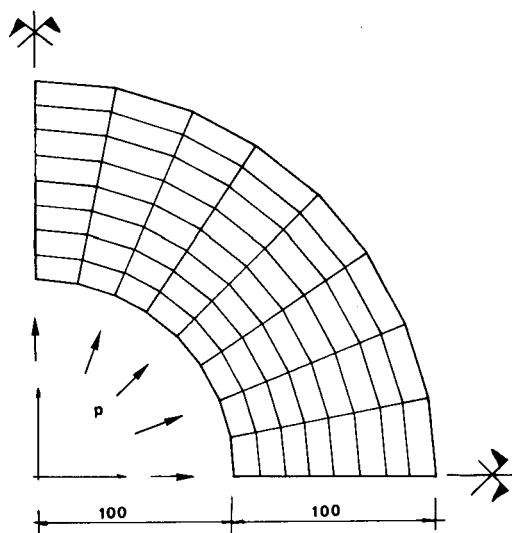
Tabela II. Incremento x Iterações, Sem Endurecimento do Material.

A seguir, analisou-se a chapa com $2\sigma_0/\sigma_y = 0.9$ aplicando-se a carga com 1 e posteriormente, 2 incrementos. Com 1 incremento de carga a solução foi obtida após 201 interações, e para 2 incrementos com 109 iterações no 1º incremento e 93 incrementos no segundo incremento.

Finalmente analisou-se a chapa considerando-se $2\sigma_0/\sigma_y = 0.98$ e um parâmetro de endurecimento $H' = 225. \text{ kgf/mm}^2$. A carga foi colocada em 1 incremento, e a solução foi obtida após 209 iterações.

b) Cilindro Espesso

O segundo problema analisado trata-se de um tubo de parede espessa sujeita à pressão interna p . A geometria, malha e propriedades físicas estão mostradas na Figura 3, a espessura do tubo foi discretizada por elementos lineares de estado plano de deformação.



$$\begin{aligned} p &= 18 \text{ dN/mm}^2 \\ E &= 3.1 \times 10^4 \text{ dN/mm}^2 \\ \nu &= 0.3 \\ \sigma_y &= 24.0 \text{ dN/mm}^2 \\ H' &= 0.0 \\ &144 \text{ equações} \end{aligned}$$

Figura 3.

Os valores de $\lambda_{\max}$ e $\lambda_{\min}$ foram calculados apenas para comparação, sendo encontrados:

$$\lambda_{\max} = 3.8518 \quad e \quad \lambda_{\min} = 4.765E^{-3}$$

$$\frac{\lambda_{\max}}{\lambda_{\min}} = 808$$

$$\Delta t(\text{ótimo}) = 0.5192$$

Para a análise elástica adotou-se: $\Delta t = 1.0$ e a tolerância $TOLS = 0.30$; $TOLD = 10^{-4}$; $TOLF = 10^{-4}$. O valor de Δt foi corrigido na 3ª iteração para 0.31658 e este valor permaneceu até a solução final, após 178 iterações.

A seguir, procedeu-se a análise plástica. A carga foi dividida em 18 incrementos, e os resultados parciais foram comparados com os obtidos por Owen e Hinton⁷, obtendo-se respostas idênticas. A tabela 3 apresenta o número de iterações necessárias para cada incremento.

INCR.	INTER
1	178
2-11	2
12	6
13	30
14	40
15	49
16	74
17	94
18	116

(Início da Plastificação)

Tabela III.

CONCLUSÕES

Da forma como implementado, a solução de equações do método dos elementos finitos por meio da relaxação viscosa, apresenta-se como alternativa simples e segura tanto para análise em regime linear, quanto elasto-plástica. Alia-se a isto, a vantagem do método adequar-se a utilização em computadores de processamento paralelo/vetorial, necessitar de reduzida memória central e, permitir facilidades de adaptação da malha a nível de processamento.

Recomenda-se inicializar o problema com $\Delta t = 1.0$ e escolher uma tolerância para α entre 0.2 a 0.3. Para a análise em regime elasto-plástico, aconselha-se a dividir a carga em um número suficiente de incrementos de forma a garantir pelo menos um

incremento em regime elástico, para que a correção do valor de Δt não modifique a resposta plástica.

A estratégia descrita neste trabalho está sendo utilizada na solução de problemas complexos, bi e tridimensionais. Os resultados da performance em um computador IBM 3090 600 E/6VF serão motivos de publicação futura.

