

## *II - Fractura Elastoplástica*

### MODELOS ELASTOPLASTICOS PARA LA SIMULACION NUMERICA DE PROCESOS DE FRACTURA

J. OLIVER

S. OLLER

y

E. OÑATE

*E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña.*

*Jordi Girona Salgado, 31*

*08034 Barcelona.*

#### 1. INTRODUCCION

La fractura es una forma de daño local que se observa en diversos materiales (metales, materiales cerámicos, hormigón, etc.) y que se manifiesta, al menos desde un punto de vista macroscópico, por una falta de continuidad entre partículas en los puntos donde se produce.

El punto de partida para el análisis de los procesos de fractura es la Mecánica de Medios Continuos que, como su propio nombre indica, establece como una hipótesis fundamental la continuidad del medio durante todo el proceso de deformación. En este contexto, la primera alternativa para estudiar los problemas de fractura de una forma coherente con la Mecánica de Medios Continuos, es analizar la parte del medio que es continua, incorporando las discontinuidades (fisuras, grietas, etc.) al contorno del sólido analizado. De ahí surge el grupo de métodos de análisis que utilizan las técnicas y metodología de la Mecánica de Fractura Clásica. Aún con las indudables ventajas de coherencia que tienen estos métodos, y su interés y utilidad en la resolución de muchos tipos de problemas, presentan también algunos inconvenientes relacionados sobre todo con su utilización en el ámbito de métodos numéricos como el Método de los Elementos Finitos (M.E.F.). Uno de dichos inconvenientes es la necesidad de considerar un contorno en el Medio Continuo que incluya los labios de las fisuras y que, por lo tanto, evolucione a lo largo del proceso de deformación, obligando a la utilización de sofisticadas técnicas de remallado de la estructura discretizada<sup>13,18,26</sup>.

Como una alternativa a las técnicas de Mecánica de Fractura Clásica, en los últimos años ha surgido un grupo de métodos cuyo enfoque del problema es radicalmente distinto.

Estos métodos, que podríamos agrupar bajo el nombre genérico de técnicas de fractura "distribuida" <sup>3,4,6,9,11,15,16,22</sup>, incluyen la fisura en el medio continuo, y consideran campos de desplazamientos continuos para modelarla. La contradicción entre modelar una discontinuidad y hacerlo mediante desplazamientos continuos queda resuelta en el contexto del uso de "métodos de discretización" y, en particular, del Método de los Elementos Finitos.

Como es sabido, el M.E.F. proporciona soluciones aproximadas de las ecuaciones del problema tenso-deformacional, de tal forma que el refinamiento de la malla conduce, bajo ciertas condiciones, a la convergencia de los resultados hacia el valor correcto <sup>2,11,19</sup>. En estas circunstancias, es posible modelar por el M.E.F. un campo de desplazamientos continuo tal que la solución obtenida tienda, con el refinamiento de la malla, hacia una solución, inalcanzable pero aproximable, con desplazamientos discontinuos. Para tal fin, es necesario introducir los mecanismos adecuados tanto en las ecuaciones del problema tenso-deformacional, principalmente las ecuaciones constitutivas, como en las técnicas numéricas de resolución. En general el modelo resultante debe reunir las siguientes características:

- 1) Conducir a lo que se denomina "localización de deformaciones". En un cierto instante del proceso de deformación debe producirse una concentración de las deformaciones en una línea (en el caso bidimensional) o superficie (en el caso tridimensional) que representa a la fisura. En el dominio discretizado, ésto supone la concentración de deformaciones en una "banda singular" de elementos, siguiendo aproximadamente la disposición geométrica de la superficie o línea de fractura que se pretende modelizar. El "salto" de los desplazamientos a un lado y otro de la banda tiende entonces, con el refinamiento de la malla, hacia la discontinuidad deseada (ver Figura 1).
- 2) Producir la adecuada "disipación de energía". Es bien sabido que los procesos de fractura son disipativos, existiendo en ellos un trabajo o energía irrecuperable <sup>2</sup>. En general se acepta la existencia de una propiedad del material, conocida como "Energía de Fractura", que consiste en la energía disipada en la producción de una fisura por unidad de superficie de la misma. La formación de la banda singular comentada más arriba, conduce, si no se toman precauciones especiales, a una disipación de la Energía de Fractura que depende del tamaño de los elementos finitos situados en la banda. Esta circunstancia se conoce en la literatura como falta de "objetividad" <sup>2,3,11,19,21,23</sup> y se manifiesta tanto por una variación de los resultados, con el refinamiento de la malla, mucho mayor que la esperada por meros errores de discretización, como por una falta de convergencia de los mismos.
- 3) Modelar de forma correcta el comportamiento de todo el sólido. Además del comportamiento disipativo "local" en la zona de fractura, pueden producirse otros fenómenos disipativos "no locales", que afectan a cómo y dónde se produce la fisuración y que, por consiguiente, deben ser tenidos en cuenta en el modelo. En otras palabras, no es suficiente con modelar con precisión el fenómeno de la fractura, generalmente asociado a la existencia de estados tensionales de tracción en ciertos puntos, sino que hay que aproximar correctamente el comportamiento de todo el sólido para que el estado

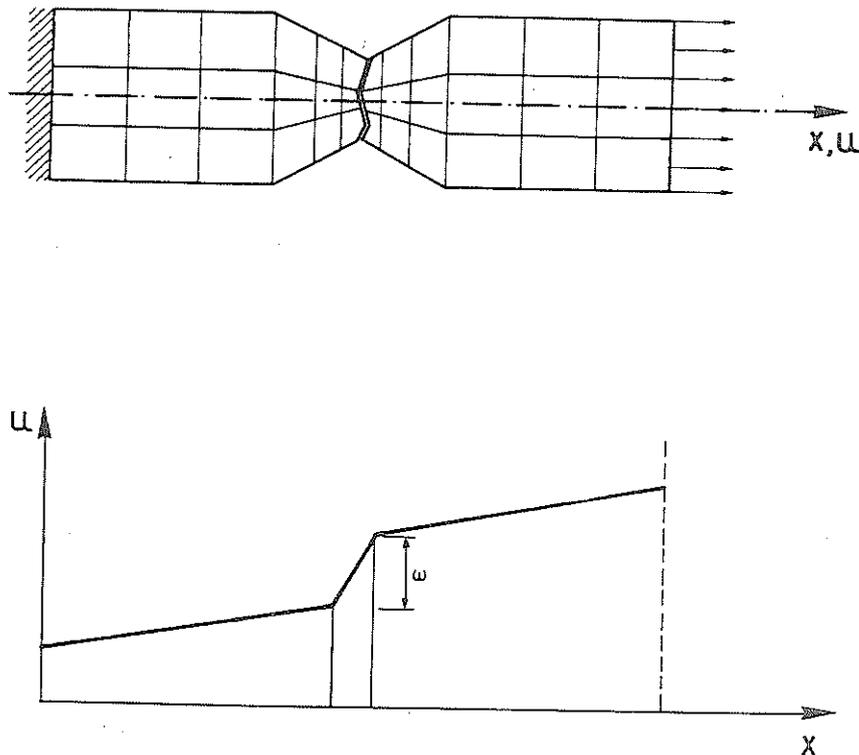


Figura 1. Modelización de una discontinuidad mediante un campo de desplazamientos continuos

tensional obtenido en los puntos de fractura sea el correcto. En estructuras de pequeñas dimensiones esta consideración resulta particularmente importante <sup>2</sup>.

A la vista de lo comentado, la Teoría de la Plasticidad se manifiesta cómo una herramienta adecuada para modelar los fenómenos de fractura. Por una parte, se halla sólidamente cimentada desde el punto de vista matemático constituyendo una formulación bien desarrollada y coherente en el ámbito de las ecuaciones constitutivas. Por otra parte, contiene los elementos necesarios para simular los procesos disipativos y de localización que se han comentado. Esta es, posiblemente, la causa del creciente interés en el desarrollo y utilización de modelos constitutivos elasto-plásticos para la simulación de procesos de fractura y de la aparición, en los últimos años, de un buen número de modelos de este tipo <sup>5,7,8,10,12,14,15,24,25</sup>.

En este artículo se van a estudiar los elementos fundamentales de un modelo elastoplástico de fractura. En una primera parte se analizan los conceptos de localización, ablandamiento por deformación y objetividad como requisitos de un modelo distribuido de fisuración. Posteriormente se presenta la Teoría Matemática de la Plasticidad como herramienta para introducir estos fenómenos en un modelo numérico; finalmente, se describe un modelo elastoplástico para la simulación de la fractura en materiales friccionales así como algunos ejemplos de aplicación.

## 2. ENDURECIMIENTO Y ABLANDAMIENTO POR DEFORMACION.

Consideremos un proceso cuasiestático de deformación en un sólido, que se produce a lo largo del tiempo  $t$ . Sean  $\sigma_{ij}(t)$  y  $\epsilon_{ij}(t)$  los tensores de tensiones y de deformaciones en un punto del sólido. Se dice que en un cierto instante se produce endurecimiento o ablandamiento en dicho punto si:

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} \geq 0 \quad (\text{Endurecimiento}) \quad (1)$$

$$\dot{\sigma}_{ij} \dot{\epsilon}_{ij} < 0 \quad (\text{Ablandamiento}) \quad (2)$$

donde el punto superior indica derivación respecto al tiempo y se considera el criterio de suma para índices repetidos.

En un proceso de deformación uniaxial las ecs. (1) y (2) indican una pendiente positiva o negativa, respectivamente, de la curva tensión-deformación (ver Figura 2). El signo = en dichas ecuaciones corresponde al caso de endurecimiento o ablandamiento nulo. En general, los materiales presentan durante su deformación un comportamiento inicial con endurecimiento positivo, una transición con endurecimiento nulo y una zona final de ablandamiento. En materiales frágiles (hormigones, materiales cerámicos, rocas, etc.) el ablandamiento se produce para pequeños valores de la deformación mientras que en materiales dúctiles, como ciertos metales, se produce para niveles grandes de la deformación (ver Figura 2).

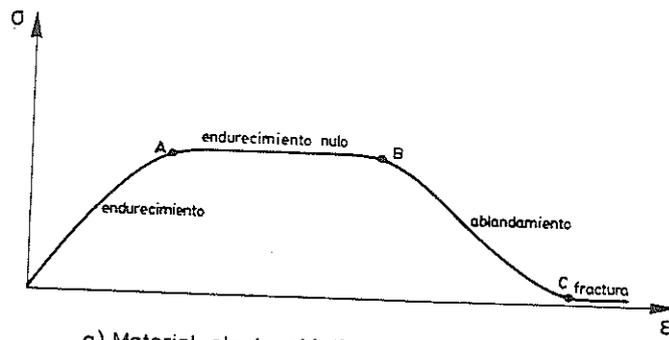
En cualquier caso, para realizar un análisis de fractura, hay que estudiar todo el proceso de deformación puesto que es en la parte final de la rama de ablandamiento donde se produce la fractura, con la consiguiente relajación de las tensiones y crecimiento de las deformaciones. La diferencia fundamental entre los modelos para materiales frágiles y dúctiles es que, en este último caso, al producirse la fractura a grandes niveles de deformación hay que introducir la teoría de la deformación finita en las ecuaciones del problema.

Como se verá en el apartado 5, *la Teoría de la Plasticidad permite introducir el ablandamiento en las ecuaciones constitutivas y proporciona, por consiguiente, uno de los mecanismos necesarios para simular de forma correcta el proceso de fractura.*

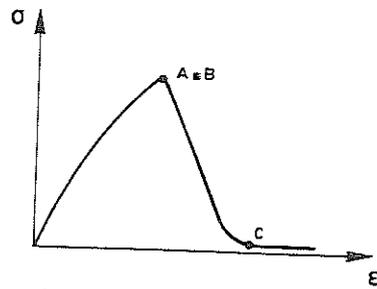
## 3. LOCALIZACION

Se denomina "línea o superficie singular" a una línea en el sólido (en el caso de un análisis bidimensional) o superficie (en el caso tridimensional) a través de la cual los desplazamientos son continuos mientras que los gradientes de dichos desplazamientos son discontinuos (ver Figura 3). Por razones de simplicidad, en lo sucesivo consideraremos el caso bidimensional, siendo inmediata la generalización a tres dimensiones.

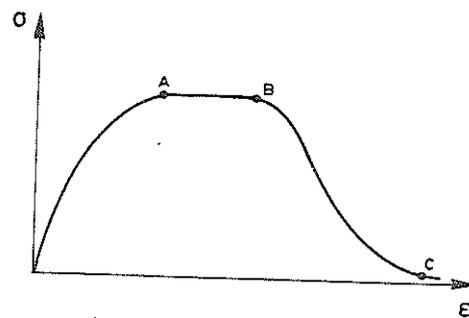
La pertenencia de un determinado punto del medio continuo a una línea singular (de normal  $n$  en dicho punto) viene determinada por lo que se denomina "condición de localización" cuya expresión matemática es <sup>2,28</sup>:



a) Material elasto-plástico genérico



b) Material frágil



c) Material dúctil

Figura 2. Diagramas esquemáticos tensión - deformación

$$\det[\mathbf{Q}(\mathbf{n})] = \det(\mathbf{n} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{n}) = 0 \quad (3)$$

donde  $\mathbf{Q}(\mathbf{n})$  es un tensor de segundo orden, denominado *tensor acústico*<sup>2,28</sup>, y  $\mathbf{C}$  el tensor constitutivo tangente de cuarto orden que interviene en la ecuación constitutiva incremental:

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl} \dot{\epsilon}_{kl} \quad (4)$$

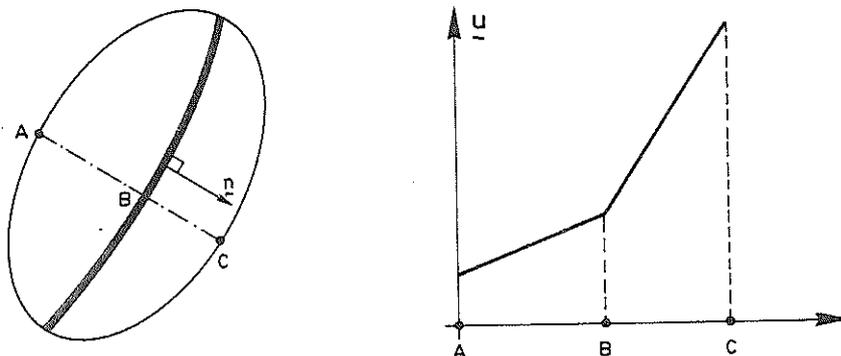


Figura 3. Línea singular

Denominaremos "banda singular" a una banda de espesor infinitesimal delimitada por dos líneas singulares  $\Gamma^-$  y  $\Gamma^+$  (ver Figura 4a).

