

SOLUCIÓN SIMULTÁNEA DE LAS ECUACIONES GOBERNANTES DEL PROBLEMA TERMO-ELASTOHIDRODINÁMICO DE CONTACTO LINEAL

JOSÉ DI PAOLO

*Grupo Biomecánica Computacional
Facultad de Ingeniería, Universidad Nacional de Entre Ríos
Casilla de correo 47, Suc.3, 3100 Paraná, Argentina
Fax: + 54-42-55 09 44, E-mail: josedp@alpha.arcrde.edu.ar*

RESUMEN

Un modelo unidimensional del problema termo-elastohidrodinámico de contacto lineal se resuelve numéricamente usando el método de elementos finitos. El sistema de ecuaciones resultante es fuertemente no lineal y se resuelve en forma simultánea mediante el método de Newton. La solución incluye la determinación del dominio que a priori es desconocido.

La técnica que incluye el uso de discretización adaptiva muestra ser efectiva para resolver los enormes gradientes de presión y temperatura que se presentan.

Las predicciones obtenidas discrepan con resultados previamente publicados, por lo tanto es necesario realizar análisis numéricos y experimentales adicionales.

SIMULTANEOUS SOLUTION OF THE GOVERNING EQUATIONS OF THE THERMO-ELASTOHYDRODYNAMIC LINE CONTACT PROBLEM

SUMMARY

A one dimensional model of the thermo-elastohydrodynamic line contact problem is numerically solved using the finite element method. The resulting highly nonlinear system of equations is simultaneously solved employing Newton's method. The solution involves the domain determination which is a priori unknown.

The technique which includes the use of an adaptive discretization, proves to be effective to resolve the huge pressure and temperature gradients that are present.

The predictions obtained disagree with previous published results, thus further numerical and experimental analysis should be performed.

Recibido: Abril 1997

INTRODUCCIÓN

Los sistemas elastohidrodinámicos (EHD) están caracterizados por una fuerte interacción entre la presión hidrodinámica originada en el seno de un fluido viscoso que fluye por un canal estrecho, convergente o convergente-divergente, y las deformaciones elásticas que experimentan las fronteras sólidas que delimitan dicho canal. Existen numerosos ejemplos de sistemas EHD entre los cuales se encuentran: los procesos de recubrimiento de papel, la lectura y grabación de cintas magnéticas y el cojinete de fricción conocido académicamente como "contacto lineal".

Los sistemas termo-elastohidrodinámicos (TEHD) son los sistemas EHD donde los efectos térmicos tienen relevancia. Un ejemplo de ellos es el referido cojinete de fricción trabajando en un rango de cargas moderadas a altas donde su temperatura se eleva considerablemente. En los fenómenos TEHD el calor generado en el seno del fluido produce una distribución de temperaturas en todo el contacto que afecta las propiedades del mismo, especialmente la densidad y viscosidad del fluido. Estas alteran el campo de presiones y deformaciones que nuevamente modifican las temperaturas hasta llegar al equilibrio.

Los modelos matemáticos de los sistemas TEHD requieren las ecuaciones que gobiernan la conservación de masa y el flujo viscoso del lubricante, las ecuaciones de elasticidad en los sólidos que determinan el canal y el balance de energía térmica en todo el contacto, todas definidas en un dominio no conocido, puesto que el problema posee la frontera de salida indeterminada (libre). El sistema de ecuaciones resultante es altamente no lineal y su solución debe ser abordada indefectiblemente por métodos numéricos.

En el caso del contacto lineal, las soluciones existentes corresponden a estados de cargas elevadas, donde la distribución de presión dentro del fluido es lo suficientemente predecible como para estimar la posición de la frontera libre e inicializar algoritmos que actúan iterando entre las ecuaciones y produciendo correcciones hasta llegar a la convergencia.

En este trabajo se presenta una nueva solución numérica del problema TEHD de contacto lineal obtenida mediante una técnica de resolución simultánea de las ecuaciones gobernantes, fundada en metodologías similares que han hecho posible la solución de problemas EHD como el del recubridor de hoja flexible y el problema de contacto lineal.

La metodología se presenta implementada sobre un modelo de ecuaciones simplificado cuya formulación se ha unidimensionalizado a través de la temperatura media del fluido en la dirección transversal al flujo. El fluido es newtoniano, su densidad varía con la presión y su viscosidad con la presión y la temperatura.

Los resultados obtenidos muestran la evolución de los perfiles de presión, deformación y temperaturas del fluido y los sólidos a medida que aumentan las cargas en función de los parámetros elegidos. Los picos de presión extremadamente agudos, característicos de estos sistemas, pudieron resolverse satisfactoriamente por el algoritmo a la vez que se desplazaban en el dominio al variar la carga.

MODELO DE ECUACIONES GOBERNANTES

La abstracción conocida como “contacto lineal” está representada por dos cilindros de una gran longitud axial en contacto longitudinal y girando con direcciones angulares opuestas (si tienen curvaturas opuestas en la región de contacto). El contacto se realiza a través de una delgada capa o película de fluido sobre la cual se transmite la carga que tiende a que los cilindros se toquen.

Mediante una conveniente transformación geométrica el contacto entre los dos cilindros puede llevarse al contacto entre un plano y un rodillo “equivalente”¹ que se mueven con las mismas velocidades tangenciales de los rodillos originales como muestra la Figura 1.

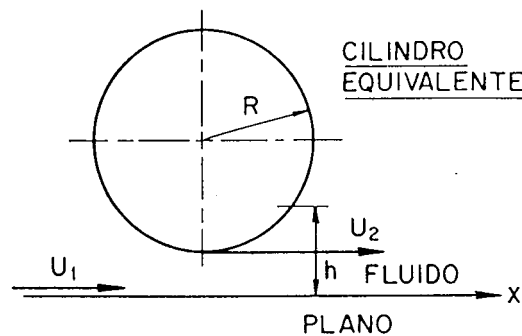


Figura 1. Representación del contacto equivalente

Sobre el contacto equivalente se imponen las hipótesis simplificatorias que transforman las ecuaciones fundamentales en el modelo a resolver.

Las hipótesis referidas pueden resumirse en los siguientes puntos:

1. En la zona del contacto el rodillo equivalente puede aproximarse por la parábola más cercana.
2. Las dimensiones del contacto (extensión y alturas del canal) son mucho menores que las dimensiones de las piezas (radio de curvatura) separadas por la película fluida. Ello implica la validez de la aproximación de lubricación y la suposición de sólidos semiinfinitos.
3. La longitud axial del contacto es mucho mayor que la longitud del canal. Ello implica que los sólidos están en un estado de deformación plana.
4. El fluido lubricante es newtoniano, el flujo es compresible y unidireccional.
5. La generación de calor es irreversible por efectos viscosos y reversible por compresión del fluido.
6. El transporte de calor en el fluido y los sólidos es por convección en la dirección del flujo y por conducción en la dirección transversal al mismo.
7. El contacto térmico es perfecto en las interfaces sólido-líquido.

