

VIBRAÇÕES NÃO-LINEARES EM FUNDAÇÕES APORTICADAS DE MÁQUINAS

REYOLANDO M.L.R.F. BRASIL

y
CARLOS E.N. MAZZILLI

*Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações,
Escola Politécnica da Universidade de São Paulo,
São Paulo, Brasil*

RESUMEN

Estudam-se as vibrações não-lineares de uma fundação aporticada de máquina não-balanceada, em condições de ressonância externa e interna. Adota-se a formulação lagrangiana para gerar equações de movimento contendo termos não-lineares até ordem cúbica. O sistema estrutural considerado é constituído por elementos de massa, amortecimento e rigidez concentrados. Desenvolvem-se soluções analíticas aproximadas pelo método das múltiplas escalas, bem como soluções numéricas pelos métodos de Runge-Kutta de 4ª ordem, Newmark e Wilson.

SUMMARY

Non-linear vibrations of an unbalanced machine framed foundation are studied for conditions of both external and internal resonance. The Lagrangian approach for deducing the equations of motion, up to cubic non-linearities is followed. The structural model is assumed a lumped-parameter system. Approximate analytical solutions are obtained through the Multiple Scales Method and numerical solutions are sought through the 4th order Runge-Kutta, Newmark and Wilson methods.

INTRODUÇÃO

Neste trabalho apresenta-se uma formulação não-linear para a dinâmica de uma fundação aporticada de máquina não-balanceada.

Para enfatizar os aspectos fenomenológicos, adota-se um modelo elástico linear de dois graus de liberdade, de massas concentradas, para pórtico constituído de duas colunas verticais e uma viga horizontal, sobre a qual se apoia a máquina.

Quando a frequência natural do modo de vibração associado ao movimento vertical da massa da máquina for aproximadamente igual ao dobro da frequência natural do modo de vibração associado ao movimento lateral, ocorrerá condição para acoplamento de modos ou ressonância interna.

Recibido: Marzo 1989

Se, ainda, a força externa não-balanceada for harmônica com frequência aproximadamente igual à do modo vertical ocorrerá também ressonância externa, com vibrações pós-críticas estáveis, surgindo grandes oscilações laterais, potencialmente perigosas.

Na abordagem do trabalho, são consideradas no modelo imperfeições geométricas devidas às deformações estáticas. Utiliza-se a formulação lagrangiana das equações do movimento, retendo-se termos até ordem cúbica na Energia Potencial Total e na Energia Cinética.

Soluções aproximadas são obtidas via método das múltiplas escalas, que é um método de perturbação. É notável que o problema não-autônomo original recai no estudo de um sistema autônomo, em que a análise de oscilações estacionárias é feita pelos métodos de Liapunov para estabilidade do equilíbrio.

Em conclusão, é feita implementação em computador de dois procedimentos numéricos: integração das equações lagrangianas do movimento pelos esquemas implícitos de Newmark e Wilson e integração do sistema autônomo de 1ª ordem derivado do método das múltiplas escalas pelo esquema de Runge-Kutta.

A análise dinâmica de estruturas aporticadas tem sido abordada extensivamente em trabalhos clássicos, por exemplo, Warburton¹ e Clough e Penzien², e em outros mais recentes, como os de Paz³ e Laura e Greco⁴. A estabilidade dinâmica dessas estruturas tem também sido estudada a partir do trabalho fundamental de Bolontin⁵.

Soluções analíticas aproximadas para oscilações de sistemas não-lineares foram desenvolvidas, entre outros, por Nayfeh e Mook⁶. A instabilidade de estruturas sob excitação de suporte foi objeto de trabalho por Barr e Mc Whannell⁷, em que, entretanto, os autores só consideraram não-linearidades oriundas de forças de inércia, desprezando as derivadas de energia potencial (forças elásticas). Não levaram ainda em conta forças dissipativas, e não introduziram no modelo a imperfeição em que se caracteriza a deformada de equilíbrio estático da estrutura.