La consideración de una banda singular para modelar una fisura permite definir el vector de desplazamientos relativos de los labios de la misma,  $\omega$ , como el límite de la diferencia de los desplazamientos  $u^+$  y  $u^-$ , en las líneas singulares  $\Gamma^+$  y  $\Gamma^-$ , cuando el espesor  $h$  de la banda tiende a cero (ver Figura 4b):

$$\omega = \lim_{h \rightarrow 0} (u^+ - u^-) \quad (5)$$

El desarrollo de líneas singulares en el sólido y el cumplimiento de la condición de localización (3) se realiza a través de procesos de bifurcación de la solución de las ecuaciones del problema tenso-deformacional<sup>17,20,28</sup>. En este sentido la elección de la adecuada ecuación constitutiva para el material juega un papel importante. Hay ciertas ecuaciones constitutivas que definen "materiales positivos"<sup>27</sup> que no permiten bifurcaciones a la solución del problema y que, por consiguiente, no producen localización en el sentido en que se ha definido más arriba. La *Teoría de la Plasticidad con ablandamiento*, por el contrario, define materiales "no positivos" y, por lo tanto, permite utilizar la técnica de bandas singulares para simular una fisura.

#### 4. OBJETIVIDAD

La modelización de una banda singular en el sólido discretizado puede hacerse a través de los contornos de una banda de elementos finitos (ver Figura 4c) en el interior de los cuales se cumple la condición de localización (3). El hecho de que esta banda sea de espesor finito produce los problemas de falta de objetividad comentados anteriormente. Para establecer el problema, consideraremos el análisis bidimensional de un sólido de espesor unidad y una banda de elementos finitos (ver Figura 4c) modelando una fisura entre los puntos A y B.

Consideremos el proceso de deformación que conduce a la fractura, y la trayectoria tensión-deformación que se produce en un punto (ver Figura 4d). Sea  $g_f$  la energía específica (por unidad de área) disipada durante todo el proceso de deformación:

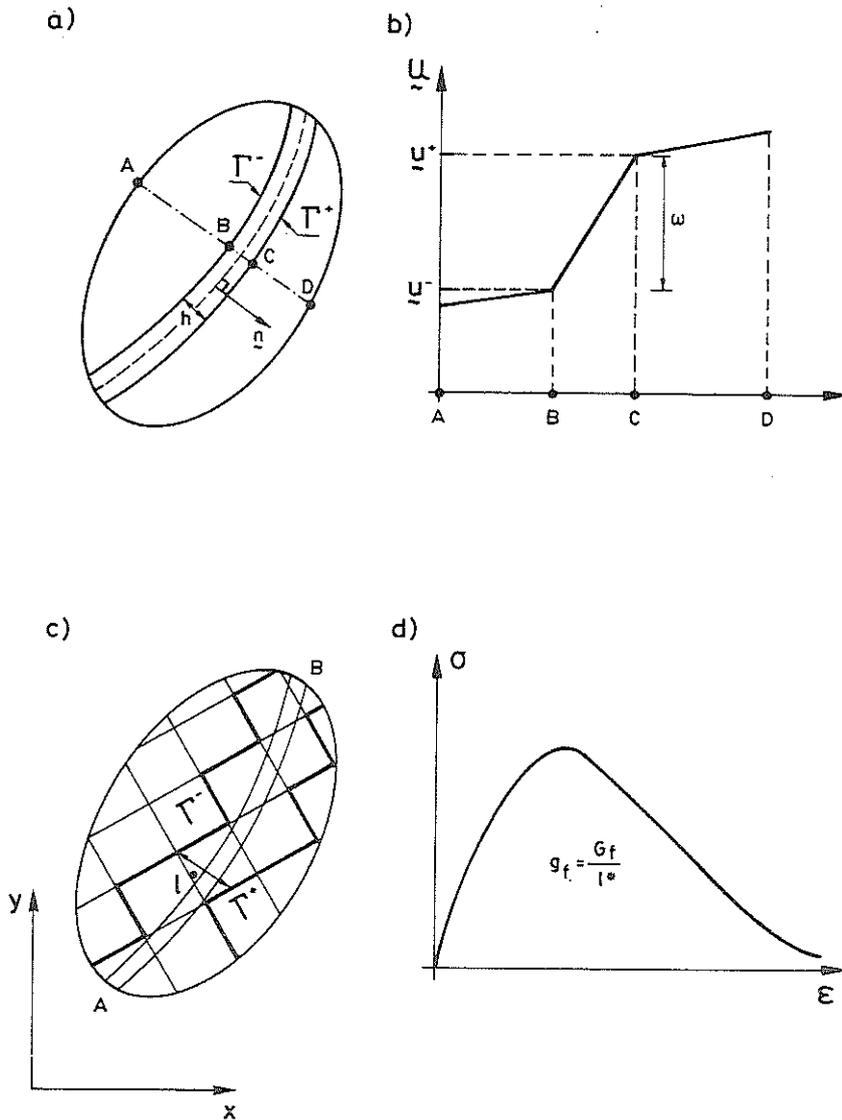


Figura 4. a) Banda singular,  
 b) Variación de los desplazamientos en la banda singular,  
 c) Banda singular en el sólido discretizado,  
 d) Trayectoria tensión - deformación de un punto de la banda singular

$$g_f = \int_0^{\infty} \sigma_{ij}(t) \dot{\epsilon}_{ij}(t) dt \quad (6)$$

De acuerdo con esta definición, la energía disipada en toda la banda de elementos finitos (de área  $\Omega$ ) que modela la fisura, será:

$$W = \int_{\Omega} g_f d\Omega \quad (7)$$

Por otra parte, si admitimos que la Energía de Fractura  $G_f$  (energía disipada por unidad de longitud de fisura) es una propiedad del material, constante en todos los puntos <sup>2,3,23</sup>, la energía disipada al producirse el tramo de fisura entre los puntos  $A$  y  $B$  será:

$$\Omega = G_f \cdot l_{AB} \quad (8)$$

donde  $l_{AB}$  es la longitud del tramo considerado. Igualando la disipación de energía dada por las ecuaciones (7) y (8) se obtiene:

$$\int_{\Omega} g_f d\Omega = G_f \cdot l_{AB} \quad (9)$$

Si la energía específica  $g_f$  fuese una constante, el refinamiento de la malla conduciría a la reducción del dominio  $\Omega$  de la banda singular, y por tanto a la reducción de la integral del lado izquierdo de la ecuación (8), mientras que el lado derecho permanecería inalterable. Para evitar esta contradicción la energía específica debe depender del tamaño de la discretización. La forma usual de tener en cuenta esta situación es a través de lo que se denomina "longitud característica"  $l^*$ , que relaciona las energías específica  $g_f$  y de Fractura  $G_f$  de la forma:

$$g_f(x, y) = \frac{G_f}{l^*(x, y)} \quad (10)$$

Existen diversas propuestas para la longitud característica <sup>3,6,11,15,19,23</sup>, que debe ser, de alguna manera, una medida del ancho de la banda singular de elementos finitos en cada punto de la misma.

La introducción de una adecuada expresión de la longitud característica en la ecuación (10) conduce a una correcta disipación de energía en la banda y a la obtención de objetividad en los resultados.

## 5. FUNDAMENTOS DE LA TEORIA DE LA PLASTICIDAD

La teoría de la Plasticidad está constituida por el conjunto de hipótesis y de ecuaciones que gobiernan el comportamiento tenso-deformacional de un material "ideal", el material "elastoplástico", que, a su vez, es una aproximación más o menos cercana al comportamiento de un amplio grupo de materiales utilizados en ingeniería. El núcleo de la teoría de la Plasticidad, para pequeñas deformaciones, se establece alrededor de los siguientes conceptos:

- Superficie de fluencia
- Ecuaciones de evolución de las variables internas
- Descomposición aditiva de la deformación
- Regla de flujo plástico
- Irreversibilidad del trabajo plástico

A continuación se describen brevemente , y de forma genérica, cada uno de estos conceptos que se particularizarán en el Apartado 6 en su aplicación a un modelo elastoplástico para materiales frccionales frágiles.

**5.1. Superficie de fluencia**

Se define una superficie de fluencia, en el espacio de tensiones, que evoluciona a lo largo del proceso de deformación a medida que lo hacen una serie de variables  $q(t)$  denominadas "variables internas" (ver Figura 5a).

$$f(\sigma, q) = 0 \tag{11}$$

donde  $\sigma(t)$  y  $q(t)$  son los vectores que agrupan las componentes de tensión y las diversas variables internas, respectivamente.

Se dice que el estado tensional  $\sigma(t)$ , en un instante dado, es "elástico" si define, en el espacio de tensiones, un punto situado en el interior de la superficie de fluencia, es decir:

$$f(\sigma(t), q(t)) < 0 \tag{12}$$

La evolución del estado tensional puede situar el punto representativo del estado tensional sobre la superficie de fluencia. Se dice entonces que el estado tensional es "plástico", cumpliéndose:

$$f(\sigma(t), q(t)) = 0 \tag{13}$$

No se permite que durante el proceso de deformación se produzcan estados tensionales situados fuera de la superficie de fluencia. A partir de un estado tensional plástico en el que se cumple la ecuación (13) cualquier proceso que tienda a situarlo fuera de la superficie de fluencia va acompañado de una variación o movimiento de dicha superficie (ver Figura 5b), regulado por la evolución de las variables internas  $q$ , que lo mantiene sobre la misma.

En consecuencia, podemos definir los "procesos de deformación elásticos" como aquellos que producen estados tensionales situados en el interior de la superficie de fluencia (y que por lo tanto no la modifican, ver Figura 6a). Un "proceso de deformación plástico", por el contrario, es aquel que partiendo de un estado tensional plástico (situado sobre la superficie de fluencia), tiende a salirse de la misma obligando a su modificación (ver Figura 6b). En consecuencia durante un proceso de deformación plástico se cumple

$$f(\sigma, q) = 0 ; \quad f(\sigma + d\sigma, q + dq) = 0 \tag{14}$$

es decir:

$$f(\sigma, q) = 0 ; \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot \dot{\sigma} + \frac{\partial f}{\partial q} \cdot \dot{q} = 0 \tag{15}$$

La ecuación (15) es la denominada "ecuación de consistencia" que define matemáticamente un proceso de deformación plástico.

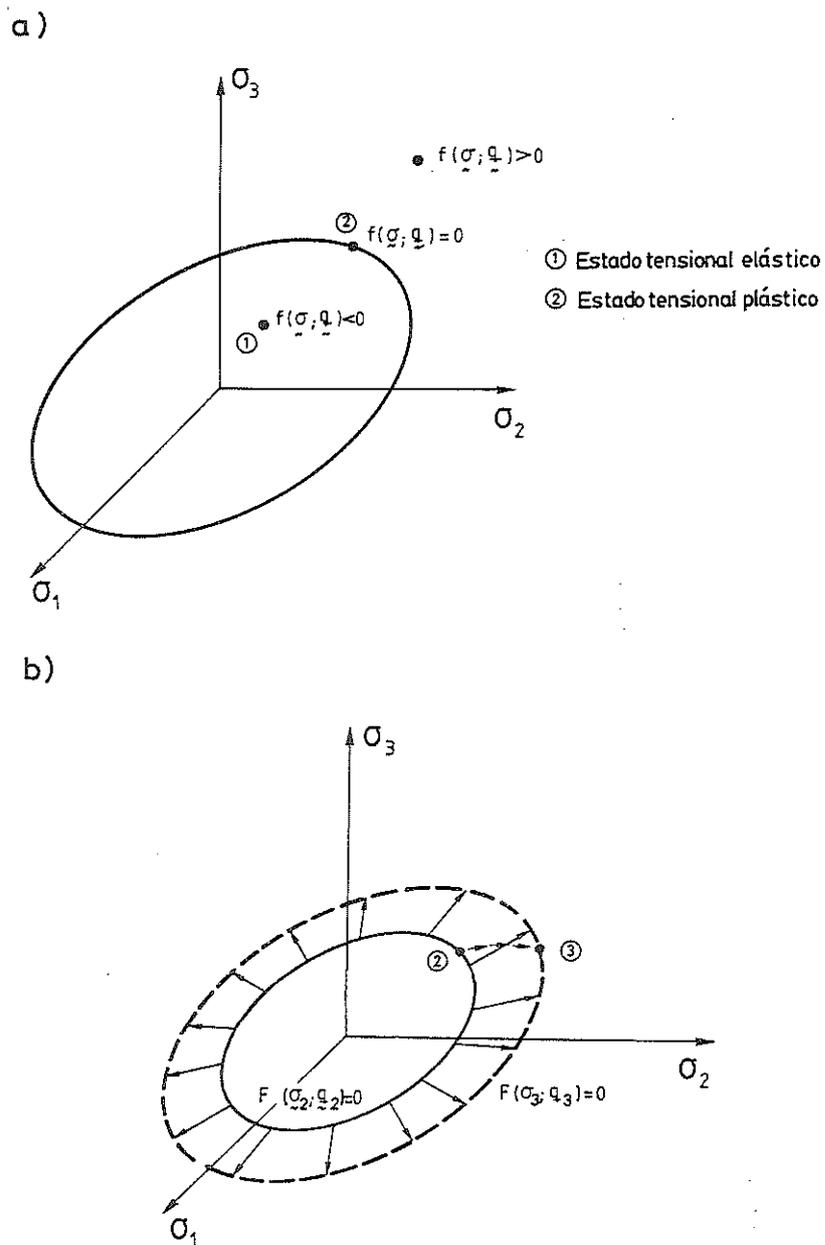


Figura 5. a) Superficie de fluencia,  
b) Movimiento isotrópico de la superficie de fluencia

En el caso más general, el proceso de deformación seguido en un punto del sólido será un proceso "elastoplástico" en el cual se sucederán a lo largo del tiempo procesos elásticos y procesos plásticos (ver Figura 6c).