El modelo de ecuaciones resultante fue utilizado por Cheng y Sternlicht² en la primera solución exitosa del problema TFHD de contacto lineal. Dichas ecuaciones se

presentan a continuación (en la Tabla I se hallan los significados de los parámetros físicos y operativos involucrados).

Ecuación de Reynolds

Relaciona las fuerzas de presión dentro del fluido con las fuerzas viscosas expresadas en función de las alturas del canal deformado. Surge de una condensación de las ecuaciones de Navier-Stokes y continuidad³

$$\frac{dp}{dx} = 6\mu(U_2 + U_1) \frac{h - d\rho_0/\rho}{h^3} \quad (1)$$

donde p es la presión, h la altura del canal, d la altura del canal en la frontera de salida \bar{x} (ver ecs. 7 y 11), ρ y μ la densidad y la viscosidad que están dadas por las siguientes expresiones

$$\rho = \rho_0 \exp(p/p_s) \quad (2)$$

$$\mu = \mu_0 \exp\left(\alpha p + \frac{\beta}{t} - \frac{\beta}{t_0} + \gamma \frac{p}{t}\right) \quad (3)$$

siendo t la temperatura absoluta del fluido, variable en la dirección del flujo y en la dirección transversal al mismo.

Ecuación para las alturas del canal

Está constituida por la suma del canal indeformado y las deformaciones de los sólidos debido a la acción de la presión originada en el fluido¹

$$h(x) = y_d + \frac{x^2 - x^{*2}}{2R} - \frac{2}{\pi E'} \int_{-L}^{\bar{x}} p(r) \ln(x-r)^2 dr \quad (4)$$

siendo x^* la posición (conocida) a la cual corresponde la variable y_d que fija las deformaciones, el segundo sumando es el término cuadrático de la parábola aproximante del rodillo equivalente y el tercer término, la suma de las deformaciones experimentadas por los dos sólidos sobre sus fronteras debido, como se dijo, a la acción de la presión hidrodinámica.

El módulo elástico equivalente (E') está definido como

$$\frac{1}{E'} = \frac{1}{2} \left[\frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2} \right]$$

Balance de energía térmica en el fluido

Representa un equilibrio entre el calor transportado por convección y la suma de los calores conducidos hacia las fronteras, el calor generado por efectos viscosos (fuente irreversible) y el calor generado por compresión del fluido (fuente reversible)

$$\rho c V_x \frac{\partial t}{\partial x} = k \frac{\partial^2 t}{\partial y^2} + \mu \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} \right)^2 + \frac{p}{p_s} V_x \frac{dp}{dx} \quad (5)$$

La ecuación (5) se obtiene simplificando el balance general de energía térmica a través de un análisis de órdenes de magnitud⁵. En ella la variable y representa la coordenada en la dirección transversal al flujo, donde se miden las alturas del canal y cuyo origen coincide con la frontera del sólido 1. $V_x = f(x, y)$ es el campo de velocidades en la dirección del flujo, suma de las componentes Couette y Poiseuille.

Balances de energía térmica en los sólidos

Análogamente a lo que ocurre en el fluido, puede determinarse que en los sólidos el equilibrio sólo se establece entre los calores transportados por convección en la dirección del movimiento y por conducción en la dirección transversal a ella:

$$\rho_i c_i U_i \frac{\partial t_i}{\partial x} = k_i \frac{\partial^2 t_i}{\partial y^2}, \quad (i = 1, 2) \quad (6)$$

donde 1 y 2 identifican a ambas fronteras sólidas.

Condiciones de contorno para el sistema

Las condiciones de contorno para la presión establecen que la misma tiene el valor ambiental al comienzo y al final del contacto. Al comienzo en un punto alejado de la línea de centros ($-L$) y al final, en un punto cuya posición se desconoce (\bar{x}). En dicho punto la presión debe alcanzar el valor de referencia con pendiente nula para evitar la formación de presiones subambientales que introduzcan cavitación¹.

Por otro lado, todas las temperaturas (t, t_1 y t_2) deben tomar el valor ambiental al inicio del contacto y coincidir la temperatura del fluido con la de cada sólido sobre las interfaces que definen. Adicionalmente, sobre dichas interfaces debe conservarse el flujo calórico y lejos de ellas, hacia el centro de los sólidos en la dirección y , las temperaturas de estos también deben tender al valor ambiental.

$$x = -L, \quad p = 0; \quad x = \bar{x}, \quad p = \frac{dp}{dx} = 0 \quad (7)$$

$$x = -L, \quad t = t_1 = t_2 = t_0 \quad (8)$$

$$y = 0, \quad t = t_1|_{y=0}; \quad y = h, \quad t = t_2|_{y=h} \quad (9)$$

Transformaciones obradas sobre el sistema

La ecuación de Reynolds ha sido planteada en su forma integral debido a que su comportamiento numérico es mucho más adecuado que el de la forma diferencial como se ha mostrado en⁴

$$p(x) - p(-L) = 6(U_2 + U_1) \int_{-L}^x \mu \frac{h - d\rho_0/\rho}{h^3} dx \quad (10)$$

La satisfacción de las condiciones de contorno para la presión a la salida del canal, cuando se las impone en las ecuaciones (1) y (10), da lugar a dos nuevas ecuaciones

$$d = h|_{x=\bar{x}} \quad (11)$$

$$0 = \int_{-L}^{\bar{x}} \mu \frac{h - d\rho_0/\rho}{h^3} dx \quad (12)$$

Las ecuaciones (11) y (12) se utilizan para la determinación de las variables \bar{x} y d respectivamente.

En el problema analizado, el espectro de presiones a lo largo del contacto varía desde y hasta la presión ambiental describiendo, entre uno y tres extremos relativos dependiendo de la carga y los parámetros físicos y operativos del contacto⁵. Uno de los máximos relativos adquiere características singulares que dificultan su discretización (sumamente estrecho y agudo). Sin embargo, el algoritmo que aquí se utiliza ha logrado su perfecta resolución siguiéndolo a través del contacto con una distribución nodal adaptable, capaz de mantener siempre un nodo donde se ubica el pico (\hat{x}) y una alta densidad de nodos a su alrededor (Figura 2), a medida que la carga varía. Ello ha sido posible tomando la posición \hat{x} como parámetro de continuación y planteando la ecuación que surge de la condición de extremo de presión (gradiente nulo) en dicho punto (1)

$$d = \left(h \frac{\rho}{\rho_0} \right) \Big|_{x=\hat{x}} \quad (13)$$

Debido a las pequeñas dimensiones del sistema en la dirección transversal al flujo, puede introducirse la definición de temperatura media² t_m . Si se consideran aproximadamente iguales el gradiente de temperatura en la dirección del flujo y el gradiente de la temperatura media en dicha dirección, puede obtenerse de la ec. (5) una ecuación para la temperatura media. Ello se logra integrando dos veces en la variable y la ecuación (5) y promediándola luego en la altura del canal

$$t_m = -\frac{(U_2 + U_1)c}{24k} \left(\frac{dt_m}{dx} \right) \rho h^2 + \left(\frac{dp}{dx} \right) \left[\frac{c}{120k} \left(\frac{dt_m}{dx} \right) \frac{ph^4}{\mu} + \frac{(U_2 + U_1)}{24p_s k} ph^2 \right] - \left(\frac{dp}{dx} \right)^2 \left[\frac{1}{120p_s k} \frac{ph^4}{\mu} - \frac{1}{240k} \frac{h^4}{\mu} \right] + \frac{(U_2 - U_1)^2}{12k} \mu + \frac{(t_2 + t_1)}{2} \quad (14)$$