Textos clássicos de projectos de fundações de máquinas como Arya et al.⁸ e Srinivasulu e Vaidyanathan⁹ passam ao de largo da discussão do problema de seu comportamento dinâmico não-linear, fornecendo normas de pré-dimensionamento que levam, em geral, a estruturas não sensíveis a esses efeitos.

MODELO MATEMÁTICO

Nesta seção apresenta-se um modelo matemático de massas concentradas e material elástico linear de uma fundação aporticada. A estrutura é mostrada em posição deformada na Figura 1. As barras verticais, iguais, são engastadas na base e suportam massa m na extremidade superior. A viga horizontal é articulada em seus extremos, apoiando a meio vão massa M correspondente a máquina não balanceada que induz forças instacionárias harmônicas nas direções indicadas.

Supõe-se que as barras sejam imponderáveis e inextensíveis e adota-se o campo de deslocamentos:

$$v_1 = \frac{A}{2} u_1^2 \quad (1)$$

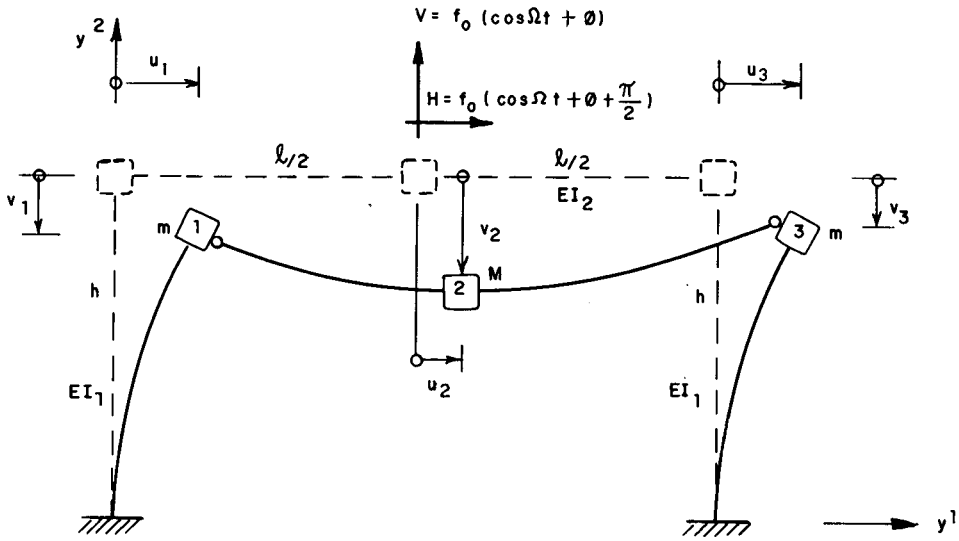


Figura 1. Esquema da fundação aporticada estudada.

$$u_3 = u_1 - \frac{B}{2}v_2^2 \quad (2)$$

$$v_3 = \frac{A}{2}u_3^2 = \frac{A}{2}(u_1^2 - Bu_1v_2^2 + \frac{B}{4}v_2^4) \quad (3)$$

$$u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + u_3) = u_1 - \frac{B}{4}v_2^2 \quad (4)$$

onde:

$$A = \frac{6}{5h} \quad (5)$$

$$B = \frac{24}{5\ell} \quad (6)$$

Reduz-se, assim, o sistema a dois graus de liberdade associados a u_1 e v_2 . Adoptam-se, agora, as coordenadas generalizadas:

$$Q_1 = \frac{u_1}{h} \quad (7)$$

$$Q_2 = \frac{v_2}{\ell} \quad (8)$$

As coordenadas das massas passam a ser:

$$y_1^1 = Q_1 h \quad (9)$$

$$y_1^2 = h - \frac{1}{2} A h^2 Q_1^2 \quad (10)$$

$$y_2^1 = \frac{\ell}{2} + h Q_1 - \frac{B \ell^2}{4} Q_2^2 \quad (11)$$

$$y_2^2 = h - \ell Q_2 \quad (12)$$

$$y_3^1 = \ell + h Q_1 - \frac{B \ell^2}{2} Q_2^2 \quad (13)$$

$$y_3^2 = h - \frac{A}{2} (h^2 Q_1 - B h \ell^2 Q_1 Q_2^2 + \frac{B}{4} \ell^4 Q_2^4) \quad (14)$$

