

SOLUCIÓN NUMÉRICA DE LA ECUACIÓN DE REYNOLDS FORMULACIÓN DIFERENCIAL VS. FORMULACIÓN INTEGRAL

JOSÉ DI PAOLO
CARLOS MARÍA CORVALÁN
Y
FERNANDO A. SAITA

*Instituto de Desarrollo Tecnológico para la Industria Química (INTEC)
Universidad Nacional del Litoral (UNL)
Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET)
Güemes 3450, 3000 Santa Fe, Argentina*

RESUMEN

La ecuación de Reynolds aparece en numerosos problemas de interés industrial. Entre ellos están los llamados sistemas elastohidrodinámicos (EHD) donde el flujo de líquido está acoplado a las deformaciones de las fronteras sólidas que lo confinan. El conjunto de ecuaciones que gobiernan el fenómeno es altamente no lineal y debe ser resuelto numéricamente.

La ecuación de Reynolds en una dimensión puede ser planteada como una ecuación diferencial o bien, puede ser integrada para dar el campo de presiones como una función integral. Ambas versiones se comportan en forma diferente cuando son usadas en los modelos discretos; mientras la forma integral siempre trabaja adecuadamente, la forma diferencial produce resultados que dependen fuertemente de la discretización empleada.

En este trabajo comparamos las dos alternativas empleando un caso límite de un sistema EHD, i.e. el contacto rígido. Los resultados presentados muestran de manera concluyente que la versión integral debe ser usada.

SUMMARY

The Reynolds equation appears in numerous problems of industrial interest, among them are the so-called elasto-hydrodynamic systems (EHD) where the flow of liquid is coupled to the deformation of the solid boundaries that confine the flow. The final set of governing equations is highly nonlinear and must be solved numerically.

The one-dimensional Reynolds equation might be posed as a differential equation or it might be integrated to give the pressure field as an integral function. Both versions behave differently when they are used in the discrete models; while the integral form always works suitably, the differential form produces results that strongly depend on the discretization employed.

In this work we compare two alternatives by employing a limit case of an EHD system; i.e. the rigid contact. The results presented conclusively show that the integral version should be used.

Recibido: Julio 1993

INTRODUCCIÓN

En los sistemas elastohidrodinámicos (EHD) se producen dos fenómenos interactuantes, uno es el flujo de fluido en un canal angosto y el segundo es la deformación de las paredes del canal producto de la presión hidrodinámica desarrollada por el mismo flujo. Obviamente, la deformación de las paredes altera la sección del canal y consecuentemente cambia la presión hidrodinámica que a su vez altera nuevamente el valor de las deformaciones y así sucesivamente; de esta forma es como se encuentran acopladas las ecuaciones que gobiernan ambos fenómenos, las cuales conforman un sistema altamente no lineal que debe ser resuelto mediante técnicas numéricas.

Existen numerosos ejemplos de sistemas que se comportan elasto-hidrodinámica-mente. De interés en el campo de la medicina y en especial traumatología son las articulaciones de los seres vivos; en el campo informático son los procesos de grabación y reproducción de cintas magnéticas; dentro de los procesos industriales se puede citar a los recubridores de hoja flexible utilizados fundamentalmente en la producción de papeles para impresión y dentro del campo de la mecánica se encuentran articulaciones mecánicas y órganos de máquinas como los cojinetes.

Precisamente el cojinete de fricción, cuya dimensión axial es mucho mayor que la radial, puede señalarse como caso arquetípico de sistema EHD dado que ha sido objeto de numerosos análisis que se remontan a las primeras décadas de este siglo. No obstante, aun hoy se siguen buscando vías alternativas para resolver el modelo matemático que lo describe y que académicamente se conoce como problema de contacto lineal.

El problema de contacto lineal ha sido resuelto mediante distintas técnicas, la más conocida de ellas fue propuesta por Dowson y Higginson¹ y denominada solución inversa de la ecuación de Reynolds. Con posterioridad Stephenson y Osterle², Rohde y Oh³ y más recientemente Hall y Savage⁴, Myers⁵ y otros han presentado soluciones obtenidas mediante técnicas alternativas; sin embargo, ninguna de ellas es lo suficientemente robusta como para producir soluciones para todo el rango de operación del sistema.

Recientemente, Di Paolo⁶ presentó una nueva metodología de solución que produjo resultados correctos para todos los niveles de carga ya explorados y puso de manifiesto ciertos comportamientos del sistema que eran, hasta entonces, ignorados⁷. Esta metodología se basa en la solución simultánea de las ecuaciones que gobiernan al sistema y que determinan: las deformaciones de las fronteras sólidas, la presión hidrodinámica del fluido y el dominio donde las ecuaciones de flujo deben ser resueltas, el cual está definido por la posición donde el líquido lubricante comienza a cavitarse. El sistema de ecuaciones fue resuelto numéricamente mediante el método de residuos ponderados de Galerkin utilizando funciones de prueba lineales, el conjunto de ecuaciones algebraicas no lineales resultante fue resuelto mediante el método de Newton y el uso de continuación paramétrica para obtener eficientemente los resultados correspondientes a los distintos niveles de carga.

Además de las técnicas ya señaladas, fue crucial para el éxito de la metodología la forma de empleo de la ecuación de Reynolds; esta se utilizó en su forma integral. Posteriores intentos de reproducir los resultados así obtenidos, utilizando la expresión diferencial de dicha ecuación, condujeron a soluciones totalmente insatisfactorias. Cabe destacar que este tipo de comportamiento ya había sido detectado en cierto grado por

Rohde y Oh³ al resolver el problema de contacto lineal, a cargas moderadas o altas, utilizando funciones de forma lineales.

El uso de la versión diferencial de la ecuación de Reynolds en el problema EHD de contacto lineal produce soluciones que se caracterizan por:

- (i) el campo de presiones es notablemente oscilante,
- (ii) no se satisface la condición de presión impuesta a la salida del canal del flujo,
- (iii) los resultados dependen fuertemente de que el dominio sea discretizado con un número par o impar de elementos.

Las anomalías mencionadas permanecen, en mayor o menor grado, a medida que se reduce la carga soportada, aun llegando al extremo de carga nula en el cual el problema EHD se transforma en hidrodinámico. Esto sugiere, no sólo que los inconvenientes pueden estar originados en la ecuación de lubricación, sino también que el caso de carga nula puede ser utilizado para determinar los orígenes del comportamiento anómalo.

