

XFEM+: una modificación de XFEM para mejorar la precisión de los flujos locales en problemas de difusión con conductividades muy distintas

Felipe Cordero · Pedro Díez

Recibido: Septiembre 2009, Aceptado: Mayo 2010
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen Cuando se aplica XFEM a los problemas de difusión en un sistema de múltiples fases, esta popular estrategia produce una representación inexacta de los flujos en la vecindad de la interfase. El enriquecimiento XFEM mejora la calidad global de la solución pero no satisface algunos rasgos locales de los flujos. Así, los flujos numéricos resultantes en la vecindad de la interfase no es realista. Este artículo introduce una restricción adicional a la formulación XFEM añadiendo una propiedad que reproduzca los rasgos de los flujos locales en la zona de transición. Esta aproximación será denotada como XFEM+ y requiere añadir condiciones lineales al sistema algebraico XFEM. Se aplicará la estrategia XFEM+ a varios ejemplos y las soluciones obtenidas muestran una mejora espectacular con respecto al XFEM estándar.

XFEM+: MODIFYING XFEM TO IMPROVE THE ACCURACY OF LOCAL FLOWS IN DIFFUSION PROBLEMS WITH CONTRASTED CONDUCTIVITIES

Summary When applied to diffusion problems in a multiphase setup, the popular XFEM strategy suffers of an inaccurate representation of the local fluxes in the vicinity of the interphase. The XFEM enrichment improves the global quality of the solution but it is not enforcing any local feature to the fluxes. Thus, the resulting numerical fluxes in the vicinity of the interphase are not realistic. This paper introduces an additional restriction to the XFEM formulation aiming at properly reproducing the features of the local fluxes in the transition zone. This approach is denoted as XFEM+ and requires adding linear constraints to the XFEM algebraic system. The XFEM+ strategy is applied to several examples and the solutions obtained show a spectacular improvement with respect to the standard XFEM.

Felipe Cordero, Pedro Díez
Laboratori de Càlcul Numèric
Departament de Matemàtica Aplicada III
Universitat Politècnica de Catalunya
Jordi Girona 1-3, Mòdul C2
E-08034 Barcelona, España
e-mail: felipe.cordero@upc.edu;
pedro.diez@upc.edu
Web: <http://www-lacan.upc.edu>

Felipe Cordero
Departamento de Matemática
Facultad de Ciencias, Universidad de Los Andes
La Hechicera, 5101 Mérida
República Bolivariana de Venezuela
e-mail: cordero@ula.ve

1. Introducción

El método de XFEM [2-4,6,9] aprovecha el concepto de la partición de la unidad para enriquecer la solución del Método de los Elementos Finitos (MEF o FEM) incorporando funciones que contengan características de la solución exacta que el FEM no contiene. En particular, esta estrategia es útil para aproximar de manera eficiente singularidades o discontinuidades asociadas a fracturas, fisuras o cambios de fase. A menudo este método se asocia al uso de Level Sets [7,8] que permiten describir la geometría de la discontinuidad sin hacerla coincidir con los contornos de los elementos.

En este artículo, nos centramos en un problema de transmisión de calor en un medio no homogéneo, con dos materiales distintos separados por una interfase. El fenómeno que se pone de manifiesto y que se va a corregir con la estrategia propuesta, se asocia a dos fases con propiedades materiales (conductividades) muy distintas.

En este contexto, el XFEM proporciona una mejora global, en norma energética. Pero no controla el error local en los flujos que, a menudo, son las cantidades de interés del problema. Así, los valores de los flujos numéricos que proporciona XFEM cabe la interfase son poco precisos, especialmente del lado del material con la conductividad más alta.

Para paliar este problema, en este artículo se propone una modificación ulterior a XFEM, que denominamos XFEM+ y que permite imponer la condición del salto de flujos en la interfase de manera fuerte. Esto produce una buena descripción de los flujos alrededor de la interfase.

El resto del artículo se estructura como sigue. En el Apartado 2 se presenta el problema de valores en la frontera a resolver y las ecuaciones básicas. El Apartado 3 describe las técnicas numéricas habituales para resolver el problema, la descripción de fases mediante Level sets, el método de elementos finitos (FEM) y el XFEM. Los problemas que se encuentran al determinar los flujos con FEM y XFEM se muestran en el Apartado 4. La metodología propuesta para imponer de forma fuerte la continuidad de los flujos a través de la interfase se describe en el Apartado 5. Finalmente, en el Apartado 6 se presentan ejemplos numéricos que validan la estrategia que se introduce.

2. Planteamiento del Problema

2.1. Problema modelo

Se considera un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con $d = 2$ o $d = 3$, abierto y acotado con frontera suave dividida en dos partes en lo que se refiere a las condiciones de contorno: $\partial\Omega = \bar{\Gamma}_N \cup \bar{\Gamma}_D$, con $\Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset$ siendo Γ_N la parte donde se imponen condiciones de tipo Neumann y Γ_D donde se imponen condiciones de tipo Dirichlet. En este dominio se desea resolver el siguiente problema de contorno que incluye la ecuación de Poisson:

$$\nabla \cdot (-\nu \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega \quad (1a)$$

$$-\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{en } \Gamma_N \quad (1b)$$

$$u = u_D \quad \text{en } \Gamma_D \quad (1c)$$

donde u es la incógnita (que, por ejemplo, representa la temperatura), f es el término fuente, g_N es el flujo

de calor prescrito en Γ_N , $\mathbf{n}$ la normal unitaria exterior, u_D la temperatura prescrita en Γ_D y ν es el parámetro que, en el caso de un problema térmico, representa la conductividad.

En este problema de balance, el flujo se define mediante la expresión siguiente

$$\mathbf{q} = -\nu \nabla u. \quad (2)$$

Se va a considerar que el coeficiente ν (conductividad) corresponde a dos materiales distintos. Es decir, el dominio Ω se divide en dos partes Ω_1 y Ω_2 asociados a los valores ν_1 y ν_2 , tal como se ilustra en la Figura 1(a). Los dos subdominios Ω_1 y Ω_2 tienen la frontera común $\Gamma_{\text{int}} = (\partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2) \setminus \partial\Omega$ y completan el dominio $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Gamma_{\text{int}}$.

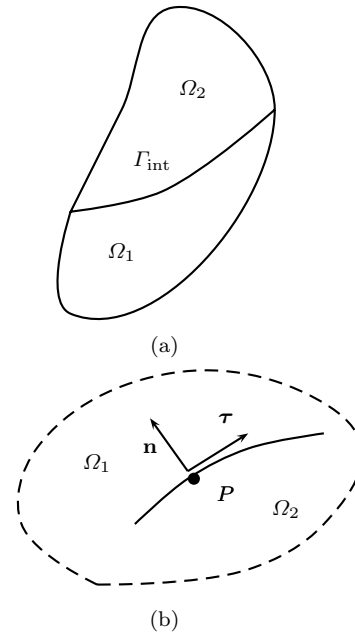


Figura 1. Representación del dominio Ω , los subdominios y la interfase (a) y vectores normal y tangente en un punto genérico de la interfase (b)

En este caso, en la interfase Γ_{int} se ha de verificar la continuidad de la componente normal del flujo. La ecuación (1a) no tiene sentido en los puntos de la discontinuidad y se tiene que sustituir por la continuidad del flujo normal. Es decir, en $P \in \Gamma_{\text{int}}$ se introducen los flujos a ambos lados de la interfase

$$\mathbf{q}_1 = -[\nu \nabla u]|_{\Omega_1} = -\nu_1 \nabla u|_{\Omega_1} \quad (3a)$$

$$\mathbf{q}_2 = -[\nu \nabla u]|_{\Omega_2} = -\nu_2 \nabla u|_{\Omega_2} \quad (3b)$$

y se impone la continuidad de su componente normal

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n}$$

siendo $\mathbf{n}$ una normal unitaria a Γ_{int} en el punto genérico P (no importa el signo).