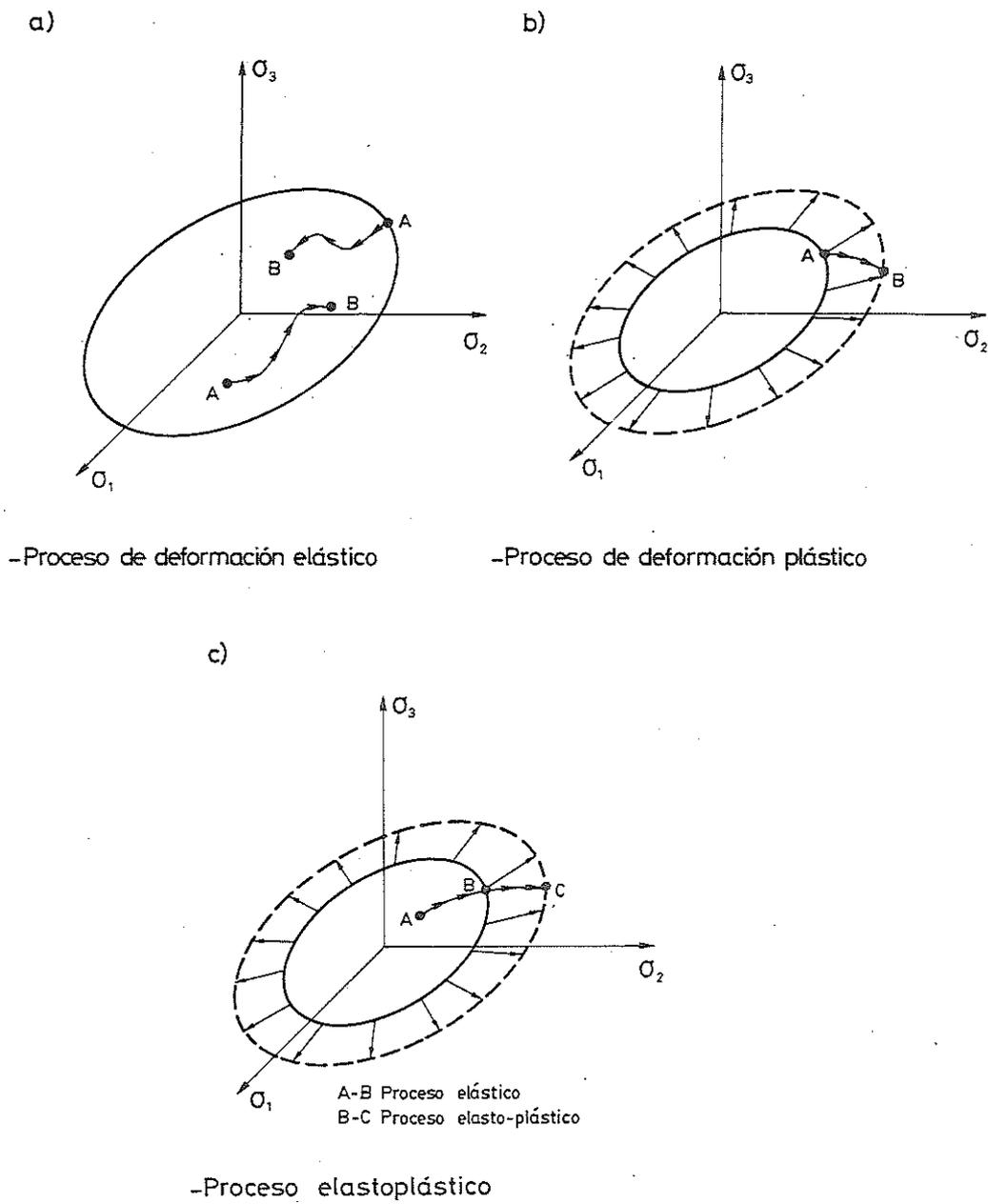


Figura 6. Superficie de fluencia y su evolución

### 5.2. Ecuaciones de evolución

Las variables internas varían o "evolucionan" a lo largo del proceso de deformación. Las ecuaciones de evolución proporcionan información sobre la velocidad de esta variación en función del estado tensional y del propio valor de las variables internas:

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = \mathbf{h}(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) \quad (16)$$

Consideremos un punto del sólido y un instante  $t$ , en el que los valores de las variables internas y de las tensiones son tales que el estado tensional  $\boldsymbol{\sigma}$  es plástico ( $f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0$ ). Se dice que el proceso de deformación presenta "endurecimiento" o "ablandamiento" en dicho instante si una variación infinitesimal de las variables internas  $\mathbf{q}$  (manteniendo constantes las tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$ ) tiende a dejar el estado tensional dentro de la superficie de fluencia (endurecimiento) o fuera de la misma (ablandamiento), respectivamente; es decir (ver Figura 7):

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) < 0 \rightarrow \text{endurecimiento} \quad (17.a)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) > 0 \rightarrow \text{ablandamiento} \quad (17.b)$$

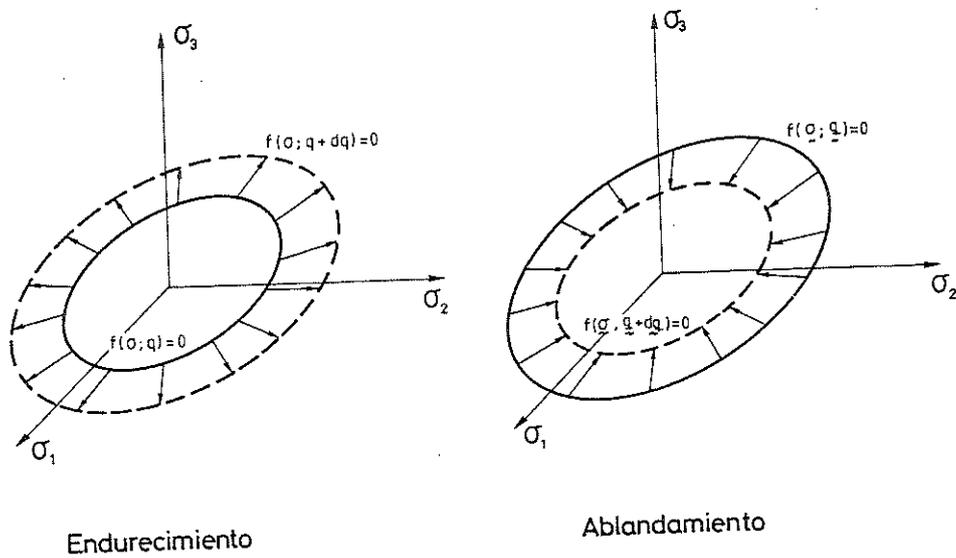


Figura 7. Movilidad de la superficie de fluencia

Teniendo en cuenta la ec. (16):

$$f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q} + d\mathbf{q}) - f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{q}} dt = \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} dt \quad (18)$$

Definiendo la "función de endurecimiento" como:

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = - \frac{\partial f}{\partial \mathbf{q}} \cdot \mathbf{h} \quad \text{con} \quad f(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) = 0 \quad (19)$$

el endurecimiento y ablandamiento para un estado tensional plástico queda definido por:

$$H(\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{q}) > 0 \rightarrow \text{endurecimiento} \quad (20)$$

$$H(\sigma, \mathbf{q}) < 0 \rightarrow \text{ablandamiento} \quad (21)$$

El endurecimiento hace evolucionar la superficie de fluencia durante el proceso plástico hacia el "exterior". Por el contrario, el ablandamiento produce una evolución de la misma hacia el "interior". En el caso intermedio (endurecimiento o ablandamiento nulo), la función de endurecimiento (19) es nula y se mantiene inalterable la superficie de fluencia. Estas definiciones del endurecimiento y el ablandamiento son consistentes con las dadas en las ecs. (1) y (2).

Como puede observarse de las ecuaciones (19) a (21), elegida una superficie de fluencia (determinada por la forma matemática de la ecuación (13)), la existencia de endurecimiento o ablandamiento en un cierto instante depende de la adecuada elección de las ecuaciones de evolución (16).

### 5.3. Descomposición aditiva de la deformación

Se establece que la deformación  $\epsilon$  puede descomponerse de la forma:

$$\epsilon = \epsilon^e + \epsilon^p \quad (22)$$

o, en forma incremental:

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e + \dot{\epsilon}^p \quad (23)$$

donde  $\epsilon^e$  es el vector de deformación elástica y  $\epsilon^p$  el vector de deformación plástica.

Los componentes del vector de deformación plástica  $\epsilon^p$  se consideran incluidas dentro del conjunto  $\mathbf{q}$  de variables internas y, por lo tanto, es necesario considerar ecuaciones de evolución del tipo (16) para las mismas. En este caso, sin embargo, estas ecuaciones son de un tipo particular y vienen determinadas por la regla de flujo del apartado 5.4.

La deformación plástica es nula en el estado indeformado ( $t = 0$ ) y no varía durante los procesos de deformación elásticos, es decir:

$$\dot{\epsilon}^p = 0 \quad \text{para} \quad f < 0 \quad (24)$$

y de acuerdo con la ec. (22):

$$\dot{\epsilon} = \dot{\epsilon}^e \quad \text{para} \quad f < 0 \quad (25)$$

En consecuencia en procesos de deformación elásticos sólo se producen deformaciones elásticas y la ecuación constitutiva incremental es la propia de un material elástico:

$$\dot{\sigma} = D^e \cdot \dot{\epsilon}^e = D^e \cdot \dot{\epsilon} \quad (26)$$

donde  $D^e$  es el tensor constitutivo tangente elástico de segundo orden, tal como se formula en la teoría de la elasticidad lineal o no lineal<sup>29</sup>. Por el contrario, en los procesos de deformación plásticos definidos por la ecuación (15), hay producción de deformación elástica y plástica. La obtención de la ecuación constitutiva equivalente a la (26) en los casos elastoplásticos es

un objetivo fundamental de la Teoría de la Plasticidad que será abordado en el apartado 5.5.

#### 5.4. Regla de flujo plástico

La regla de flujo proporciona las ecuaciones de evolución de las componentes del vector de deformación plástica. A pesar de que estas componentes constituyen una parte del conjunto total de variables internas, sus ecuaciones de evolución merecen un tratamiento diferenciado puesto que la Teoría de la Plasticidad postula en todos los casos una misma expresión formal para ellas. Se establece una función, denominada "función potencial"  $g(\sigma, q)$ , a partir de la cual se determina la velocidad de crecimiento de las deformaciones plásticas, o ecuaciones de evolución de las mismas como:

$$\dot{\epsilon}^p = \dot{\lambda} \frac{\partial g}{\partial \sigma}(\sigma, q) \quad (27)$$

$$\dot{\lambda}(\sigma, q) > 0 \quad (28)$$

Las ecuaciones (27) y (28) ponen de manifiesto que  $\dot{\epsilon}^p$  tiene la dirección de la normal "hacia afuera" a la superficie potencial que pasa por el punto correspondiente en el espacio de tensiones (ver Figura 8) y de ahí que a la ecuación (27) se la denomine "criterio de normalidad".

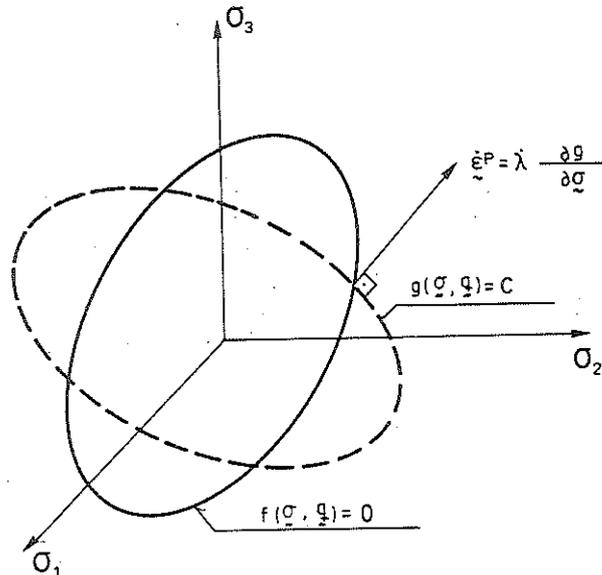


Figura 8. Superficie de fluencia y superficie de potencial plástico

Cuando las funciones de fluencia,  $f$ , y potencial,  $g$ , coinciden ( $f \equiv g$ ) se habla de plasticidad "asociada". El caso general  $f \neq g$  corresponde a plasticidad "no asociada" y permite simular ciertos fenómenos como la dilatancia, observados en los geomateriales <sup>29</sup>.