Por otro lado, las ecuaciones (6) admiten solución analítica, válidas cuando $\left(\frac{Ub}{2} \frac{\rho_0 c}{k}\right) > 10$, donde U es la velocidad del sólido considerado y b el semiancho del contacto hertziano⁷

$$t_1(x, 0) = \left(\frac{1}{\pi \rho_1 c_1 k_1 U_1}\right)^{1/2} \int_{-L}^x k \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=0} \frac{d\eta}{(x-\eta)^{1/2}} + t_0 \quad (15)$$

$$t_2(x, h) = \left(\frac{1}{\pi \rho_2 c_2 k_2 U_2}\right)^{1/2} \int_{-L}^x -k \frac{\partial t}{\partial y} \Big|_{y=h} \frac{d\eta}{(x-\eta)^{1/2}} + t_0 \quad (16)$$

Las expresiones correspondientes a los gradientes de la temperatura del fluido (t) en la dirección y se alcanzan en el proceso de obtención de la ecuación (14), luego pueden ser evaluadas sobre las fronteras del canal e incluidas en las ecuaciones (15) y (16).

La utilización de la temperatura media t_m transforma el problema bidimensional en unidimensional, lo que reduce notablemente el número de variables. En concordancia con ello se redefine la viscosidad (3) y la condición de contorno (8), reemplazando la temperatura t por la temperatura media t_m .

Finalmente, el modelo del problema TEHD de contacto lineal queda constituido por las ecs. (2), (3) redefinida, (4), (10), (11), (12), (13), (14), (15) y (16), con la única condición de contorno (8) (para t_m), ya que las otras condiciones de borde han sido utilizadas en el proceso de transformación de las ecuaciones.

METODOLOGÍA DE SOLUCIÓN EMPLEADA

La metodología clásica de solución del modelo presentado consiste básicamente en el desacoplamiento de las ecuaciones: en la solución del "problema elastohidrodinámico" (EHD) y luego la del "problema térmico", produciendo correcciones externas al flujo del cálculo para actualizar el problema EHD y reiniciar el ciclo. El procedimiento se repite tantas veces como sea necesario hasta llegar a la convergencia.

El problema EHD, en términos generales, está constituido por la ecuación de Reynolds (1) y la ecuación del canal deformado (4), donde la densidad y viscosidad del fluido (2 y 3) como las temperaturas son simplemente distribuciones que permanecen invariables. El problema térmico está constituido por el balance de energía dentro del fluido (5) de donde se obtiene la temperatura del lubricante manteniendo constantes el campo de presiones, el canal deformado, las distribuciones de densidad, viscosidad y temperaturas de las fronteras sólidas, todas actualizadas con las variables obtenidas en la previa solución del problema EHD. El análisis de convergencia se realiza por separado sobre los perfiles de presión y temperatura del fluido.

Dependiendo de las particularidades del modelo de ecuaciones que se trate, el esquema referido presenta modificaciones tendientes a conseguir una rápida convergencia y la mejor calidad de los resultados. En todos los casos estos resultados corresponden al campo de cargas altas y muy altas^{6,7,8,9,10,11,12} donde la inicialización, sobre todo del campo de presiones, resulta posible a partir de la distribución de presión hertziana del contacto seco equivalente⁵.

Los nuevos esquemas de solución se basan en el desacoplamiento del “problema elástico” de los problemas térmico e hidrodinámico, utilizando el método de Newton para la solución simultánea del “problema termo-hidrodinámico” compuesto por la ecuación de Reynolds y el balance de energía dentro del fluido, del cual se obtienen los perfiles de presión y temperatura. Estos algoritmos también dependen de una buena estimación inicial de la distribución de presión y la temperatura del fluido^{13,14,15}.

La metodología de solución simultánea de las ecuaciones que se ha utilizado en este trabajo está basada en algoritmos previos que se mostraron exitosos en la solución de sistemas elasto-hidrodinámicos (EHD), específicamente el de contacto lineal¹⁶. Las características primordiales del método pueden reseñarse en los siguientes puntos:

1. Adimensionalización de las ecuaciones
2. Discretización de las ecuaciones por medio del método de elementos finitos y los residuos ponderados de Galerkin
3. Solución simultánea de las ecuaciones por medio del método de Newton
4. Discretización adaptativa, en función de cada nueva posición de la frontera libre \hat{x} y de la posición del pico de presión \hat{x}
5. Control del paso del parámetro y continuación paramétrica

Dicho esquema tiene dos grandes ventajas: la de poder comenzar el proceso iterativo en la zona de comportamiento del sistema (cargas muy bajas) donde las variables pueden inicializarse con valores triviales, es decir, en el otro extremo de cargas respecto a las metodologías existentes y, que la corrección de la estimación inicial hasta llegar a la convergencia la realiza solamente el lazo de Newton.

El algoritmo ha sido preparado de manera que las únicas incógnitas sean la presión (p), las temperaturas del contacto (t_m), ($t_1|_{y=0}$) y ($t_2|_{y=h}$), la posición de la frontera libre (\hat{x}), la altura del canal a la salida del contacto (d) y la variable (y_d) que fija la posición del canal deformado; la posición del pico de presión \hat{x} es un parámetro más del sistema. De acuerdo con esta técnica de resolución, el control de convergencia se realiza sobre todas las variables de manera que el error en cada una de ellas esté por debajo de un cierto valor admisible al mismo tiempo. Las restantes variables (h , μ , ρ , dp/dx) se obtienen como función de las anteriores.

El algoritmo, a costas de una compleja programación, permite optimizar el recurso computacional reduciendo fundamentalmente el tiempo de cálculo que normalmente es más elevado que el que insumen otras metodologías. La determinación de la frontera desconocida del problema y la adaptabilidad de la distribución nodal se realizan gracias a una implementación unidireccional del método de los *spines*¹⁷. Una descripción detallada de la discretización de las ecuaciones y el algoritmo de solución puede verse en⁵.