Así el problema de contorno (1) se tiene que reescribir como sigue:

$$\nabla \cdot (-\nu \nabla u) = f \quad \text{en } \Omega_1 \cup \Omega_2 \quad (4a)$$

$$-\nu \nabla u \cdot \mathbf{n} = g_N \quad \text{en } \Gamma_N \quad (4b)$$

$$u = u_D \quad \text{en } \Gamma_D \quad (4c)$$

$$\mathbf{q}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{q}_2 \cdot \mathbf{n} \quad \text{en } \Gamma_{\text{int}} \quad (4d)$$

Si los valores de ν_1 y ν_2 son distintos, la condición (4d) implica que el gradiente de u tiene una discontinuidad en la componente normal a Γ_{int} .

$$\nabla u|_{\Omega_1} \cdot \mathbf{n} \neq \nabla u|_{\Omega_2} \cdot \mathbf{n} \quad (5)$$

Este salto del gradiente será mayor cuanto mayor sea la diferencia entre ν_1 y ν_2 . Sin embargo, la continuidad de la incógnita u en Ω garantiza que la componente tangencial del gradiente es continua. Es decir que si denominamos $\boldsymbol{\tau}$ al vector tangente a Γ_{int} en P , tenemos que:

$$\nabla u|_{\Omega_1} \cdot \boldsymbol{\tau} = \nabla u|_{\Omega_2} \cdot \boldsymbol{\tau}.$$

2.2. Forma variacional del problema

La forma débil del problema (4) requiere introducir los siguientes espacios funcionales. El espacio de funciones V , donde se encuentra la solución del problema (1), se define como

$$V := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = u_D \text{ en } \Gamma_D\},$$

y el espacio de variaciones o funciones de prueba, V_0 , se define como

$$V_0 := \{u \in \mathcal{H}^1(\Omega) : u = 0 \text{ en } \Gamma_D\}.$$

Así, la forma débil de (4) se escribe como encontrar $u \in V$ tal que

$$a(u, v) = L(v), \quad \text{para todo } v \in V_0, \quad (6)$$

donde la forma bilineal $a(\cdot, \cdot)$ y el funcional lineal $L(\cdot)$ quedan definidos por

$$\begin{aligned} a(u, v) &:= \int_{\Omega_1 \cup \Omega_2} \nu \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega \quad \text{y} \\ L(v) &:= \int_{\Omega} f v \, d\Omega + \int_{\Gamma_N} g_N v \, ds. \end{aligned}$$

Nótese que la ecuación de continuidad (4d) se impone de manera implícita en la forma débil. De hecho, esta imposición es débil en el sentido de que se obtiene de la misma manera que las condiciones de Neumann

(4b). Es decir, que sólo se verificará exactamente al resolver la ecuación de manera exacta en el espacio de dimensión infinita V . Al sustituir V por un espacio de dimensión finita, tal como se hace al utilizar el FEM, estas restricciones sólo se verifican de manera aproximada.

3. Descripción de fases con level set: FEM y XFEM

3.1. Level set

La técnica de los level sets se utiliza para describir la localización de las fases sin tener que hacer coincidir la línea de interfase con los lados de los elementos (o la superficie de interfase y las caras de los elementos en 3D). Para ello, se introduce una función de nivel ϕ (la función level set) de manera que

$$\phi(x) = \begin{cases} > 0, & x \in \Omega_1 \\ = 0, & x \in \Gamma_{\text{int}} \\ < 0, & x \in \Omega_2 \end{cases}$$

De hecho, en la práctica, la función ϕ se toma como la función distancia a la interfase, con signo. A menudo, además, esta función se trunca a una cierta distancia de manera que a partir de ese momento se toma constante.

3.2. Método de elementos finitos (FEM)

El espacio funcional donde se encuentra la solución FEM del problema está asociado a una malla de elementos con tamaño característico H , se denomina V_H y es un subespacio de V , $V_H \subset V$. La malla consiste en una discretización del dominio Ω en elementos Ω^k , $k = 1, \dots, n_{el}$ disjuntos y que cubren el dominio, es decir, tales que $\overline{\Omega} = \bigcup_k \overline{\Omega}^k$, y, para $k \neq k'$, $\Omega^k \cap \Omega^{k'} = \emptyset$.

Este espacio viene generado por las funciones de interpolación (o de forma) N_i , $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$, asociadas a los n_{poin} nodos de la malla: $V_H = \text{span}\{N_1, \dots, N_{\text{poin}}\}$.

La aproximación en V_H de u se denomina u_H y queda determinada por los valores nodales u_i , $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$:

$$u_H = \sum_{i=1}^{n_{\text{poin}}} N_i u_i.$$

La aproximación FEM, u_H es tal que

$$a(u_H, v) = L(v), \quad \text{para todo } v \in V_{H_0} \subset V_0, \quad (7)$$

siendo V_{H_0} la contraparte discreta del espacio V_0 .

La solución u_H se obtiene determinando los coeficientes u_i , $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$ resolviendo un sistema de

ecuaciones lineales algebraico. El vector columna que contiene los coeficientes u_i , $\mathbf{u}$, es solución de

$$\mathbf{K}_{uu}\mathbf{u} = \mathbf{F}_u, \quad (8)$$

donde $\mathbf{K}_{uu}$ denota la matriz de rigidez y $\mathbf{F}_u$ el vector de fuerzas cuyas componentes genéricas son $[\mathbf{K}_{uu}]_{ij} = a(N_i, N_j)$ y $[\mathbf{F}_u]_j = L(N_j)$, respectivamente.

Se va a tomar como hipótesis que la solución numérica verifica las condiciones de Dirichlet exactamente. Es decir, se acepta que el error asociado a la solución FEM, $u - u_H$, pertenece al espacio V_0 . O lo que es lo mismo, consideramos que el término de oscilaciones de los datos es despreciable (es decir que consideramos que u_D se describe exactamente en V_H). La ortogonalidad de Galerkin garantiza que u_H es óptima en el sentido de que

$$\|u - u_H\| \leq \|u - v\| \quad \forall v \in V_H$$

siendo $\|\cdot\|$ la norma inducida por $a(\cdot, \cdot)$, $\|v\|^2 = a(v, v)$.

La función level set, ϕ , también se aproxima por una función de V_H , ϕ_H . Los valores nodales ϕ_i , $i = 1, \dots, n_{poin}$ permiten interpolar ϕ en cada elemento:

$$\phi \approx \phi_H = \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i \phi_i.$$

De esta manera, la descripción discreta de la interfase es una curva continua, suave en el interior de los elementos y con discontinuidades en la pendiente en los lados de los elementos que contienen la interfase. En el caso de elementos lineales es, precisamente, una línea poligonal quebrada.

Esto permite también calcular el vector normal unitario a la interfase en un punto P de la interfase interior a un elemento Ω^k :

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla \phi_H}{\|\nabla \phi_H\|} \quad \text{con} \quad \nabla \phi_H = \sum_{i=1}^{n_{poin}} \nabla N_i \phi_i. \quad (9)$$

3.3. Método de elementos finitos extendidos (XFEM)

La solución FEM, u_H , es suave en el interior de los elementos, es Sin embargo, al utilizar level sets para describir la interfase, ésta pasa por el interior de los elementos. Además, sabemos que el gradiente de la solución exacta del problema, u , es discontinuo en la interfase, véase (4d) y (5). El XFEM es un método en el que se enriquece la solución del FEM para añadir a la aproximación, características de la solución exacta que se conocen a priori y que en principio la solución FEM no contiene. Esta idea se utiliza, en este contexto, para añadir discontinuidades en la derivada normal en la interfase.

Para ello se introduce una función *ridge* (carena o arista), R , introducida en [5] y definida por

$$R = \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i |\phi_i| - \left| \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i \phi_i \right|.$$

Esta función se anula en los elementos que no contienen la interfase (todos los ϕ_i son del mismo signo) y, en los elementos que sí la contienen, se anula en los nodos y presenta una discontinuidad en la derivada precisamente sobre la interfase. En lo que sigue, se denomina $\mathcal{E}_{enr}$ al conjunto de índices de los elementos que contienen parte de la interfase. Así, R sólo es distinto de cero en los elementos Ω^k con $k \in \mathcal{E}_{enr}$.