Admite-se que a rigidez das colunas e da viga sejam, respectivamente:

$$k = \frac{3EI_1}{h^3} \quad (15)$$

$$K = \frac{48EI_2}{\ell^3} \quad (16)$$

Escreve-se, agora, a Energia Potencial Total do sistema, retendo termos até ordem cúbica:

$$\begin{aligned} V = & -Mg\ell Q_2 + (k - mgA)h^2 Q_1^2 + \frac{1}{2} K \ell^2 Q_2^2 - \\ & - \frac{1}{2} (k - mgA) B h \ell^2 Q_1 Q_2^2 - \frac{1}{2} K A h^2 \ell Q_1^2 Q_2 \end{aligned} \quad (17)$$

Das condições de estacionariedade da Energia Potencial Total obtém-se o equilíbrio estático anterior à excitação:

$$2(k - mgA)h^2 Q_1^0 - \frac{1}{2} (k - mgA) B h \ell^2 (Q_2^0)^2 - K A h^2 \ell Q_1^0 Q_2^0 = 0 \quad (18)$$

$$-Mg\ell + K \ell^2 Q_2^0 - (k - mgA) B h \ell^2 Q_1^0 Q_2^0 - \frac{1}{2} K A h^2 \ell (Q_1^0)^2 = 0 \quad (19)$$

Fazendo: $\varepsilon = \frac{Mg}{K\ell} \ll 1$, e admitindo uma expansão direta de Q_1^0 e Q_2^0 até ordem ε^2 , vem:

$$Q_1^0 = \varepsilon Q_{11}^0 + \varepsilon^2 Q_{12}^0 + O(\varepsilon^3) \quad (20)$$

$$Q_2^0 = \varepsilon Q_{21}^0 + \varepsilon^2 Q_{22}^0 + O(\varepsilon^3) \quad (21)$$

Substituindo-se em (18) e (19) e coletando-se os termos de cada ordem, obtém-se:

$$Q_{11}^0 = 0 \quad (22)$$

$$Q_{21}^0 = 1 \quad (23)$$

$$Q_{12}^0 = \frac{B\ell^2}{4h} \quad (24)$$

$$Q_{22}^0 = 0 \quad (25)$$

Considera-se que, em decorrência da carga instacionária, surjam incrementos q_1 e q_2 , de ordem ε , tais que:

$$Q_1 = Q_1^0 + q_1 = \varepsilon^2 \frac{B\ell^2}{4h} + q_1 = 0(\varepsilon) \quad (26)$$

$$Q_2 = Q_2^0 + q_2 = \varepsilon + q_2 = 0(\varepsilon) \quad (27)$$

Reescreve-se a Energia Potencial Total (17) como:

$$\begin{aligned} V = & -Mgl(\varepsilon + q_2) + k^*h^2\left(\varepsilon^2 \frac{B\ell^2}{4h} + q_1\right) + \frac{1}{2}K\ell^2(\varepsilon + q_2)^2 - \\ & - \frac{1}{2}k^*Bh\ell^2\left(\varepsilon^2 \frac{B\ell^2}{4h} + q_1\right)(\varepsilon + q_2)^2 - \frac{1}{2}KAh^2\ell\left(\varepsilon^2 \frac{B\ell^2}{4h} + q_1\right)^2(\varepsilon + q_2) \end{aligned} \quad (28)$$

onde:

$$k^* = k - mgA \quad (29)$$

Diferenciando-se as coordenadas (9) a (14) no tempo, obtém-se as velocidades, e escreve-se, retendo termos até ordem cúbica, a energia cinética do sistema:

$$T = m^* \left(\frac{h^2}{2} \dot{Q}_1^2 - \frac{B\ell^2 h}{2} Q_2 \dot{Q}_1 \dot{Q}_2 \right) + \frac{M}{2} \ell^2 \dot{Q}_2^2 \quad (30)$$

onde:

$$m^* = 2m + M \quad (31)$$

Reporta-se, agora, à equação da Lagrange:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial}{\partial q_r} (T - V) = F_{nc}^r, \quad r = 1, 2 \quad (32)$$