**5.5. Ecuación constitutiva en régimen de deformación plástico.**

La ec. (26) es la ecuación constitutiva en régimen de deformación elástico. En régimen de deformación plástico la deformación se produce manteniéndose el estado tensional dentro de la superficie de fluencia, es decir, cumpliéndose la ecuación de consistencia (15). Dicha ecuación, junto con las ecuaciones (22), (26) y (27) permite obtener la ecuación constitutiva en régimen plástico como <sup>15,29</sup>:

$$\dot{\sigma} = D^{ep} \cdot \dot{\epsilon} \quad \text{para} \quad f(\sigma, q) = 0 \tag{29}$$

donde  $D^{ep}$  es el tensor constitutivo "elastoplástico" tangente de segundo orden definido por:

$$D^{ep} = D^e - \frac{\left( D^e \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma} \right) \otimes \left( D^e \cdot \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)}{A + \frac{\partial f}{\partial \sigma} \cdot D^e \cdot \frac{\partial g}{\partial \sigma}} \tag{30}$$

El parámetro  $A$  de la ecuación (27) se obtiene de la expresión:

$$A(\sigma, q) = \frac{1}{\lambda(\sigma, q)} \cdot H(\sigma, q) \tag{31}$$

con lo que, teniendo en cuenta la ecuación (28), tiene el mismo signo que la función de endurecimiento  $H$  por lo que se utiliza frecuentemente como una alternativa para definir el endurecimiento o ablandamiento:

$$A(\sigma, q) > 0 \rightarrow \text{endurecimiento} \tag{32}$$

$$A(\sigma, q) < 0 \rightarrow \text{ablandamiento} \tag{33}$$

Obsérvese que las ecuaciones (26) y (30) proporcionan una ecuación constitutiva tangente en los regímenes elástico y plástico. La correspondiente rigidez tangente  $D^{ep}$ , queda perfectamente definida conocida la rigidez tangente elástica  $D^e$ , las funciones de fluencia  $f$  y potencial  $g$ , y el parámetro  $A$  de la ecuación (31). La ecuación constitutiva permite, a través de procesos "standard" de integración en el tiempo, resolver el problema tenso-deformacional para el material elastoplástico "ideal" definido en la Teoría de la Plasticidad.

### 5.6. Irreversibilidad del trabajo plástico

Se postula que el trabajo plástico disipado durante el proceso de deformación es siempre positivo:

$$W_p = \sigma \cdot \epsilon^p \geq 0 \quad (34)$$

Consecuencia de la ecuación (34) es la irreversibilidad, desde el punto de vista termodinámico, de los procesos de deformación plásticos así como la irrecuperabilidad de las deformaciones plásticas <sup>29</sup>.

## 6. PARTICULARIZACIÓN A UN MODELO PARA MATERIALES FRAGILES COHESIVOS

Como ejemplo de la utilización de la Teoría de la Plasticidad para la simulación de procesos de fractura se presenta a continuación un modelo desarrollado en <sup>15</sup> para geomateriales de tipo frágil (hormigón, rocas, etc.).

El modelo presta atención no sólo al comportamiento a tracción sino que también, debido a la interacción entre el comportamiento en los diversos puntos del sólido, intenta modelar de forma correcta el comportamiento a compresión del material. En los siguientes apartados se presentan las características fundamentales de dicho modelo intentando encuadrarlo dentro del esquema y nomenclatura utilizada en la descripción de la Teoría de la Plasticidad del apartado 5.

### 6.1. Variables internas

El vector de variables internas tiene las siguientes componentes:

$$q = \begin{Bmatrix} C \\ \kappa^p \\ \epsilon^p \end{Bmatrix} \quad (35)$$

donde  $C$  tiene el significado de "cohesión" y  $\kappa^p$  es una variable de "daño plástico" que intenta cuantificar el daño sufrido en cada punto asignándole un valor entre 0 y 1. El valor 0 indica que no hay daño y el valor 1 indica fractura total.

### 6.2. Superficies de fluencia y potencial plástico.

Previamente a la descripción de dichas superficies, hay que introducir diversos parámetros, típicos del comportamiento de materiales friccionales, como son la cohesión  $C$ , el ángulo de rozamiento interno  $\phi$ , y la dilatación  $\psi$ .

La cohesión es una medida de la capacidad de resistencia de las partículas a su separación. Al ser una variable interna no viene descrita en forma explícita, sino mediante

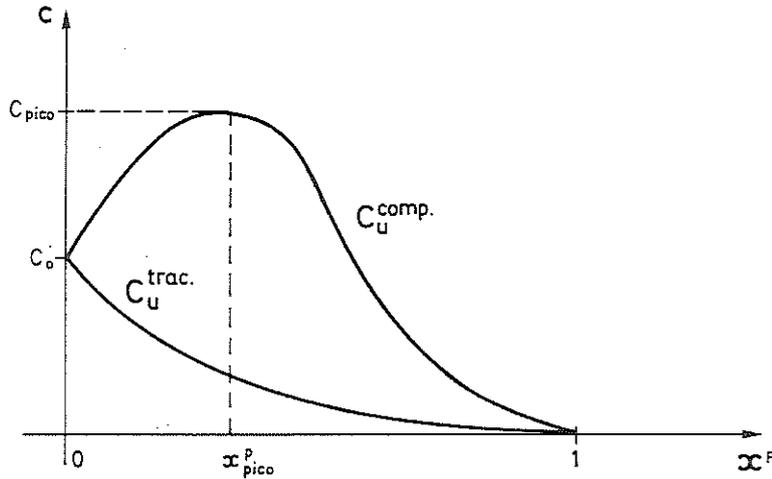


Figura 9. Curvas de cohesión para procesos de compresión y tracción uniaxial

una ecuación de evolución del tipo (16). Dicha ecuación se presentará en el apartado 6.3 pero previamente se necesita definir dos curvas empíricas que coinciden con la evolución de la cohesión (o tensión uniaxial) que se observaría en un ensayo uniaxial a tracción,  $C_u^t$ , y a compresión,  $C_u^c$ . La forma de estas curvas en función del parámetro de daño  $\kappa^p$  viene dada en la Figura 9 y los valores necesarios para acotarlas se determinan a partir de resultados experimentales.

El ángulo de rozamiento interno, como su nombre indica, es una medida de la resistencia al deslizamiento tangencial entre partículas. Es posible describirlo a través de una ecuación de evolución aunque, para materiales friccionales como el hormigón, la experimentación demuestra que se puede trabajar con una fórmula explícita en función del parámetro de daño  $\kappa^p$ . En la Figura 10 se presenta una posible curva de variación del ángulo de rozamiento interno  $\phi$  con el parámetro de daño. Esta variación es creciente hasta un cierto valor  $\kappa_i^p$  donde se estabiliza. También en este caso los valores de  $\kappa_i^p$  y  $\phi_{max}$  deben determinarse a partir del ajuste con resultados experimentales.

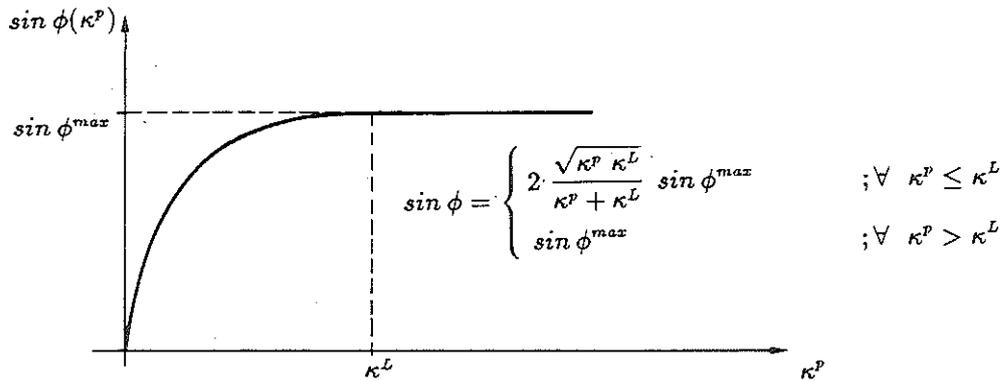


Figura 10. Curva Angulo de rozamiento interno - Variable de daño plástico

Finalmente, la dilatación es el fenómeno de cambio de volumen en el sólido durante un proceso inelástico en el que predominan las deformaciones de corte. En cierta forma, puede atribuirse al crecimiento de la microfisuración y su magnitud se evalúa a través del ángulo de dilatación  $\psi$ . También en este caso su evolución podría darse mediante una ecuación de evolución y  $\psi$  sería entonces una variable interna. Sin embargo, resulta suficientemente aproximado, vistos los resultados experimentales, describir la dilatación a través de su relación con el ángulo de fricción  $\phi(\kappa^p)$  que se presenta en la Figura 11. La correspondiente curva consta de dos tramos. Hasta un cierto valor  $\phi_{cv}$  (que se determina experimentalmente) se considera dilatación nula; a partir de dicho valor, hasta el valor máximo  $\phi_{max}$ , se considera la relación trascendente que se da en la Figura 11. El parámetro  $\phi_{cv}$  adquiere, en consecuencia, el significado de ángulo de rozamiento máximo a volumen constante (sin dilatación).

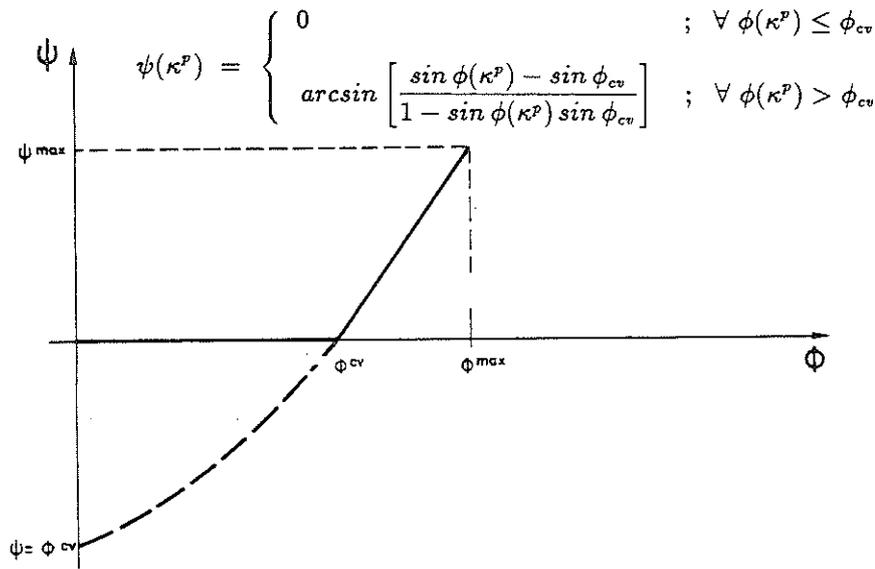


Figura 11. Curva Angulo de dilatación - Angulo de rozamiento interno

Las curvas de las Figuras 9, 10 y 11 deben determinarse a partir de datos experimentales. A partir de ellas es posible establecer la superficie de fluencia, la función potencial y las ecuaciones de evolución en forma coherente con la Teoría de la Plasticidad. La superficie de fluencia se define mediante la ecuación:

$$f(\sigma, q) = F(\sigma) - C(\sigma, q) = 0 \tag{36}$$

donde  $C$  es la cohesión en su acepción más general (que sólo en el caso de deformación uniaxial coincidirá con los valores dados por las curvas de la Figura 9) y  $F$  viene dada por:

$$F(\sigma) = \frac{1}{1-\alpha} [\sqrt{3} J_2 + \alpha I_1 + \beta \langle \sigma_{max} \rangle - \gamma \langle -\sigma_{max} \rangle] \tag{37}$$

donde  
 $I_1(\sigma)$  es  
 del ten  
 las tens  
 sigue:  
 -  $\alpha$   
 un  
 bis  
 en  
 -  $\beta$   
 en  
 -  $\gamma$   
 En  
 valores  
 por lo  
 La  
 tensor  
 compre  
 no inte  
 Drucke  
 La

donde  $\langle \pm x \rangle$  es la función de Mc. Auley:

$$\langle \pm x \rangle = \frac{1}{2} (x \pm |x|) \quad (38)$$

$I_1(\sigma)$  es el primer invariante del tensor de tensiones ( $I_1 = \sigma_{ii}$ ),  $J_2$  es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones ( $J_2 = \frac{1}{2} s_{ij}s_{ij}$ ;  $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{nn} \delta_{ij}$ ) y  $\sigma_{max}$  la mayor de las tensiones principales. Los parámetros  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  son adimensionales y se determinan como sigue:

- $\alpha$  se obtiene a partir de ensayos de compresión biaxial simétrico y de compresión uniaxial. Si  $f_b$  es la máxima resistencia del material, en un ensayo de compresión biaxial simétrico, y  $f_c$  es su resistencia máxima a compresión en un ensayo uniaxial entonces:

$$\alpha = \frac{(f_b/f_c) - 1}{2(f_b/f_c) - 1} \quad (39)$$

- $\beta$  se obtiene a partir de las tensiones máximas a compresión  $f_c$  y a tracción  $f_t$  en un ensayo uniaxial

$$\beta = (1-\alpha) \frac{f_c}{f_t} - (1+\alpha) \quad (40)$$

- $\gamma$  se define a partir del radio octaédrico máximo  $\rho$ :

$$\gamma = \frac{3(1-\rho)}{2\rho-1} \quad (41)$$

En el caso particular de hormigones, los resultados experimentales demuestran que los valores de  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$  varían dentro de límites muy estrictos

$$0.08 < \gamma < 0.12$$

$$\beta \simeq 7.50 \quad (42)$$

$$\gamma \simeq 3.50$$

por lo que pueden sustituirse dichos valores directamente en la ecuación (37).