De hecho, se puede restringir el rango de variación del índice i a aquellos nodos que pertenecen a elementos que contienen la interfase. Estos nodos se denominan nodos enriquecidos y el conjunto de valores de estos índices se denomina $\mathcal{N}_{enr}$. Así la ecuación anterior se puede reescribir

$$R = \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i |\phi_i| - \left| \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i \phi_i \right|.$$

La aproximación XFEM, u_X , se escribe como

$$u_X = \sum_{i=1}^{n_{poin}} N_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_{enr}} R N_j a_j, \quad (10)$$

donde a_i son los valores nodales enriquecidos. Nótese que los valores nodales u_i de la solución u_X en general no coinciden con los de u_H . Al introducir el enriquecimiento también las incógnitas originales cambian.

La solución u_X pertenece al espacio discreto $V_X = V_H \oplus \text{span}\{R N_i, i \in \mathcal{N}_{enr}\}$ y se caracteriza por una ecuación análoga a (7) sustituyendo V_H por V_X . El sistema algebraico resultante es

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} \\ \mathbf{K}_{ua}^T & \mathbf{K}_{aa} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_a \end{bmatrix} \quad (11)$$

donde $\mathbf{a}$ es el vector columna de las incógnitas a_j , $j \in \mathcal{N}_{enr}$ y las componentes genéricas de las matrices son $[\mathbf{K}_{ua}]_{ij} = a(N_i, R N_j)$, $[\mathbf{K}_{aa}]_{ij} = a(R N_i, R N_j)$ y $[\mathbf{F}_a]_j = L(R N_j)$.

De la misma manera que antes, la solución XFEM es óptima en el sentido de que verifica la ortogonalidad de Galerkin en V_X . Es decir que el error $u - u_X$ satisface:

$$\|u - u_X\| \leq \|u - v\| \quad \forall v \in V_X$$

En particular se puede tomar $v = u_H \in V_H \subset V_X$ y se deduce que

$$\|u - u_X\| \leq \|u - u_H\|. \quad (12)$$

Así, la solución u_X es, desde el punto de vista energético (global), mejor que u_H .

4. Aproximación del flujo en la zona de interfase

Como ya se ha mencionado, el FEM no puede satisfacer la condición (4d) en los puntos de la interfase ya que el gradiente es continuo en el interior de los elementos, contradiciendo (5). Recuerdese que el salto del flujo normal en un punto P de la interfase interior a un elemento, que habría de ser nulo, se expresará como

$$(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) \cdot \mathbf{n} = (-\nu_1 \nabla u_H + \nu_2 \nabla u_H) \cdot \mathbf{n} = (\nu_2 - \nu_1) \nabla u_H \cdot \mathbf{n}$$

dado que ∇u_H es continuo en el interior de cualquier elemento. Obviamente, esto sólo permite verificar (4d) si ambos flujos normales, $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$, son nulos. Esto no es cierto, en general. Se debe esperar, por lo tanto, que la solución FEM de este problema no sea una buena aproximación a la solución exacta, especialmente cuando el contraste entre ν_1 y ν_2 es grande. Este fenómeno se ilustra en la Figura 4.

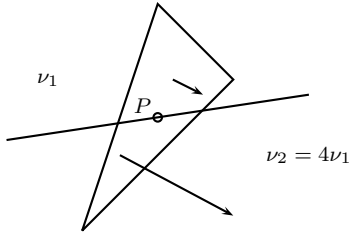


Figura 2. En un elemento lineal que contiene parte de la interfase el gradiente es constante y, por lo tanto, los flujos a ambos lados de la interfase son proporcionales a los valores de ν_1 y ν_2 : así, la condición de continuidad del flujo normal no se puede verificar

El XFEM enriquece la solución introduciendo la posibilidad de que aparezca un salto en la componente normal del gradiente para intentar satisfacer (4d), según se indica en (10). Así, el gradiente de u_X resulta ser

$$\nabla u_X = \sum_{i=1}^{n_{poin}} \nabla N_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_{enr}} (R \nabla N_j + \nabla R N_j) a_j$$

La discontinuidad de ∇u_X en un punto P de Γ_{int} interior a un elemento Ω^k proviene de ∇R puesto que ∇N_i y R son continuos en el interior de Ω^k . De hecho, recordando que ϕ es positivo en Ω_1 y negativo en Ω_2 , tenemos que la expresión de R a ambos lados de la interfase es

$$R|_{\Omega_1} = \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i (|\phi_i| - \phi_i) \quad \text{y} \quad R|_{\Omega_2} = \sum_{i \in \mathcal{N}_{enr}} N_i (|\phi_i| + \phi_i) \quad (13)$$

Obsérvese que $\nabla R|_{\Omega_2} - \nabla R|_{\Omega_1} = 2\nabla \phi_H \neq 0$. De hecho, como se esperaba, el salto del gradiente de R es paralelo a la normal $\mathbf{n}$ ya que esta es paralela a $\nabla \phi_H$.

Gracias a esta propiedad, se espera que el XFEM sea capaz de obtener una mejora sustancial en la aproximación de la solución exacta. De hecho, como se muestra a continuación, el XFEM permite obtener la solución exacta en un problema sencillo en el que el FEM propone una solución muy poco precisa.

Para ilustrar esta propiedad y para motivar los desarrollos que se presentan a continuación, se acude a un ejemplo sencillo (ejemplo 1). Considérese el problema (4) con los datos siguientes: $\Omega = [0, 1] \times [0, 1]$, $g_N = 0$ en los lados verticales de Ω , $u_D = 1$ en el lado superior, $u_D = 0$ en el lado inferior de Ω y $f \equiv 0$. Se toman dos materiales con un contraste de conductividades importante: $\nu_1 = 1000$ en la parte superior y $\nu_2 = 1$ en la parte inferior. Se toman dos configuraciones de las fases: la primera con una interfase horizontal en $y = 0,55$ (que corta los elementos de la malla propuesta) y la segunda con una interfase inclinada 10° .

En la primera configuración (ejemplo 1a), ver Figura 3, el problema es prácticamente 1D y se dispone de solución analítica:

$$u(x, y) = \frac{1}{550,45} \begin{cases} 1000 y & \text{para } y \leq 0,55 \\ y + 549,45 & \text{para } y > 0,55 \end{cases}$$

En este caso, el FEM se comporta mal debido a la imposibilidad de reproducir el salto de flujos normales mientras que el XFEM captura la solución exacta y, por lo tanto, muestra un comportamiento óptimo.

Sin embargo, esta capacidad que tiene el espacio funcional para capturar el salto del gradiente no hace que en todos los casos los flujos numéricos sean de una calidad aceptable. La segunda configuración (ejemplo 1b) está asociada a una solución algo más compleja, completamente 2D y de la que no se dispone de solución analítica. Aún así se puede calcular fácilmente una solución muy precisa utilizando el FEM con una malla que respete la interfase (de manera que la interfase coincida con lados de los elementos de la malla y que no sea necesario utilizar un level set). Esta solución se tomará como referencia. Utilizando la descripción con level set de la interfase, los resultados, tanto con FEM como con XFEM, se muestran en la Figura 4. Se puede observar que los resultados mejoran al usar XFEM pero que la aproximación de los flujos locales no es buena, ya que no se respeta la condición de continuidad de la componente normal del flujo. Desde el punto de vista energético, es decir con un criterio global en todo el dominio, la solución mejora sensiblemente. Sin embargo, en la cantidad de interés local que son los flujos, la cali-