No membro direito de (32) considerar-se-á força dissipativa viscosa, linearmente dependente das velocidades generalizadas, e carga instacionária harmônica induzida por não-balanceamento da máquina, na forma:

$$F_{nc}^1 = -\tilde{\mu}_1 \dot{q}_1 - h f_0 \cos(\Omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (33)$$

$$F_{nc}^2 = -\tilde{\mu}_2 \dot{q}_2 - \ell f_0 \cos(\Omega t + \phi) \quad (34)$$

Substituindo-se (29),(30),(33) e (34) em (32) obtêm-se, em forma matricial, as equações do movimento:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} m^* h^2 & -m^* \frac{B \ell^2 h}{2} (\epsilon + q_2) \\ -m^* \frac{B \ell^2 h}{2} (\epsilon + q_2) & M \ell^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} \tilde{\mu}_1 & -m^* \frac{B \ell^2 h}{2} \dot{q}_2 \\ 0 & \tilde{\mu}_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{q}_1 \\ \dot{q}_2 \end{Bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} 2k^* h^2 - K A h^2 \ell (\epsilon + q_2) & -k^* B h \ell^2 (\epsilon + \frac{q_2}{2}) \\ -\epsilon k^* h \ell^2 - \frac{1}{2} K A h^2 \ell q_1 & K \ell^2 - k^* B \ell^2 q_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_1 \\ q_2 \end{Bmatrix} = \\ & = \begin{Bmatrix} -h \cdot f_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \\ -\ell \cdot f_0 \cdot \cos(\Omega t + \phi) \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (35)$$

SOLUÇÃO ANALÍTICA APROXIMADA VIA MÉTODO DAS MÚLTIPLAS ESCALAS

Procede-se, agora, à análise do sistema não-linear (35) pelo método das múltiplas escalas (vide, e.g., Nayfeh e Mook⁶). Considera-se que as forças dissipativas são de ordem ϵ e a força harmônica devida ao não balanceamento é de ordem ϵ^2 :

$$F_{nc}^1 = -2\epsilon \mu_1 \dot{q}_1 - \epsilon^2 \frac{h f_0}{\epsilon^2} \cos(\Omega t + \phi + \frac{\pi}{2}) \quad (36)$$

$$F_{nc}^2 = -2\epsilon \mu_2 \dot{q}_2 - \epsilon^2 \frac{\ell f_0}{\epsilon^2} \cos(\Omega t + \phi) \quad (37)$$

Substituem-se, em (35), soluções q_1 e q_2 na forma de expansões em séries de potências de ϵ :

$$q_1 = \epsilon q_{11} + \epsilon^2 q_{12} + O(\epsilon^3) \quad (38)$$

$$q_2 = \epsilon q_{21} + \epsilon^2 q_{22} + O(\epsilon^3) \quad (39)$$

e coletam-se os termos de mesma ordem, chegando-se, para ordem ϵ , a:

$$\frac{d^2}{dT_0^2} q_{11} + \frac{2k^*}{m^*} q_{11} = 0 \quad (40)$$

$$\frac{d^2}{dT_0^2} q_{21} + \frac{K}{M} q_{21} = 0 \quad (41)$$

cuja solução é:

$$q_{11} = A_1 e^{i\omega_1 T_0} + \bar{A}_1 e^{-i\omega_1 T_0} \quad (42)$$

$$q_{21} = A_2 e^{i\omega_2 T_0} + \bar{A}_2 e^{-i\omega_2 T_0} \quad (43)$$

com a variável T_0 coincidindo com a tempo real (t) e $\bar{A}_r$ o complexo conjugado de A_r , e:

$$\omega_1^2 = \frac{2k^*}{m^*} \quad (44)$$

$$\omega_2^2 = \frac{K}{M} \quad (45)$$

operando-se, da mesma forma, para ordem ε^2 , e substituindo-se (42) e (43) em (35), verifica-se, para o caso particular de grande interesse de ressonância interna e externa, isto é, $2\omega_1 \approx \omega_2$ e $\Omega \approx \omega_2$, o aparecimento de termos seculares (ressonantes). O anulando desses leva às chamadas condições de solvabilidade, neste caso:

$$-2i\omega_1 \left(\frac{\mu_1}{m^* h} A_1 + \frac{d}{dT_1} A_1 \right) + \frac{K A \ell}{m^*} A_1 + \frac{K A \ell}{m^*} \bar{A}_1 A_2 \cdot e^{-i\sigma T_1} = 0 \quad (46)$$

$$-2i\omega_2 \left(\frac{\mu_2}{M \ell^2} A_2 + \frac{d}{dT_1} A_2 \right) + \frac{K A h^2}{2M \ell} A_1^2 \cdot e^{-i\sigma T_1} - \frac{f_0}{2M \ell \varepsilon^2} - e^{i(\sigma_2 T_1 + \phi)} = 0 \quad (47)$$

onde:

$$\sigma = \varepsilon^{-1} (2\omega_1 - \omega_2) \quad (48)$$

$$\sigma_2 = \varepsilon^{-1} (\Omega - \omega_2) \quad (49)$$

$$T_1 = \varepsilon t$$

Introduzindo-se a notação polar:

$$A_r = \frac{1}{2} a_r e^{i\theta_r} \quad , \quad r = 1, 2 \quad (50)$$

e separando-se as partes imaginárias e reais, respectivamente, de (46) e (47), chega-se ao sistema autônomo de 1ª ordem:

$$\frac{d}{dT_1} a_1 = -\frac{\mu_1}{m^* h^2} a_1 - \frac{K A \ell}{4 m^* \omega_1} a_1 a_2 \sin \gamma \quad (51)$$

$$\frac{d}{dT_1} a_2 = -\frac{\mu_2}{M \ell^2} a_2 + \frac{K A h^2}{8 M \ell \omega_2} a_1^2 \sin \gamma + \frac{f_0}{2 \omega_2 M \ell \varepsilon^2} \sin \gamma_2 \quad (52)$$

$$\frac{d}{dT_1} \gamma = -\frac{K A \ell}{m^* \omega_1} - \frac{K A \ell}{2 m^* \omega_1} a_2 \cos \gamma + \frac{K A h^2}{8 M \ell \omega_2} \frac{a_1^2}{a_2} \cos \gamma - \frac{f_0}{2 \omega_2 M \ell \varepsilon^2} \frac{1}{a_2} \cos \gamma_2 + \sigma \quad (53)$$

$$\frac{d}{dT_1} \gamma_2 = -\frac{K A h^2}{8 M \ell \omega_2} \frac{a_1^2}{a_2} \cos \gamma + \frac{f_0}{2 \omega_2 M \ell \varepsilon^2} \frac{1}{a_2} \cos \gamma_2 - \sigma_2 \quad (54)$$

onde:

$$\gamma = 2\theta_1 - \theta_2 + \sigma T_1 \quad (55)$$

$$\gamma_2 = \theta_2 - \sigma_2 T_1 - \phi \quad (56)$$

A pesquisa de vibrações estacionárias recai, por se tratar de sistema autônomo, em uma de estados de equilíbrio via métodos de Liapunov, indicando que, além da solução linear, com amplitudes

$$a_1 = 0 \quad (57)$$

$$a_2 = \frac{f_0}{2 \omega_2 M \ell \varepsilon^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\mu_2}{M \ell^2}\right)^2 + (\sigma_2)^2}} \quad (58)$$

existe a solução não-linear

$$a_1 = \sqrt{\frac{8 M \ell \omega_2}{K A h^2} \left[\Gamma_1 \pm \sqrt{\left(\frac{f_0}{2 \omega_2 M \ell \varepsilon^2}\right)^2 - (\Gamma_2)^2} \right]} \quad (59)$$

$$a_2 = \frac{2 m^* \omega_1}{K A \ell} \sqrt{4 \left(\frac{\mu_1}{m^* h^2}\right)^2 + \left(\frac{K A \ell}{m^* \omega_1} + \sigma_2 - \sigma\right)^2} \quad (60)$$

onde:

$$\Gamma_1 = \frac{2 m^* \omega_1}{K A \ell} \left[\sigma_2 \left(\frac{K A \ell}{m^* \omega_1} + \sigma_2 - \sigma \right) - 2 \left(\frac{\mu_1}{m^* h^2} \right) \left(\frac{\mu_2}{M \ell^2} \right) \right] \quad (61)$$

$$\Gamma_2 = \frac{2m^*\omega_1}{KAl} \left[2\sigma_2 \left(\frac{\mu_1}{m^*h^2} \right) + \left(\frac{KAl}{m^*} \omega_1 + \sigma_2 - \sigma \right) - \left(\frac{\mu_2}{Ml^2} \right) \right] \quad (62)$$

A análise de estabilidade da solução não-linear, num paralelo ao apresentado por Nayfeh e Mook⁶, indica dois valores críticos para a excitação:

$$f_I = \frac{1}{2} |\Gamma_2| \quad (63)$$

$$f_{II} = \frac{1}{2} \sqrt{(\Gamma_1)^2 + (\Gamma_2)^2} \quad (64)$$

- se $\Gamma_1 > 0$ e $f_I < \frac{f_0}{2\omega_2 M l \epsilon^2} < f_{II}$.

existirão duas raízes para (59), sendo estável o estado associado à raiz com o sinal positivo em (59) e instável o estado associado à raiz com o sinal negativo em (59).

- se $\Gamma_1 > 0$ e $\frac{f_0}{2\omega_2 M l \epsilon^2} > f_{II}$

existirá apenas a raiz associada ao sinal positivo em (59), que corresponderá a estado estável:

- se $\Gamma_1 < 0$ e $\frac{f_0}{2\omega_2 M l \epsilon^2} > f_{II}$

existirá apenas a raiz associada ao sinal positivo em (59), correspondendo a estado estável.

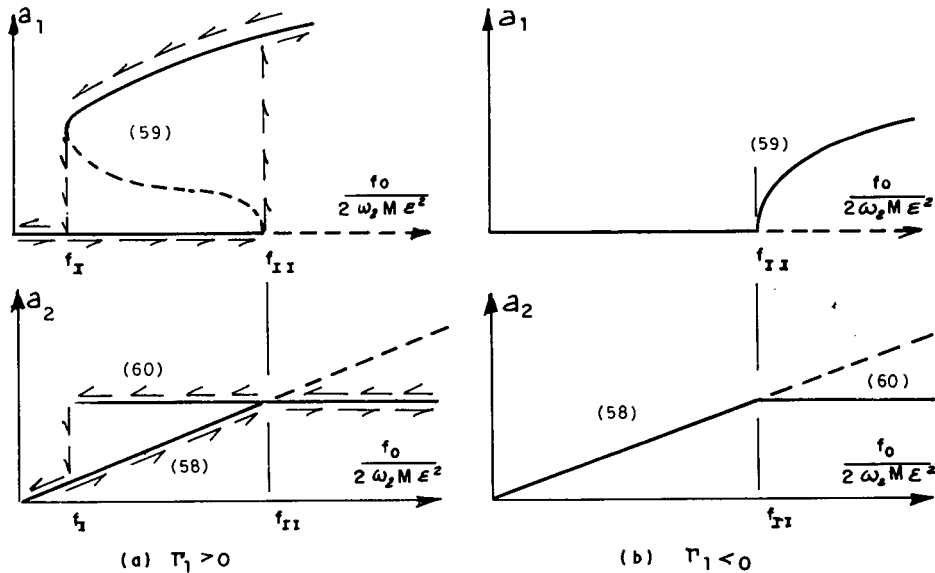


Figura 2.

A Figura 2 representa qualitativamente as conclusões anteriores. Aumentando-se a amplitude de carga harmônica que induz vibrações ressonantes no grau de liberdade

q_2 , chega-se a um ponto de saturação em que a capacidade de absorção de energia desse modo esgota-se, mantendo amplitude estacionária. O excesso de energia é repassado a q_1 que desenvolve estado pós-crítico estável de vibrações laterais importantes.