RESULTADOS

Los resultados que se presentan fueron obtenidos utilizando los parámetros físicos y operativos propuestos por Cheng y Sternlicht², cuyos valores se encuentran en la Tabla I.

Respecto de los parámetros físicos, debe notarse que corresponden a sólidos muy

Radio equivalente (R)	0,01905 m
Módulo de elasticidad de los sólidos (E_{1-2})	$2,0664315 \times 10^{11}$ Pa
Coficiente de Poisson de los sólidos (ν_{1-2})	0,33
Viscosidad en condiciones ambientales (μ_0)	0,0665 Pas
Exponente de viscosidad por presión (α)	$-2,5406115 \times 10^{-8}$ 1/Pa
Exponente de viscosidad por temperatura (β)	4 555,6 K
Exponente de viscosidad por presión y temperatura (γ)	$1,5485632 \times 10^{-5}$ K/Pa
Módulo de compresibilidad del lubricante (p_s)	$3,0996 \times 10^9$ Pa
Temperatura ambiental (t_0)	310 K
Conductividad del fluido (k)	0,173 J/m Ks
Densidad del fluido en condiciones ambientales (ρ_0)	898,4 kg/m ³
Capacidad calorífica del fluido (c)	1 677 J/kg K
Conductividades de los sólidos (k_{1-2})	37,56 J/m Ks
Densidades de los sólidos (ρ_{1-2})	7 823 kg/m ³
Capacidades caloríficas de los sólidos (c_{1-2})	465 J/kg K
Longitud característica del dominio (L)	$0,5 \times 10^{-3}$ m
Altura del canal característica (h_0)	10^{-6} m
Velocidad media de las fronteras sólidas (\bar{U})	0,9012 m/s
Factor de deslizamiento ($(U_2 - U_1)/U_2$)	25 %

Tabla I. Parámetros físicos y operativos del contacto analizado

rígidos y a un lubricante muy piezoviscoso; en otras publicaciones⁹ los valores de dichos parámetros son más moderados, probablemente para facilitar la convergencia de los algoritmos empleados.

Como se ha dicho previamente, la metodología propuesta en este trabajo comienza con la obtención de resultados en el estado de cargas muy bajas, donde la separación entre los sólidos es grande, el campo de presiones exiguo y las deformaciones despreciables. En dichos estados de cargas muy bajas, la curva de presión finaliza muy cerca del centro del contacto describiendo un máximo relativo en la zona convergente del canal (donde $x < 0$). Ello permite inicializar la distribución de presión y la posición del extremo derecho del dominio con valores nulos y las temperaturas del contacto con los valores ambientales.

Una vez obtenida una solución con un pico de presión claramente definido, se adecúa la distribución nodal de tal forma que un nodo se ubique justamente donde se halla el extremo de dicho pico y a la vez exista un número considerable de nodos a ambos lados de él para poder resolverlo perfectamente. Todo ello, en virtud de que el pico de presión se irá agudizando al incrementarse la carga. El procedimiento de continuación paramétrica, esto es de aumento de la carga, se realiza usando como parámetro de continuación la posición (\hat{x}) del nodo que se encuentra justamente en el pico de presión. La posición \hat{x} se va desplazando continuamente hacia el extremo derecho del dominio y esto permite ir obteniendo sucesivas soluciones para cargas cada vez mayores.

El procedimiento descrito se dificulta cuando, como en este caso, el fluido es muy piezoviscoso, ya que en las zonas entre cargas bajas y moderadas el pico comienza a crecer enormemente y se torna extremadamente agudo con lo cual se requiere una discretización muy refinada en su entorno. Una vez superada la zona de crecimiento abrupto de la presión, la temperatura del lubricante crece lo suficiente para moderar la viscosidad del fluido haciendo que el extremo de presión se engrose y en consecuencia queda una distribución nodal innecesariamente refinada. En estos casos es conveniente seguir otro camino de continuación paramétrica.

El usado en este trabajo fue diseñado para poder alcanzar cargas elevadas moderando el crecimiento del pico de presión a través de la reducción de la piezoviscosidad del fluido. Con un coeficiente de presión $\alpha = -3,065 \times 10^{-8} \text{ Pa}^{-1}$ se partió de la zona de cargas muy bajas desplazando la posición del pico de presión (\hat{x}) hasta superar el centro del contacto. Luego, con \hat{x} fija se realizó continuación paramétrica en el coeficiente α hasta alcanzar el valor prefijado (Tabla I). Por último, moviendo \hat{x} hacia el centro del contacto (en el sentido de disminución de x), se alcanzó el resultado cuya carga es 125 kN/m. Cabe destacar, que en este algoritmo la carga (área debajo de la curva de presión) no es un parámetro. Ella se obtiene posprocesando el campo de presiones después de cada convergencia.

La Figura 2 contiene la curva de presión y su correspondiente canal deformado obtenida con el algoritmo actual y, superpuesta en la misma escala, las homólogas obtenidas por Cheng y Sternlicht y la distribución de presión hertziana del contacto seco equivalente⁵. Todos los resultados corresponden a la misma carga (125 kN/m).

Existen muchas diferencias entre los resultados mencionados siendo las más importantes las siguientes: a pesar de pertenecer a la misma carga, la curva de presión de Cheng y Sternlicht muestra una elevada tendencia a la distribución hertziana con un aspecto característico de contactos muy cargados, mientras que la aquí obtenida se asemeja más bien a las distribuciones de presión en contactos con cargas moderadas,

la presión máxima de nuestra solución es un 28 % mayor que la de Cheng y Sternlicht. La posición del pico de presión se halla sesgada hacia el centro del contacto y respecto a él se encuentra un 55 % más cerca que el predicho por Cheng y Sternlicht. Por último, los gradientes de presión en la zona de descarga (los menores que cero) son mucho más moderados en la solución actual que en la de Cheng y Sternlicht. Esta última parece ser la diferencia más significativa por las connotaciones que ello tiene sobre las temperaturas del contacto y, se presume, está directamente relacionada con la habilidad de la metodología para reproducir perfectamente el máximo de presión y ubicar exactamente la posición de la frontera de salida.