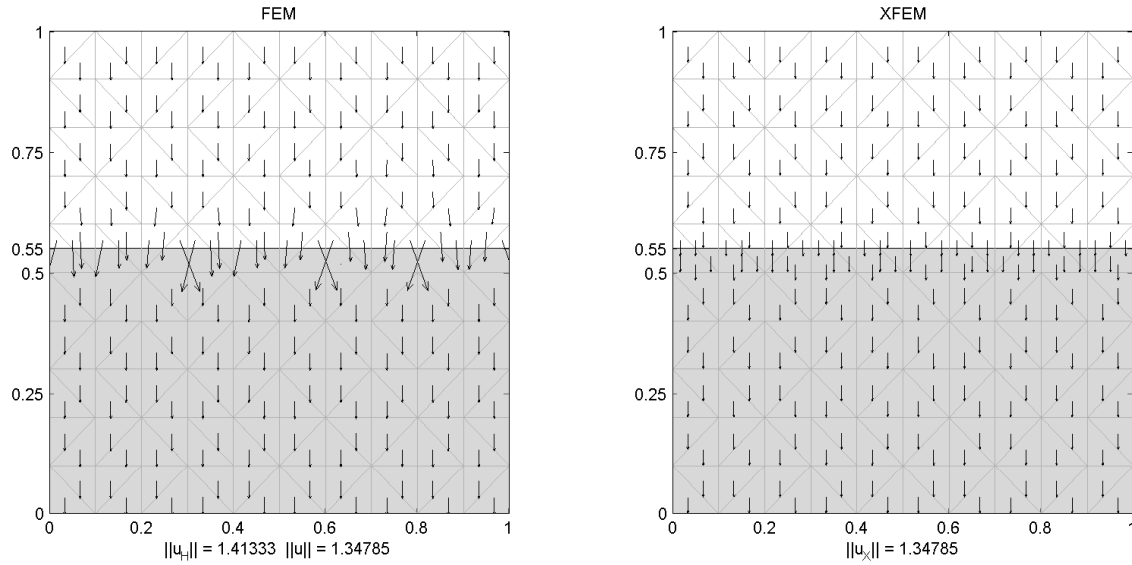


Figura 3. Ejemplo 1a (interfase horizontal): tanto en la configuración de los flujos locales como en la norma energética de la solución el FEM proporciona una solución mucho menos precisa que XFEM que, en este caso, proporciona la solución exacta

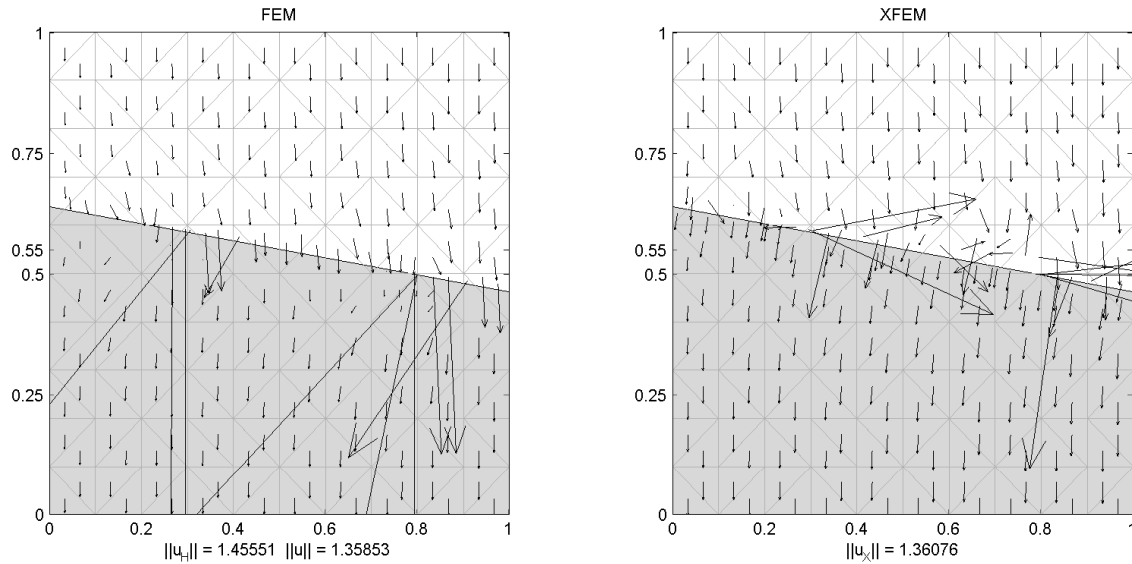


Figura 4. Ejemplo 1b (interfase inclinada 10°): la mejora que introduce el XFEM supone un mejor comportamiento en la aproximación de la norma energética pero no en la aproximación de los flujos en las proximidades de la interfase.

dad de la solución XFEM no es tan buena como cabría esperar.

Este ejemplo ilustra un fenómeno que se ha observado en problemas prácticos: el deterioro de los flujos numéricos que proporciona XFEM cerca de la interfase cuando los parámetros de conductividad son muy distintos. En la Figura 4 se puede observar que los flujos que son poco precisos son los que corresponden a los puntos que están en la zona con $\nu = 1000$. Esto es

así ya que en esa zona aunque los errores en el cálculo del gradiente sean pequeños, los errores en los flujos se multiplican por ν . Desde el punto de vista práctico, cuando se desea conocer los flujos en la interfase, esto puede representar una desventaja. En el apartado siguiente se propone una estrategia numérica que palia este inconveniente modificando el XFEM añadiendo como restricción adicional la verificación de la condición de continuidad de los flujos (4d).

5. Imposición explícita de la continuidad de flujos: el XFEM+

El problema al aplicar el XFEM en este contexto proviene de que a pesar de que el tipo de aproximación que se utiliza en XFEM (FEM enriquecido) es capaz de aproximar satisfactoriamente el salto, dado que el criterio de aproximación que se utiliza (la resolución discreta de la forma variacional del problema (6) en V_X) es global, la condición (4d) no se satisface exactamente y, en algunas circunstancias, ni siquiera aproximadamente. De hecho, entre las posibles soluciones en V_X se escoge aquella que minimiza la norma energética global del error aunque los errores en los flujos locales sean grandes.

5.1. Continuidad del flujo normal en un punto de la interfase

Una manera sencilla de evitar este problema es añadir a la ecuación a resolver la restricción (4d) en algunos de los puntos P de Γ_{int} de manera explícita. Para ello, se presenta a continuación la expresión algebraica en el contexto de la aproximación XFEM de (4d). Recordando la expresión de los valores de R en un punto P de la interfase a ambos lados dada en (13), se obtiene una expresión para la diferencia de los gradientes de R multiplicados por los valores correspondientes de ν a cada lado:

$$\begin{aligned} ll\nu_2 \nabla R|_{\Omega_2} - \nu_1 \nabla R|_{\Omega_1} &= \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \nabla N_j [(\nu_2 - \nu_1)|\phi_j| \\ &\quad + (\nu_2 + \nu_1)\phi_j] = \\ &\quad (\nu_2 - \nu_1) \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \nabla N_j \tilde{\phi}_j \end{aligned} \quad (14)$$

donde se han introducido los valores $\tilde{\phi}_j$ definidos por

$$\tilde{\phi}_j = |\phi_j| - \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \phi_j \quad (15)$$

Así, la expresión del salto de flujos a ambos lados de un punto $P \in \Gamma_{\text{int}}$, $\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2$, resulta ser

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 &= -\nu_1 \nabla u_X|_{\Omega_1} + \nu_2 \nabla u_X|_{\Omega_2} \\ &= \sum_{i=1}^{n_{\text{poin}}} (\nu_2 - \nu_1) \nabla N_i u_i + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} (\nu_2 - \nu_1) R \nabla N_j a_j \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} (\nu_2 \nabla R|_{\Omega_2} - \nu_1 \nabla R|_{\Omega_1}) N_j a_j. \end{aligned} \quad (16)$$

Y, sustituyendo (14) en (16), se obtiene

$$\begin{aligned} l\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 &= (\nu_2 - \nu_1) \left(\sum_{i=1}^{n_{\text{poin}}} \nabla N_i u_i + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{\ell \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \nabla N_\ell \left(R + \sum_{j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}} \tilde{\phi}_j N_j \right) a_\ell \right). \end{aligned} \quad (17)$$

Obsérvese que la condición (17) se puede imponer en cada punto $P \in \Gamma_{\text{int}}$ (en un elemento enriquecido Ω^k , con $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$) y representa una restricción algebraica sobre las incógnitas u_i y a_j (en principio para $i = 1, \dots, n_{\text{poin}}$ y $j \in \mathcal{N}_{\text{enr}}$ pero en realidad i y j han de recorrer sólo los índices de los nodos del elemento Ω^k). Recuérdese también que la solución XFEM, u_X no verifica esta restricción puesto que sólo se impone de manera débil.

