

Resolución numérica de las ecuaciones de la magnetohidrodinámica en el proceso Czochralski para la obtención de cristales semiconductores

Noel Hernández-Silva · Ramon Codina

Recibido: Marzo 2010, Aceptado: Abril 2010
©Universitat Polit  cnica de Catalunya, Barcelona, España 2010

Resumen El objetivo de este trabajo es introducir y resolver numéricamente el modelo matemático para el comportamiento del líquido semiconductor en el proceso Czochralski de obtención de cristales semiconductores, bajo laacci  n de un campo magnético. Dicho modelo corresponde a las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica. La resolución numérica de este modelo matemático presenta dificultades importantes debido a que en el están involucrados fenómenos de Mecánica de Fluidos, Electromagnetismo y Transferencia de Calor. Para la resolución numérica de este modelo se emplea un método de elementos finitos estabilizado basado en la versión algebraica de las subescalas de malla, lo cual permite satisfacer tanto la condición de divergencia nula sobre la velocidad del fluido como la condición de divergencia nula sobre el campo magnético además de evitar oscilaciones numéricas. El esquema usado en este trabajo está basado en el esquema propuesto en [1]. El esquema de elementos finitos antes mencionado se aplica al ejemplo numérico propuesto por B  uckle [2]. Dicho ejemplo es la comparación numérica mas extendida para el proceso de Czochralski. Los casos analizados en este trabajo sólo difieren de los propuestos por B  uckle en el hecho de que se les ha añadido un campo magnético. El empleo de campos magnéticos en el proceso de Czochralski está encaminado a reducir y eliminar las perturbaciones en el fluido que pudieran dar origen a defectos en el cristal semiconductor.

NUMERICAL RESOLUTION OF THE MAGNETOHYDRODYNAMICS EQUATIONS FOR THE CZOCHRALSKI PROCESS TO OBTAIN SEMICONDUCTOR CRYSTALS

Summary The objective of this work is to introduce and numerically solve the mathematical model for the behavior of liquid semiconductors in the Czochralski process to obtain semiconductor crystals under the influence of a magnetic field. Such model is framed within the Magnetohydrodynamics equations. The numerical solution of this mathematical model presents important difficulties due to the involvement of phenomena from Fluid Mechanics, Electromagnetism and Heat Transfer. In order to numerically solve this model a stabilized finite element approximation based on the algebraic version of a subgrid scale model is used. This approach makes possible to satisfy the free divergence condition over the velocity of the fluid together with the free divergence condition over the magnetic field and also to avoid numerical oscillations. The numerical scheme used in this work is based on the scheme proposed in [1]. This numerical scheme is applied to the numerical benchmark proposed by B  uckle [2]. Such example is the most common numerical benchmark for the Czochralski process. The cases analysed in this work only differ from those proposed by B  uckle in the fact that a magnetic field has been added. The use of magnetic fields in the Czochralski process is headed to diminish and suppress the perturbations in the liquid which can originate defects in the semiconductor crystal.

1. Introducción

La Magnetohidrodinámica (MHD) puede conceptualizarse como la combinación de la Mecánica de Fluidos y el Electromagnetismo. A grandes rasgos la MHD es la rama de la Ciencia que estudia el comportamiento de los fluidos conductores y no magnéticos en presencia de campos magnéticos y/o eléctricos. La interacción mutua entre el campo magnético \mathbf{B} y el campo de velocidades del fluido, \mathbf{u} , se puede explicar de la siguiente manera: El movimiento relativo del fluido a través del campo magnético origina una fuerza electromotriz y por tanto una corriente eléctrica, todo esto de acuerdo con la ley de Faraday. Estas corrientes eléctricas inducidas dan lugar a un segundo campo magnético, al que llamaremos campo inducido, de acuerdo con la ley de Ampère. Por último, el campo magnético resultante, que es la suma del campo inducido y del campo aplicado, interactúa con la densidad de corriente inducida, \mathbf{J} , para dar como resultado una fuerza volumétrica $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, que no es otra que la fuerza de Lorentz. Esta fuerza tiende a ir en contra del movimiento relativo entre el campo magnético y el fluido.

El atractivo de la MHD en el procesamiento de materiales es el hecho de que permite aplicar fuerzas volumétricas a un metal o semiconductor en estado líquido sin introducir elementos extraños. En el proceso Czochralski lo que se busca es eliminar la convección natural del líquido semiconductor mediante la aplicación de un campo magnético estacionario de alta intensidad.

