

# Un Algoritmo de Estimación de Distribución basado en una red bayesiana para optimización topológica de estructuras

S. Ivvan Valdez P. · Salvador Botello R. · Arturo Hernández A.

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010  
©Universitat Politècnica de Catalunya, Barcelona, España 2008

**Resumen** El problema de optimización topológica es encontrar la mejor forma de una estructura mecánica sujeta a ciertas condiciones de servicio. Partiendo de una estructura inicial, se pueden agregar y quitar partes, modificar contornos, y dimensiones. En el presente trabajo se aborda el problema de optimización topológica utilizando un Algoritmo de Estimación de Distribución (AED) que utiliza una red bayesiana. La forma de trabajo del algoritmo es la siguiente: propone un conjunto de soluciones (población de estructuras) generadas por el muestreo de cierta distribución de probabilidad, estas son evaluadas para conocer su valor de función objetivo y restricciones. Las estructuras que tienen un mejor desempeño de acuerdo a su evaluación son seleccionadas para recalcular la distribución de probabilidad, con la cual será generada una nueva población. De esta forma se espera generar en cada iteración mejores estructuras.

El objetivo a minimizar es el peso de la estructura, las restricciones son el máximo esfuerzo Von Mises, el desplazamiento en los nodos con carga, el desplazamiento máximo en cualquier nodo, y condiciones prácticas y estéticas de la estructura como: el tamaño de los agujeros presentes y la conectividad de sus piezas. La evaluación se realiza utilizando primordialmente el Método

del Elemento Finito. Los resultados obtenidos muestran la capacidad de la propuesta de proveer soluciones factibles de bajo costo.

## A BAYESIAN NETWORK BASED ESTIMATION OF DISTRIBUTION ALGORITHM FOR TOPOLOGICAL STRUCTURE OPTIMIZATION

**Summary** The topological optimization problem is stated as follows: to find the best shape of a mechanical structure subject to certain service conditions. Usually, the topological optimization problem is tackled by starting from an initial structure which is modified by adding parts, generating gaps, modifying dimensions or the shape contour. This work presents a novel proposal on topological optimization which uses an Estimation of Distribution Algorithm (EDA) based on a Bayesian network. The EDA works as follows: propose a set of candidate solutions (population), the candidate solutions are generated according to a probability distribution, the population is evaluated on the objective function and constraints, and finally, the best structures are selected and used to recompute the search distribution, and so on.

The objective function is the structure weight, and the constraints are maximum Von Mises Stress, the node displacement and practical conditions such as connectivity of all the parts of the structure. The results show that the proposal is capable of designing low weight structures which fulfill the service conditions.

---

S. Ivvan Valdez P.  
Universidad del Papaloapan  
Av. Ferrocarril s/n, CD. Universitaria  
Loma Bonita, Oax., México C.P. 68400  
e-mail: [svaldez@unpa.edu.mx](mailto:svaldez@unpa.edu.mx)

Salvador Botello R. · Arturo Hernández A.  
Centro de Investigación en Matemáticas A.C.  
Jalisco S/N, Mineral de Valenciana  
Guanajuato, Gto., México, C.P.36000  
e-mail: [botello, artha@cimat.mx](mailto:botello, artha@cimat.mx)

## 1. Introducción

El problema de optimización topológica es encontrar la mejor forma de una estructura mecánica sujeta

a ciertas condiciones de servicio. Este tipo de optimización es el más complejo considerando los tres tipos de optimización de formas:

- Optimización de dimensiones, es el problema de encontrar las mejores dimensiones para cierta forma dada. Por ejemplo: encontrar el mejor radio de una barra circular, o el largo de una viga.
- Optimización de forma, una forma inicial se modifica parametrizando los contornos, y modificando dichos parámetros. Por ejemplo una curva paramétrica que define el contorno de una placa, o de un ala de avión.
- Optimización topológica, en este proceso se pueden agregar o remover partes completas de una estructura.

La optimización topológica ha sido ampliamente abordada con algoritmos basados en principios estocásticos. Este tipo de algoritmos son sencillos de implementar y evitan mínimos locales. A la vez, funciones de energía pueden ser utilizadas cuando el gradiente no existe o es difícil de aproximar y procesos de inicialización o “adecuados” puntos de inicio no son necesarios. Los Algoritmos Genéticos (AGs) han sido utilizados para resolver el problema de optimización de formas [2,3, 5,11,18,19,20], proveyendo soluciones factibles con valores aceptables de función objetivo. Sin embargo, las soluciones entregadas por un AG pueden ser difíciles de manufacturar, ya que se presentan agujeros pequeños o piezas desconectadas en el diseño entregado por el proceso evolutivo.