El objeto del presente trabajo es precisamente el ya señalado, utilizar el caso límite de carga nula para determinar, tanto en forma analítica como numérica, que la discretización de la versión diferencial de la ecuación de Reynolds conduce a soluciones que muestran anomalías similares a las detectadas en la solución de problemas elastohidrodinámicos, mientras que los resultados obtenidos por la discretización de la versión integral no muestran tales deficiencias. A tal fin, en las secciones que siguen se presenta en forma sintética el problema de contacto lineal y su vinculación con el caso límite que se utilizará para el análisis, como así también las dos versiones de la ecuación de Reynolds. Luego se discretizan ambas versiones mediante el método de elementos finitos con funciones de prueba lineales y los sistemas de ecuaciones resultantes son analizados para predecir cuál será el comportamiento de los resultados a obtener. Finalmente, dichas predicciones se comparan con los resultados numéricos y se exponen las conclusiones.

EL CONTACTO LINEAL CARGADO Y EL CASO LÍMITE DE CARGA NULA

Las ecuaciones representativas del problema EHD de contacto lineal se plantean de acuerdo a precisas hipótesis simplificadoras⁸. Dada la geometría del sistema considerado, i.e. longitud axial mucho mayor que la dimensión radial, el análisis puede realizarse en una dimensión sobre un sistema equivalente como el que se muestra en la Figura 1 donde una de las superficies sólidas se desliza con velocidad U . Dicha figura representa al sistema no deformado, es decir, cuando la carga soportada por el sistema es muy baja o nula.

A valores de carga de operación los sólidos se deforman en la zona de máxima aproximación entre ellos; cualitativamente el canal del flujo resultante está ejemplificado por la Figura 2.

El canal de flujo, que depende de la presión hidrodinámica cuya integral en el dominio debe igualar a la carga impuesta al sistema, se calcula con las ecuaciones correspondientes a las deformaciones elásticas de un sólido semiinfinito⁸, mientras que

la ecuación de Reynolds, aplicada en dicho canal del que a priori no se conoce ni su forma $[h(x)]$ ni su frontera de salida (x_c), se utiliza para determinar las coordenadas del punto de cavitación y el campo de presión hidrodinámica.

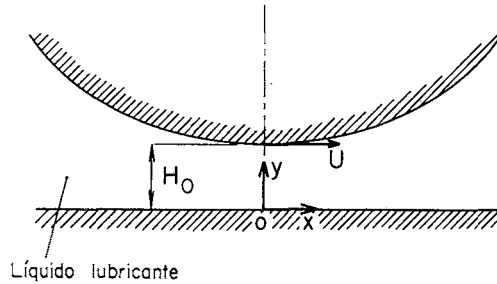


Figura 1. Esquema del contacto lineal indeformado

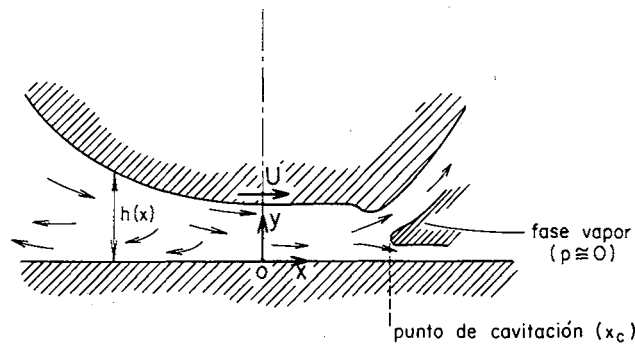


Figura 2. Esquema del contacto lineal en la fase denominada elastohidrodinámica

En estas condiciones de operación, es decir, cargas apreciables, la ecuación de lubricación se resuelve utilizando las condiciones de contorno de Reynolds, las que indican que la presión aguas arriba, donde el ancho del canal de flujo es mucho mayor que en la zona de máxima aproximación entre los sólidos, es nula. En el otro extremo del dominio, es decir, en el punto de cavitación, se impone que no sólo la presión es nula, sino que también el gradiente de presión es cero⁸.

A valores de carga operativos la complejidad del problema está dada por la interacción entre las deformaciones y el flujo del fluido en un dominio a ser determinado; en dichas condiciones es imposible analizar las causas de los diferentes comportamientos evidenciados cuando se utilizan distintas expresiones de la ecuación de Reynolds.

Cuando la carga aplicada tiende a cero, las deformaciones tienden a desaparecer, la curva de presión presenta una zona positiva en la zona del canal convergente y una zona negativa en el divergente. En el caso límite de carga nula se eliminan las ecuaciones de deformación, la curva de presión en la zona divergente del canal es negativa y exactamente antisimétrica respecto de la curva correspondiente a la zona convergente,

i.e. $p(x) = -p(-x)$, de tal forma que, si en $x = -L$ se fija como condición de contorno que la presión es nula, el dominio queda determinado dado que la presión a la salida del canal ($x = L$) también debe ser cero. En síntesis, para el caso límite se eliminan las ecuaciones de deformación y la ecuación de Reynolds se resuelve con las condiciones de contorno de Sommerfeld: $p(-L) = p(L) = 0$ simplificándose el problema de tal manera que las ecuaciones discretizadas pueden ser analizadas en forma sencilla para extraer conclusiones acerca de las características de la solución a obtener. Es pertinente señalar además que tanto $p(-L)$ como $p(L)$ sólo indican una presión de referencia que por conveniencia se fija igual a cero; es decir, se puede suponer que el cojinete sin carga se encuentra presurizado internamente. En tal caso la zona de presión negativa lo es sólo con respecto a la presión externa al canal de flujo, no significando que el fluido esté realmente sometido a tensiones normales negativas que inducirían su evaporación por cavitación. Sobre este caso límite analizaremos el comportamiento numérico de las formas diferencial e integral de la ecuación de Reynolds.

La ecuación de Reynolds se deduce a partir de las ecuaciones generales del movimiento y sus términos representan un balance entre las fuerzas viscosas y las fuerzas de presión.

La ecuación de Reynolds para un flujo unidireccional de un fluido newtoniano, incompresible y de viscosidad constante resulta

$$\frac{d}{dx} \left[\frac{h^3}{12\eta} \frac{dp}{dx} \right] = \frac{d}{dx} [Uh] \quad (1)$$

donde p es la presión del fluido, U es la velocidad media de los sólidos, h es la altura del canal de flujo, η la viscosidad del fluido y x la coordenada en la dirección del flujo.

Mediante sucesivas integraciones de (1) se llega a

$$\frac{dp}{dx} = 12\eta U \frac{(h - C)}{h^3} \quad (2)$$

y

$$p(x) = p(-L) + 12\eta U \int_{-L}^x \frac{(h - C)}{h^3} dx \quad (3)$$

En las ecuaciones anteriores $p(-L)$ y C son las constantes de integración, donde $p(-L)$ es la presión del fluido al ingreso del canal y C es la altura del canal donde el gradiente de presión se anula; esta altura del canal está directamente relacionada con el flujo por unidad de profundidad de canal (Q) que circula por el sistema

$$Q = C \cdot U \quad (4)$$

La solución del problema esquematizado en la Figura 1 implica determinar el caudal circulante Q (o su equivalente C) y el campo de presiones a lo largo del canal sabiendo que en ambos extremos del mismo la presión es conocida; a tal fin se puede utilizar la ecuación de Reynolds en su forma diferencial (2) o en su forma integral (3).