2. Ecuaciones de gobierno

En esta sección presentamos las ecuaciones que rigen el modelo físico. Pese a ser conocidas, es importante recordar las hipótesis de la MHD para tener presente en qué condiciones se modelará el proceso Czochralski, particularmente teniendo en cuenta que incluiremos el acoplamiento con la temperatura.

2.1. Ecuaciones de Navier–Stokes

Las ecuaciones de Navier–Stokes son las ecuaciones diferenciales parciales que describen el flujo de los fluidos incompresibles. La ecuación (1) a continuación corresponde al principio de conservación del moméntum. La ecuación (2) corresponde al principio de conservación de la masa, tomando la densidad ρ como constante:

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2)$$

donde ν es la viscosidad cinemática, p es la presión y \mathbf{f} son las fuerzas de cuerpo aplicadas al fluido. Estas ecuaciones suponen que el fluido bajo estudio es un fluido newtoniano, es decir el fluido exhibe una relación lineal entre el esfuerzo cortante y la derivada de la velocidad.

2.2. Ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell constituyen un sistema de ecuaciones en derivadas parciales que relacionan los campos eléctricos y magnéticos. Estas ecuaciones gobernan todos los fenómenos electromagnéticos macroscópicos. Las ecuaciones de Maxwell en su forma diferencial son las siguientes:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \nabla \times \mathbf{H} = -\mathbf{J} \quad (4)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_e \quad (5)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (6)$$

donde definimos \mathbf{E} como la intensidad del campo eléctrico, \mathbf{H} como la intensidad del campo magnético y ρ_e como la fuente impuesta de densidad de carga eléctrica. La ecuación (3) es conocida como la ley de inducción de Faraday y expresa la relación entre la tasa de cambio del flujo magnético a través del área encerrada por un lazo cerrado y el campo eléctrico inducido a lo largo del lazo. La ecuación (4) es conocida como la ley de Ampère y relaciona el campo magnético tangencial a un lazo cerrado con la corriente que pasa por el lazo. La ecuación (5) es conocida como la ley de Gauss y establece la relación entre el flujo eléctrico que sale de una superficie y la carga encerrada por dicha superficie. Por último, la ecuación (6) simplemente establece que no hay monopolos magnéticos.

Además de estas ecuaciones se deben considerar otras ecuaciones que, sin ser leyes fundamentales del Electromagnetismo, juegan un papel importante en él. La primera de estas ecuaciones es la fuerza de Lorentz que actúa en todos los conductores cargados en presencia de un campo magnético. Su expresión está dada por la ecuación (7) :

$$\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (7)$$

La segunda ecuación que, sin ser una ley fundamental del Electromagnetismo, es importante considerar es la ley de Ohm. Esta ley declara que la intensidad de corriente \mathbf{J} es proporcional a la fuerza experimentada por las cargas libres. En un conductor fijo esta ley se expresa como $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, pero en un fluido conductor debemos tomar en cuenta el campo eléctrico, medido desde un

marco de referencia fijo, que se mueve con la velocidad del conductor, por lo que la ley de Ohm se transforma en la expresión (8):

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}_r = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \quad (8)$$

donde σ es la conductividad eléctrica. Por último, debemos considerar dos expresiones que se pueden entender como relaciones constitutivas que describen las propiedades del medio que se está considerando. Estas expresiones son las siguientes:

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$$

$$\mathbf{B} = \mu_m \mathbf{H}$$

donde ϵ es la permitividad eléctrica, μ_m es la permeabilidad magnética, \mathbf{D} es la densidad del flujo eléctrico y \mathbf{B} es la densidad del flujo magnético. Con estas relaciones y las ecuaciones de Maxwell, es posible describir los fenómenos electromagnéticos macroscópicos que intervienen en la MHD.

2.3. Acoplamiento térmico

Dado que el proceso Czochralski involucra fluctuaciones térmicas al mismo tiempo que fenómenos del Electromagnetismo y de Mecánica de Fluidos, se requiere usar la ecuación de la energía térmica para lograr una simulación efectiva. La ecuación de la energía térmica puede ser expresada como:

$$\rho c_p \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \vartheta \right) - \nabla \cdot (k_t \nabla \vartheta) - \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} - \Phi(\mathbf{u}) = Q \quad (9)$$

donde c_p es el calor específico, k_t es la conductividad térmica, ϑ es la temperatura, $\Phi(\mathbf{u})$ es la tasa de disipación viscosa y Q es la fuente de calor. El término $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ es el efecto Joule eléctrico y es el proceso mediante el cual el flujo de corriente eléctrica a través de un conductor libera calor. El término $\Phi(\mathbf{u})$ corresponde al efecto de Joule mecánico y se puede expresar como $\rho \nu \nabla^S \mathbf{u} : \nabla^S \mathbf{u}$, donde $\nabla^S \mathbf{u}$ es la parte simétrica de $\nabla \mathbf{u}$.