La forma de la superficie de fluencia definida por la ecuación (37), en el espacio de tensiones principales, se presenta en la Figura 12. Como puede verse, en la zona de compresión biaxial ( $0 = \sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ ) donde el parámetro  $\gamma$  de la ecuación (38) no interviene, ( $\langle -\sigma_{max} \rangle = 0$ ) dicha superficie se asemeja a la conocida superficie de Drucker-Prager<sup>15</sup>.

La función potencial se establece como:

$$g(\sigma, q) = G(\sigma, \psi(\kappa^p)) = \frac{I_1}{3} \text{sen}\psi + \sqrt{J_2} \left( \text{cos}\theta - \frac{\text{sen}\theta \text{sen}\psi}{\sqrt{3}} \right) \quad (43)$$

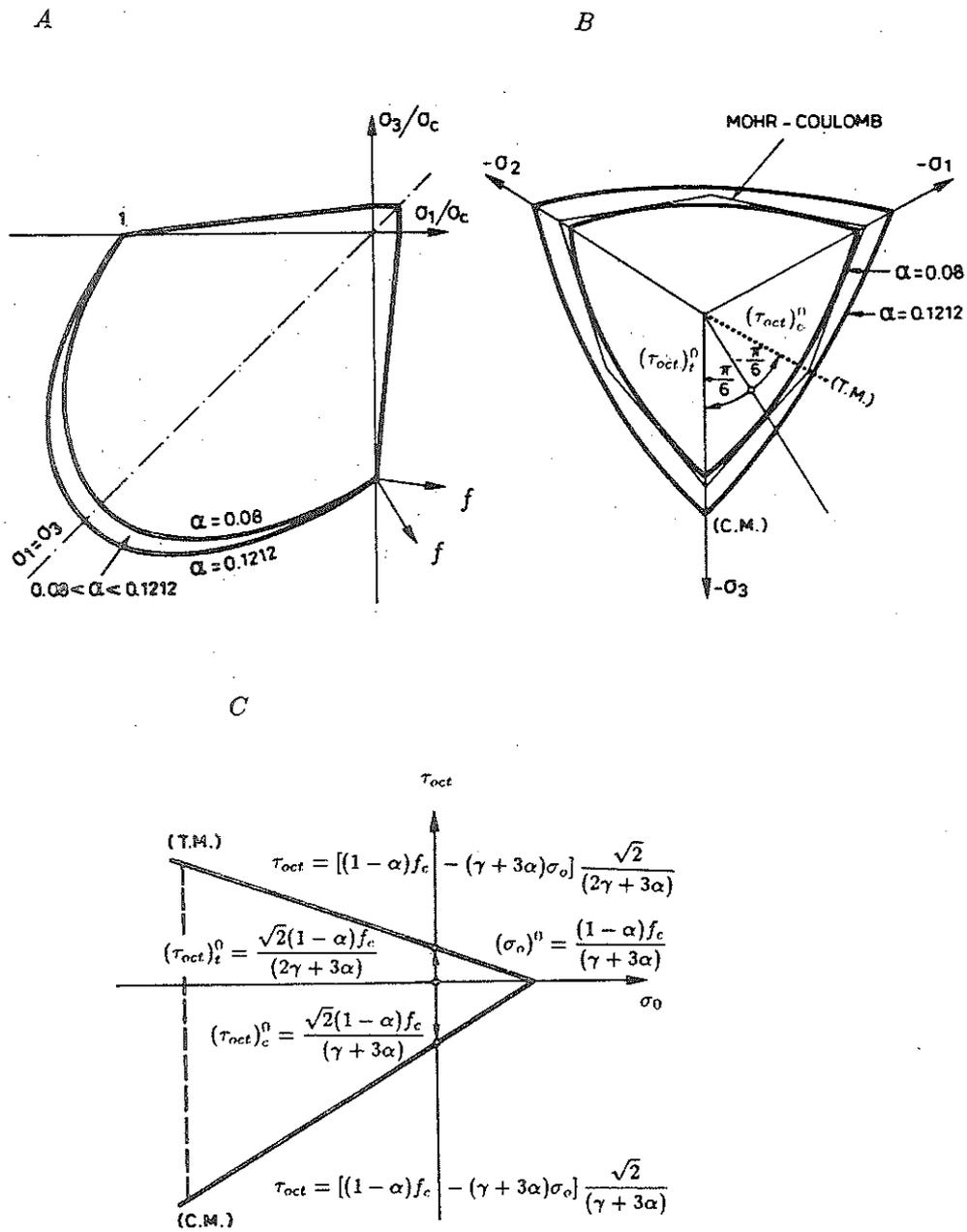


Figura 12. Superficie de fluencia plástica:  
 A) plano  $(\sigma_1 - \sigma_3)$ ,  
 B) plano octaédrico,  
 C) planos meridianos de tracción-compresión

donde  $\theta$  es el ángulo de similaridad definido por:

siendo

6.3.

L  
 detern  
 la func  
 L  
 forma.

donde  
 y  $g_i^*$  s

siendo  
 compi

$$\text{sen}(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{J_3}{(J_2)^{3/2}} \quad (44)$$

siendo  $J_3$  el tercer invariante del tensor desviador de tensiones ( $J_3 = \det(s_{ij})$ ).

### 6.3. Ecuaciones de evolución

Las ecuaciones de evolución de las variables internas "deformación plástica" vienen determinadas por la regla de flujo de la ec.(27) y por lo tanto quedan establecidas al definir la función potencial  $g(\sigma, q)$  de la ec.(43).

La ecuación de evolución para la "variable de daño"  $\kappa^p$  se determina de la siguiente forma:

$$\dot{\kappa}^p = \sum_{i=1}^3 \left\{ \frac{1}{g_t^*} \langle \sigma_i \rangle + \frac{1}{g_c^*} \langle -\sigma_i \rangle \right\} \dot{\epsilon}_i^p ; \quad 0 < \kappa^p < 1 \quad (45)$$

donde  $\sigma_i$  y  $\epsilon_i^p$  son las tensiones y deformaciones plásticas principales, respectivamente, y  $g_t^*$  y  $g_c^*$  se obtienen como

$$g_t^* = g_t \cdot \frac{\sum_1^3 \langle \sigma_i \rangle}{C_u^t(\kappa^p)}$$

$$g_c^* = g_c \cdot \frac{\sum_1^3 \langle -\sigma_i \rangle}{C_u^c(\kappa^p)} \quad (46)$$

siendo  $g_t^*$  y  $g_c^*$  las áreas encerradas debajo de las curvas de cohesión uniaxial a tracción y compresión respectivamente (ver Figura 13).

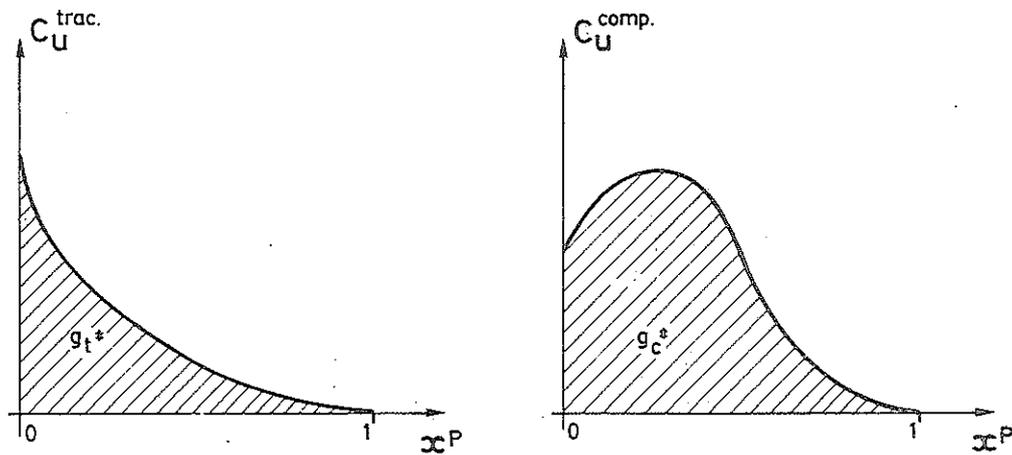


Figura 13. Curvas uniaxiales de cohesión - daño plástico

Las magnitudes  $g_t$  y  $g_c$  tienen el sentido físico de energías específicas (energías disipadas por unidad de volumen) a tracción y compresión, respectivamente. Para conseguir objetividad en los resultados, estas energías específicas deben provenir de unas energías por unidad de superficie  $G_t$  y  $G_c$  de tal forma que:

$$g_t = \frac{G_t}{l^*} \quad (47)$$

$$g_c = \frac{G_c}{l^*} \quad (48)$$

donde  $l^*$  es la longitud característica de la ecuación (10). El valor de  $G_t$  corresponde a la Energía de Fractura (asociada a la tracción) y  $G_c$  a la energía de aplastamiento (asociada a la compresión); ambas consideradas como propiedades del material.

Finalmente, para la variable interna "cohesión" se considera la siguiente ecuación de evolución:

$$\dot{C} = C \left[ \frac{r(\sigma)}{C_u^t(\kappa_p)} \cdot \frac{dC_u^t}{d\kappa^p} + \frac{1-r(\sigma)}{C_u^c(\kappa^p)} \cdot \frac{dC_u^c}{d\kappa^p} \right] \quad (49)$$

donde  $r(\sigma)$  es una función que caracteriza el estado tensional en el instante considerado (tracción, compresión o tracción-compresión) y se obtiene como:

$$r(\sigma) = \frac{\sum_{i=1}^3 \langle \sigma_i \rangle}{\sum_{i=1}^3 |\sigma_i|} \quad (50)$$

De la ecuación (50) se observa que para estados de tracción pura ( $\sigma_i > 0$ )  $r(\sigma) = 1$ , para estados de compresión pura ( $\sigma_i < 0$ )  $r(\sigma) = 0$  y en estados mixtos  $0 < r(\sigma) < 1$ .

#### 6.4. Líneas o superficies de fractura.

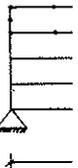
Tal y como se ha comentado en el apartado 3, desde el punto de vista de la localización una fisura está asociada a una línea o superficie singular. La pertenencia de un punto a dicha línea o superficie se establece a través del cumplimiento, en dicho punto, de la condición de localización (3) para una cierta normal  $\mathbf{n}$  que determina la dirección de la fisura. El tensor constitutivo  $\mathcal{C}$  que aparece en la ec. (3) se extrae de la matriz constitutiva tangente  $D^{ep}$  de la ec. (30). Conocido el valor de  $\mathcal{C}$ , un algoritmo numérico puede encargarse de encontrar en qué dirección  $\mathbf{n}$  se cumple la condición de localización, y determinar las líneas o superficies de fisuración.

Sin embargo, los resultados experimentales en materiales friccionales demuestran que las superficies de fisuración son casi exactamente ortogonales a la dirección de la máxima deformación plástica de tracción<sup>8</sup>. Este criterio puede entonces ser considerado como una alternativa válida a la condición de localización para determinar las superficies de fractura. La determinación de dichas superficies es un proceso aparte del núcleo del modelo numérico, que puede realizarse como un postproceso en aquellas fases del cálculo en las que se desee observar la evolución de las fisuras<sup>15</sup>.

7. E

de fr  
horm  
exper  
mode

7.1.

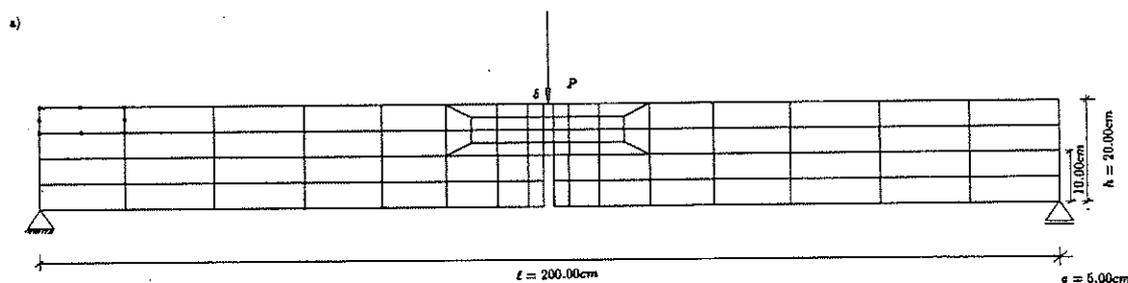
simp  
en el  
geom  
del n  
Gausesta:  
desp  
la d  
curv  
zona

**7. EJEMPLOS DE APLICACION**

Se presentan a continuación algunos ejemplos de aplicación del modelo elastoplástico de fractura descrito. Dichos ejemplos corresponden a ensayos numéricos sobre probetas de hormigón en las que predominan los modos de fractura I y II. Los correspondientes resultados experimentales se comparan con los numéricos con el fin de contrastar la capacidad del modelo para reproducirlos.