En la sección que sigue se discretizan ambas versiones de la ecuación de Reynolds mediante el método de elementos finitos con funciones de forma lineales y se analizan las

ecuaciones algebraicas resultantes de emplear el método de Galerkin. El análisis, a pesar de su simplicidad, es tedioso y por razones de espacio se han obviado pasos intermedios. Para el lector no interesado en esos detalles se resumen aquí las conclusiones, las que se pueden comparar directamente con los resultados numéricos presentados en la sección posterior.

- a) Para un canal de forma arbitraria y con una discretización arbitraria se concluye que:
 - a1) La presión impuesta a la salida del canal de flujo no puede ser satisfecha por las ecuaciones discretizadas correspondientes a la versión diferencial de la ecuación de Reynolds. Es decir, la presión en el último nodo P_N involucra un error que, aunque de magnitud desconocida, asegura que la solución a obtener no puede ser correcta.
 - a2) Las ecuaciones discretizadas utilizando la versión integrada de la ecuación de Reynolds satisfacen la presión impuesta a la salida del canal; en consecuencia la solución cumple una condición necesaria para ser correcta.
- b) Para un canal que es simétrico con respecto al eje vertical y utilizando una distribución nodal simétrica se concluye que:
 - b1) Si se usa la formulación diferencial calculando el caudal (C) a partir de la integración de la ecuación de Reynolds entre ambos extremos del canal (versión diferencial A), las ecuaciones discretizadas sólo cumplen con la presión impuesta a la descarga del canal si el número de nodos es par. Bajo dichas condiciones la solución obtenida puede llegar a ser correcta, mientras que si el número de nodos es impar, invariablemente contendrá errores.
 - b2) Si se usa la formulación diferencial imponiendo la condición en el nodo correspondiente a la salida del canal del flujo ($p_N = 0$) y se calcula C utilizando el residuo ponderado correspondiente (versión diferencial B), se obtiene que para dos nodos cualesquiera equidistantes del eje de simetría la suma de sus presiones es cero sólo si la distribución nodal es par. Es decir, en este caso la solución cumple con la condición necesaria de antisimetría y puede llegar a ser correcta. En caso de que el número de nodos sea impar, la antisimetría de la solución se preserva sólo para los nodos impares y consecuentemente la solución no tiene posibilidad de ser correcta.
 - b3) Si se usa la forma integral de la ecuación de Reynolds, la condición necesaria de antisimetría en presión se preserva independientemente de que el número de nodos sea par o impar.

DISCRETIZACIÓN DE LA ECUACIÓN DE REYNOLDS

En la dirección del flujo el dominio es discretizado por N nodos distribuidos, en principio, arbitrariamente. La coordenada (x) correspondiente al nodo (j) será representada por (s_j) y la distancia entre dos nodos consecutivos ($j, j + 1$) será $D_j = s_{j+1} - s_j$.

Las funciones de forma lineales (ϕ_j) toman valor unitario en el nodo correspondiente

(j) y varían linealmente hasta anularse en los nodos anterior y posterior al (j); es decir en ($j - 1$) y ($j + 1$). Fuera del dominio acotado por los nodos ($j - 1$) y ($j + 1$) la función (ϕ_j) es idénticamente nula.

Expandiendo la presión hidrodinámica en términos de las funciones de forma se tiene que

$$p(x) \cong \sum_j p_j \phi_j(x) \tag{5}$$

El término $(h-C)/h^3$ es también una función de la coordenada (x), en consecuencia

$$(h - C)/h^3 \cong \sum_j d_j \phi_j(x), \quad d_j \equiv (h_j - C)/h_j^3 \tag{6}$$

donde p_j y d_j son los coeficientes de la expansiones (5) y (6), es decir, la solución buscada.

Formulación diferencial

Si la ecuación (2) se escribe en su forma residual y se integra en el dominio luego de haber sido ponderada con las funciones de forma, se obtienen los residuos de Galerkin; ellos son

$$R_i = \int_{\Omega} \phi_i \left[\frac{dp}{dx} - 12\eta U \frac{(h - C)}{h^3} \right] dx \tag{7}$$

Reemplazando en (7) las expansiones (5) y (6) se llega a

$$R_i = \sum_j \left[p_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j' d\Omega - 12\eta U d_j \int_{\Omega} \phi_i \phi_j \Omega \right] \tag{8}$$

donde la integración en el dominio del producto de funciones de forma o del producto de una función de forma por la derivada de la otra son las componentes (i, j) de matrices tridiagonales que denominaremos **FF** y **FD** respectivamente. Luego,

$$FF_{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j d\Omega$$

y

$$FD_{i,j} = \int_{\Omega} \phi_i \phi_j' d\Omega \tag{9}$$

Reemplazando las expresiones (9) en la ecuación (8), el residuo R_i resulta

$$R_i = \sum_j [p_j FD_{i,j} - 12\eta U d_j FF_{i,j}] \tag{10}$$

cuya expresión en forma matricial es

$$\mathbf{r} = 0 = \mathbf{FD} \cdot \mathbf{p} - 12\eta U \mathbf{FF} \cdot \mathbf{d} \tag{11}$$

El sistema (11) provee N residuos que permiten determinar las presiones nodales siempre y cuando se fije el caudal circulante, dado que, si el canal es indeformable, el vector \mathbf{d} es conocido. El caudal circulante queda determinado por la diferencia de presión que existe entre los extremos del canal de flujo.

$$0 = \int_{-L}^L \frac{(h - C)}{h^3} dx \quad (12)$$

Reemplazando en (12) la expansión de $(h - C)/h^3$ se tiene

$$\sum_j d_j f_j = 0 \quad (13)$$

donde $f_j = \int_{\Omega} \phi_j d\Omega$

El sistema (11) puede escribirse como

$$\mathbf{FD} \cdot \mathbf{p} = \mathbf{t}$$

donde

$$\mathbf{t} = 12\eta U \mathbf{FF} \cdot \mathbf{d} \quad (14)$$

y el vector \mathbf{t} es ahora conocido dado que el canal es fijo y C ha sido calculado.

