Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 11,4, 499–505(1995)

UM MÉTODO SEMI–ITERATIVO RELATIVO AO MÉTODO DE RICHARDSON DE GRAU DOIS APLICADO A SISTEMAS LINEARES DEFINIDO–POSITIVOS

NEWTON R. SANTOS

Assessoria de Ensino, Pesquisa e Pos–Graduação
Centro Federal de Educacao Tecnologica de Minas Gerais
Av. Amazonas, 7675, B. Nova Gameleira
CEP 30510-000, B. Horizonte, MG, Brasil

SUMÁRIO

Desenvolve-se um novo método semi-iterativo (método RFII-SI) com respeito ao método iterativo de Richardson de grau dois (método RFII). Aplicam-se ambos os métodos à classe de sistemas algébricos definido-positivos, que inclui os problemas de Ortega e o da equação solvente do método dos elementos finitos.

SUMMARY

A new semi–iterative method (RF II–SI) related to Richardson's iterative method (RF II) is developed. Both methods are applied to positive definite algebraic systems, which include Ortega problems and the solving equation for the finite element method.

INTRODUÇÃO

Uma das técnicas eficientes para resolução de sistemas algébricos lineares consiste no emprego da extrapolação de Chebyshev. Tal procedimento aplicado ao método de Richardson do segundo grau (método RFII) conduz ao método semi-iterativo RFII-SI.

Ambos os métodos constroem sequências de aproximações da solução do problema, através de um algoritmo de recorrência em três termos.

A convergência é garantida, caso a matriz do sistema algébrico seja definida positiva, o que inclui inúmeras aplicações, como, por exemplo, a equação solvente resultante da aplicação do método dos elementos finitos a problemas de valor de contorno.

Atualmente, tem-se procurado, com vantagem, resolver o sistema algébrico resultante acima através de métodos iterativos. Por conseguinte, torna-se pertinente o emprego de semi-iteração, quando couber o emprego dessa técnica, o que geralmente

Recibido: Enero 1995

 ISSN 0213–1315

leva a algoritmos mais eficientes. A técnica de semi-iteração eficiente requer que os autovalores da matriz de iteração do método básico, sobre o qual é construído o procedimento, possua autovalores reais. Tal ocorre, por exemplo, com a matriz associada ao problema de Ortega.

CLASSES DE PROBLEMAS

Seja o sistema algébrico linear

$$Ax = b \tag{1}$$

onde A é não singular, de ordem N, x o vetor incógnito e b, vetor dos termos conhecidos com N componentes, cada um.

Seja a classe de (1), onde

$$A = CRC^{-1} \tag{2}$$

onde R é qualquer matriz com espectro conhecido e C uma matriz não simétrica valendo

$$C = I + uv^T \tag{3}$$

tal que

$$u = [1 \quad 1 \quad \cdots \quad 1]^T \tag{4}$$

e

$$v = [1 \quad 1 \cdots 1, \quad -1 \quad \cdots, \quad -1]^T \tag{5}$$

sendo n par, *i.e*, metade das componentes são 1 e outra metade -1.

A matriz inversa C^{-1} é calculada por

$$C^{-1} = I - uv^T \tag{6}$$

A classe de matrizes A, similares a R, assim obtidas denomina-se de "Ortega" e o problema (1) apresentando este tipo de matriz é denominado "problema de Ortega".

Uma matriz dessa classe, assim gerada, será não simétrica. É possível obter também matrizes simétricas através do emprego de um conveniente vetor v em (5).

Outra classe de problemas de interesse é dada pela equação solvente resultante da aplicação do método dos elementos finitos a problemas de valor contorno de amplo emprego nas várias áreas de engenharia.

Cita-se, entre outros exemplos, o caso do problema de difusão do calor em regime transiente, que é regulado pela equação diferencial parcial

$$\nabla^2\theta = \frac{1\partial\theta}{\alpha\partial t} \quad \text{em} \quad \Omega \subset R^2 \tag{7}$$

onde α é a difusidade térmica do material; t, o tempo e θ, a temperatura adimensional do corpo num ponto de coordenadas genéricas (x, y) e as condições na fronteira Γ, do domínio Ω, são de $3^{\underline{a}}$ espécie.

Neste caso, a equação solvente é dada por

$$[C]\dot{\theta} + [K]\theta - [F] = 0 \tag{8}$$

sendo $\dot{\theta}$ a derivada de θ em relação a t. $[C]$e$[K]$ são, respectivamente, as matrizes de condutância e rigidez e $[F]$, o vetor força.

A importância da classe de Problemas de Ortega reside no fato de possuir espectro que se pode pré-definir, o que é de importância para a aplicação dos métodos semi-iterativos, os quais exigem o preço do conhecimento das limitações dos autovalores da matriz de iteração, associada ao problema (1), oferecendo em contrapartida, via de regra, convergência mais rápida.