Este comportamiento de los AGs puede ser causado por falta de diversidad en la población, lo cual lleva a una convergencia prematura y reduce la exploración del espacio de búsqueda. Los AGs construyen soluciones mediante el uso de los denominados “bloques constructores”, un bloque constructor es una solución parcial (de un vector de instancias de  $n$  variables un bloque constructor son una secuencia de  $m < n$  instancias de variables), que contiene la información para construir una aproximación muy cercana al óptimo. La disruptión o creación de bloques constructores es afectada por los operadores de cruce y mutación, estos operadores muchas veces no toman en cuenta relaciones entre variables para la construcción de los bloques, por lo cual es relativamente fácil que se pierdan o no se generen los bloques constructores necesarios para construir la solución óptima, principalmente en problemas como el de este trabajo donde el valor de una variable depende de los valores que pudieran tomar otras variables.

Los Algoritmos de Estimación de Distribución (AEDs) [1,7,8,13], son algoritmos poblacionales que se han derivado de los AGs, sustituyendo los operadores de

cruza y mutación por la estimación y el muestreo de una distribución de probabilidad. Los AEDs utilizan una población  $X_t$ , la cual es comúnmente inicializada por el muestreo de una distribución uniforme sobre el espacio de búsqueda. El segundo paso es seleccionar a los mejores individuos (conjunto seleccionado)  $S_t$  de la población  $X_t$ , de acuerdo a su aptitud (tomando en cuenta objetivos y restricciones). Se estima una nueva distribución de probabilidad  $p(x, t + 1)$  del conjunto seleccionado  $S_t$ . Muestreando  $p(x, t + 1)$  se obtienen nuevas posibles soluciones, y de acuerdo a una política de reemplazo éstas pasan a formar parte de la nueva población  $X_{t+1}$ , lo que da inicio a una nueva generación (iteración) del algoritmo. Cuando se preserva la mejor solución de la generación anterior en la nueva población se dice que el algoritmo es elitista.

Los AEDs han sido aplicados a problemas de optimización binaria con diferentes grados de éxito [8,6,9,10]. Este artículo presenta un AED binario basado en una red bayesiana que es aplicado al problema de optimización topológica. La forma de la estructura mecánica es mejorada aplicando restricciones de forma en la formulación del problema, las cuales penalizan los agujeros pequeños y las piezas desconectadas. Simultáneamente un proceso determinista se aplica a cada solución con el fin de reducir el número de piezas desconectadas y picos no deseados.

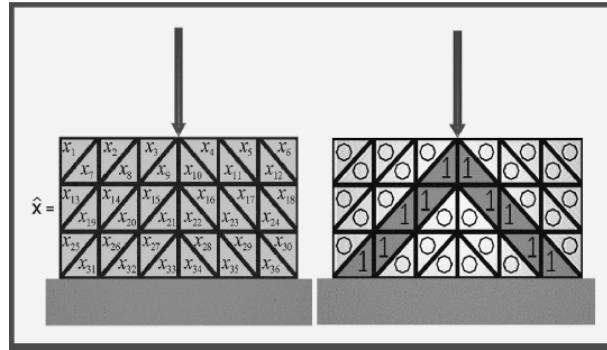
## 2. Definición del problema

El objetivo de diseño es:

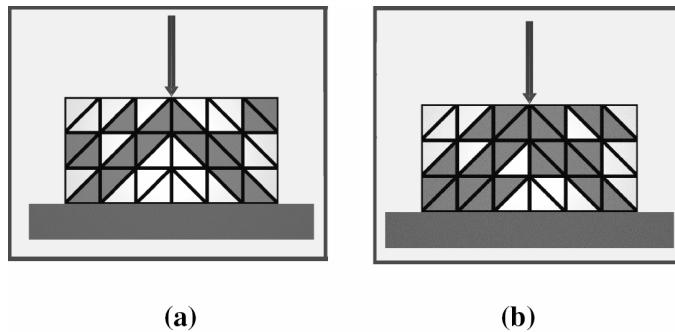
*Encontrar la estructura con el mínimo peso que satisfaga cinco restricciones:*