Dadas las características de la matriz \mathbf{FD} y considerando que $p_1 = 0$ por condiciones de contorno, el sistema (14) produce las siguientes ecuaciones

$$\begin{aligned} p_1 &= 0 \\ p_j &= p_{j+2} - 2t_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N-2 \\ p_{N-1} &= p_N - 2t_N \end{aligned} \quad (15)$$

Del conjunto de ecuaciones (15) se puede despejar p_N que resulta

$$p_N = \sum_{j=1}^K t_{2j} \quad (16)$$

donde $K = N/2$ si N es par y $K = (N-1)/2$ si N es impar. Es fácil ver de (15) que la presión en el último nodo conecta entre sí todas las presiones en los nodos pares por un lado y todas las presiones en los nodos impares por otro.

Para determinar si el sistema de ecuaciones (15) puede producir una solución correcta cuando el caudal ha sido determinado con la ecuación (13) es necesario verificar que p_N dado por la ecuación (16) sea cero; en caso de que no lo sea, es decir, que la presión en el último nodo presente un valor distinto de cero, podemos asegurar que la solución no será correcta aunque nada podemos asegurar en cuanto a la magnitud de las incorrecciones.

La componente (i) del vector \mathbf{t} es

$$t_i = 12\eta U \sum_l F F_{i,l} d_l \quad (17)$$

luego, teniendo en cuenta que el número de nodos N puede ser impar o par, la ecuación (16) puede expresarse como

$$p_N = d_1 FF_{2,1} + d_N FF_{N-1,N} + \sum_{\substack{j=3 \\ \text{(impares)}}}^N d_j (FF_{j+1,j} + FF_{j-1,j}) + \sum_{\substack{j=2 \\ \text{(pares)}}}^{N-1} d_j FF_{j,j} \quad (18)$$

si N es impar o

$$p_N = d_1 FF_{2,1} + \sum_{\substack{j=3 \\ \text{(impares)}}}^{N-1} d_j (FF_{j+1,j} + FF_{j-1,j}) + \sum_{\substack{j=2 \\ \text{(pares)}}}^N d_j FF_{j,j} \quad (19)$$

si N es par.

Comparando las ecuaciones (18) o (19) con la ecuación (13) y dado que los h_j son arbitrarios, p_N será cero sólo si

$$\begin{aligned} FF_{j,j} &= f_j, \text{ si } j = \text{par} \\ FF_{j-1,j} + FF_{j+1,j} &= f_j, \text{ si } j = \text{impar} \end{aligned} \quad (20)$$

Como puede comprobarse, ninguna de las igualdades anteriores se cumple; luego p_N será distinta de cero y el resultado será incorrecto.

Para el caso particular que el número de nodos sea par y tanto el problema como la discretización sean simétricas, el sistema de ecuaciones resultante cumple la condición de que $p_N = 0$. En este caso

$$\begin{aligned} d_1 &= d_N, d_2 = d_{N-1}, \dots, d_{N/2} = d_{N/2+1} \\ FF_{1,1} &= FF_{N,N}; FF_{2,2} = FF_{N-1,N-1}, \dots; FF_{N/2,N/2} = FF_{N/2+1,N/2+1} \end{aligned} \quad (21)$$

en consecuencia, la ecuación (19) puede expresarse como

$$p_N = d_1 (FF_{2,1} + FF_{1,1}) + \sum_{\substack{j=3 \\ \text{(impares)}}}^{N-1} d_j (FF_{j+1,j} + FF_{j,j} + FF_{j-1,j}) \quad (22)$$

de la misma forma, la ecuación (13) se puede escribir como

$$0 = \sum_{\substack{j=1 \\ \text{(impares)}}}^{N-1} d_j f_j \quad (23)$$

Siguiendo el razonamiento ya empleado, p_N será cero si

$$\begin{aligned} f_j &= FF_{j+1,j} + FF_{j,j} + FF_{j-1,j} \quad j = 3, 5, \dots, N-1 \\ f_1 &= FF_{2,1} + FF_{1,1} \end{aligned} \quad (24)$$

igualdades que se verifican como puede demostrarse. Un procedimiento similar para N impar conduce a que en este caso no se cumple la condición de presión de descarga nula.

Se puede argumentar que no es consistente el uso de la ecuación (13) que proviene de la integración de la ecuación de Reynolds con el sistema (11) basado en la expresión diferencial de esta ecuación. Una alternativa para no emplear la ecuación (13) es imponer en el sistema (11) que la presión en el último nodo es nula; de esta manera utilizamos uno de los residuos para el cálculo del caudal C .

Desarrollado el segundo término de (11) se tiene

$$\mathbf{FD} \cdot \mathbf{p} - \mathbf{a} = \mathbf{b} \quad (25)$$

donde

$$a_i = 12\eta U F F_{ij} h_j^{-3} C \quad \text{y} \quad b_i = 12\eta U F F_{ij} h_j^{-2}$$

Eliminando el primer residuo de (25) para fijar $p_1 = 0$ como condición de contorno e imponiendo en el último que $p_N = 0$ puede utilizarse dicha ecuación para el cálculo de C . Así se obtiene

$$p_j = p_{j+2} + 2a_{j+1}C - 2b_{j+1} \quad j = 2, \dots, N-1$$

y

$$C = \sum_{\substack{j=2 \\ (\text{pares})}} b_j / \sum_{\substack{j=2 \\ (\text{pares})}} a_j \quad (26)$$

Esta solución puede analizarse en forma similar a la seguida anteriormente. Llevando a cabo dicho análisis (que por razones de extensión es obviado aquí) se concluye que

- (i) Si la distribución nodal no es simétrica, en general no se cumple que dos nodos equidistantes del centro presenten el mismo valor absoluto de presión.
- (ii) Si la distribución nodal es simétrica y el número de nodos es par, la suma de las presiones de dos nodos equidistantes es cero. En consecuencia se preserva la antisimetría de la curva de presión y la solución podría ser correcta.
- (iii) Si la distribución nodal es simétrica y el número de nodos es impar, la antisimetría de la curva de presión se preserva sólo para los nodos impares y la solución es incorrecta.