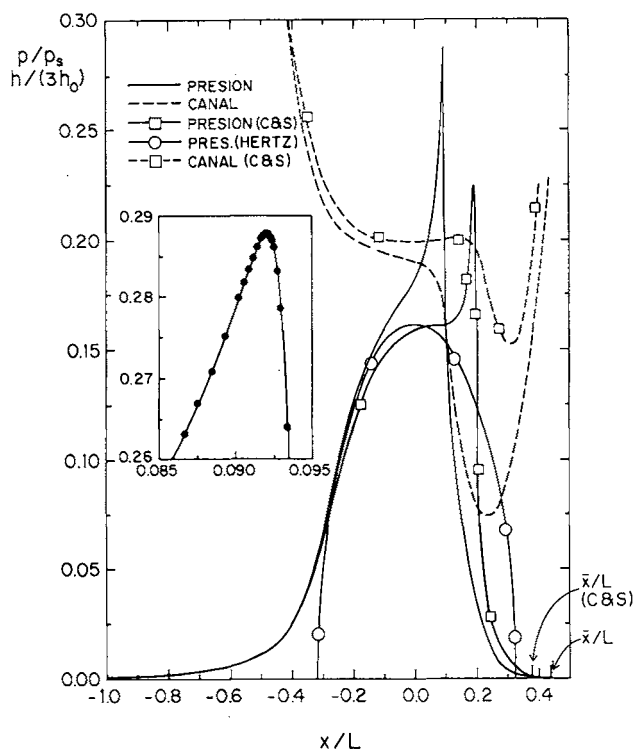


Figura 2. Comparación de los resultados de presión y canal deformado con los correspondientes a los de Cheng y Sternlicht y la distribución de presión hertziana, para una carga de 125 kN/m

La Figura 3 muestra las tres temperaturas analizadas en el contacto, es decir, la temperatura media del fluido y las temperaturas de las fronteras de los sólidos 1 y 2 correspondientes a nuestra solución y a las de Cheng y Sternlicht, todas en la misma escala. Nuevamente las diferencias que aparecen son destacables, empezando por las disímiles magnitudes entre las temperaturas en cada caso y viéndose como mientras la solución de Cheng y Sternlicht sigue casi proporcionalmente la curva de presión antes y después de la posición del pico, nuestra solución lo hace sólo hasta el pico para luego descender levemente, comenzar su recuperación y seguir creciendo hasta el final del

contacto, precisamente en la zona de descompresión donde los gradientes de presión son más modestos que los de Cheng y Sternlicht. Esta característica singular de los resultados que se presentan aparece insinuada en los resultados contenidos en la ref.⁹ aunque no hay discusión al respecto.

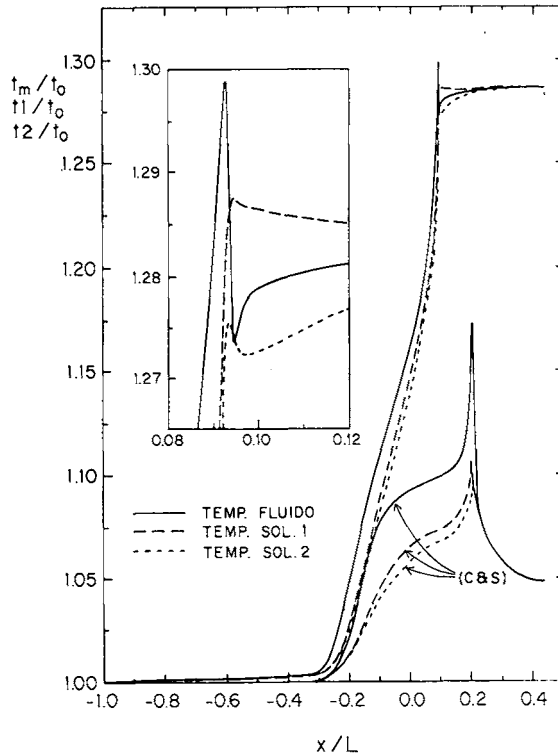


Figura 3. Comparación de los resultados de temperatura media del fluido y temperaturas de las fronteras sólidas con los correspondientes a Cheng y Sternlicht para una carga de 125 kN/m

También puede observarse que t_m , t_1 y t_2 están mejor destacadas en la solución de Cheng y Sternlicht que en la solución actual, donde se ve que t_m es levemente superior a t_1 y t_2 en la mayor parte del contacto y después del pico tiende a $(t_1 + t_2)/2$. Teniendo en cuenta las relativamente bajas velocidades con que se mueven los sólidos, parece lógico que el calor fluya fácilmente hacia ellos elevando su temperatura al nivel de la del fluido en toda la extensión del contacto. Más aún, la inercia térmica del sólido 1 le permite devolver energía al fluido en la zona de enfriamiento desde $x/L = 0,094$ y hasta el final del contacto contribuyendo a la recuperación de la temperatura del lubricante. Este fenómeno ha sido discutido en la ref.⁵.

En la Figura 4 se muestra el perfil de viscosidad en todo el dominio cuyas variaciones son determinantes en la evolución térmica del sistema como se verá luego. Puede observarse un enorme crecimiento de la viscosidad entre los puntos $x/L \simeq -0,31$ y $x/L \simeq -0,2$, justamente donde la presión crece rápidamente, por ejemplo: entre $-0,31$

y $-0,2$ de x/L la presión se duplica ($\sim 2,11$), mientras que la viscosidad aumenta prácticamente 37 veces ($\sim 36,8$). Se presume que este hecho tendría mucha influencia sobre la precisión con que cada algoritmo computa las variables. En toda esta zona, los efectos térmicos aún no son importantes de manera de afectar la viscosidad del lubricante (ver ecuación (3)).

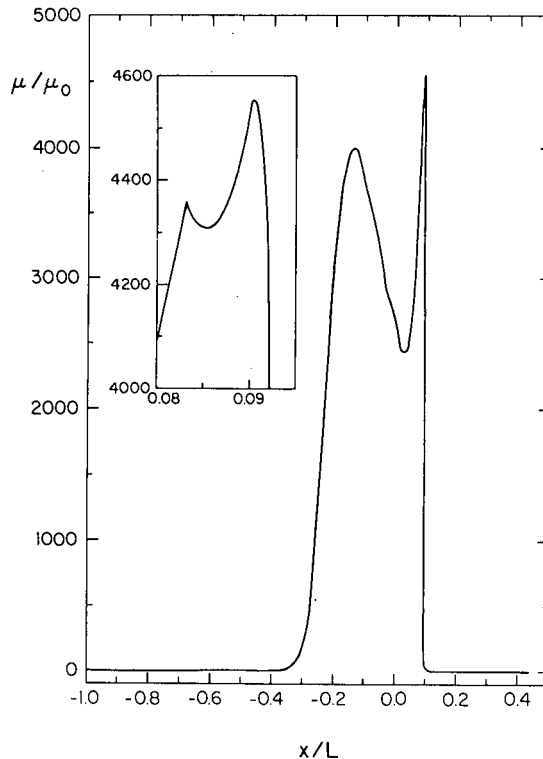


Figura 4. Variación de la viscosidad a lo largo del contacto para una carga de 125 kN/m

Entre $x/L \simeq -0,2$ y $x/L \simeq 0,04$ el crecimiento de la presión se hace mucho más suave y la temperatura crece rápidamente, introduciendo la disminución sostenida de la viscosidad.