En lo que sigue, se va a detallar la forma de esta restricción algebraica y se va a añadir al sistema original (11) para obtener una solución mejorada.

Se denota por n_{node} el número de nodos de los elementos de la malla, en particular del elemento Ω^k , $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$ donde se encuentra el punto P donde se desea imponer la condición (17). A efectos de las ilustraciones y en los ejemplos de aplicación se tomará $n_{\text{node}} = 3$ (elementos triangulares lineales). Para denotar los vectores y matrices elementales asociados a Ω^k utilizaremos el superíndice (k) . Así, las funciones de forma y la matriz gradiente se escriben:

$$\begin{aligned} ll\mathbf{N}^{(k)}(x, y) &= \begin{bmatrix} N_1^{(k)} \\ \vdots \\ N_{n_{\text{node}}}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{B}^{(k)}(x, y) = \nabla \mathbf{N}^{(k)\top} = \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1^{(k)}}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{node}}}^{(k)}}{\partial x} \\ \frac{\partial N_1^{(k)}}{\partial y} & \dots & \frac{\partial N_{n_{\text{node}}}^{(k)}}{\partial y} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (18)$$

mientras que los vectores de valores nodales elementales (para valores de la función, grados de libertad enriquecidos y valores del level set) son

$$\mathbf{u}^{(k)} = \begin{bmatrix} u_1^{(k)} \\ \vdots \\ u_{n_{\text{node}}}^{(k)} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{a}^{(k)} = \begin{bmatrix} a_1^{(k)} \\ \vdots \\ a_{n_{\text{node}}}^{(k)} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \phi^{(k)} = \begin{bmatrix} \phi_1^{(k)} \\ \vdots \\ \phi_{n_{\text{node}}}^{(k)} \end{bmatrix}. \quad (19)$$

Utilizando esta notación, la versión matricial de (17) resulta ser

$$\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2 = (\nu_2 - \nu_1) \mathbf{B}^{(k)} \left(\mathbf{u}^{(k)} + (\mathbf{R}\mathbf{I} + \tilde{\phi}^{(k)} \mathbf{N}^{(k)\top}) \mathbf{a}^{(k)} \right) \quad (20)$$

donde $\mathbf{I}$ denota la matriz identidad de tamaño $n_{\text{node}} \times n_{\text{node}}$ y, de acuerdo con (15)

$$\tilde{\phi}^{(k)} = |\phi^{(k)}| - \frac{\nu_1 + \nu_2}{\nu_1 - \nu_2} \phi^{(k)} \quad (21)$$

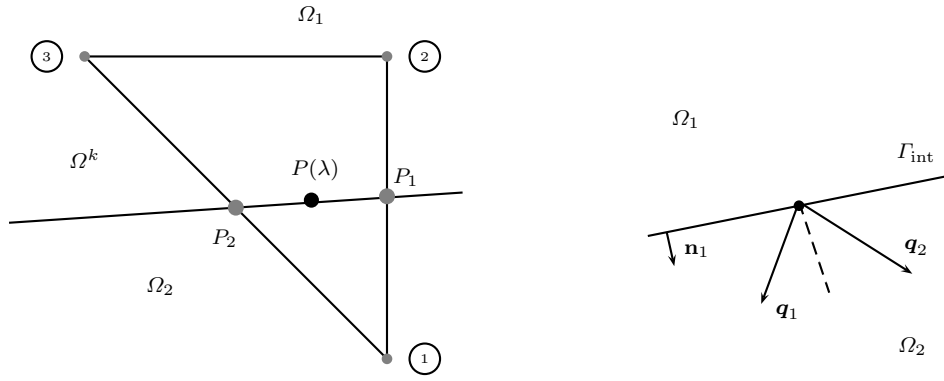


Figura 5. Un elemento enriquecido Ω^k con un punto P en la interfase (izquierda) donde se va a imponer que los flujos $\mathbf{q}_1$ y $\mathbf{q}_2$ tengan componente normal igual (derecha)

De acuerdo con (9), la normal unitaria normal al level set, $\mathbf{n}$, apuntando hacia Ω_1 , es decir, normal exterior a Ω_2 es $\mathbf{n} = \nabla_{xy}\phi / \|\nabla_{xy}\phi\| = \mathbf{B}\phi^{(k)} / \|\mathbf{B}^{(k)}\phi\|$.

De esta manera, la expresión matricial resultante de imponer (4d), esto es

$$\mathbf{n}^\top(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) = 0$$

en un punto $P \in \Gamma_{\text{int}}$ resulta ser

$$\phi^{(k)\top}(\mathbf{B}^{(k)\top}\mathbf{B}^{(k)})\left(\mathbf{u}^{(k)} + (R\mathbf{I} + \tilde{\phi}^{(k)}\mathbf{N}^{(k)\top})\mathbf{a}^{(k)}\right) = 0 \quad (22)$$

En la ecuación anterior la dependencia en el punto P donde se impone la restricción aparece en $\mathbf{N}^{(k)}$, R y $\mathbf{B}^{(k)}$ (aunque esta última es independiente de P si los elementos son lineales). Esta ecuación es una restricción lineal sobre las incógnitas $\mathbf{u}^{(k)}$ y $\mathbf{a}^{(k)}$ que se escribe

$$\mathbf{r}_u^{(k)\top}\mathbf{u}^{(k)} + \mathbf{r}_a^{(k)\top}\mathbf{a}^{(k)} = 0, \quad (23)$$

donde

$$\mathbf{r}_u^{(k)} = \mathbf{B}^{(k)\top}\mathbf{B}^{(k)}\phi^{(k)} \quad (24)$$

y

$$\mathbf{r}_a^{(k)} = (R\mathbf{I} + \mathbf{N}^{(k)}\tilde{\phi}^{(k)\top})\mathbf{r}_u^{(k)} \quad (25)$$

Obsérvese que, en el caso de elementos lineales, $\mathbf{r}_u^{(k)}$ no depende del punto P mientras que $\mathbf{r}_a^{(k)}$ depende de P en cualquier caso. Si la posición de P en el segmento de interfase dentro de Ω^k se parametriza por un parámetro escalar λ entre 0 y 1, véase la Figura 5, los vectores $\mathbf{r}_u^{(k)}$ y $\mathbf{r}_a^{(k)}$ y, por lo tanto, la restricción (23) se pueden expresar en función de λ .

Estas condiciones se pueden imponer en varios (en la práctica uno o dos) puntos de cada Ω^k , $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$.

Ensamblando todas estas ecuaciones para las incógnitas globales, se obtiene la siguiente ecuación matricial

$$\mathbf{R}_u^\top \mathbf{u} + \mathbf{R}_a^\top \mathbf{a} = 0, \quad (26)$$

donde las matrices $\mathbf{R}_u$ y $\mathbf{R}_a$ resultan de ensamblar todas las restricciones (23), para cada $k \in \mathcal{E}_{\text{enr}}$ y para los valores de λ escogidos.

La restricción (26) se añade al sistema global (11) utilizando, por ejemplo, el método de los multiplicadores de Lagrange y resulta el sistema ampliado siguiente

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{uu} & \mathbf{K}_{ua} & \mathbf{R}_u \\ \mathbf{K}_{ua}^\top & \mathbf{K}_{aa} & \mathbf{R}_a \\ \mathbf{R}_u^\top & \mathbf{R}_a^\top & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{a} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_u \\ \mathbf{F}_a \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (27)$$

Una alternativa para imponer (26) es utilizar la técnica de reducción matricial introducida en [1] que, respecto de (27) permite resolver un sistema de ecuaciones menor, en vez de ampliado.

En lo que sigue, se va a determinar para elementos triangulares lineales, la expresión de esta restricción en función del escalar λ .