SOLUÇÃO VIA INTEGRAÇÃO NUMÉRICA PASSO A PASSO

Nesta seção, apresentam-se os resultados obtidos na implementação em computador de dois procedimentos numéricos:

- a) Integração pelo método de Runge-Kutta do sistema autônomo de 1ª ordem (51) A (54) derivado do método das múltiplas escalas.
- b) Integração pelos métodos implícitos de Neumark e Wilson do sistema original, não-autônomo (59).

$$h = 2 \text{ m}$$

$$\ell = 2,68 \text{ m}$$

$$EI_1 = EI_2 = 400.000 \text{ Nm}^2$$

$$M = 1.000 \text{ kg}$$

$$m = 100 \text{ kg}$$

$$g = 10 \text{ ms}^{-2}$$

$$\hat{\mu}_1 = \hat{\mu}_2 = 2.000 \text{ kgm}^2\text{s}^{-1}$$

$$f_0 = 993.5 \text{ N}$$

$$\Omega = 31,52 \text{ rad/s}$$

As expressões (59) e (60) prevêm, para esses valores, estado estacionário estável de amplitudes:

$$a_1 = 9.08$$

$$a_2 = 3.16$$

ou seja, amplitude da vibração lateral ($\varepsilon a_1 h$) de 6.79 cm, e a vibração vertical no meio da viga ($\varepsilon a_2 \ell$) de 3.17 cm.

Um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem tipo:

$$\mathbf{y}' = \mathbf{f}(\mathbf{y}, t) \tag{65}$$

pode ser integrado numericamente pelo método de Runge-Kutta (vide, e.g., Crandall¹⁰), pela fórmula de recorrência:

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}_{n-1} + \Delta t \left[\frac{1}{6} \cdot f(\mathbf{y}_{n-1}, t_{n-1}) + \frac{1}{3} \cdot f(\mathbf{y}_{n-1/2}^*, t_{n-1/2}) + \frac{1}{3} \cdot f(\mathbf{y}_{n-1/2}^{**}, t_{n-1/2}) + \frac{1}{6} \cdot f(\mathbf{y}_n^*, t_n) \right] \quad (66)$$

onde:

$$\mathbf{y}_{n-1/2} = \mathbf{y}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(\mathbf{y}_{n-1}, t_{n-1}) \quad (67)$$

$$\mathbf{y}_{n-1/2}^{**} = \mathbf{y}_{n-1} + \frac{\Delta t}{2} f(\mathbf{y}_{n-1/2}^*, t_{n-1/2}) \quad (68)$$

$$\mathbf{y}_n^* = \mathbf{y}_{n-1} + \Delta t, f(\mathbf{y}_{n-1/2}^*, t_{n-1/2}) \quad (69)$$

O processo, implementado com programa compilado em microcomputador compatível com o PC-XT, resultou, para o exemplo, em convergência para exatamente os resultados previstos na solução analítica aproximada, no tempo em escala $T_1 = \epsilon t$ da ordem de 1 s, equivalendo a cerca de 300 s de tempo real. O tempo de processamento, na máquina usada, foi cerca de 20s.

A seguir, apresentam-se os métodos implícitos de aceleração linear incondicionalmente estáveis de Newmark (aceleração média contante no intervalo $\tau = \Delta t$) e Wilson- θ (aceleração linear num intervalo estendido $\tau = \theta \Delta t$) (vide, e.g., Bathe¹¹). Em ambos os casos a equação de equilíbrio dinâmico no instante $t + \tau$ é escrita em função dos deslocamentos, velocidades e acelerações no instante t , na forma pseudo-estática:

$$(\mathbf{K} + a_0 \mathbf{M} + a_1 \mathbf{C}) \mathbf{u}_{t+\tau} = \mathbf{R}_t + \theta (\mathbf{R}_{t+\tau} - \mathbf{R}_t) + \mathbf{M}(a_0 \mathbf{u}_t + a_2 \dot{\mathbf{u}}_t + a_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \mathbf{C}(a_1 \mathbf{u}_t + a_4 \dot{\mathbf{u}}_t + a_5 \ddot{\mathbf{u}}_t) \quad (70)$$