El recorrido de la viscosidad muestra entre 0,04 y aproximadamente 0,09 un fuerte aumento. En dicho entorno crecen tanto la presión como la temperatura, pero aparentemente predomina la presión que produce la recuperación de la viscosidad. Sin embargo, a pesar de que el valor de la presión en $x/L = 0,09$ casi se ha duplicado ($\sim 1,85$) respecto al que poseía en $x/L = -0,13$, la viscosidad apenas supera el valor que tenía en este último punto debido al gran aumento de temperatura que se evidencia en las inmediaciones del pico de presión.

Al alcanzar la viscosidad su segundo pico, en un intervalo muy pequeño ésta disminuye y se recupera nuevamente (ver sector ampliado en la Figura 4). La explicación de este inusual comportamiento parece ser el pequeño descenso de temperatura cuando arranca el proceso de descompresión del flujo, produciendo un

aumento de viscosidad casi puntual. Luego de ello, la viscosidad cae abruptamente y al llegar a $x/L = 0,1$, ha disminuido a valores cercanos a la viscosidad ambiental (μ_0).

En el último tramo del canal de flujo, es decir, entre $x/L \simeq 0,23$ y $x/L \simeq 0,44$, la viscosidad es un orden de magnitud menor que μ_0 . Ello concuerda con las características de dicha zona que se muestra caliente y levemente presurizada.

El aspecto térmico del contacto está gobernado por la ecuación (5) que se compone por cuatro términos: transporte convectivo, transporte por conducción, generación viscosa y el término reversible de conversión de energía térmica que libera calor por compresión del fluido y lo absorbe por expansión del mismo. Después de cada convergencia, como un posprocesamiento de las variables, se pueden computar por separado las evoluciones de cada uno de dichos cuatro términos a lo largo del contacto. Ellos obran en la ecuación (14) y debido a las integraciones y promediación efectuadas en la variable y son funciones exclusivas de x .

El resultado es que la generación viscosa y la conducción hacia los sólidos son, en la mayor parte del contacto, aproximadamente un orden de magnitud mayores que el transporte convectivo y la conversión reversible de energía por presión, aspecto que tiene una importancia fundamental en la evolución de las variables.

La Figura 5 muestra la evolución del término de generación viscosa (Q_v) cuyas características son similares a la evolución de la viscosidad del fluido dentro del canal. Debe notarse que en las cercanías de $x/L = 0,1$ donde la viscosidad ha caído a valores ambientales, el término de generación viscosa aún tiene significación, debido a los grandes gradientes de velocidad que se producen por la fuerte constricción del canal. En nuestra solución, es esta generación viscosa la responsable de la recuperación de la temperatura en el último tramo del canal, desde $x/L = 0,1$ en adelante.

Puede especularse que el descenso pronunciado de las temperaturas en los resultados de Cheng y Sternlicht está influido por el enorme gradiente de descarga que muestra la curva de presión, que propiciaría una gran absorción de la energía almacenada hasta allí en el contacto. En nuestros resultados, el pico de presión se ve bastante simétrico con valores absolutos similares del gradiente de presión a ambos lados de él. Ello significa que toda la energía liberada en la compresión es reabsorbida en la descompresión justificando nuevamente el dominio de la generación viscosa en el último tramo del canal. Por último, la distribución de presión y el canal deformado de la solución de Cheng y Sternlicht parecen corresponder, por su aspecto, a la solución de un sistema EHD¹ con la cuales se han resuelto luego las temperaturas del contacto.

La experiencia numérica tendiente a dilucidar la causa de las diferencias encontradas ha sido muy grande, ella se ha centrado en la variación de los parámetros más importantes del sistema (E , k , k_{1-2} , p_s , \bar{U} , etc.), pero los resultados obtenidos han guardado, desde el punto de vista cualitativo, los perfiles que se observan en las Figuras 2 y 3. Una amplia discusión sobre esto puede verse en la ref.⁵.

Para corroborar los resultados presentados se ha construido un algoritmo que además de la presión y las temperaturas del contacto define como variables explícitas a las alturas del canal, la viscosidad, la densidad del fluido y el gradiente de presión. Ello redundaría en una programación más sencilla y en un cálculo menos intrincado, pero con casi el doble de incógnitas. Sin embargo, este nuevo programa arribó exactamente a los resultados que se obtuvieron con el algoritmo previo y que se muestran en las

Figuras 2 a 5, insumiendo alrededor de 3 minutos de CPU en una computadora *Alpha-1000 DIGITAL* para obtener una solución a partir de una buena estimación inicial.

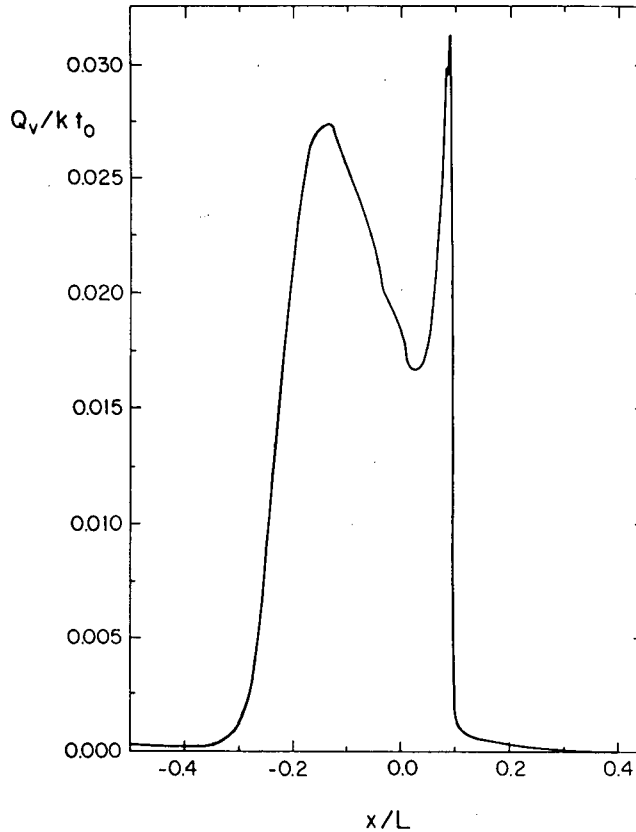


Figura 5. Variación del calor generado por efectos viscosos a lo largo del contacto para una carga de 125 kN/m

Otras pruebas se realizaron manipulando las ecuaciones o variables del sistema, por ejemplo la variación del peso relativo de los términos de generación de calor dentro la ecuación (5) o la fijación arbitraria de la frontera de salida, siempre tratando de alcanzar los resultados de Cheng y Sternlicht a partir de los predichos por nuestro algoritmo ya no para igualdad de carga, sino para igualdad en la posición de los picos de presión ($\hat{x} = 0,202$).