Es importante recordar que en la aproximación de Boussinesq se asume que la variación de la densidad ρ es despreciable excepto en el término de fuerzas de cuerpo \mathbf{f} en la ecuación (1). En ese término se asume que la densidad depende de la temperatura de la siguiente manera:

$$\rho = \rho_r \left[1 - \hat{\beta} (\vartheta - \vartheta_r) \right] \quad (10)$$

donde ρ_r es la densidad de referencia, ϑ_r es la temperatura de referencia y $\hat{\beta}$ es el coeficiente de expansión térmica.

2.4. Ecuaciones de la magnetohidrodinámica

Dado que se desea estudiar la MHD en fluidos incompresibles a velocidades relativamente bajas, se pueden realizar ciertas simplificaciones físicas. Dichas simplificaciones permiten arribar a un conjunto de ecuaciones que gobiernan el comportamiento de los fenómenos de MHD en la gran mayoría de las aplicaciones industriales. Las simplificaciones son las siguientes:

- Velocidades del fluido no relativistas.** Dado que la velocidad a la que se mueve el fluido de trabajo es pequeña comparada con la velocidad de la luz, $|\mathbf{V}^2| \ll c^2$, podemos mantener la forma Newtoniana de las ecuaciones de movimiento.
- Campo magnético inducido pequeño.** Se asume que el campo magnético inducido en el fluido es mucho más pequeño que el campo magnético aplicado.
- No se consideran fenómenos que involucren altas frecuencias.** Esta suposición implica que la derivada de la corriente de desplazamiento, $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$, es despreciable comparada con la corriente de conducción \mathbf{J} . Esta suposición se justifica dado que estamos trabajando con conductores y no con dieléctricos.
- La energía eléctrica es despreciable comparada con la energía magnética.** Esto significa que la interacción principal es entre el campo magnético y el fluido.
- Se desprecia ρ_e .** En la ley de Ohm, la carga espacial ρ_e , es despreciable en conductores líquidos, no así en los gases.
- Densidad de fuerzas** La densidad de fuerzas es representada por $\mathbf{f} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B}$ y dado que ρ_e puede ser despreciada, esto se puede reducir a $\mathbf{f} = \mathbf{J} \times \mathbf{B}$.

Tomando en consideración las simplificaciones anteriores y aplicándolas a las ecuaciones de Maxwell, (3),(4),(5) y (6), además de las ecuaciones de Navier-Stokes, (1) y (2) y la ecuación de la energía térmica (9), podemos obtener las ecuaciones de la MHD en su forma correspondiente a fluidos incompresibles empleando la aproximación de Boussinesq:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} - \nu \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho_r} \nabla p - \frac{1}{\mu_m \rho_r} (\nabla \times \mathbf{B}) \\ \times \mathbf{B} = \mathbf{g} \rho \\ \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \frac{1}{\mu_m \sigma} \nabla \times (\nabla \times \mathbf{B}) - \nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) = 0 \end{aligned}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho_r c_p \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \vartheta \right) - k_t \Delta \vartheta - \frac{1}{\mu_m^2 \sigma} \|\nabla \times \mathbf{B}\|^2 & \quad (11) \\ -\Phi(\mathbf{u}) = Q & \end{aligned}$$

A partir de estas ecuaciones se construirán esquemas numéricos empleando elementos finitos estabilizados. El lector interesado en una exposición mas detallada de los orígenes y aplicaciones de la Magnetohidrodinámica puede referirse al libro de Davidson [3].