em que $\mathbf{K}$, $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ são, respectivamente, as matrizes de rigidez, massa e amortecimento no início do intervalo, $\mathbf{R}$ é o vetor de carregamento em cada instante, e, dependendo do método utilizado, tem-se as constantes a_i ($i = 0, \dots, 5$). Os deslocamentos obtidos em (70), no instante $t + \tau$ (que se supõe terem variação cúbica no intervalo) são utilizados para obter as velocidades (de variação quadrática) e as acelerações (de variação linear) no início do próximo passo. A implementação dos dois esquemas, com programa compilado, no mesmo microcomputador, convergiu para amplitude de vibração lateral estacionária de 7.50 cm e de 3.38 cm de amplitude de vibração vertical, respectivamente 10,5% e 6,5% maiores que as previstas na solução analítica aproximada.

Cabe lembrar, que na integração numérica do sistema original não-autônomo (35) comparecem explicitamente as componentes vertical e horizontal da força devida ao não-balanceamento da máquina, enquanto que no sistema obtido da expressão em potências do parâmetro de perturbação ϵ , até a ordem considerada neste trabalho, influi apenas a componente vertical que causa ressonância externa com o modo vertical de vibração ($\Omega \approx \omega_2$). Apesar disso, a concordância de resultados é bastante boa,

principalmente notando-se a sensível economia de tempo. De fato, na integração do sistema original (35) trabalhou-se com o tempo real que, como já comentando, está na proporção $t = \varepsilon^{-1}T_1$ para o tempo em escala utilizando na integração do sistema resultante do método das múltiplas escalas. O tempo de processamento foi, portanto, extraordinariamente maior, da ordem de 90 minutos.

Em todos os casos utilizou-se passo de ceca de um vigésimo do menor período natural do sistema, segundo indicações de, por exemplo, Bathe¹¹.

CONCLUSÕES

Através deste modelo simplificado para uma fundação aporticada da máquina, demonstrou-se que pode ser imperativa uma análise dinâmica não-linear. A instabilidade paramétrica associada às condições de ressonância externa e interna leva a estados transientes e mesmo estacionários estáveis de grande amplitude, os quais não são devidamente detectados pela análise dinâmica linear. Em especial observam-se grandes amplitudes para o movimento lateral do pórtico estudado, apesar de a frequência das forças devidas ao não balanceamento da máquina ser ressonante com a frequência associada ao movimento vertical a massa situada no meio da viga.

A solução analítica aproximada através do método das múltiplas escalas, leva a um sistema autônomo de equações diferenciais de 1ª ordem cuja integração numérica resultou em sensível economia de tempo de processamento, no confronto com a integração numérica do sistema não-autônomo original.

REFERENCIAS

1. G.B. Warburton, *"The Dynamical Behaviour of Structures"*, Pergamon, (1984).
2. R.W. Clough y J. Penzien, *"Dynamics of Structures"*, Mac Graw Hill, (1975).
3. M. Paz, *"Structural Dynamics"*, Van Nostrand-Reinhold, (1985).
4. P.A.A. Laura y B.H.V. de Greco, "In-Plane Vibrations of Frames Carrying Concentrated Masses", *J. Sound and Vibrations*. Vol. 117, No. 3, pp. 447-458, (1987).
5. V.V. Bolotin, *"The Dynamics Stability of Elastic Systems"*, Holden-Day, (1964).
6. A.H. Nayfeh y T.M. Mook, *"Non Linear Oscillations"*, John Wiley, (1979).
7. A.D.S. Barr y D.C. Mc Whannell, "Parametric Instability in Structures under Support Motion", *J. Sound and Vibrations*, Vol. 14, No. 4, pp. 491-509, (1971).
8. S. Arya et al, *"Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines"*, Gulf, (1979).
9. P.S. Srinivasulu, y C.V. Vaidyanathan, *"Handbook of Machine Foundations"*, Mc Graw-Hill, (1979).
10. S.H. Crandall, *"Engineering Analysis"*, Mc Graw-Hill, (1956).
11. K.J. Bathe, *"Finite Element Procedures in Engineering Analysis"*, Prentice-Hall, (1982).