5.2. Restricción algebraica en el caso de elementos lineales

El objetivo es ahora expresar la restricción de continuidad del flujo de la manera más sencilla y sistemática posible en el caso particular de elementos triangulares lineales. La expresión dependerá de la localización del punto P que se caracterizará por el parámetro λ .

Se va a suponer que se tiene la configuración que aparece en la Figura 5, es decir $\phi_1 < 0$, $\phi_2 > 0$ y $\phi_3 > 0$. Los puntos de intersección de la interfase con los lados de los elementos se denominan P_1 y P_2 , tal como aparece en la Figura 5. Los vectores de funciones de forma

en estos puntos se denotan por $\mathbf{N}^{(k)}(P_1)$ y $\mathbf{N}^{(k)}(P_2)$ y la condición de pertenencia a la interfase se escribe:

$$\left[\mathbf{N}^{(k)}(P_1)\right]^T \boldsymbol{\phi}^{(k)} = 0 \quad \text{y} \quad \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_2)\right]^T \boldsymbol{\phi}^{(k)} = 0.$$

Que teniendo en cuenta la posición de P_1 y P_2 resulta en

$$\begin{aligned} \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_1)\right]^T &= \begin{bmatrix} \frac{\phi_2}{\phi_2 - \phi_1} & \frac{-\phi_1}{\phi_2 - \phi_1} & 0 \end{bmatrix} \quad \text{y} \\ \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_2)\right]^T &= \begin{bmatrix} \frac{\phi_3}{\phi_3 - \phi_1} & 0 & \frac{-\phi_1}{\phi_3 - \phi_1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

La parametrización con $\lambda \in [0, 1]$ de la posición de P se puede escribir

$$P(\lambda) = (1 - \lambda)P_1 + \lambda P_2 \quad (29)$$

y, recordando que $\mathbf{N}$ es lineal,

$$\mathbf{N}^{(k)}(P(\lambda)) = (1 - \lambda)\mathbf{N}^{(k)}(P_1) + \lambda\mathbf{N}^{(k)}(P_2) \quad (30)$$

este es el valor que se ha de utilizar en (25) y lo denotaremos también por $\mathbf{N}^{(k)}(\lambda)$. El valor correspondiente de R , $R(\lambda)$, será

$$\begin{aligned} R(\lambda) &= \left[\mathbf{N}^{(k)}(\lambda)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \\ &= (1 - \lambda) \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_1)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \lambda \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_2)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \\ &= (1 - \lambda) \frac{\phi_2|\phi_1| - \phi_1|\phi_2|}{\phi_2 - \phi_1} + \lambda \frac{\phi_3|\phi_1| - \phi_1|\phi_3|}{\phi_3 - \phi_1} \end{aligned}$$

De esta manera, se puede utilizar (25) para calcular $\mathbf{r}_a^{(k)}(\lambda)$ (recuérdese que en este caso, el vector $\mathbf{r}_u^{(k)}$ es independiente de λ y se calcula según (24))

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_a^{(k)}(\lambda) &= R(\lambda)\mathbf{r}_u^{(k)} + (\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(k)T} \mathbf{r}_u^{(k)}) \mathbf{N}^{(k)}(\lambda) \\ &= (1 - \lambda) \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_1)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \mathbf{r}_u^{(k)} + \lambda \left[\mathbf{N}^{(k)}(P_2)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \mathbf{r}_u^{(k)} \\ &\quad + (\tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(k)T} \mathbf{r}_u^{(k)}) \left((1 - \lambda)\mathbf{N}^{(k)}(P_1) + \lambda\mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right) \\ &= (1 - \lambda) \left[\left[\mathbf{N}^{(k)}(P_1)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \mathbf{r}_u^{(k)} + \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(k)T} \mathbf{r}_u^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}(P_1) \right] \\ &\quad + \lambda \left[\left[\mathbf{N}^{(k)}(P_2)\right]^T |\boldsymbol{\phi}| \mathbf{r}_u^{(k)} + \tilde{\boldsymbol{\phi}}^{(k)T} \mathbf{r}_u^{(k)} \mathbf{N}^{(k)}(P_2) \right] \end{aligned} \quad (31)$$

De esta manera se puede observar que la dependencia de la restricción con λ es lineal y que, por lo tanto, dentro de un elemento Ω^k basta imponer la restricción en dos puntos para asegurar que se verifique en todos. Por lo tanto, en elementos lineales, parece que la opción de imponer la restricción en dos puntos cualesquiera es

la más adecuada. Esto queda corroborado por los ejemplos numéricos.

En el caso de las disposiciones de la interfase distintas a las de la Figura 5 (para $\phi_1\phi_3 > 0$ o $\phi_1\phi_2 \geq 0$), la restricción resultante es muy similar, basta sustituir (28)

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(k)}(P_1) &= \frac{1}{\phi_3 - \phi_2} \begin{bmatrix} 0 \\ \phi_3 \\ -\phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{y} \\ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) &= \frac{1}{\phi_1 - \phi_2} \begin{bmatrix} -\phi_2 \\ \phi_1 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \text{en el caso } \phi_1\phi_3 > 0 \end{aligned}$$

y por

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^{(k)}(P_1) &= \frac{1}{\phi_1 - \phi_3} \begin{bmatrix} -\phi_3 \\ 0 \\ \phi_1 \end{bmatrix} \quad \text{y} \\ \mathbf{N}^{(k)}(P_2) &= \frac{1}{\phi_2 - \phi_3} \begin{bmatrix} 0 \\ -\phi_3 \\ \phi_2 \end{bmatrix} \quad \text{en el caso } \phi_1\phi_2 > 0. \end{aligned}$$

6. Ejemplos numéricos

Ejemplo 1a: Retomemos el ejemplo descrito en el Apartado 4. Para la configuración de la interfase horizontal la implementación XFEM+ coincide exactamente con XFEM; es decir, tanto la configuración de los flujos locales como la norma energética se capturan de manera exacta (ver Figura 3).

Ejemplo 1b: Tal como se muestra en la Figura 4, con la interfase inclinada 10° XFEM proporciona unos resultados poco precisos. La Figura 6 (izquierda) muestra como los flujos mejoran considerablemente cerca de la interfase al utilizar XFEM+.

Con respecto a la norma energética, se cumple que $\|u\| \leq \|u_X\| \leq \|u_X^+\| \leq \|u_H\|$ debido a que los espacios funcionales donde se busca la solución están encajados. El espacio funcional de XFEM+ es una restricción del de XFEM, por lo tanto es más pequeño y es de esperar que la aproximación de la norma energética sea peor con XFEM+ que con XFEM. En este caso, $\|u_X\| = 1,36076 < 1,36214 = \|u_X^+\|$: se pierde precisión global aunque se gana en precisión local en los flujos. Es de destacar que la pérdida de precisión global es poco significativa y, en particular, mucho menor que cuando se utiliza FEM. Este mismo comportamiento se observa en todos los ejemplos ensayados.