3. Esquema numérico

El esquema numérico que se empleó en el sistema de ecuaciones (11) está basado en el enfoque de subescalas de malla (*subgrid scales*), introducido por Hughes [4]. La idea esencial es descomponer el espacio continuo de las incógnitas en dos subespacios, uno el espacio de elementos finitos y otro, el llamado de las subescalas de malla, de manera que complete el primero. La aproximación puede definirse entonces en la manera en que se aproxima el espacio de subescalas. En nuestro caso, usamos una aproximación algebraica de éstas, escribiéndolas como función del residuo de elementos finitos y unos parámetros numéricos que dependen de la formulación. El resultado es un problema escrito en el espacio de elementos finitos que nos permite evitar la condición inf-sup [5] y las oscilaciones numéricas asociadas.

Otra característica importante del esquema desarrollado para las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica es el empleo de una presión magnética ficticia para forzar la condición de divergencia nula sobre el campo magnético. Dado que durante la deducción de las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica se emplea la ecuación (6) para llegar a la ecuación de advección del campo magnético, anteriormente se asumía que los esquemas numéricos basados en esta ecuación no necesitaban forzar la condición (6). Jian, Wu y Povinelli [6], demostraron que es necesario forzar dicha condición para evitar el surgimiento de soluciones espurias en el campo magnético.

Un problema también asociado a la resolución numérica de las ecuaciones de la Magnetohidrodinámica es el desacoplamiento del sistema de ecuaciones (11). Dado que tanto la velocidad del fluido influye en el campo magnético como el campo magnético influye en la velocidad, es necesario linealizar las ecuaciones y posteriormente desacoplarlas. En el trabajo desarrollado se empleo un esquema de punto fijo del término cuadrático en la ecuación de conservación del moméntum y en la ecuación de transporte del campo magnético en el

sistema (11). El lector interesado puede encontrar el desarrollo completo del esquema numérico en [7].

4. Simulaciones numéricas

4.1. Proceso Czochralski

El proceso Czochralski para el crecimiento de cristales semiconductores es usado ampliamente en la industria de los semiconductores. El principal objetivo del proceso es obtener un monocrystal semiconductor. Para realizar esta tarea se extrae lentamente una semilla del crisol donde se encuentra fundido el material semiconductor. Esta acción le proporciona al cristal una dirección única en la cual crecer. Para asegurar que el cristal crece en forma cilíndrica uniforme, el crisol está sujeto a un movimiento de rotación mientras el cristal es extraído.

La Figura 1 presenta la situación del proceso Czochralski para esta simulación. Como puede verse el problema consiste en un crisol cilíndrico vertical de altura H rotando con velocidad angular Ω_C . El cristal coaxial en la parte superior del crisol rota con velocidad Ω_X pero en sentido opuesto a la rotación del crisol. Se asume que el cristal y el crisol son isotérmicos con temperaturas T_X y T_C respectivamente.

Las condiciones de frontera para esta simulación numérica se presentan en la Figura 2. La naturaleza de esta simulación numérica hace necesario emplear condiciones de frontera para la velocidad, la temperatura y el campo magnético. El primer tipo de condiciones de frontera se impone sobre la velocidad. La condición de no deslizamiento se impone en todas las paredes del crisol así como en la interfase entre el cristal y el líquido. Se debe tomar en cuenta que tanto el crisol como el cristal giran con cierta velocidad angular por lo que la velocidad impuesta sobre el fluido será dada por el producto de las distancias por las velocidades angulares. Para el caso del crisol la velocidad es $\Omega_C R_C$, donde R_C es el radio del crisol. La velocidad del fluido en la interfase con el cristal esta dada por $\Omega_X R_X$ donde R_X es el radio del cristal. En el caso de la superficie libre entre el cristal y el crisol, la velocidad no está sujeta más que a la condición de superficie libre.

La segunda clase de condiciones de frontera están impuestas sobre la temperatura, la cual está representada por la letra T en este ejemplo. Para las paredes del crisol la temperatura del líquido semiconductor está fija en T_C y para el líquido semiconductor en contacto con el cristal la temperatura está fija en T_X . Para el caso del líquido semiconductor en contacto con el fondo del crisol se impuso una condición de flujo de calor igual a cero. La misma condición se impuso en en la