1. *No exceder un esfuerzo Von Mises máximo.*
2. *No exceder un desplazamiento máximo en los nodos de carga.*
3. *No exceder un desplazamiento máximo en ningún nodo (desplazamiento diferente al de los nodos de carga).*
4. *No tener “agujeros pequeños” (se definirá más adelante el significado de “agujero pequeño”).*
5. *No tener piezas desconectadas.*

Una estructura inicial es dada por el usuario como espacio de búsqueda, en otras palabras, cualquier estructura que genera el algoritmo se “fábrica” partiendo de esta estructura inicial. La estructura inicial se discretiza en elementos finitos. El propósito del algoritmo es remover tantos elementos como sea posible cumpliendo con las restricciones del problema. Cada elemento es representado como una variable binaria  $x_i$ , si está variable toma el valor de 1 entonces el elemento está presente en la estructura, de otra forma el elemento no tienen



**Figura 1.** Ejemplo de una estructura inicial y su discretización



**Figura 2.** Ejemplo de las restricciones de forma: a) estructura con 4 objetos (piezas) y b) estructura con 3 agujeros pequeños

material, es decir es parte de un hueco o agujero. La Figura 1 muestra un ejemplo de una placa discretizada y su representación binaria.

La definición matemática de la función objetivo está dada en la ecuación (1), donde  $n$  es el número de elementos finitos,  $w_i$  es el peso del  $i$ -ésimo elemento, y  $x_i$  es el valor de la variable asociada al elemento.

$$f(x) = \sum_i^n w_i x_i \quad (1)$$

La ecuación (2) define la primera restricción, donde  $i$  son los índices de los nodos con carga, y  $|\delta_i|$  es la magnitud del desplazamiento.

$$r_1(x) = \sum_i^m |\delta_i| < D \quad (2)$$

La ecuación (3) mide el exceso de desplazamiento con respecto a  $\delta^{max}$  en todos los nodos.

$$r_2(x) = \sum_i^l \frac{(1 + sign(|\delta_i| - \delta^{max}) \cdot 1)}{2} (|\delta_i| - \delta^{max}) = 0 \quad (3)$$

La ecuación (5) define la tercera restricción que mide el excedente de esfuerzo en cada elemento, en la ecuación (5)  $\sigma_i$  es el esfuerzo en el  $i$ -th elemento,  $\sigma^{max}$  es el

esfuerzo máximo permisible del material y  $A_i$  es el área elemental.

$$r_3(x) = \sum_i^n I_i \sum_i^n x_i A_i \gamma_i = 0$$

donde

$$I_i = \begin{cases} 0 & \text{si } (\sigma_i - \sigma^{max}) < 0 \\ 1 & \text{de otra forma} \end{cases}$$

$$\gamma_i = \begin{cases} 0 & \text{si } (\sigma_i - \sigma^{max}) < 0 \\ (\sigma_i - \sigma^{max}) & \text{de otra forma} \end{cases} \quad (5)$$

Las últimas dos restricciones están relacionadas con la forma de la estructura, la cuarta restricción es el número de objetos (piezas) usadas para construir la estructura. Se considera un objeto como un conjunto de elementos con material que están conectados entre sí por algún lado (no por nodos). Un ejemplo de como se mide esta restricción se muestra en la Figura 2 a), las soluciones factibles deben de tener solo un objeto. La última restricción es el número de agujeros pequeños. Un agujero pequeño es un elemento sin material (hueco) el cual está rodeado (por lados) de elementos que si tienen material. Un ejemplo de esta medida se muestra en la Figura 2 b). Las soluciones factibles no deben de tener ningún agujero pequeño.