**7.1. Ensayo a flexión de una viga entallada simplemente apoyada. (Modo de fractura I)**

El ejemplo corresponde al ensayo de una viga, con una entalla en el centro de la luz, simplemente apoyada en los extremos, sobre la que se impone un desplazamiento creciente en el punto medio de la cara superior. La viga es de sección rectangular y sus características geométricas, la malla de elementos finitos (isoparamétricos de ocho nodos) y las propiedades del material consideradas se presentan en la Figura 14. La integración numérica es del tipo Gauss-Legendre,<sup>30</sup> con un orden de integración 2 x 2.



b)

$E_0 = 305810.40 \text{ kg/cm}^2.$

$\nu_0 = 0.20$

$\phi_0 = \text{cte.} = 32^\circ$

$\psi_0 = \text{cte.} = 32^\circ$

$\bar{\sigma}_c^{max} = 339.45 \text{ kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_c^{ash} = 360.00 \text{ kg/cm}^2$

$\bar{\sigma}_t^{max} = 36.00 \text{ kg/cm}^2$

$G_f = 0.126 \text{ kg/cm}$

$G_e = 12.600 \text{ kg/cm}$

Plasticidad asociada

Sin degradación de rigidez

Figura 14. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple. Geometría y parámetros del material

En la referencia <sup>23</sup> se describen los ensayos realizados con una serie de probetas de estas características. Los correspondientes resultados, en lo que se refiere a la curva carga-desplazamiento vertical en el centro de la luz, se presentan en la Figura 15. Puede observarse la dispersión de dichos resultados sobre una banda, una vez sobrepasado el máximo de la curva. Dicha circunstancia debe atribuirse a la dificultad de realizar ensayos precisos en la zona de ablandamiento, donde la rigidez de la máquina de ensayo puede afectar sensiblemente

a los resultados produciendo tales dispersiones. En la Figura 15 se presentan también los resultados obtenidos con el modelo numérico donde puede observarse su buen ajuste al límite inferior de la banda experimental.

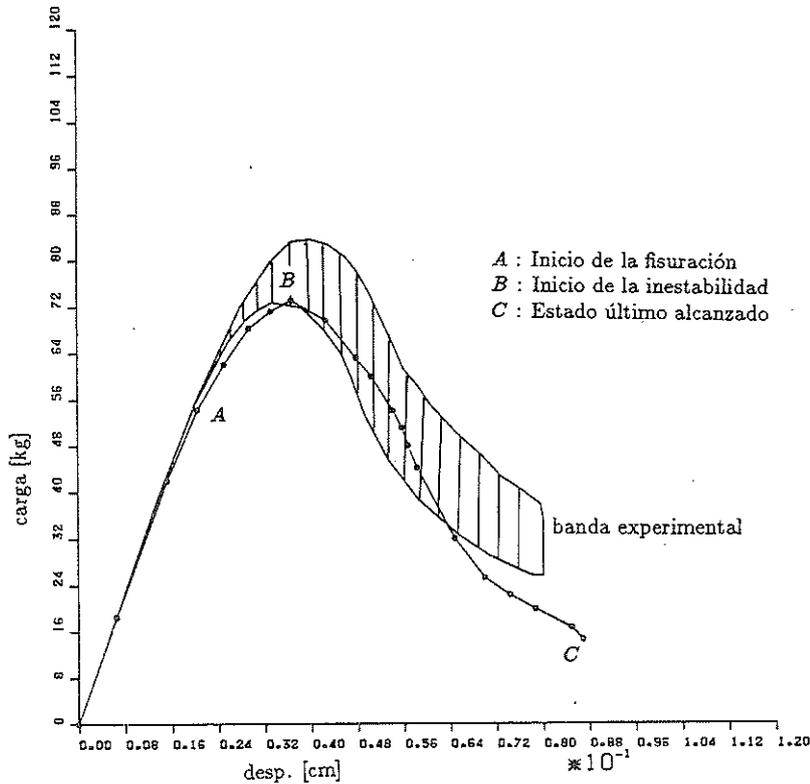


Figura 15. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple:  
Carga aplicada - desplazamiento vertical del punto de aplicación.  
Comparación con estudios experimentales de Petersson

En la Figura 16 puede verse una ampliación de la zona de la entalla en el estado último analizado (punto C de la Figura 15). Se observa la localización de las deformaciones en una banda de elementos situados en el fondo de la entalla que modelizan la progresiva penetración de la fisura hacia la cara superior de la viga.

En la Figura 17.a se presenta el estado de fisuración detectado en los puntos de integración de los elementos de la banda de localización para un estado de deformación correspondiente al punto B de la Figura 15. En la Figura 17.b se presenta la fisuración en el estado de deformación última correspondiente al punto C de la Figura 15. El análisis de dicha fisuración se ha establecido de acuerdo con el esquema indicado en el apartado 6.4. La dirección de cada fisura se representa mediante un trazo ortogonal a la dirección de la correspondiente deformación plástica principal positiva. Cada trazo se regruesa según el valor de dicha deformación plástica principal lo cual constituye un indicador de la "apertura"

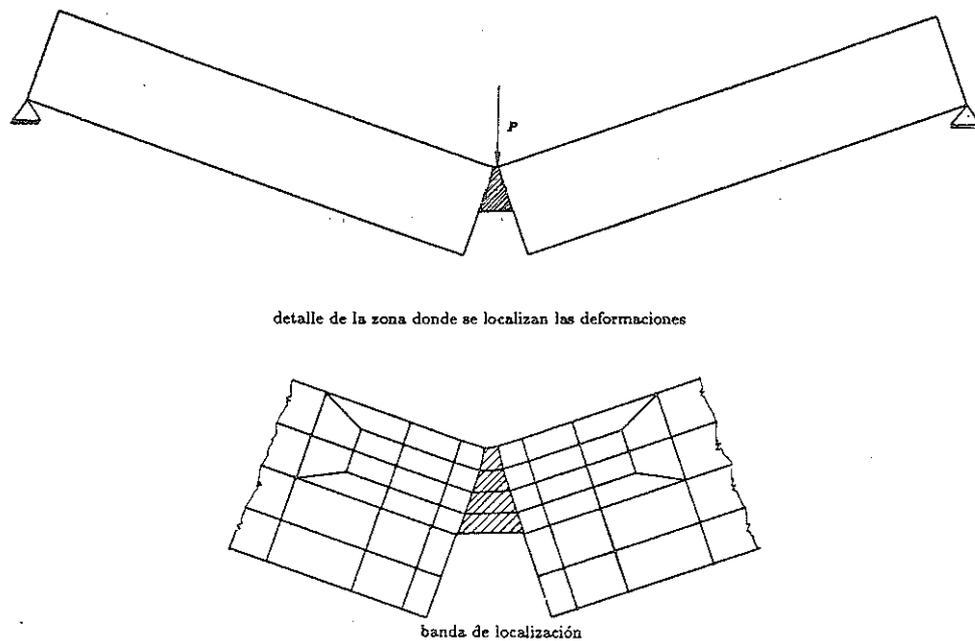


Figura 16. Ensayo a flexión de una viga de hormigón simple: Localización de deformaciones en el estado último

de la fisura. Aunque en el inicio de la fisuración en cada punto de integración se detecta doble fisuración (dos direcciones ortogonales, Figura 17.a) se observa que el avance de ésta se produce esencialmente en la dirección vertical y que, a medida que se produce la localización, la apertura de la fisura se concentra también en dicha dirección vertical (Figura 17.b). Este resultado concuerda con el modo de fractura I que corresponde a este ensayo.

En las Figuras 18.a, 18.b y 18.c, se representan las tensiones principales, mediante trazos orientados según las correspondientes direcciones principales y de longitud proporcional al valor de cada tensión principal. La representación se efectúa para los tres estados de deformación A, B y C indicados en la curva de la Figura 15. Se observa la progresiva relajación de dichas tensiones a medida que la fisura progresa y se localiza. En particular, en la Figura 18.c (correspondiente al estado último de deformación) puede observarse una importante concentración de tensiones de compresión en la cara superior de la viga. Estas tensiones producen importantes deformaciones plásticas de compresión en dicha zona, con el correspondiente aplastamiento y disipación de la energía. Una correcta modelización del comportamiento a compresión del material en estas condiciones incide muy directamente en los resultados obtenidos y en la correcta simulación del proceso de fractura.

**7.2. Ensayo a flexión y corte de una viga entallada. Modo mixto de fractura (Modos I y II)**

Se trata de una viga de hormigón en masa, cuyas características geométricas y propiedades mecánicas se reflejan en la Figura 19. Sobre la viga se considera una entalla que

bién los al límite

último en una ración

los de nación ión en nálisis rtado ión de gún el :tura?

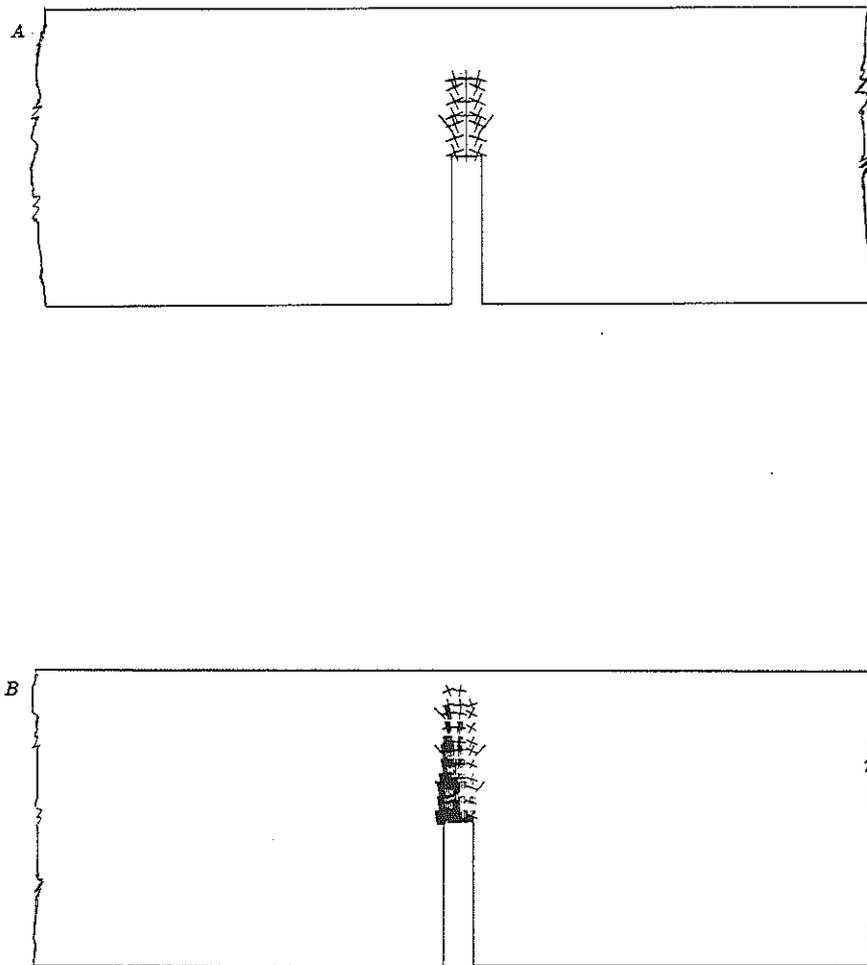


Figura 17. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple. Estado de fisuración de la viga:  
 A) En el pico de tensiones.  
 B) En el estado último

profundiza, aproximadamente, sobre un tercio del canto. El ensayo fue realizado por Arrea e Ingrassia <sup>1</sup> con el fin de inducir, a partir de la entalla, un modo mixto de fractura con apertura (modo I) y deslizamiento (modo II) de los labios de la fisura. Para ello se diseñó el sistema de cargas de la Figura 19.a en el que se aplica una carga  $P$  sobre una viga de acero que apoya sobre los puntos A y B de la cara superior de la probeta. Esta, a su vez se apoya isostáticamente a través de los puntos D y E de su cara inferior.