APÊNDICE I - CÁLCULO DO ESCALAR α DE ACELERAÇÃO

Reescrevendo-se a equação (17):

$$\mathbf{U}^t = \mathbf{U}^{t-\Delta t} + \alpha \Delta \mathbf{U}^t \quad (17)$$

α pode ser associado à um vetor $\mathbf{W}$ de forma que minimize a equação (24),

$$\mathbf{W}^T \cdot \Psi(\mathbf{U}^t) = 0 \quad (24)$$

Assim sendo $\mathbf{W}$ é escolhido como:

$$\mathbf{W} = \Delta \mathbf{U} \quad (25)$$

que resulta na seguinte equação :

$$\Delta \mathbf{u}^T \cdot \Psi(\mathbf{U}^{t-\Delta t} + \alpha \Delta \mathbf{U}) = -\Delta \mathbf{U}^T (\mathbf{K} \mathbf{U}^{t-\Delta t} + \alpha \mathbf{K} \Delta \mathbf{U} + \mathbf{F}) = 0 \quad (26)$$

ou:

$$\alpha = \frac{\Delta \mathbf{U}^T \cdot \Psi(\mathbf{U}^{t-\Delta t})}{\Delta \mathbf{U}^T \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}} \quad (27)$$

derivando-se a equação (6) em relação ao tempo obtém-se

$$\mathbf{C} \Delta(\Delta \mathbf{U}) + \mathbf{K} \Delta \mathbf{U}^t = 0 \quad (28)$$

e sabendo-se que

$$\mathbf{C} \Delta \mathbf{U}^t = \Psi(\mathbf{U}^t) \quad (29)$$

tem-se a equação (18), utilizada para acelerar o algoritmo.

$$\alpha = \frac{-(\Delta \mathbf{U}^t)^T \cdot \Delta \mathbf{U}^t}{(\Delta \mathbf{U}^t) \cdot \Delta(\Delta \mathbf{U}^t)} \quad (18)$$

APÊNDICE II - CORREÇÃO DO INTERVALO DE TEMPO Δt

O intervalo de tempo Δt é corrigido fazendo-se uma ponderação entre a norma de Ψ^t e $\Psi^{t-\Delta t}$, como:

$$\overline{\Delta t} = \frac{|\Psi^{t-\Delta t}|}{|\Psi^t|} \cdot \Delta t \quad (30)$$

Com isto tem-se certeza que $\overline{\Delta t}$ será menor que Δt , entretanto tal fato não garante a convergência. Assim, a cada vez que ocorrer $\Psi^t \Psi^{t-\Delta t}$, nova correção deverá ser feita, até que a solução seja obtida.

Nos casos relatados neste trabalho e outros estudados pelos autores, constatou-se que a adoção de um coeficiente dividindo a equação (30) diminui o número de correções necessárias à se obter a convergência da solução. Notou-se que: um coeficiente igual a 2 conduzia à valores adequados de Δt , e este valor foi adotado. Assim a equação (30) ficou:

$$\overline{\Delta t} = \frac{|\Psi^{t-\Delta t}|}{2|\Psi^t|} \cdot \Delta t \quad (31)$$

REFERÊNCIAS

1. O.C. Zienkiewicz e R. Lohner, "Accelerated Relaxation or Direct Solution? Future Prospects for F.E.M.", *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, Vol. 21, pp. 1-11, (1985).
2. J.L.D. Alves, A.L.G.A. Coutinho, L. Landau, e N.F.F. Ebecken, "O Algoritmo de Relaxação Dinâmica Acelerada para Análise de Estruturas pelo Método dos Elementos Finitos", *Colloquia 87*, Porto Alegre, Brasil, (1987).
3. P. Underwood, "Computation Methods for Transient Analysis, Dynamic Relaxation", Cap. 5, Ed. by T. Belytschko and T.J. Hughes, North-Holland, (1983).
4. C. Farhat e L. Crivelli, "A General Approach to Nonlinear FE Computations on Shared Memory Multiprocessors", *Comp. Meth. Applied Mech. and Eng.*, Vol. 72, pp. 153-172, (1989).
5. R.F. Kulak e C. Fiala, "NEPTUNE - A System of Finite Element Programs for Three-Dimensional Nonlinear Analysis", *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 106, pp. 47-68, (1988).
6. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", Cap. 18, Ed. Mc Graw Hill, (U.K), (1977).
7. D.R.J. Owen e E. Hinton, "Finite Element in Plasticity", Cap. 7, Ed. Pineridge Press Limited (U.K), (1980).
8. L.A. Souza e N.F.F. Ebecken, "Relaxação Viscosa Acelerada para a Solução de Estruturas em Regime Elasto-Plástico", *Relatório de Pesquisa do Programa de Engenharia Civil, COPPE/UFRJ*, (1990).
9. J.L.D. Alves, A.L.G.A. Coutinho, L. Luiz e N.F.F. Ebecken, "A Vector/Parallel Multi-Step Algorithm for Transient Finite Element Analysis", in *Parallel Computing: Achievements, Problems and Prospects*, Nápoles, Italia, (1990).

10. J.L.D. Alves, "A Vector/Parallel Multi-step Algorithm for Structural Finite Element Analysis", *D.Sc. Thesis*, COPPE/UFRJ, (1990).
11. J.H.F. Patarroyo, "The Adaptative Dynamic Relaxation Nonlinear Analysis of 3D Structures by the Finite Element Method", *M.Sc. Thesis*, COPPE/UFRJ, (1990).