Por outro lado, geralmente, pouco se sabe sobre o comportamento dos autovalores da classe de matrizes presentes nas equações solventes do m.e.f. Contudo, espera-se que o desempenho dos métodos seja, em princípio, análogo ao da primeira classe, tendo em vista que a matriz em (1) será definida positiva.

MÉTODO RFII E RFII-SI

O método RFII aplicado ao problema (1) constrói uma seqüência de aproximações $x^{(n)}$ da sua solução dada por

$$x^{(n+1)} = (1-w)x^{(n-1)} + [(w-p)I + pF]x^{(n)} + ph \tag{9}$$

$$F = I - rA \tag{10}$$

$$h = rb \tag{11}$$

e os parâmetros r, w e p são a determinar.

A determinação de w e p é feita de modo a minimizar o raio espectral $\rho(\hat{R})$ da matriz de ordem $2N$ abaixo

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} 0 & I \\ (1-w)I & (w-p)I + pF \end{bmatrix} \tag{12}$$

isto requer os cálculos

$$s = \frac{b-a}{2-(a+b)} \tag{13}$$

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{1-s^2}} \tag{14}$$

$$p = \frac{2w}{2-(a+b)} \tag{15}$$

Dois vetores iniciais são necessários ao algoritmo (9). Arbitram-se, por exemplo, $x^{(0)} = 0$(vetor nulo) e $x^{(1)} = b$.

A convergência desse método é garantida quando aplicado a problemas com matriz definida positiva, o que inclui os problemas de interesse já citados.

Observa-se que se pode reescrever (9), compactamente, como

$$u^{(n+1)} = \hat{R}u^{(n)} + \hat{h} \tag{16}$$

sendo $\hat{R}$ dada por (12) e $\hat{h}$ o vetor com $2N$ componentes

$$\hat{h} = [0 \quad ph]^T \tag{17}$$

e $u^{(n+1)}$, vetor dado pelas $2N$ componentes

$$u^{(n+1)} = [x^{(n)} \quad x^{(n+1)}]^T \tag{18}$$

A convergência decorre do fato de que o raio espectral

$\rho(\hat{R}) = (w-1)^{\frac{1}{2}} < 1$, visto que $1 < w < 2$ vale, pois, A é matriz definida positiva e $r < 0$.

Sejam, agora, as novas notações

$$y_1^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} x^{(k)} \tag{19}$$

$$y_2^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} x^{(k+1)} \tag{20}$$

com a restrição $\sum_{k=0}^{n} \alpha_{nk} = 1$. Defina também

$$v^{(n)} = [y_1^{(n)} \quad y_2^{(n)}]^T \tag{21}$$

Aplicando-se a técnica de extrapolação de Chebyshev aos esquemas (19) e (20), e minimizando os parâmetros α_{nk}, chega-se ao método semi-iterativo dado pela fórmula de recorrência

$$v^{(n+1)} = \frac{r_{n+1}}{2-(c+d)} \left\{ [2\hat{R} - (c-d)I]v^{(n)} + 2\hat{h} \right\} + (1 - r_{n+1})v^{(n-1)} \tag{22}$$

onde os parâmetros r_n valem

$$r_1 = 1, \qquad r_2 = \frac{2z^2}{2z^2-1}, \qquad r_{n+1} = \left(1 - \frac{r_n}{4z^2}\right)^{-1} \tag{23}$$

e z, o parâmetro determinado através das limitações c e d dos autovalores de $\hat{R}$, *i.e.*,

$$z = \frac{2-(c+d)}{d-c} \tag{24}$$

A convergência desse novo método, nos casos em estudo, resulta do fato de que as constantes c e d são determinadas por

$$d = -c = \frac{ws}{2} \tag{25}$$

Estes valores de c e d levados à matriz

$$M = \frac{2\hat{R} - (c+d)I}{2-(c+d)} \tag{26}$$

implica $M = \hat{R}$. Donde, $\rho(M) = \rho(\hat{R}) < 1$

Agora, basta aplicar o Teorema 4.1 de[4], p. 64, para se concluir que a convergência está garantida.

RESULTADOS COMPUTACIONAIS E CONCLUSÕES

Experimentos computacionais relativos aos métodos tratados são mostrados nas Tabelas I a V adiante. As tabelas contêm os números de iterações necessárias, para convergência, para cada método e diferentes tamanhos de problemas, respeitada uma tolerância (precisão) de 10^{-5}, como critério de parada.