Formulación integral

Con la forma integral de la ecuación de Reynolds (3) se obtienen los residuos de Galerkin en forma análoga al procedimiento seguido con la ecuación diferencial, es decir

$$R_i = \int_{\Omega} \left[p(x) - p(-L) - 12\eta U \int_{-L}^x \frac{(h-C)}{h^3} dx \right] \phi_i d\Omega \quad (27)$$

Introduciendo luego las expansiones (5) y (6) se obtiene

$$R_i = \int_{\Omega} \left[\sum_j p_j \phi_j - 12\eta U \sum_j d_j \int_{-L}^x \phi_j dx \right] \phi_i d\Omega \quad (28)$$

La integral indefinida de las funciones de forma produce una función de (x) y como tal puede ser expandida en términos de las funciones de forma utilizando sus valores nodales, esto es

$$\int_{-L}^x \phi_j(x) dx \simeq \sum_k G_{j,k} \phi_k(x) \quad (29)$$

donde $G_{j,k}$ es el valor de la integral de $\phi_j(x)$ cuando es evaluada entre $s_1(x = -L)$ y el nodo k , $(x = x_k)$.

$$G_{j,k} = \int_{s_1}^{s_k} \phi_j(x) dx \quad (30)$$

Reemplazando la expresión (29) en (28) y reordenando se llega a

$$R_i = \sum_j \left[p_j FF_{i,j} - 12\eta U d_j \sum_k G_{j,k} FF_{k,i} \right] \quad (31)$$

El sistema de ecuaciones (31) expresado en forma matricial resulta

$$\mathbf{r} = 0 = \mathbf{p} \cdot \mathbf{FF} - 12\eta U \mathbf{d} \cdot \mathbf{G} \cdot \mathbf{FF} \quad (32)$$

el cual provee las $N - 1$ ecuaciones necesarias para determinar las presiones de los nodos $2, 3, \dots, N$.

Mostraremos que el conjunto de ecuaciones (32) satisface la condición de presión nula a la salida del canal cuando C es obtenido de la ecuación (13).

Al multiplicar (32) por \mathbf{FF}^{-1} , el vector de presiones se expresa

$$\mathbf{p} = 12\eta U \mathbf{d} \cdot \mathbf{G} \quad (33)$$

mientras que la presión a la salida del canal (p_N) es

$$p_N = 12\eta U \sum_{j=1}^N d_j G_{j,N} = 12\eta U (d_1 G_{1,N} + d_2 G_{2,N} + \dots + d_N G_{N,N}) \quad (34)$$

Dado que el canal de flujo puede ser elegido arbitrariamente, los valores de d_i también son arbitrarios; por otra parte, al satisfacerse la ecuación (13)

$$0 = (d_1 f_1 + d_2 f_2 + \dots + d_N f_N)$$

y p_N será nula ya que $f_j = G_{j,N}$.

En consecuencia, la formulación integral cumple con el requerimiento impuesto a la presión a la salida del canal para un canal de forma arbitraria cualquiera sea la distribución nodal.

Para el caso del canal convergente-divergente, simétrico respecto a $x = 0$ analizaremos si la presión en nodos equidistantes del centro cumple con la condición de antisimetría. Es decir, si se cumple que $p_l + p_m = 0$ siendo l y m dos nodos que se encuentran a ambos lados de $x = 0$ y equidistantes de él.

De acuerdo a (34) p_l y p_m resultan

$$p_l = 12\eta U(d_1 G_{1,l} + d_2 G_{2,l} + \dots + d_l G_{l,l}) \quad (35)$$

y

$$p_m = 12\eta U(d_1 G_{1,m} + d_2 G_{2,m} + \dots + d_l G_{l,m} + d_{l+1} G_{l+1,m} + \dots + d_{m-1} G_{m-1,m} + d_m G_{m,m}) \quad (36)$$

por (30), ambas ecuaciones pueden reescribirse como

$$p_l = 12\eta U[d_1(D_1)/2 + d_2(D_1 + D_2)/2 + \dots + d_l(D_{l-1})/2] \quad (37)$$

$$p_m = 12\eta U[d_1(D_1)/2 + d_2(D_1 + D_2)/2 + \dots + d_l(D_{l-1} + D_l)/2 + d_{l+1}(D_l + D_{l+1})/2 + \dots + d_{m-1}(D_{m-2} + D_{m-1})/2 + d_m(D_{m-1})/2] \quad (38)$$

Si la distribución nodal es simétrica, el número total de nodos (N) será $N = l+m-1$ y la presión a la salida del canal puede expresarse de la siguiente forma

$$p_N = 0 = p_m + 12\eta U[d_m(D_m)/2 + d_{m+1}(D_m + D_{m+1})/2 + \dots + d_{N-1}(D_{N-2} + D_{N-1})/2 + d_N(D_{N-1})/2] \quad (39)$$

pero por ser la distribución simétrica, resulta que $D_p = D_q$ si $p + q = N$ y por ser el problema simétrico $d_p = d_q$ si $p + q = N + 1$; luego el segundo sumando de (39) resulta idéntico a (37) con lo que queda demostrado que $p_l + p_m = 0$. Si la distribución no es simétrica, el resultado a obtener en nodos equidistantes del centro dependerá de cada una de las infinitas distribuciones nodales posibles; desde el punto de vista matemático, en general no se cumplirá la condición de antisimetría, aunque es de esperar que el error sea pequeño en la medida que la distribución nodal utilizada no sea totalmente inadecuada para el problema a resolver.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Los resultados numéricos que se presentan corresponden al canal convergente-divergente de la Figura 3; el canal es simétrico respecto a $s = 0$ y sólo se muestra la región convergente. La longitud total del canal es de 20 cm y en la zona del ingreso y egreso de flujo ($s = -10$ y $s = 10$) la altura del canal es 1,8517 cm, mientras que en la zona de máxima aproximación entre los sólidos, la distancia de separación es de 0,02 cm. Los resultados que se presentan corresponden a un valor del producto de la viscosidad por la velocidad de 0. 597 Pa m.

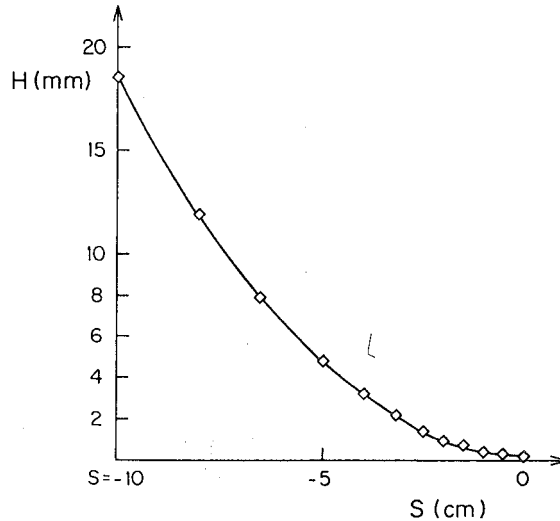


Figura 3. Canal convergente-divergente, simétrico respecto a su centro ($s = 0$), utilizado para obtener los resultados que se presentan

Distribución nodal simétrica, número de nodos impar (21)

Llamamos formulación diferencial A a la que calcula el caudal circulante con la ecuación (13), mientras que la formulación diferencial B es la que incluye al caudal circulante como variable del sistema.

La formulación integral presenta una solución del campo de presiones que es absolutamente antisimétrica con respecto al centro del dominio; además en el centro del dominio la presión es prácticamente cero. No ocurre lo mismo en los resultados obtenidos con la formulación diferencial A , en este caso nunca se cumple la condición de antisimetría en presión para dos nodos equidistantes del centro. Estos resultados están resumidos en la Figura 4, donde puede observarse que las predicciones de la formulación diferencial A se acercan a la condición de antisimetría en los nodos impares y la discrepancia es mayor en los nodos pares.