La Figura 6 (derecha) muestra cómo son los flujos normales a lo largo de la interfase obtenidos por los tres métodos. De hecho, se muestran los valores en los puntos de integración de los elementos partidos y se

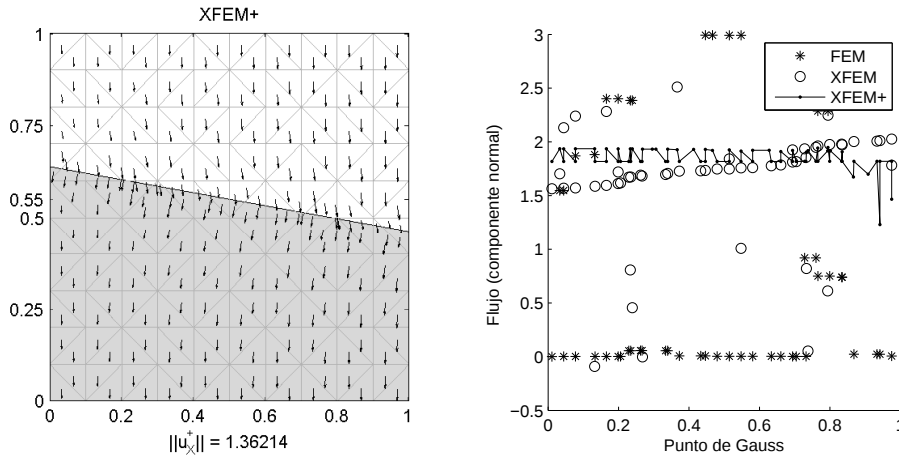


Figura 6. Ejemplo 1b. la solución con XFEM+ (izquierda) presenta un mapa de flujos con un aspecto mucho mejor que el que presenta XFEM en la Figura 4. En el gráfico de la derecha se puede observar cómo el valor de las componentes normales del flujo en los puntos de integración de los elementos partidos por la interfase (representadas en función de su abscisa) presentan fuertes discontinuidades para FEM y XFEM mientras que son suaves para XFEM+

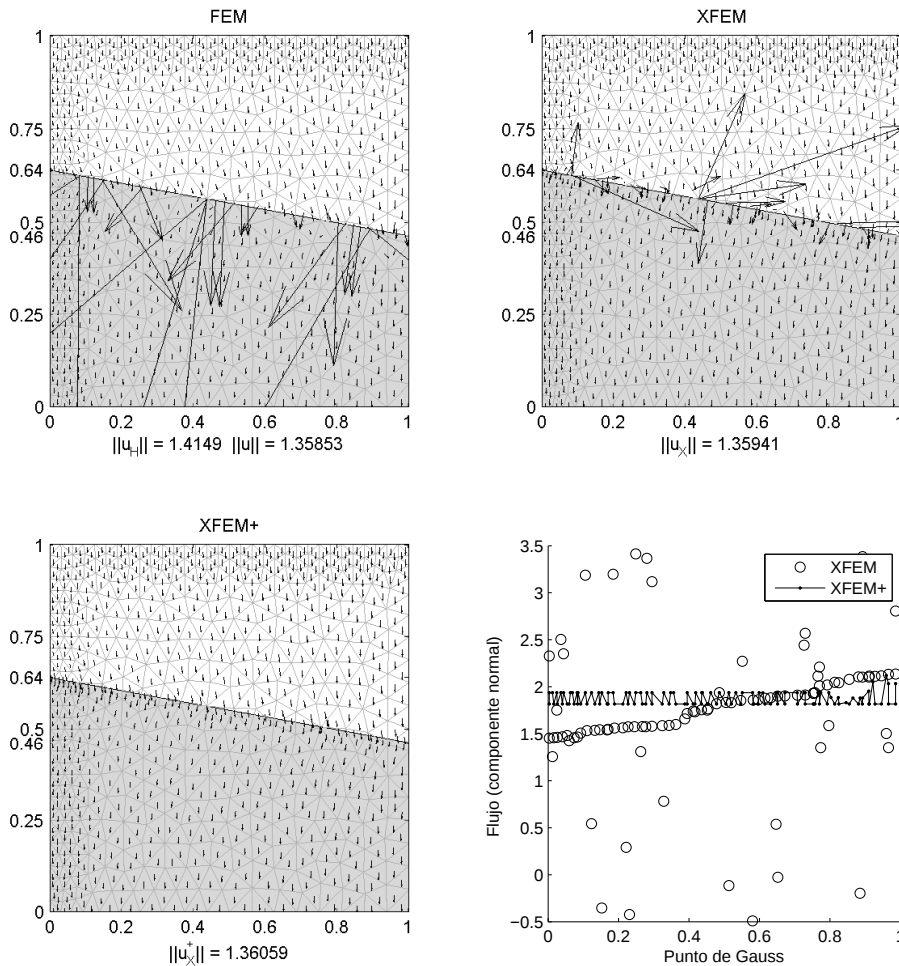


Figura 7. Ejemplo 1c. Con un refinamiento de la malla XFEM+ mejora aún más los flujos cercanos a los puntos del interfase, mientras que FEM y XFEM siguen presentando el mismo problema

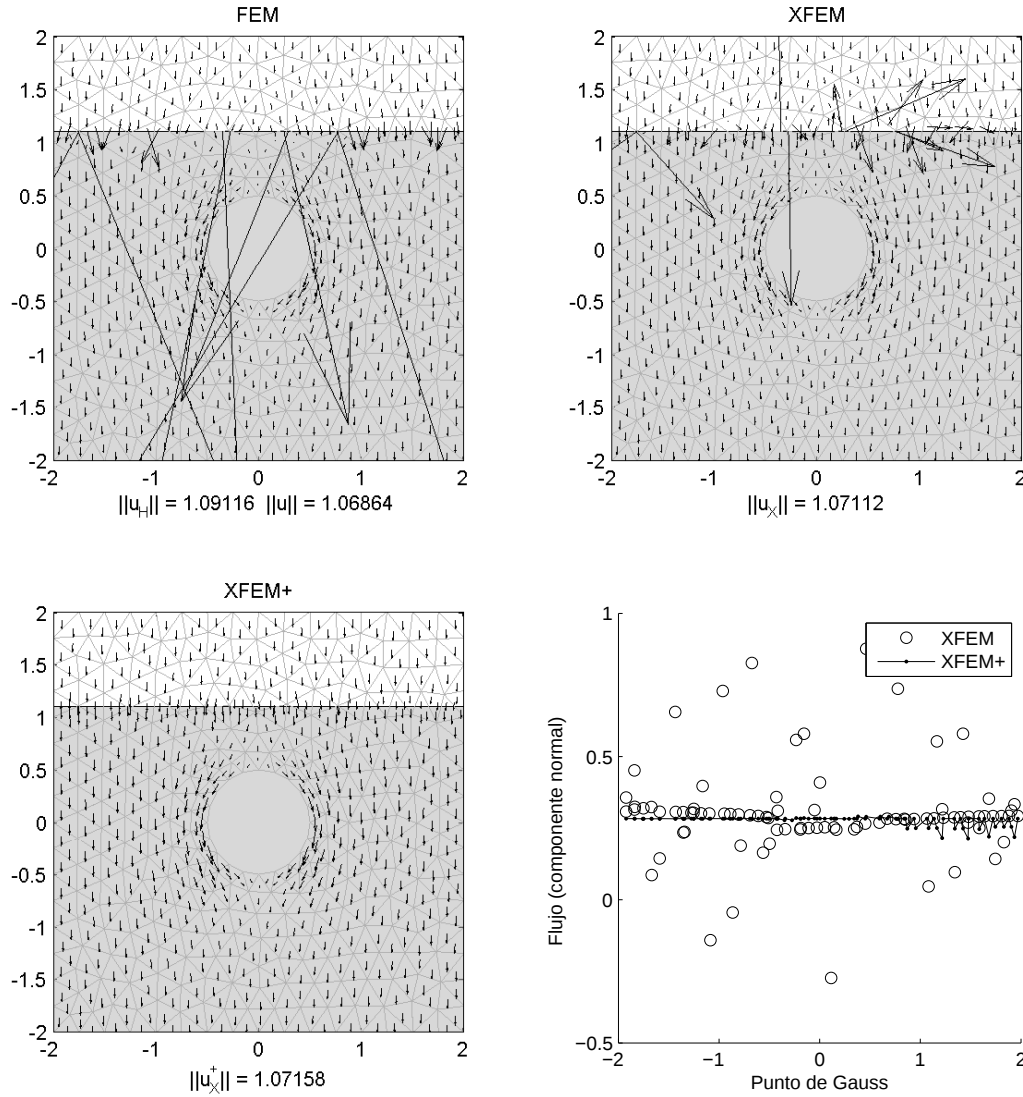


Figura 8. Ejemplo 2a. FEM y XFEM (superior izquierda y derecha) presenta flujos que no son normales a la interfase horizontal, mientras que XFEM+ (inferior izquierda) si obtiene los flujos verticales como establece la condición de continuidad. La comparación (inferior derecha) de los saltos de los flujos normales refleja una diferencia significativa entre XFEM y XFEM+

representan en función de su abscisa. La continuidad del flujo normal significaría que la distribución de estos valores ha de ser suave. En esa figura se observa que FEM y XFEM presentan fuertes discontinuidades mientras que para XFEM+ la distribución es más suave; aunque es conveniente indicar que el pequeño salto que presenta XFEM+ cerca de 1 es debido a una discretización insuficiente y ello se demuestra posteriormente en la Figura 7 donde se considera el mismo ejemplo pero con una malla más fina.