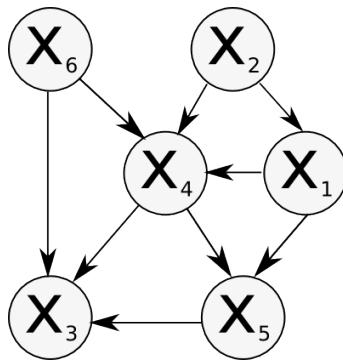


Figura 3. Ejemplo de una red bayesiana

### 3. Algoritmos de Estimación de Distribución, redes bayesianas y el algoritmo K2

La efectividad de los AEDs se debe a su capacidad para aprender y utilizar dependencias entre variables. Las dependencias son patrones en los datos que se han mantenido a través de varias generaciones. Estas dependencias son aprendidas por el algoritmo y luego incorporadas en el modelo probabilístico para muestrear nuevos datos con características similares a las mejores soluciones encontradas. Muchos AEDs en espacios discretos utilizan modelos gráficos para representar dependencias y aproximar la distribución subyacente del conjunto seleccionado. Una red bayesiana (RB) es un grafo dirigido acíclico donde cada variable  $x_i$  es representada por un nodo, si una arista conecta dos nodos, digamos  $\{x_i, x_j\}$ , entonces significa que el saber el valor de una variable  $x_i$  modifica el conocimiento que se tiene acerca del valor que puede tomar  $x_j$ . Un ejemplo de RB se muestra en la Figura 3. Las raíces  $\{x_6, x_2\}$  se consideran independientes, la variable  $x_4$  depende de  $\{x_6, x_2\}$ ,  $x_1$  depende de  $x_2$ ,  $x_5$  depende de  $\{x_4, x_1\}$ , y finalmente  $x_3$  depende de  $\{x_6, x_4, x_5\}$ . Una vez que se conoce un modelo gráfico para la distribución de probabilidad, las probabilidades para muestrear se pueden calcular utilizando el teorema de Bayes y las probabilidades empíricas del conjunto seleccionado, comenzando con las variables consideradas independientes, y siguiendo hacia abajo conforme lo indica el modelo gráfico.

La RB se utiliza para remuestrear posibles soluciones y sustituir a la población. Aprender un modelo tan complejo como una RB es un procedimiento costoso, debido al hecho que para encontrar la estructura (RB) óptima (que maximiza la probabilidad de que los datos hayan sido muestreados de ese modelo) se requiere enumerar todas las posibles RBs, y el número de posibles RBs crece exponencialmente con el número de variables. Por estos motivos, se han desarrollado algoritmos “eficientes” que aproximan la estructura óptima

en tiempos mucho menores que el exponencial. Uno de estos métodos es el Algoritmo K2 [15], el cual de manera determinista encuentra una aproximación a la red bayesiana óptima en tiempo polinomial. La complejidad del K2 está determinada por el número de padres permitidos para cada variable, así mientras menos padres se permitan para cada variable menor es el costo computacional, pero a la vez el modelo puede no representar todas las dependencias existentes en el conjunto seleccionado.

#### Algoritmo 1 Aprendizaje de una red bayesiana con el algoritmo K2

##### Require:

*nvar* = número de variables binarias.  
*nsample* = número de cadenas binarias (para calcular  $g$ ).  
*xsample* = un conjunto de cadenas binarias (para calcular  $g$ ).  
*u* = máximo número de padres permitidos.  
*i* = índices en el orden dado.

##### Ensure:

Para cada nodo  $x_i$ , un conjunto de padres  $\pi_i$ .

```

1: for  $i = 1$  to nvar do
2:    $\pi_i \leftarrow \emptyset$ 
3:    $P_{old} \leftarrow g(i, \pi_i)$ 
4:   OKToProceed  $\leftarrow \text{true}$ 
5:   while OKToProceed and  $|\pi_i| < u$  do
6:     sea  $z$  el nodo en los predecesores  $Pred(x_i)$  que maximiza
       $g(i, \pi_i \cup \{z\})$ 
7:      $P_{new} \leftarrow g(i, \pi_i \cup \{z\})$ 
8:     if  $P_{new} > P_{old}$  then
9:        $P_{new} = P_{old}$ 
10:       $\pi_i = \pi_i \cup z$ 
11:    else
12:      OKToProceed = false
13:    end if
14:   end while
15:   return Nodo:  $x_i$ , padres de este nodo:  $\pi_i$ 
16: end for

```

#### 3.1. Aprendizaje de una red bayesiana con el algoritmo K2

El K2 fue propuesto por Cooper y Herskovits [15], es un algoritmo codicioso que maximiza la probabilidad  $P(B_s, D)$  de una estructura  $B_s$  dado un conjunto de datos  $D$ . Se presenta el K2 en el Algoritmo 1. La ecuación (6) se utilizó para maximizar  $P(B_s, D)$ , maximizando  $g$  para cada variable  $x_i$  y sus padres  $\pi_i$ .

$$g(i, \pi_i) = \prod_{j=1}^{q_i} \frac{(r_i - 1)!}{(N_{ij} + r_i - 1)} \prod_{k=1}^{r_i} N_{ijk}! \quad (6)$$