La reacción en A induce un momento flector, sobre el canto útil en la sección de la entalla, que provoca apertura de la misma (modo de fractura I), mientras que la reacción en D induce un esfuerzo cortante en dicha sección que tiende a hacer deslizar los labios de la entalla (modo de fractura II). En los estados iniciales del proceso de progresión de la fisura, predomina el modo de fractura II mientras que en las situaciones intermedias se produce un

estad  
 ]  
 relati  
 efect

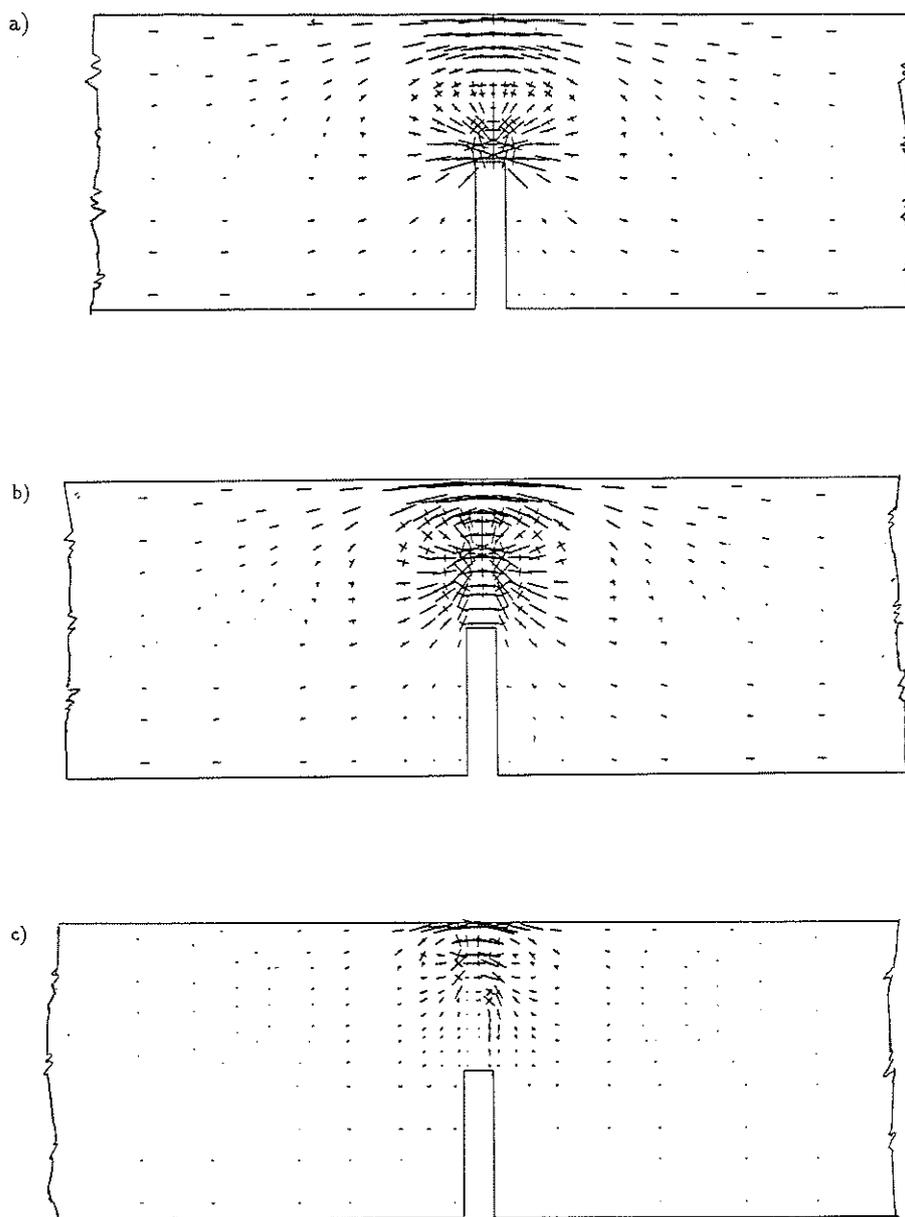


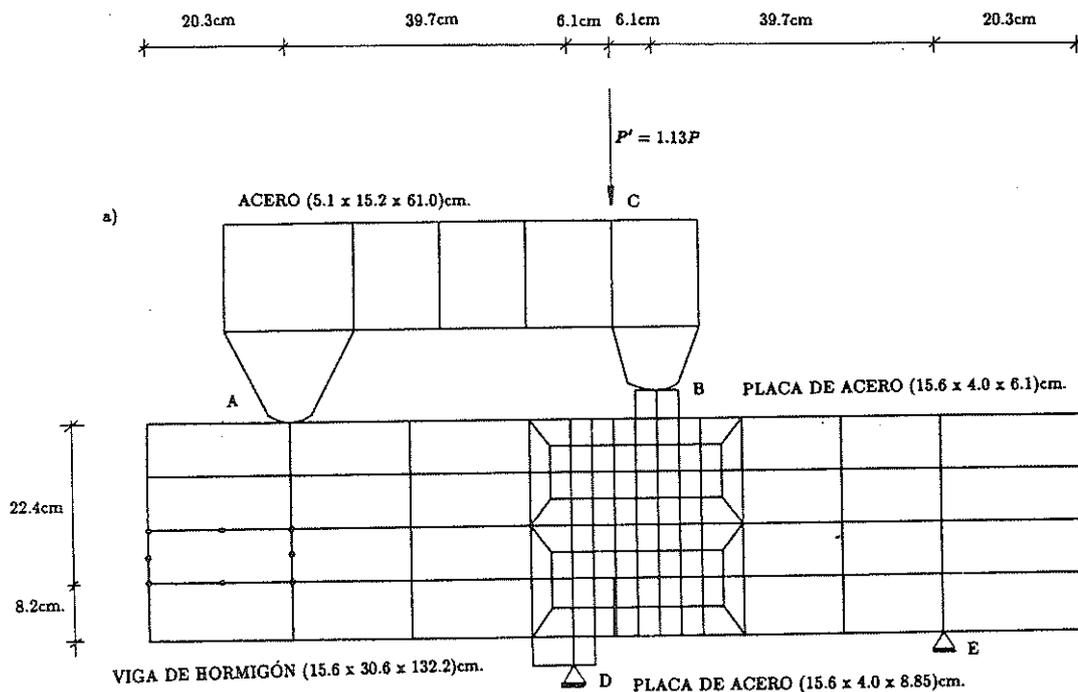
Figura 18. Ensayo a flexión de una viga entallada de hormigón simple.

Tensiones principales en la viga:

- a) En el límite elástico - punto A.
- b) En el pico de tensiones - punto B.
- c) En el límite último - punto C.

estado combinado de ambos modos.

La simulación numérica del proceso de carga se realizó controlando el deslizamiento relativo de los labios de la entalla (C.S.D.). Con el fin de incluir en el ensayo numérico el efecto de la deformación de la viga metálica de carga, se consideró dicha viga en el análisis



$$E_0 = 248000.00 \text{ kg/cm}^2.$$

$$\nu_0 = 0.18$$

$$\phi_0 = \text{cte.} = 32^\circ$$

$$\psi_0 = \text{cte.} = 32^\circ$$

$$\bar{\sigma}_c^{\text{mas}} = 274.68 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}_c^{\text{eah}} = 300.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}^{\text{mas}} = 27.47 \text{ kg/cm}^2$$

$$\bar{\sigma}^{\text{eah}} = 30.00 \text{ kg/cm}^2$$

$$G_f = 0.075 \text{ kg/cm}$$

$$G_c = 7.5 \text{ kg/cm}$$

Plasticidad asociada

Sin degradación de rigidez

Figura 19. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingraffea<sup>1</sup>:  
 a) Geometría y malla de elementos finitos.  
 b) Propiedades del material en [Kg] [cm].

en la hipótesis de que se comporta como un material elástico lineal. La discretización del conjunto, en elementos isoparamétricos de ocho nodos, se presenta en la Figura 19 en la que puede observarse el mayor grado de refinamiento de la malla en la zona donde se produce la fractura.

Los experimentos de Arrea e Ingraffea se realizaron con tres probetas de las mismas características. Los resultados carga aplicada-C.S.D., representados en la Figura 20, configuran la banda experimental. En la misma figura se presentan los resultados numéricos que muestran un muy buen grado de ajuste con los experimentales. Hay que mencionar que en ningún momento se hizo un esfuerzo para ajustar los resultados numéricos a los experimentales a base de modificar los datos del análisis que aparecen en la Figura 19.

Estos se obtuvieron de los datos proporcionados por los autores de los experimentos y, en los casos en que el dato era desconocido, se estimó su valor dentro del rango de variación del mismo para hormigones de los características de las ensayados.

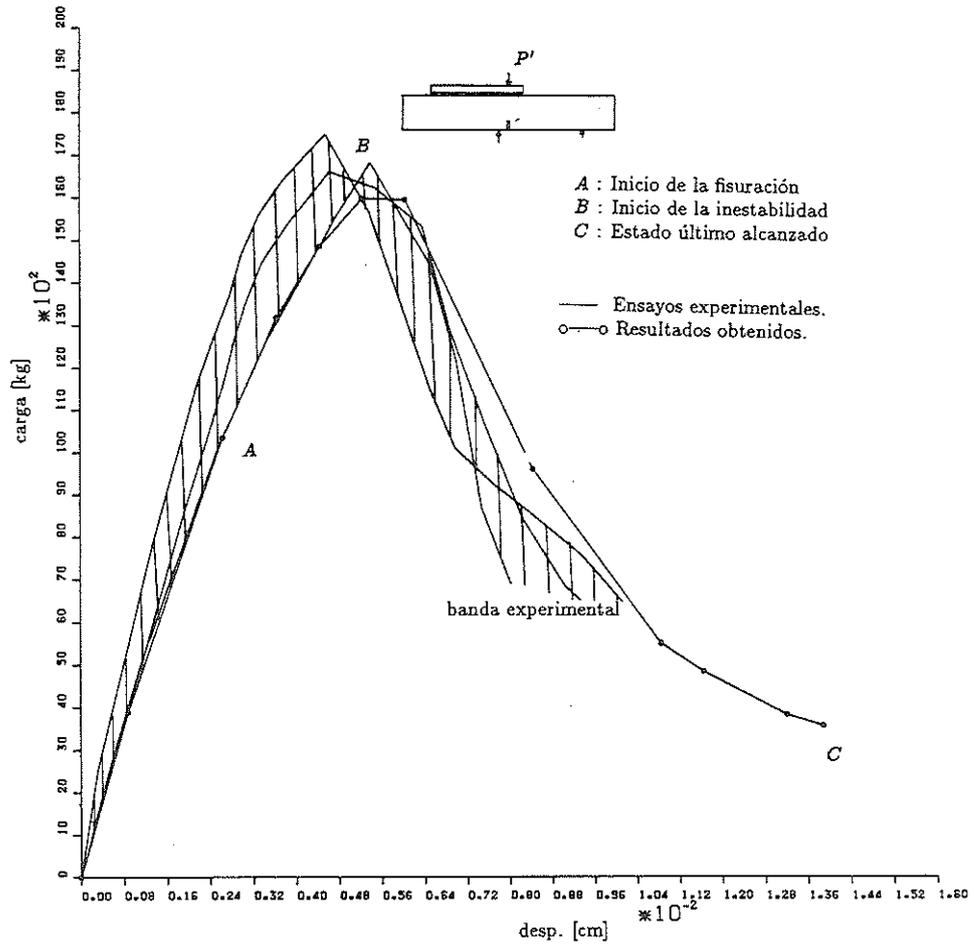


Figura 20. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingrassia<sup>1</sup>: Carga  $P'$  - deslizamiento relativo entre caras de fisuras. El área sombreada muestra el rango de resultados experimentales obtenidos por Arrea e Ingrassia.

En la curva presentada en la Figura 20 se caracterizan los estados de deformación A (inicio de la fisuración), B (inicio de la inestabilidad) y C (estado último analizado).

En la Figura 21.a se muestra la fisuración detectada por el modelo en el estado B en el que la microfisuración está orientada a 60 grados respecto a la horizontal y tiende a progresar en dirección vertical. En esta situación aparecen también algunas fisuras en la cara superior de la viga producidas por los esfuerzos de flexión. A partir de este instante, la fisuración empieza a localizar en una banda que progresa, a partir de la entalla, con una inclinación de

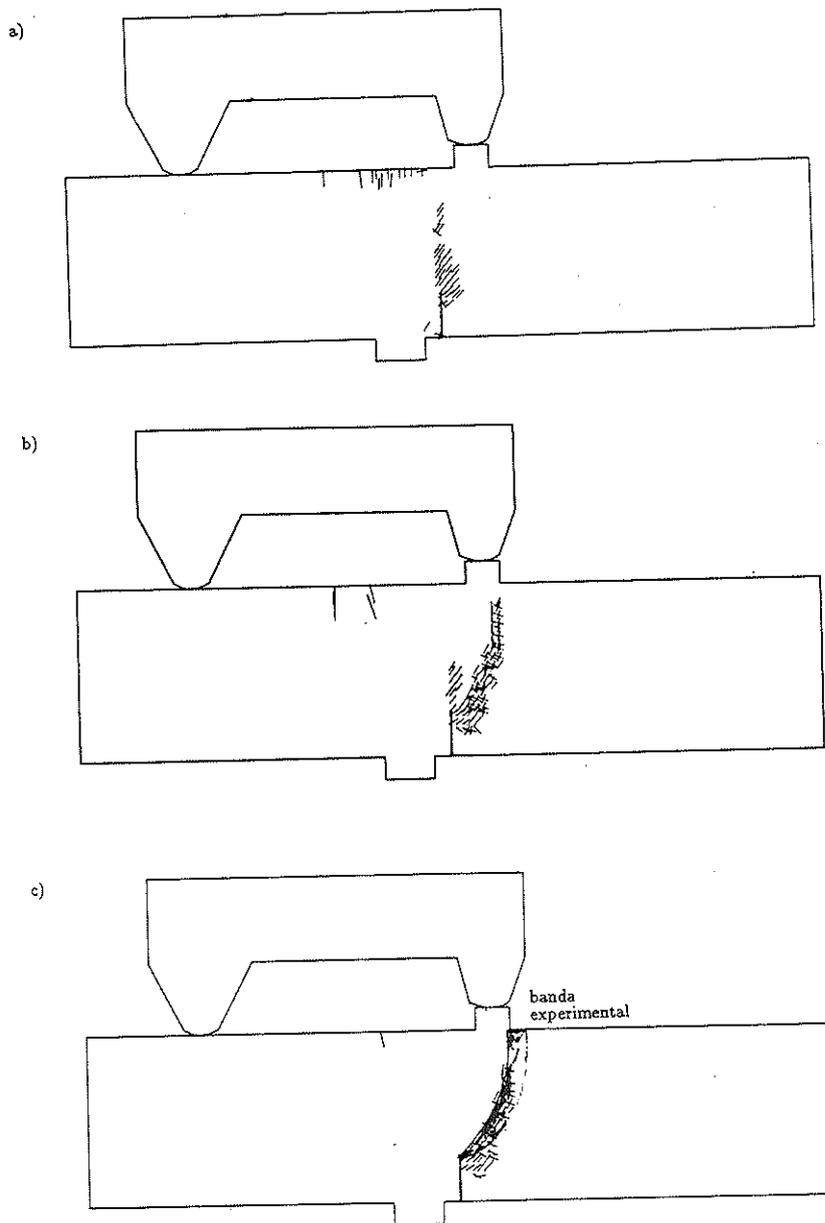


Figura 21. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingraffea<sup>1</sup>. Estado de fisuración en la viga:  
 a) Al pico de tensiones - punto B.  
 b) En el límite último - punto C. Fisuras mayores al 3% de la máxima.  
 c) En el límite último - punto C. Fisuras mayores al 5% de la máxima.