Ejemplo 1c: El mismo problema se analiza con una malla distinta, más fina y no uniforme. Los resultados globales (solución FEM, XFEM y XFEM+ y curva de flu-

jos normales a lo largo de la interfase) se presentan en la Figura 7. De nuevo, se puede observar que XFEM+ mejora muy sensiblemente los flujos mientras que la energía global es muy similar a la de XFEM y mucho mejor que la de FEM. Este mismo comportamiento se puede observar en el ejemplos siguiente.

Ejemplo 2a: Respecto del ejemplo anterior, se incluye un orificio circular en el dominio, por debajo de la interfase. Las propiedades materiales y condiciones de contorno son idénticas. La condición de contorno en la circunferencia es Neumann homogénea (condición natural, aislamiento térmico). Esto hace que aún con la interfase horizontal la solución no sea trivial, ver la Figura 8

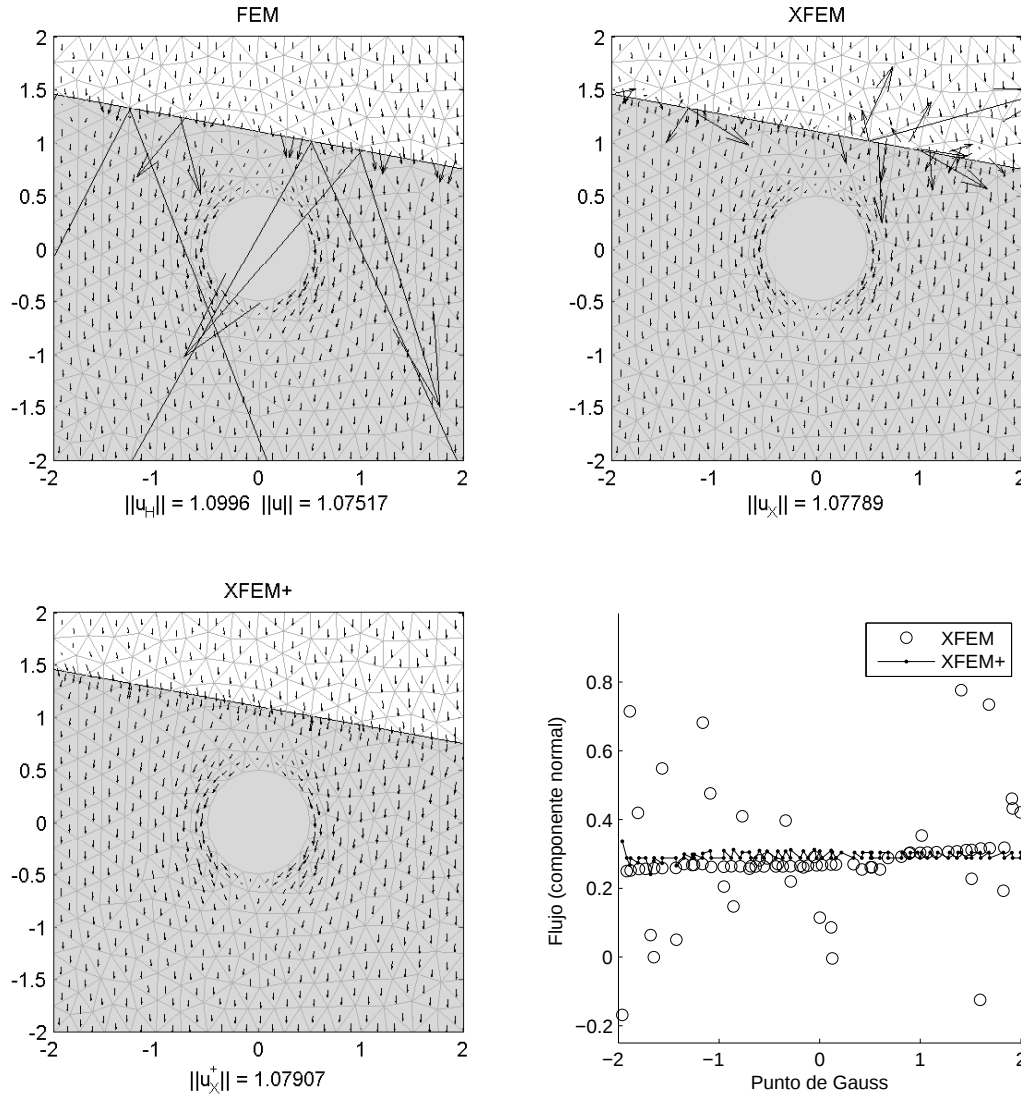


Figura 9. Ejemplo 2b. Al inclinar la interfase 10° el XFEM+ supera considerablemente los FEM y XFEM (en lo que respecta a los flujos cerca de la interfase)

donde se muestran los resultados globales. Los comentarios a este ejemplo son idénticos a los del anterior: XFEM+ mejora muy sensiblemente los flujos mientras que la energía global es muy similar a la de XFEM y mucho mejor que la de FEM.

Ejemplo 2b: El mismo comportamiento se observa al inclinar la interfase 10° , ver Figura 9). Se vuelve a obtener resultados similares a los ejemplos anteriores en los que el XFEM+ proporciona una solución más precisa en lo que respecta a los flujos cerca de la interfase. Para este problema más complicado XFEM+ sigue capturando extraordinariamente los flujos en la zona de transición mientras que FEM y XFEM se les hace imposible obtener una mejor precisión de los flujos.

En el ejemplo 2 la norma energética sigue presentando la misma situación del ejemplo 1; la energía XFEM+ mayor pero muy cercano a la energía XFEM.

7. Conclusiones

Se ha presentado una estrategia para paliar la aproximación deficiente de los flujos cerca de la interfase en los problemas de difusión con dos conductividades muy distintas. La imposición fuerte de la continuidad de flujos mediante ecuaciones algebraicas transforma el XFEM en el XFEM+, una alternativa sencilla que permite mejorar de manera muy sensible la calidad de los flujos numéricos en el entorno de la interfase.

Esta idea puede ser generalizada a problemas de índole más compleja (elasticidad, flujos de Stokes...) añadiendo la imposición fuerte de las condiciones de continuidad que en la formulación estándar de XFEM sólo se imponen de manera débil.

Agradecimientos

Agradecemos al CDCHT-ULA, Venezuela por la financiación del Proyecto: C-1422-06-05-A

Referencias

1. Ainsworth M. (2001) Essential boundary conditions and multi-point constraints in finite element analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 190:6323–6339.
2. Belytschko T., T. Black T. (1999) Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 45(5):601–620.
3. Chessa J., Belytschko T. (2003) An extended finite element method for two-phase fluids. *Transactions of the ASME*. 70:10–17.
4. Daux C., Moës N., Dolbow J., Sukumar N., Belytschko T. (2000) Arbitrary branched and intersecting cracks with the extended finite element method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 48:1741–1760.
5. Moës N., Cloirec M., Cartaud P., Remacle J.F. (2003) A computational approach to handle complex microstructure geometries. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 192:3163–3177.
6. Moës N., Dolbow J., Belytschko T. (1999) A finite element method for crack growth without remeshing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*. 46:131–150.
7. Osher S., Fedkiw R. (2001) Level set methods: an overview and some recent results. *Journal of Computational Physics*. 169:463–502.
8. Sethian J.A. (1999) *Level Set Methods and Fast Marching Methods: Evolving Interfaces in Computational Geometry, Fluid Mechanics, Computer Vision, and Materials Science*. Cambridge University Press, Cambridge, U.K., 1999.
9. Zlotnik S., Díez P., Fernández M., Vergés J. (2007) Numerical modelling of tectonic plates subduction using X-FEM. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. 196:4283–4293.