Donde  $x_i$  tiene  $r_i$  valores discretos posibles. Cada variable  $x_i$  en  $B_s$  tiene un conjunto de padres que pueden ser guardados en una lista  $\pi_i$ .  $w_{i,j}$  es la  $j$ -ésima instancia única posible de  $\pi_i$ , y  $q_i$  es el número de estas

instancias.  $N_{ijk}$  es el número de casos en  $D$  en los cuales la variable  $x_i$  toma el valor  $v_{ik}$  y  $\pi_i$  se insta como  $w_{ij}$ .  $N_{ij} = \sum_{k=1}^{r_i} N_{ijk}$ . El K2 supone un orden dado de índices, donde cada índice  $i$  solo puede tener como padres a sus predecesores en el orden dado. Se comienza asumiendo un conjunto de padres  $\pi_i$  vacío para cada variable, se calcula entonces  $g$  considerando que no hay padres y se guarda en  $P_{old}$  como se muestra en la línea 3 del Algoritmo 1. Se encuentra el parente entre los predecesores que más incrementa el valor de  $g$ , este valor es almacenado  $P_{new}$ , como se muestra en las líneas 5 a 14. Si el nuevo parente mejora  $B_s$ , es decir  $P_{old} < P_{new}$ , entonces este parente se inserta a la lista  $\pi_i$ , y se repite el ciclo hasta que la medida  $g$  ya no mejore para  $x_i$  o el número de padres máximo permitido sea alcanzado. Nótese que una versión logarítmica de la ecuación (6) puede ser utilizada para reducir el costo computacional.

#### 4. Optimización utilizando AEDs y redes bayesianas

El Algoritmo 2 muestra la nueva propuesta para optimización topológica con redes bayesianas. Comienza con una población generada uniformemente en la línea 1, se evalúa la población con el método del elemento finito, y cálculo de las restricciones en la línea 2. La selección de las mejores soluciones se muestra en la línea 3, para lo cual se utiliza la clasificación graduada de Pareto [17]. Las restricciones se clasifican gradualmente con dominancia de Pareto si la solución no es factible y son seleccionadas de acuerdo a este criterio, si son factibles entonces se ordenan por función objetivo, tomando en cuenta que las soluciones factibles siempre deben de ser mejores que las no factibles. Así los mejores  $nselect$  individuos son tomados para aprender la red bayesiana. Las líneas 5 a 8 repiten el procedimiento, pero ahora muestreando de la red bayesiana obtenida con el K2.

Se realiza un ajuste a las probabilidades, para asegurar por lo menos una pequeña posibilidad de mejorar las soluciones aún en caso de que la búsqueda sea sesgada a una región sub-óptima. Si  $p(x_i|\pi_i) < \epsilon$  entonces  $p(x_i|\pi_i) = \epsilon$ . En general un parámetro  $\epsilon$  adecuado de acuerdo a nuestros experimentos es  $1/n$ , donde  $n$  es el número de variables.

Después de que las soluciones son generadas por la red bayesiana, se intenta mejorarlas determinísticamente aplicando un post-proceso que conecta por lado elementos que sólo están conectados por nodos (agregando elementos), y remueve aquellos elementos que sólo tienen conexión con otro elemento (sólo tienen un lado conectado), de esta manera se eliminan picos. La

Figura 4 muestra un ejemplo de los efectos del post-procesamiento.

#### Algoritmo 2 Algoritmo para optimización topológica

##### Require:

**FEfile** = Descripción de la estructura inicial: malla, condiciones de carga, constantes del material, máximos desplazamientos  $D$ ,  $\delta^{max}$ , y máximo esfuerzo  $\sigma^{max}$ .

**nsample** = tamaño de la población

**nselect** = tamaño del conjunto seleccionado.

**u** = máximo número de padres para el K2).

**maxeval** = máximo número de evaluaciones.

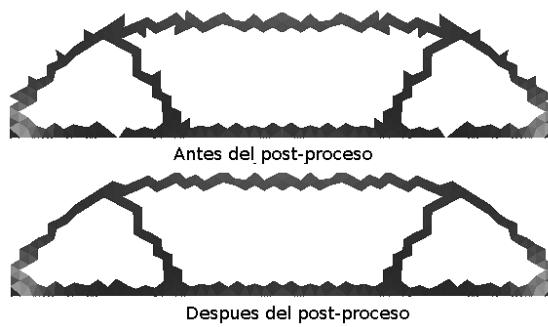
##### Ensure:

Una aproximación al óptimo.