Os resultados referem-se ao problema de Ortega. A variedade de experimentos numéricos decorre de diferentes situações do problema envolvendo, por exemplo, mudança do número de condição, P, da matriz, combinações de multiplicidades de autovalores e, finalmente, parâmetros aproximados no lugar dos exatos que devem ser usados na fórmula (22).

Observando-se os resultados obtidos, vê-se que se o número de condição P for pequeno então ambos os métodos são adequados (Tabela I). Entretanto, quando o número P cresce o método semi-iterativo torna-se superior, quer os parâmetros sejam exatos (Tabelas II e III) quer aproximados (Tabelas IV e V). É importante observar que o número de iterações, em geral, não depende da ordem da matriz, se mantido fixo o número de condição, o que é um resultado bastante significativo, já que para essa classe de problema, o método desenvolvido se torna sem dúvida competitivo.

Ordem da Matriz	$N^{\underline{o}}$ de Iterações	
	Método RFII	Método RFII-SI
50	8	7
100	8	7
200	8	7
500	7	7

Tabela I. Problema de Ortega–P = 1.5

Resta observar que para a obtenção dos resultados computacionais com o fim de analisar o efetivo desempenho dos métodos, utilizou-se, exaustivamente, do software SIRINEL[4], desenvolvido pelo autor deste trabalho. Para esse fim foi necessária a implantação, no software SIRINEL, de procedimentos novos, relativos ao novo método RFII-SI proposto, e o de geração dos dados relativos ao problema de Ortega.

Contudo restam, ainda, elaborar experimentos comparativos mais conclusivos, envolvendo, por exemplo, métodos competitivos como o SOR (superliberação com parâmetro otimizado) e tratamento de dados relativos ao problema de Stefan, o que deverá ser feito futuramente.

Entretanto, os resultados já obtidos, nas Tabelas IV e V, servem como um indicativo inicial para esse outro caso, em virtude de lidar com parâmetros aproximados, o que pode de certa forma simular o comportamento dos métodos diante desse novo problema, para os quais normalmente vai-se deparar com a utilização de parâmetros não exatos nos cálculos.

Ordem da Matriz **N**	$N^{\underline{o}}$ de Iterações	
	Método RFII	Método RFII-SI
50	60	28
100	84	35
200	120	42
500	193	56

Tabela II. Problema de Ortega–P = N

Ordem da Matriz	Multiplicidade de Autovalores (m1, m2)	$N^{\underline{o}}$ de Iterações	
		Método RFII	Método RFII-SI
50	(49,1)	18	13
50	(40,10)	18	13
100	(99,1)	18	13
100	(90,10)	18	14
200	(190,1)	18	13
200	(190,10)	18	14
500	(499,1)	18	13
500	(490,10)	18	14

Tabela III. Problema de Ortega– Análise da Multiplicidade de Autovalores (P = 5)

Ordem da Matriz **N**	$N^{\underline{o}}$ de Iterações	
	Método RFII	Método RFII-SI
50	26	21
100	27	21
200	27	21
500	27	21

Tabela IV. Problema de Ortega–Parâmetros Aproximados (Ambos parâmetros 2 % de erro) P = 10

Ordem da Matriz **N**	$N^{\underline{o}}$ de Iterações	
	Método RFII	Método RFII-SI
50	29	25
100	29	25
200	29	25
500	29	25

Tabela V. Problema de Ortega–(Ambos par. 5 % de erro) P = 10

AGRADECIMENTOS

O autor agradece o financiamento parcial deste trabalho ao CNPq (processo 30.0407/84) e à FAMEPIG (processo CEX–840/90).

REFERÊNCIAS

1. D.J. Evans, N.R. Santos, "Nonstationary iterative methods for stochastic systems", *Comp. Stud. Rep.*, Vol. **831**, Loughborough University of Technology, U.K., (1993).
2. N.R. Santos, J.D. Evans, "Chebyshev semi-iterative solution of stachastic and Ortega problems based on second degree Richardson method", *Int. J. of Comp. Math.*, Vol. **53**, U.K., (1994).
3. N.R. Santos, G.A.C. França "Solução Eficiente da Equação de Elementos Finitos para Problemas Parabólicos", Atas do SIMMEC 91 - Simpósio Mineiro de Mecânica Computacional, pp. 390–397, Belo Horizonte, MG, (1991).
4. N.R. Santos, O.L. Linhares, "Convergence of Chebyshev semi-iterative methods", *Journal of Comp. and Appl. Math.* , Vol. **16**, pp. 59–68 (1986).
5. N.R. Santos, "SIRINEL - Um Sistema Especialista para Resolução de Sistemas Lineares Algébricos", Atas do VII Congresso Latino-Americano Sobre Métodos Computacionais Para Engenharia, Vol. **III**, pp. 1660–1667, (1986).