Los resultados de la formulación diferencial B se resumen en la Figura 5. Puede observarse que esta formulación no presenta una mejora considerable sobre la anterior. Es digno de destacar que, tal como se predijo en el análisis realizado al comienzo de este trabajo, las presiones en los nodos impares cumplen con la condición de antisimetría y no ocurre lo mismo con los nodos pares.

En cuanto a cuál de las formulaciones presenta menor error, los resultados de las Figuras 4 y 5 no son concluyentes aunque parecieran indicar que la formulación integral se acerca más a los valores exactos. Esta presunción será corroborada luego con una discretización más adecuada para el presente problema.

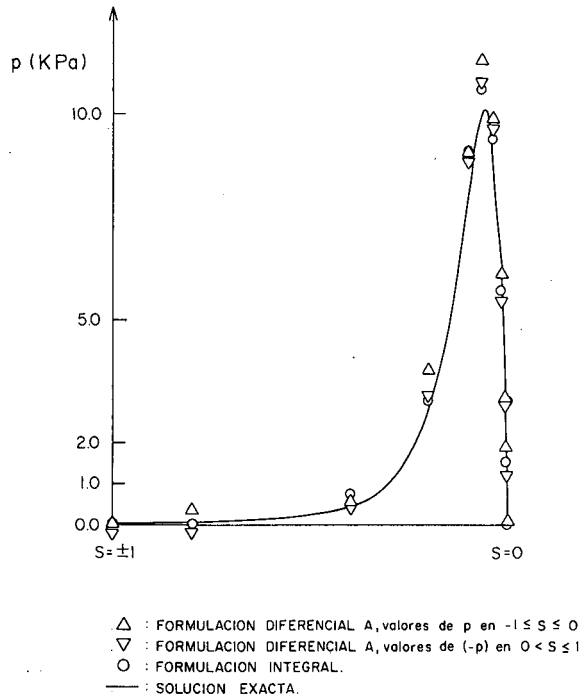


Figura 4. Resultados correspondientes a la formulación diferencial A para una distribución nodal simétrica impar

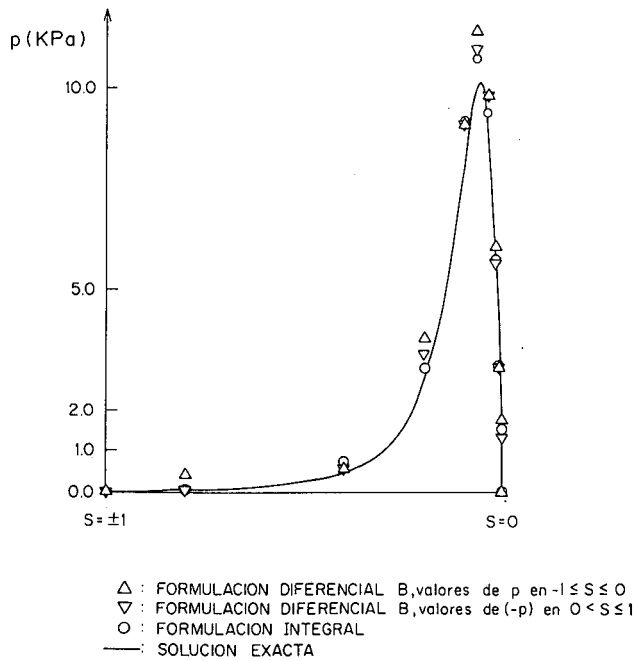


Figura 5. Resultados correspondientes a la formulación diferencial B para una distribución nodal simétrica impar

Distribución nodal simétrica, número de nodos par (20)

Puede observarse que en este caso las tres formulaciones producen valores de presión que son exactamente antisimétricos respecto de $s = 0$. Los resultados se grafican en la Figura 6; al igual que en el caso de la distribución nodal impar no es claro si la formulación integral o alguna de las formulaciones diferenciales produce menor error respecto de la solución exacta. Lo que sí es remarcable, es que ambas formulaciones diferenciales de la ecuación de Reynolds producen resultados de presión correctos desde el punto de vista de la antisimetría que debe existir para la curva de presión respecto de $s = 0$ al utilizar una distribución simétrica par, cosa que no sucede si la distribución es simétrica impar. Esta característica ya había sido adelantada por los análisis previos.

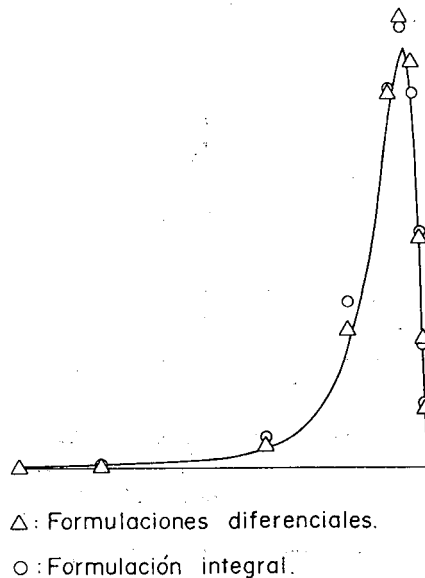


Figura 6. Predicciones obtenidas utilizando una distribución nodal simétrica par de 20 nodos

Distribución nodal simétrica, número de nodos par (40)

Para observar y comparar el comportamiento del error de la formulación integral frente a las formulaciones diferenciales (cuyas predicciones son coincidentes en el caso de utilizar una distribución nodal par); se duplicó el número de nodos empleados en el caso precedente.

Los resultados de presión están graficados en la Figura 7a que no presenta grandes diferencias con la Figura 6. Sólo se puede reafirmar que en la zona de mayor presión la formulación integral presenta menor error que las formulaciones diferenciales y pareciera que lo opuesto ocurre en las zonas de baja presión donde el gradiente de presión es positivo.