Habíamos mostrado que la viscosidad es la variable que más fuertemente varía (Figura 4). Por ello, un cómputo deficiente de la misma podría afectar por un lado la realimentación de la presión (ver ecuación (1)) y por otro la generación de calor de origen viscoso reduciéndola. La experiencia más demostrativa consistió entonces en reducir dicha generación viscosa $\mu \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} \right)^2$ a través de un factor ψ que, mediante continuación paramétrica, se disminuyó desde 1 hacia el límite 0. El algoritmo, por problemas de convergencia, no pudo obtener resultados más allá de $\psi = 0,6102$ y ellos se encuentran graficados junto a los correspondientes a $\psi = 1$ en las Figuras 6 a 8.

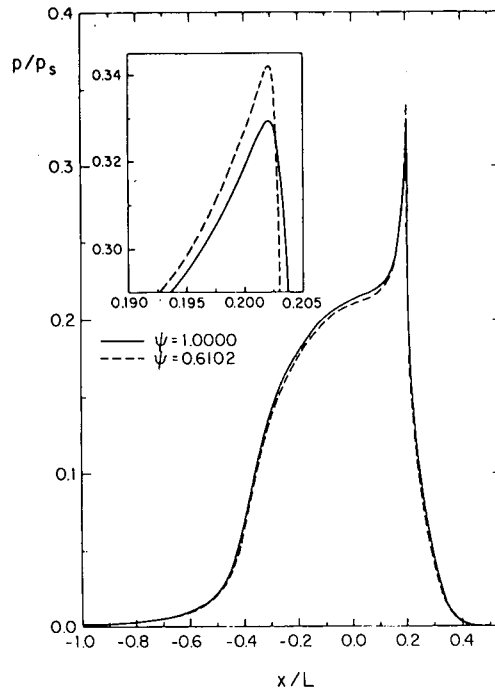


Figura 6. Comparación de la curva de presión obtenida para la misma posición del máximo respecto a Cheng y Sternlicht y su variación debido a la disminución del aporte de calor viscoso

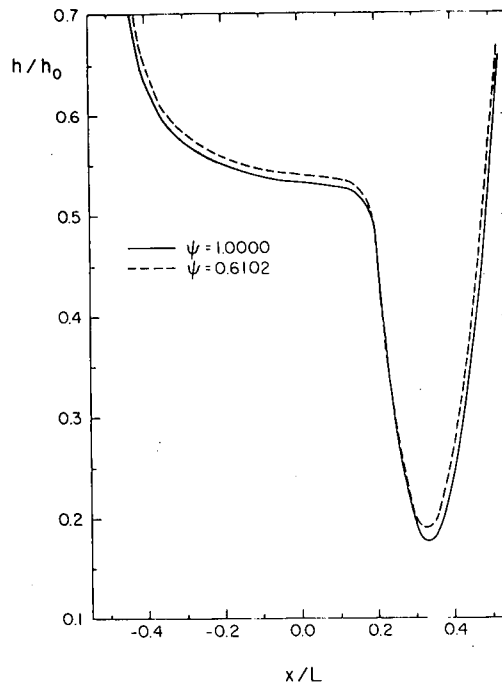


Figura 7. Comparación del canal deformado obtenido para la misma posición del máximo de presión respecto a Cheng y Sternlicht y su variación debido a la disminución del aporte de calor viscoso

Puede verse la mutación de los resultados en la dirección de los de Cheng y Sternlicht (Figuras 2 y 3). La carga pasó de ser un 67 % superior a ser un 62 % superior a la de Cheng y Sternlicht (Figura 6) y la curva de presión además muestra fundamentalmente el aumento de los gradientes de descompresión debido al crecimiento del máximo y al corrimiento de la frontera de salida hacia el centro del contacto. En la Figura 7 se ve que el canal ha aumentado, reduciendo sobre todo la fuerte constricción y en la Figura 8 la temperatura media del fluido muestra menores niveles térmicos y un mayor descenso en la zona de descompresión de acuerdo a la mayor absorción de calor en dicha región del contacto. Sin embargo, se siguen evidenciando la recuperación y el sostenimiento de la temperatura en el último tramo del canal.

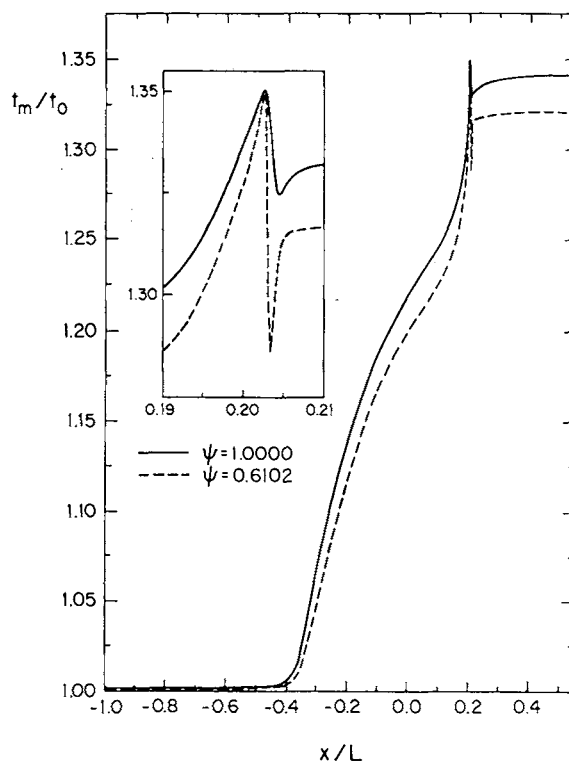


Figura 8. Comparación de la temperatura media del fluido obtenida para la misma posición del máximo de presión respecto a Cheng y Sternlicht y su variación debido a la disminución del aporte de calor viscoso

Cabe resaltar que el valor $\psi = 0,6102$ no indica que la generación viscosa se haya reducido en esa proporción, ya que a la disminución de dicho factor se contrapone el aumento de viscosidad debido al menor calentamiento del lubricante. En la Figura 9 pueden verse los calores viscosos para $\psi = 1$ y $\psi = 0,6102$, siendo fundamentalmente notoria la reducción de esta generación entre $x/L = 0,2$ y $x/L = 0,45$.