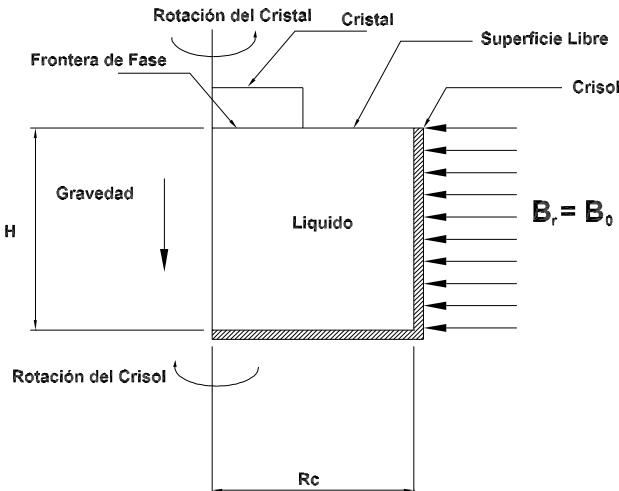


Figura 1. Dominio considerado para el proceso Czochralski

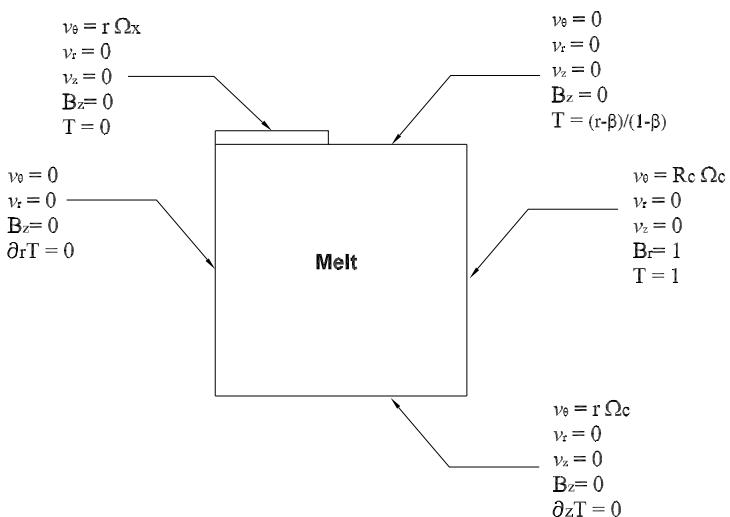


Figura 2. Condiciones de frontera para el proceso Czochralski

línea de simetría axial. El espacio entre el cristal y las paredes del crisol está sujeto a una variación lineal de la temperatura, desde la temperatura del cristal hasta la temperatura de las paredes del crisol. En el caso de las condiciones de frontera para el campo magnético, se consideró que todas las interfaces constituían paredes aislantes.

En este ejemplo se emplearon los siguientes números adimensionales, que definen las condiciones a las que se realiza la simulación numérica del proceso Czochralski:

$$Re_C = \frac{R_C^2 |\Omega_C|}{\nu}, \quad Re_X = \frac{R_C^2 |\Omega_X|}{\nu} \quad (12)$$

$$Pr = \frac{\nu}{\kappa}, \quad Gr = \frac{g \hat{\beta} (T_C - T_X) R_C^3}{\nu^2} \quad (13)$$

$$\alpha = \frac{H}{R_C}, \quad \beta = \frac{R_X}{R_C} \quad (14)$$

Para limitar las posibles combinación de valores de estos números, durante la investigación que dio origen a este trabajo se analizaron ocho combinaciones. Estas combinaciones están basadas en las propuestas por Bückle en [2]. Estos casos son representativos de las posibles situaciones que se presentan en el proceso Czochralski. Los valores para los números de Reynolds y Grashof se presentan en la Tabla 1 para todos los casos. Para todos los casos propuestos las relaciones de longitud y el numero de Prandtl están fijas en $\alpha = 1,0$, $\beta = 0,4$ y $Pr = 0,05$.

En esta investigación se realizaron los casos presentados en la Tabla 1 incrementando el valor del número de Hartmann $Ha = BH\sqrt{\sigma/\rho\nu}$. Para cada caso listado, el numero de Hartmann tomo los siguientes valores: $Ha = 0,0, 5,0$ y $10,0$. Debido a la simetría de revo-

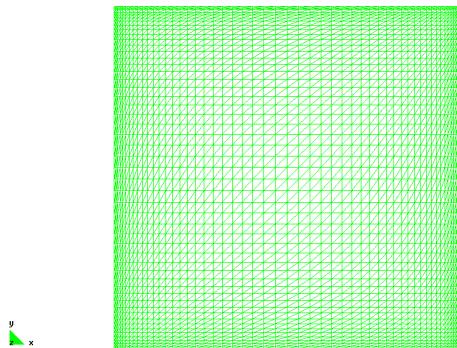


Figura 3. Malla usada para el proceso Czochralski

lución de la geometría del problema, sólo es necesario discretizar una sección, aunque el campo de velocidades es tridimensional (hay velocidad en la dirección azimutal). Para todos las simulaciones realizadas se empleó la malla presentada en la Figura 3. Esta malla consiste de 5408 triángulos lineales y 2809 nodos. Como se puede ver en la Figura 3, la malla es más gruesa en el centro y refinada cerca de las paredes para capturar cualquier capa límite que se presente en la simulación.