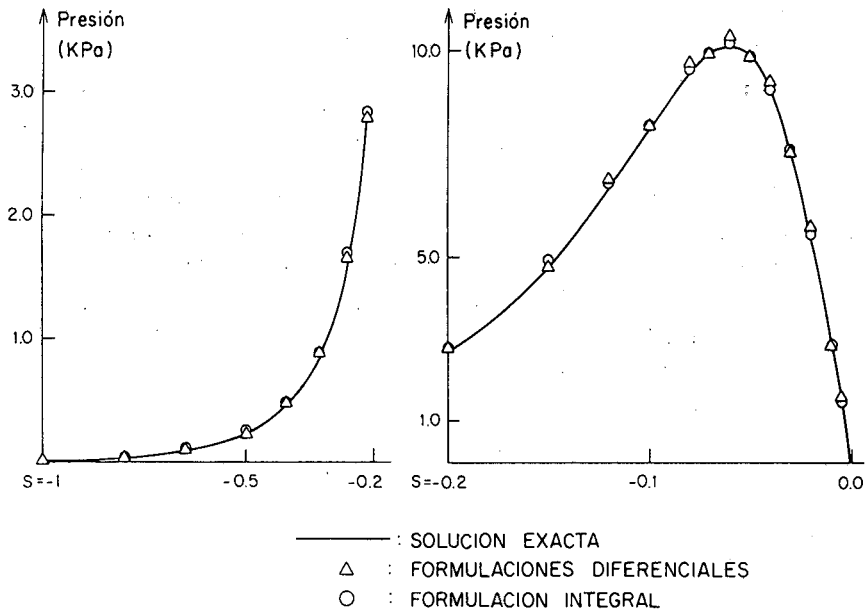


Figura 7a. Predicciones obtenidas para una distribución nodal simétrica par de 40 nodos

La Figura 7b, donde se presenta el error de las predicciones en función de los sucesivos nodos, es mucho más esclarecedora. La misma confirma que los errores porcentuales de la formulación integral son mayores que los de las formulaciones diferenciales en la zona de baja presión con gradientes de presión positivos (esto es en $s \rightarrow \pm 1$); también confirma que en la zona del pico de presión los errores de la formulación integral son considerablemente menores. Sin embargo, el hecho más significativo es que queda claramente en evidencia la naturaleza oscilante de la solución obtenida por las formulaciones diferenciales; ello se manifiesta a través de la oscilación continua del error.

Dado que ya se ha mostrado que las formulaciones diferenciales no preservan la antisimetría de la solución si el número de nodos es impar (aun si la distribución nodal es simétrica) y que en dichas condiciones la formulación diferencial B presenta algunas ventajas sobre la formulación diferencial A , comparemos dicha formulación diferencial B con la formulación integral para el caso en que la distribución simétrica par es ligeramente alterada.

Distribución nodal par no simétrica

Se utilizó una distribución par no simétrica de 40 nodos derivada de la distribución usada en la Figura 7a. Para ello se desplazó levemente la posición de la mayoría de los nodos respecto a su posición original excepto por cuatro pares de nodos que mantuvieron su posición simétrica respecto del centro del dominio. Si bien ahora la distribución es no simétrica, la misma sigue siendo razonable para resolver correctamente la curva de presión.

La Figura 8a muestra la solución analítica de la curva de presión y las predicciones

de ambas formulaciones en la región del dominio donde las presiones son positivas ($-1 \leq s \leq 0$). Resulta muy evidente el comportamiento anómalo de la formulación diferencial *B* en la que se observan violentas oscilaciones en la predicción de los valores de presión. Es significativo el hecho de que al alterar levemente la simetría de la distribución nodal se pase de una solución aceptable a otra totalmente inaceptable (comparar Figuras 7a y 8a).

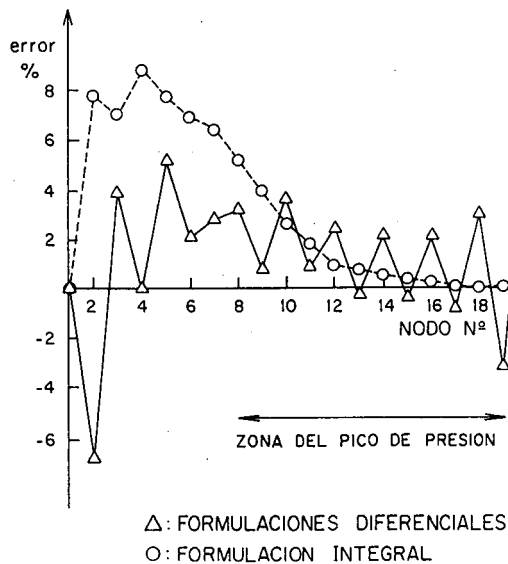


Figura 7b. Error porcentual en los nodos para las predicciones presentadas en la Figura 7a

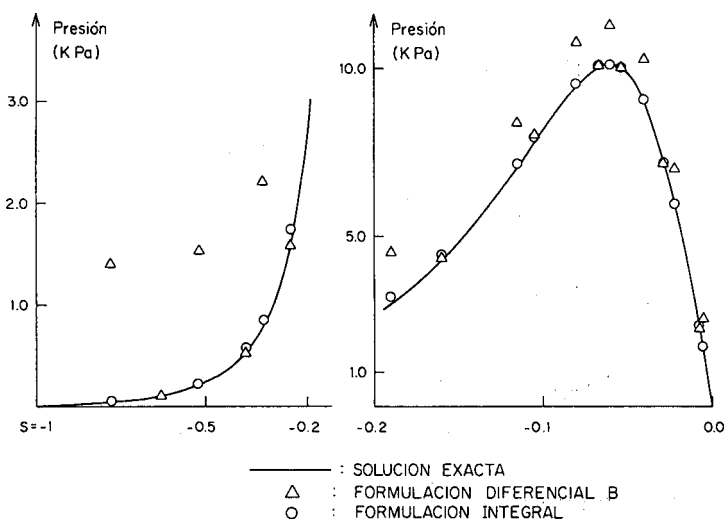


Figura 8a. Predicciones obtenidas para una distribución nodal no simétrica

Como contrapartida, los valores obtenidos a partir de la formulación integral parecen ser poco afectados por la pérdida de simetría de la distribución. De la Figura 8a puede concluirse que esta solución es aceptable, lo que se confirma al observar el comportamiento del error graficado en la Figura 8b. En esta figura nuevamente se pone de manifiesto la naturaleza oscilante de la solución diferencial a través de la oscilación del error, como asimismo errores totalmente desmesurados en los primeros nodos. Por otra parte, los errores introducidos por la formulación integral presentan un comportamiento suave con algunas oscilaciones en los extremos del dominio; si se lo compara con el comportamiento del error mostrado en la Figura 7b, se observa que cualitativamente no ha variado, excepto por la lógica pérdida de simetría. Sin embargo, los errores se siguen manteniendo relativamente bajos en la zona del pico de presión y algo elevados en los extremos del dominio donde la presión tiende a cero.

Cuantitativamente, los errores son algo mayores en este caso que los valores presentados en la Figura 7b, lo cual era de esperar al intentar resolver una curva simétrica con una distribución nodal que no lo es.