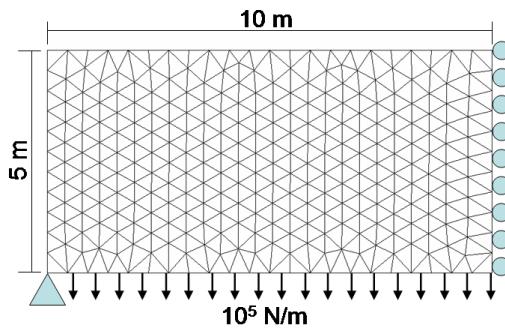
- 1: Generar una población uniforme  $X_t$  de tamaño  $nsample$ .
- 2: Evaluar objetivos y restricciones de  $X_t$ .
- 3: Seleccionar  $nselect$  individuos  $S_t$ , y almacenar al mejor (elite)  $x^e$ .
- 4: **for**  $i = (nsample + 1)$  to  $maxeval$  **do**
- 5:     Aprender la red bayesiana  $B_s$  de  $S_t$ , y calcular las probabilidades necesarias.
- 6:     Generar una nueva población  $X_{t+1}$  de tamaño  $nsample - 1$  utilizando la red bayesiana, e insertar el individuo elite  $x^e$ .
- 7:     Evaluar objetivos y restricciones de  $X_{t+1}$ .
- 8:     Seleccionar  $nselect$  individuos  $S_{t+1}$ , y almacenar al mejor (elite)  $x^e$ .  $t = t + 1$ .
- 9: **end for**
- 10: **return**  $x^e$  como la mejor aproximación al óptimo.

#### 5. Experimento

Para mostrar el desempeño del algoritmo se presenta un experimento de diseño estructural automatizado. El objetivo del experimento es diseñar la mejor forma de un puente hipotético. Las condiciones de carga y la malla se muestran en la Figura 5. Las propiedades del material son las siguientes: módulo de Young  $2 \times 10^{11} \text{ Pa}$ , módulo de Poisson 0,2, peso por unidad de volumen  $78000 \text{ N/m}^3$ , y espesor de 0,1 m. La carga está uniformemente distribuida en el lado inferior, la estructura está fija en las direcciones  $x$  y  $y$  en la esquina inferior, y el lado derecho está soportado en la dirección  $x$  pero la dirección  $y$  no está fija. El máximo número de padres utilizados por el algoritmo K2 es de 5. La formulación utiliza las condiciones de simetría del problema que se quiere resolver para reducir el costo computacional. La malla mostrada en la Figura 5 tiene 524 elementos, por lo tanto se está resolviendo un problema combinatorio con  $2^{524}$  posibles soluciones. La Tabla 1 resume los resultados del experimento. Note que la estructura optimizada tienen un esfuerzo (máximo) menor que la estructura inicial, así que no sólo se redujo el peso sino que la distancia al límite de máximo esfuerzo es mejor en la estructura diseñada automáticamente. Una salida típica del algoritmo se muestra en la Figura 6.



**Figura 4.** Ejemplo del post-proceso



**Figura 5.** Malla para el experimento

**Tabla 1.** Resultados del experimento. ND= No definido

Característica	Inicial	Optimizada	Permitida
Peso	390 000 N	182 895,4 N	ND
Elementos presentes	524	239	ND
Objetos	1	1	1
Agujeros pequeños	0	0	0
Máximo desplazamiento	0,0018175 m	0,0028709 m	0,007 m
Máximo esfuerzo	62,761E6 Pa	54,249E6 Pa	250E6 Pa



**Figura 6.** Aproximación al óptimo obtenida de una corrida típica

## 6. Conclusiones

Este artículo es una propuesta de un nuevo algoritmo para optimización topológica de estructuras. La propuesta se basa en los Algoritmos de Estimación de Distribución con redes bayesianas. Una ventaja de este algoritmo es su capacidad de explotar la información de las dependencias entre variables. Es claro que la presencia de ciertos elementos dependen de que otros existan, a fin de que formar una sola pieza u objeto. El cambio de la forma en cierta región de la estructura

hará que cambien las condiciones de esfuerzos y desplazamientos en toda la estructura, por lo tanto, aun elementos relativamente alejados pueden afectarse entre ellos. El experimento muestra que el algoritmo es capaz de entregar soluciones de bajo costo (peso) y factibles. El trabajo futuro contemplará el considerar sólo elementos vecinos como padres, intentando reducir el costo computacional. Note que la probabilidad de un elemento  $x_i$  afecta la de un  $x_j$  aunque no exista una arista directa entre  $\{x_i, x_j\}$  siempre y cuando exista un camino en el modelo gráfico que vaya de  $x_i$  a  $x_j$ .