Dadas las limitaciones de espacio en este documento sólo se presenta la simulación correspondiente al caso A2. Como se desprende de la Tabla 1, el cristal tiene una velocidad angular constante mientras que el crisol está estacionario. Esta disposición describe la configuración básica de un proceso Czochralski real. No existen temperaturas impuestas sobre el crisol y por lo tanto no hay movimientos inducidos por convección en el líquido semiconductor.

Tabla 1. Parámetros y sus valores para los diferentes casos del proceso Czochralski

Caso	Gr	Re_X	Re_C
A1	0	10^2	0
A2	0	10^3	0
B1	0	10^2	$-2,5 \times 10^1$
B2	0	10^3	$-2,5 \times 10^2$
C1	10^4	0	0
C2	10^5	0	0
D1	10^4	10^1	0
D2	10^5	10^1	0

Para Hartmann $Ha = 0,0$, la norma de la velocidad se muestra en la Figura 4. El campo vectorial de la velocidad se muestra en la Figura 5, esta figura se presenta usando una perspectiva isométrica para visualizar adecuadamente los vectores de velocidad. Como se puede ver en estas figuras, las velocidades mas altas se encuentran cerca del cristal. Para este caso no existe campo magnético.

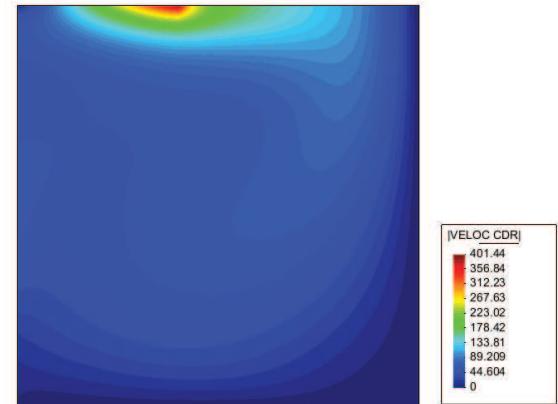


Figura 4. Norma de la velocidad para $Ha=0.0$ en el caso A2

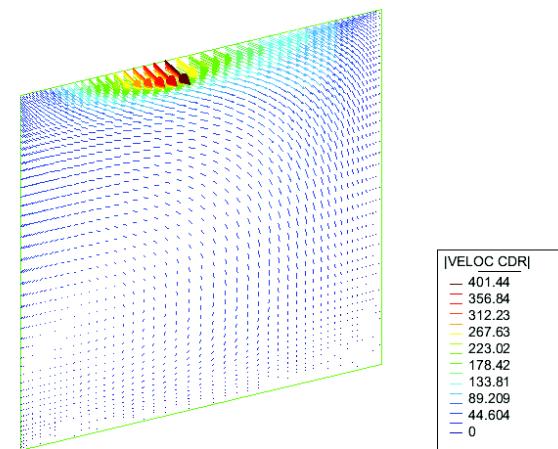


Figura 5. Vectores de velocidad para $Ha=0.0$ y el caso A2

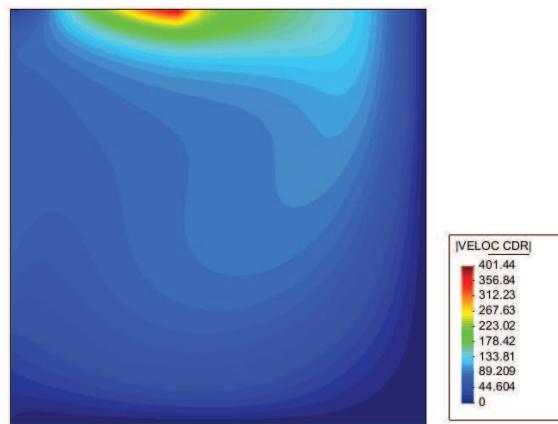


Figura 6. Norma de la velocidad para $Ha=5.0$ y el caso A2

Para Hartmann $Ha = 5,0$, se puede apreciar una homogenización del campo de flujo. Este efecto puede verse en la Figura 6. Finalmente para Hartmann $Ha = 10,0$, la homogenización del campo de flujo es bastante evidente como puede verse en la Figura 8.