Para concluir, puede decirse que si bien no han sido reproducidos los resultados de Cheng y Sternlicht, la comprobación descrita -que es aún más demostrativa para

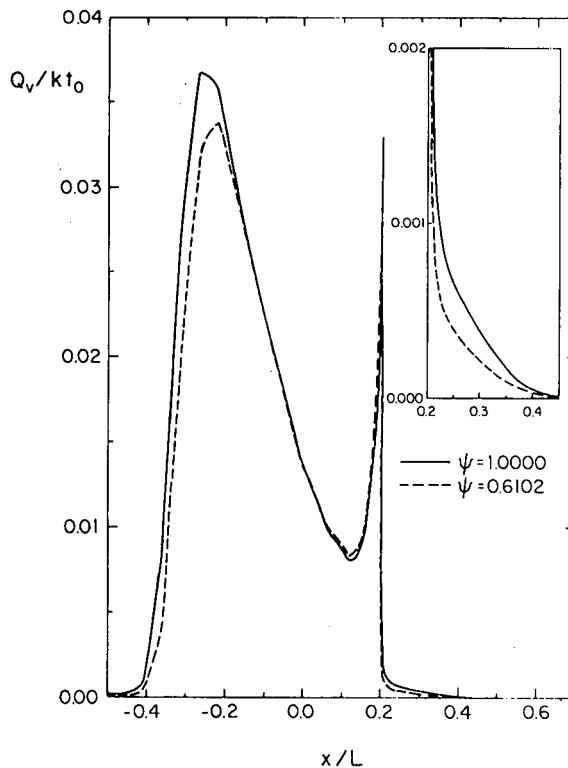


Figura 9. Comparación del calor viscoso obtenido para la misma posición del máximo de presión respecto a Cheng y Sternlicht ($\psi = 1$) y su variación correspondiente al factor $\psi = 0,6102$

conductividades del fluido más elevadas- ha indicado una posible causa acerca del origen de las diferencias que existen entre ellos y los resultados que se han presentado, al parecer pudo haber habido una deficiencia en el cómputo del aporte de calor viscoso por parte de Cheng y Sternlicht, o bien una sobreestimación del mismo por nuestro algoritmo, probablemente debido a causas de origen numérico producto del proceso de cálculo.

CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una metodología de solución simultánea de las ecuaciones del problema TFHD de contacto lineal, implementada sobre un modelo de ecuaciones unidimensionalizado en función de la temperatura media del fluido. El algoritmo resultante ha manejado el fuerte acoplamiento y no-linealidad de las ecuaciones, hallando la extensión del dominio del problema y soportando los elevados y estrechos picos de presión con total prescindencia de complejas estimaciones e intervenciones externas al flujo de cálculo. En virtud de ello, el algoritmo ha explorado todo el espectro de cargas, desde las bajas a las altas.

Los resultados presentados se han obtenido primeramente con un código

computacional en el cual se redujo el número de variables al mínimo (presión, temperaturas del fluido y los sólidos y frontera de salida) y luego corroborados con un nuevo código de solución simultánea donde variables como las alturas del canal, la densidad, la viscosidad y el gradiente de presión también se resuelven explícitamente.

Existen diferencias cuantitativas y cualitativas entre esta solución y la de Cheng y Sternlicht², las primeras en todo el contacto y las segundas sólo después de los máximos de presión y temperatura. En principio es difícil decir cuál es la solución más realista de las ecuaciones que conforman el modelo estudiado, aunque este trabajo ha sido dedicado a tratar de mostrar la corrección y lógica física de los resultados predichos por la metodología de solución simultánea de las ecuaciones. La dificultad que existe para calificar a cualquiera de las soluciones como errónea, abre la posibilidad de ahondar en las investigaciones, desde el campo numérico y en lo posible desde el experimental.

Finalmente, en contraposición a la gran virtud de resolver el sistema totalmente acoplado y garantizar que los resultados obtenidos sean la solución de las ecuaciones discretizadas del modelo, debe destacarse que la metodología de solución simultánea de ecuaciones requiere un gran trabajo analítico para la definición de la matriz jacobiana del sistema si se emplea el método de Newton y un considerable trabajo de realización y puesta a punto del código computacional⁵.

REFERENCIAS

1. D. Dowson y G.R. Higginson, "*Elastohydrodynamic Lubrication*", Pergamon Press, 2ª edición, London, (1977).
2. H.S. Cheng y B. Sternlicht, "A Numerical Solution for the Pressure, Temperature and Film Thickness between Two Infinitely Long Lubricated Cylinders under Heavy Loads", *J. of Basic Engng.*, p. 695, (1965).
3. D. Dowson, "A Generalized Reynolds Equation for Fluid-Film Lubrication", *Int. J. Mech. Sci.*, Pergamon Press Ltd., Vol. 4, pp. 159-170, (1962).
4. J. Di Paolo, C.M. Corvalán y F.A. Saita, "Solución numérica de la ecuación de Reynolds. Formulación diferencial vs. formulación integral", *Rev. Int. Cál. Dis. Ing.*, Vol. 11, 3, pp. 303-322, (1995).
5. J. Di Paolo, "Análisis computacional del problema termo-elastohidrodinámico de contacto lineal a través de la solución simultánea de sus ecuaciones gobernantes", Tesis doctoral, Universidad Nacional de Córdoba, Argentina, (1995).
6. B. Sternlicht, P. Lewis y P. Flynn, "Theory of Lubrication and Failure of Rolling Contacts", *J. of Basic Engng.*, June 1960, pp. 213-226, (1961).
7. M.K. Ghosh y B.J. Hamrock, "Thermal Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Line Contact", *ASLE Trans.*, Vol. 28, 2, p. 159, (1984).
8. S. Hsiao Hsing-Sen y B.J. Hamrock, "A Complete Solution for Thermal-Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts Using Circular Non-Newtonian Fluid Model", *J. of Trib.*, Vol. 91, 24, pp. 1-12, (1991).
9. F. Sadeghi y P.C. Sui, "Thermal Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Contacts", *J. of Trib.*, Vol. 112, p. 189, (1990).
10. H. Salehizadeh y N. Saka, "Thermal Non-Newtonian Elasto-Hydrodynamic Lubrication of Rolling Line Contacts", *J. of Trib.*, Vol. 113, p. 481, (1991).

11. P.C. Sui y F. Sadheghi, "Non-Newtonian Thermal Elastohydrodynamic Lubrication", *J. of Trib.*, Vol. **113**, p. 391, (1991).
12. Zhu Dong y Wen Shi-Zhu, "A Full Numerical Solution for the Thermoelasto-Hydrodynamic Problem in Elliptical Contacts", *J. of Trib.*, Vol. **106**, p. 246, (1984).
13. R. Wolff y A. Kubo, "The Application of Newton Method to Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Line Contacts", *J. of Trib.*, Vol. **116**, pp. 733-740, (1994).
14. R.T. Lee y C.H. Hsu, "A Fast Method for the Analysis of Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Rolling/Sliding Line Contacts", *Wear*, Vol. **166**, pp. 107-117, (1993).
15. R.T. Lee y C.H. Hsu, "Advanced Multilevel Solutions for Thermal Elastohydrodynamic Lubrication of Simple Sliding Line Contacts", *Wear*, Vol. **171**, pp. 227-237, (1994).
16. J. Di Paolo y F.A. Saita, "Solución del problema elastohidrodinámico de contacto lineal", *Rev. Int. Cál. Dis. Ing.*, Vol. **8**, 4, pp. 427-438, (1992).
17. S.F. Kistler, "The Fluid Mechanics of Curtain Coating nad Related Viscous Free Surface Flows", Tesis doctoral, University of Minnesota, USA, (1983).