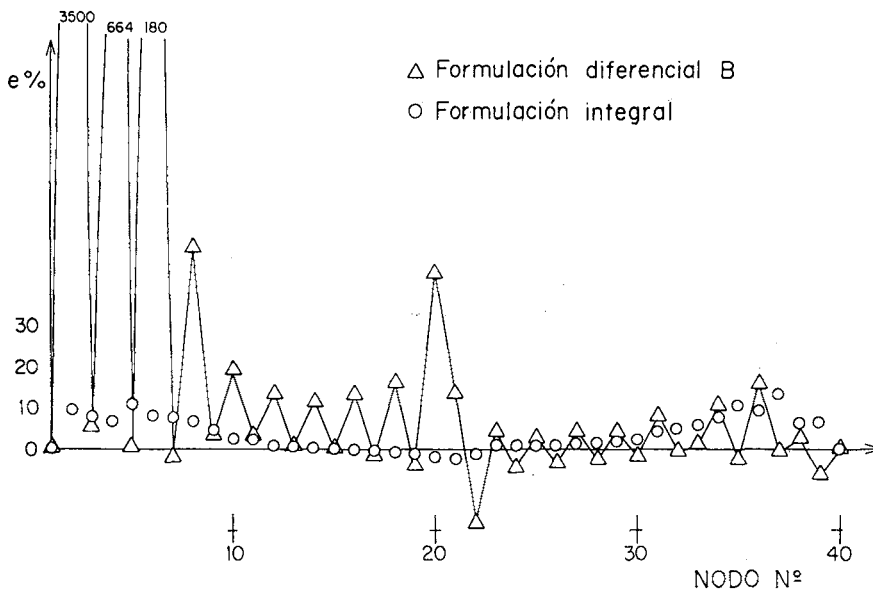


Figura 8b. Error porcentual en los nodos para las predicciones presentadas en la Figura 8a

CONCLUSIÓN

Se ha analizado el comportamiento numérico de distintas formulaciones discretas de la ecuación de Reynolds sobre un caso límite de problema elastohidrodinámico de contacto lineal, es decir, para el caso en que el contacto tiene carga nula y las presiones desarrolladas en el canal del flujo permiten considerar nulas las deformaciones sufridas

por las paredes sólidas. En tal situación la ecuación de Reynolds está sujeta a las condiciones de contorno de Sommerfeld. El problema tiene solución analítica y se puede determinar exactamente si las aproximaciones numéricas cumplen condiciones necesarias para reproducir ciertas características de la solución.

Las conclusiones del análisis previo son luego totalmente corroboradas por los resultados numéricos, los que demuestran que las aproximaciones numéricas basadas en la formulación diferencial de la ecuación de Reynolds generalmente presentan comportamientos anómalos.

Como contrapartida, la aproximación numérica basada en la formulación integral de la ecuación de Reynolds muestra un comportamiento muy superior; en todos los ejemplos presentados en este trabajo condujo a soluciones numéricas aceptables y las mismas no muestran características oscilantes.

El análisis también ha sido realizado con otras funciones de prueba tales como cuadráticas y cúbicas. Los resultados obtenidos (no mostrados en este trabajo) fueron similares a los aquí presentados para las funciones de forma lineales.

Si bien los resultados de este trabajo corresponden a un caso límite de problema elastohidrodinámico, el incremento de las cargas, produciendo deformación de las paredes sólidas y la pérdida de la antisimetría de la curva de presión, no hace que el comportamiento de las aproximaciones diferenciales mejore. La experiencia obtenida por los autores indica que sucede todo lo contrario. Los resultados obtenidos con la formulación integral en el problema de contacto lineal por Di Paolo y Saita⁷ no pueden ser reproducidos mediante la formulación diferencial debido a las fuertes oscilaciones que se producen en la presión hidrodinámica.

Un caso similar ocurre cuando se analiza el flujo debajo de una cuchilla delgada que trabaja a manera de espátula. Este sistema es de interés por ser una idealización del dispositivo que se utiliza para recubrir papeles, conocido como recubridor de hoja flexible. En este caso no existe simetría alguna, la cuchilla sufre grandes deformaciones debido a la presión hidrodinámica y a la presión mecánica ejercida sobre la hoja a fin de regular el caudal que se deposita sobre el sustrato que se mueve a velocidad considerable. Al utilizar la formulación diferencial para aproximar la ecuación de Reynolds nuevamente se encuentra que la solución es altamente dependiente de que se utilice un número par o impar de nodos, las oscilaciones son evidentes y se intensifican si el número de nodos es impar, mientras que con la formulación integral los resultados aparecen libres de oscilaciones⁹.

A pesar de que el uso de la formulación integral demanda un mayor tiempo de ejecución computacional, debido a la aparición de matrices densas en contraposición a las matrices de banda producidas por la formulación diferencial, su empleo es prácticamente ineludible para obtener soluciones aceptables.

AGRADECIMIENTOS

A la Universidad Nacional del Litoral (U.N.L.) y al Consejo de Investigaciones Científicas y Técnicas (CONICET) por su apoyo económico.

REFERENCIAS

1. D. Dowson y G.R. Higginson, "A Numerical Solution to the Elasto-hydrodynamic Problem", *J. Mech. Eng. Sc.*, Vol. 1, N° 6, (1959).
2. R.R. Stephenson y J.F. Osterle, "A Direct Solution of the Elasto-hydrodynamic Problem", *ASLE Trans*, Vol. 5, p.365, (1962).
3. S.M. Rohde y K.P. Oh, "A Unified Treatment of Thick and Thin Elasto-hydrodynamic Problems by Using Higher Order Element Methods", *Proc. R. Soc. Lon., A*, Vol. 343, p. 315, (1975).
4. R. Hall y M.D. Savage, "Two-dimensional Elasto-hydrodynamic Lubrication - Part 2: Solution of the Line Contact Problem", *Proc. Instn. Mech. Eng.*, Vol. 202, C5, p. 354, (1988).
5. T.G. Myers, R.W. Hall, M.D. Savage y P.H. Gaskell, "The Transition Region of Elasto-hydrodynamic Lubrication", *Proc. R. Soc. Lon., A*, Vol. 432, p. 467, (1991).
6. J. Di Paolo, "Resolución simultánea de las ecuaciones que gobiernan los sistemas elastohidrodinámicos - aplicación al problema de contacto lineal", *Tesis de Magister*, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, (1992).
7. J. Di Paolo y F.A. Saita, "Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal", *Rev. Int. Mét. Num. Cál. y Dis. en Ing.*, Vol. 8, p. 427, (1992).
8. D. Dowson y G.R. Higginson, "*Elasto-hydrodynamic Lubrication*", Pergamon Press, 2ª edición, London, (1977).
9. C.M. Corvalán, "Recubrimiento de materiales elastoporosos - su aplicación al papel", *Tesis doctoral*, Universidad Nacional del Litoral, Santa Fe, Argentina, (1993).