## Referencias

1. Baluja S. (1996) Population based incremental learning: A method for integrating genetic search based function optimization and competitive learning. School of Computer Science Carnegie Mellon University, Pittsburgh, Pennsylvania 1523, CMU-CS-94-163
2. Chapman C., Saitou K., Jakiel M. (1994) Genetic algorithms as an approach to configuration and topology design. *Journal of Mechanical Design*. 116:1005–11
3. Deb K., Chaudhuri S. (2004) Automated discovery of innovative designs of mechanical components using evolutionary multi-objective algorithms. KanGal report (2004006)
4. Deb K., Goell T. (2000) Multiobjetive evolutionary algorithms for engineering shape optimization. KanGal report (200003)
5. Kane C., Schoenauer M. (1996) Topological optimum design using genetic algorithms. *Control and Cybernetics*. 25(5)
6. Li H., Zhang Q., Tsang E., Ford J. (2004) Hybrid estimation of distribution algorithm for multiobjective knapsack problem. In Evolutionary Computation in Combinatorial Optimization *Proceedings of the 4th European EvoCOP*. 3004:145–154 of Lecture Notes in Computer Science. Coimbra, Portugal. April 2004. Springer.
7. Muhlenbein H., Mahning T., Rodriguez A.O. (1999) Schemata, distributions and graphical models in evolutionary optimization. *J. Heuristics*. 5(2):215-247. ISSN: 1381-1231. GMD- Forschungszentrum Informationstechnik.
8. Muhlenbein H., PaaB G. (1996) From recombination of genes to the estimation of distributions i. Binary parameters. *Parallel problem Solving from Nature*. PPSN(IV):178–187
9. Pelikan M., Goldberg D., Paz C. (1998) Linkage problem, distribution estimation and Bayesian networks. IlliGal Report. 1(98013)
10. Pelikan M., Goldberg D., Paz C. (1999) BOA: The Bayesian optimization algorithm. *ACM SIGEVO In Proceedings of the Genetic and Evolutionary Computation Conference*. I:525–532
11. E. Sandgren, E. Jensen and J. W. Welton (1991) Topological design of structural components using genetic optimization methods. In *Proceedings of the 1990 The Winter Annual Meeting of the American Society of Mechanical Engineers*. American Society of Mechanical Engineers. Dallas. Texas. Edited by S. Saigal and S Mukherjee. p. 31–43.
12. Zienkiewicz O.C., Taylor R. (1995) *El Método de los elementos finitos*. Mc. Graw Hill-CIMNE.
13. Larrañaga P., Lozano J.A. (2001) *Estimation of Distribution Algorithms: A New Tool for Evolutionary Computation*. Kluwer Academic Publishers, Norwell, MA, USA
14. Mühlenbein H., Mahnig T., Rodriguez and A.O. (1999) Schemata, distributions and graphical models in evolutionary optimization. *Journal of Heuristics*. 5(2):215–247
15. Cooper G.F., Herskovits E. (1992) A Bayesian method for the induction of probabilistic networks from data. *Machine Learning*. 9(4):309–347.
16. Lauritzen S. (1998) *Graphical Models*. Oxford Press.
17. Deb K., Agrawal S., Pratab A., Meyarivan T. (2000) A Fast and Elitist Multi-objective Genetic Algorithm: NSGA-II. Tech. Rep. 2000001, Indian Institute of Technology, Kanpur, India
18. Estupiñan J., Oñate E., Suarez B. (1998) Optimización topológica mediante algoritmos genéticos, estrategias evolutivas y el Método de la Burbuja. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 14(4):427-438
19. Botello S., Marroquin J.L., Oñate E., HorebeekJ. (1999) Un Modelo de Optimización Estocástica aplicado a la Optimización de Estructuras de Barras Prismáticas. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 15(4):425-434
20. Botello S., Esqueda H., Hernández A., Zarate F., Valdés J.G., (2007) Estrategias Evolutivas Aplicadas en la Optimización de Problemas que Involucran Interacción Fluido Estructura. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 23(4):415-428