60 grados para, posteriormente, tender a progresar verticalmente debido al predominio del

mod  
la ba  
a

fisu  
de  
la c

modo I en los sucesivos estados de deformación (Figura 21.b). En la Figura 21.c, se compara la banda de fisuración que proporciona el modelo con la detectada experimentalmente.

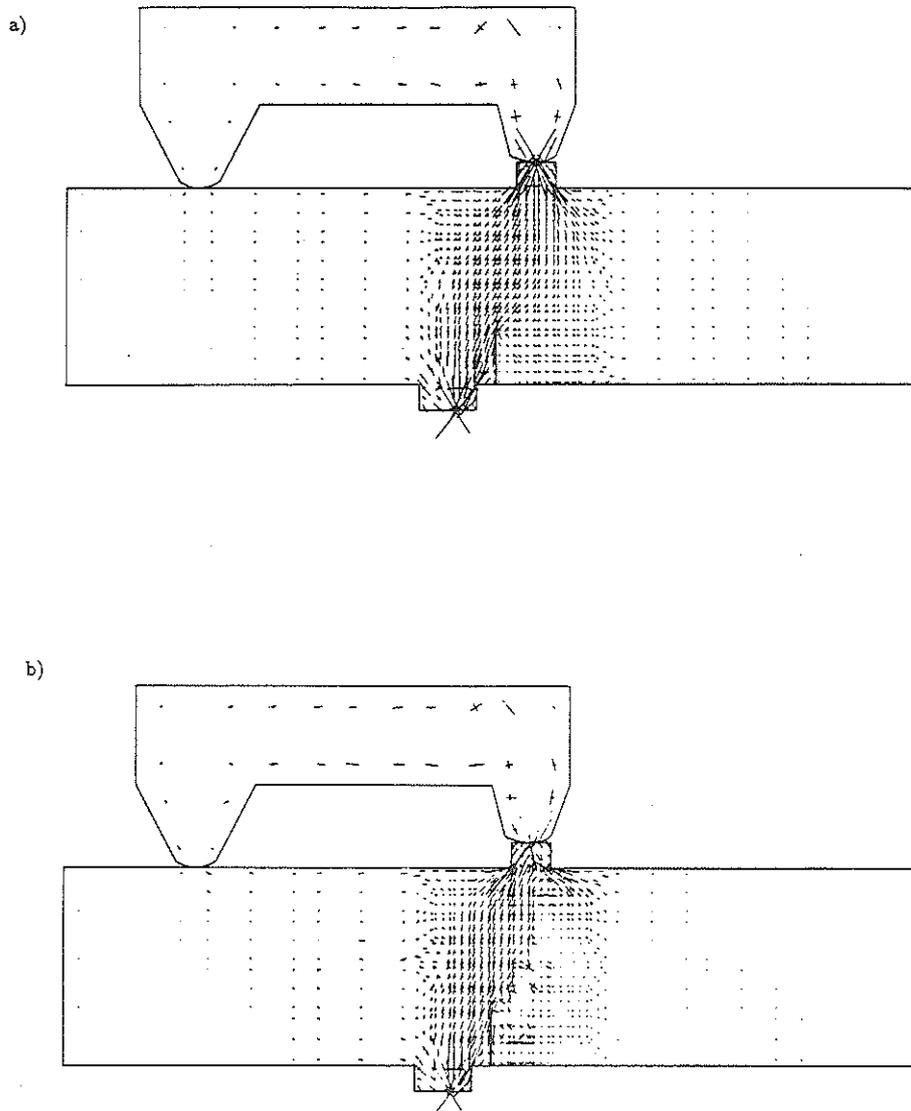


Figura 22. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón simple de Arrea e Ingraffea<sup>1</sup>. Tensiones principales en la viga:

- a) En el límite elástico - punto A.
- b) En el límite último - punto C.

En la Figura 22 se presentan las tensiones principales en el estado A de inicio de la fisuración y en el estado final analizado C. En este último caso, puede observarse la relajación de tensiones en la zona por donde discurre la fisura. Finalmente en la Figura 23 se muestra la deformada de la estructura al final del proceso de carga (amplificada 300 veces) donde

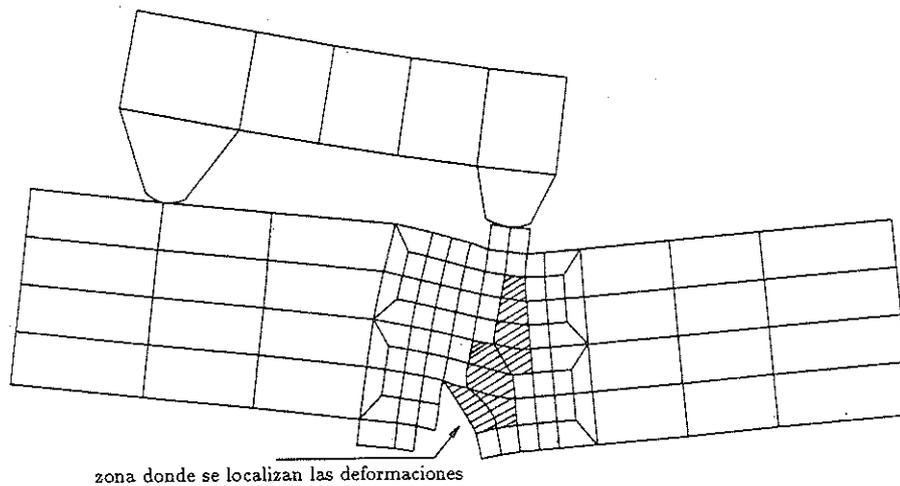


Figura 23. Ensayo de fractura en modo mixto. Viga de hormigón, simple de Arrea e Ingraffea<sup>1</sup>. Deformación de la viga y localización de deformaciones en el estado último (amplif. x 300.0)

puede observarse la localización de la deformación dentro de la banda de elementos que representa la fisura.

## 8. CONCLUSIONES

A lo largo de este artículo se ha puesto de manifiesto que la Teoría de la Plasticidad contiene los elementos necesarios para modelar numéricamente los procesos de fisuración o fractura. Por una parte, permite introducir el ablandamiento por deformación, circunstancia necesaria para inducir la localización de deformaciones en la banda de elementos finitos que simula la fisura. Por otra, permite introducir de una forma natural los procesos disipativos de energía que caracterizan a la fractura. Asimismo, mediante la Teoría la Plasticidad puede modelarse de forma adecuada el comportamiento del material y la disipación no local de energía para los estados tensionales de compresión predominante que se producen en las zonas cercanas a las de fractura. El comportamiento de estas zonas de compresión, y su adecuada modelización, puede afectar, en determinadas circunstancias, de forma muy importante a los resultados obtenidos.

El modelo elasto-plástico para materiales friccionales frágiles que se ha presentado es un ejemplo de aplicación de la Teoría de la Plasticidad a la Mecánica de Fractura. Los ejemplos analizados, muestran una buena aproximación a los resultados experimentales lo que constituye un indicador de las grandes posibilidades de este tipo de modelos. Evidentemente, hay también en ellos aspectos controvertidos como, por ejemplo, la gran cantidad de parámetros que se necesitan para caracterizar el comportamiento del material y el relativamente alto esfuerzo computacional que hay que realizar en el análisis. En todo caso constituyen una alternativa, válida y prometedora para profundizar en el conocimiento de los fenómenos de fractura.

## REFERENCIAS

1. Arrea M. and Ingraffea A. R. "Mixed mode crack propagation in mortar and concrete", Cornell University, Department of Structural Engineering, *Report* Nro. 81-13, Ithaca, New York.
2. Bažant Z. "Mechanics of distributed cracking, *Appl. Mech. Rev.* Vol. **39** Nro. 5, pp. 675-705, (1986).
3. Bažant Z. and Oh B. "Crack band theory for fracture of concrete" *Mat. Construct.* **16** (93), pp. 155-177, (1983).
4. Borst R. De. "Smearred cracking, plasticity, creep and thermal loading unified approach", Paper submitted for consideration for publication in : *Mechanics of Materials*, (1987).
5. Borst R. De and Vermeer P. "Non associated plasticity for soils, concrete, and rock", *Heron* Vol. **29**, Delft, Netherlands, (1984).
6. Cervera M. and Hinton E. "Nonlinear analysis of reinforced concrete plates and shells using a three dimensional model", *Internal Report*, Department of Civil Engineering Univ. College of Swansea U.K., (1985).
7. Chen A. and Chen W. F. "Constitutive Relations for Concrete", *Journal of The Engineering Mechanics Division*, Vol. **101**, Nro. EM4, pp. 465-481, ASCE, (1975).
8. Chen W. F. and Ting E. "Constitutive models for concrete structures" *Journal of The Engineering Mechanics Division*, Vol. **106**, Nro. EM1, pp. 1-18, ASCE, (1980).
9. Dougill J. W. "On stable progressively fracturing solids", *Jour. Applied Math. Physics (ZAMP)*, **27**, (1976).
10. Frantziskonis G. and Desai G. S. "Constitutive model with strain softening", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. **23**, Nro. 6, pp. 733-750, (1987).
11. Glemberg R. "Dynamic analysis of concrete structures", *Ph. D. Thesis*, Department of structural mechanics, chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, (1984).
12. Han D. J. and Chen W. F. "Strain space plasticity formulation for hardening-softening material with elastoplastic coupling", *Int. Jour. Solids structures*, Vol. **22**, Nro. 8, pp. 935-950, (1986).
13. Hillerborg A., Modeer M. and Petersson P. "Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements", *Cement and Concrete Research*, Vol. **6**, Nro. 6, pp. 773-782, (1976).
14. Klisinski M. and Mroz Z. "Description of inelastic deformation and degradation of concrete", *Internal report*, Institute of fundamental technological research, Warszawa, Poland, (1987).
15. Lubliner J., Oller S., Oliver J. y Oñate E. "A plastic damage model for non linear analysis of concrete", *Internal report*, E.T.S. Ing. de Caminos, Univ. Pol. de Catalunya, Barcelona, Spain, (1987).
16. Murray D. W., Chitnuyanondh L., Khazal Y. and Chung Wong "Concrete Plasticity theory of biaxial stress analysis" *Jour. Eng. Mechanics Division ASCE*, Vol. **105**, Nro. EM6, pp. 989-1106, (1979).
17. Needleman A. and Tvergaard V. "Finite element analysis of localization in plasticity", From: *Finite elements special problems in solid mechanics*, Vol. **5**, Chap. 3, pp. 94-267, Ed. by Oden J. T., and Carey F., (1985).
18. Nilson A. "Non linear analysis of reinforced concrete by finite element method", *Journal A.C.I.*, Vol. **65**, Nro. 9, (1968).
19. Oliver J. y Fernandez Roure J. R. "Consideraciones sobre el modelo numérico de

- distribución para el análisis de la fisuración de hormigón”, Artículo sometido a consideración, para ser publicado en : “Métodos Numéricos para el Cálculo y Diseño en Ingeniería”, (1987).
20. Ortiz M., Leroy. Y. and Needleman. “A finite element method for localized failure analysis” *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, Vol. 61, pp. 189, 214, North Holland (1987).
  21. Ottosen N. S. “Thermodynamic consequences of strain softening in tension” *Journal of Engineering Mechanics Division*, ASCE, Vol. 112, pp. 1152, 1164, (1986).
  22. Rashid Y. R. “Analysis of prestressed concrete pressure vessels” *Nuclear Engineering and Design*, Vol. 7, Nro. 4, (1968).
  23. Rots J. G., Nauta P., Kusters G. and Blaauwendraad J. “Smearred crack approach and fracture localization in concrete” *Heron*, Vol. 30, Delft, Netherlands, (1985).
  24. Simo J. C. and Ju J. M. “On continuum damage, elastoplasticity at finite strains: a computational framework”, Paper submitted for consideration for publication in: *Computational Mechanics*, (1987).
  25. Simo J. C. and Ju J. M. “Strain and stress based continuum damage model, Part I : Formulation”, Paper submitted for consideration for publication in : *Solids and Structures* (1987).
  26. “State of the art report on: Finite Element Analysis of Reinforced concrete”, *ASCE*, (1982).
  27. Valanis K. Z. “On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol., 52, pp. 649, 653, (1985).
  28. Willam K. and Sobh N. “Bifurcation analysis of tangencial material operators”, *Int. Conf. on Num. Methods in Ingng., Theory and Applications, NUMETA*, Eds. Pande G. and Middleton J., Martinus Nijhoff Publishers, Swansea U.K., (1987).
  29. Chen W. F. “Plasticity in reinforced Concrete”, Mc Graw Hill, (1982).
  30. Zienkiewicz O. C. “El método de los elementos finitos”, Edit. Reverté, Barcelona, (1982).