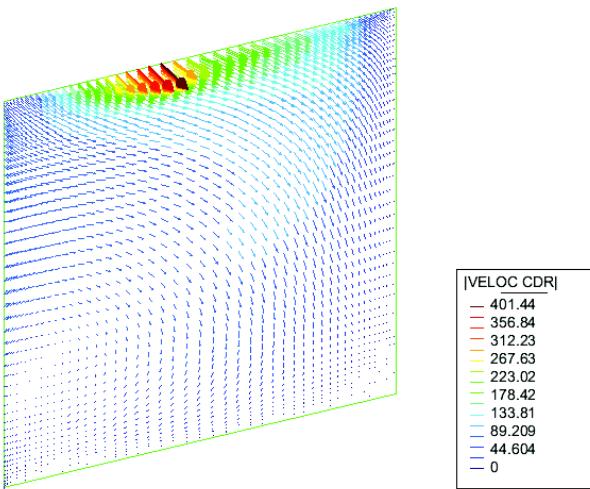


Figura 7. Vectores de velocidad para $Ha=5.0$ y el caso A2

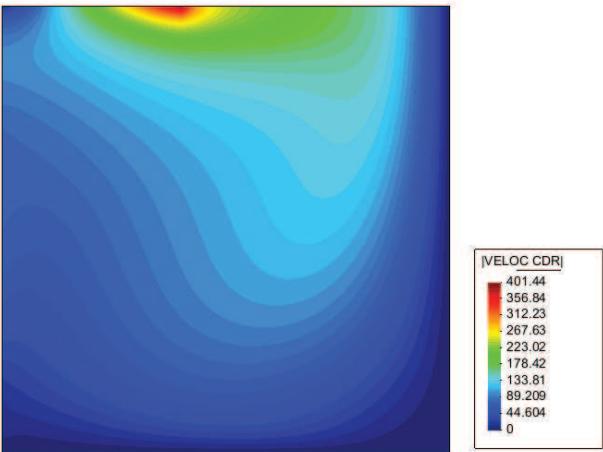


Figura 8. Norma de la velocidad para $Ha=10.0$ y el caso A2

5. Conclusiones

En este trabajo se han presentado los resultados numéricos de una simulación del proceso Czochralski de crecimiento de cristales empleando elementos finitos estabilizados. En dichos resultados se pueden observar los comportamientos esperados de homogenización del campo de flujo. Las simulaciones numéricas del proceso Czochralski permiten obtener una visión más completa del comportamiento del fluido semiconductor antes de solidificarse. En este trabajo hemos estudiado asimismo el acoplamiento del problema de MHD con el problema térmico, lo cual ha sido posible gracias a la formulación numérica usada (descrita en [7]). Este conocimiento puede emplearse para incrementar la eficiencia en el proceso de producción de cristales semiconductores, lo que tendría importantes aplicaciones industriales.

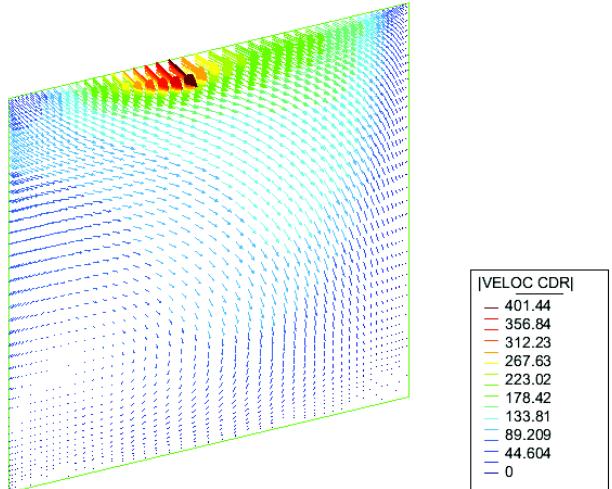


Figura 9. Vectores de velocidad para $Ha=10.0$ y el caso A2

Referencias

1. Codina R., Hernández-Silva N. (2006) Stabilized finite element approximation of the stationary magnetohydrodynamics equations. *Comput. Mech.* 38:344–355.
2. Bückle U., Schäfer M. (1993) Benchmark results for the numerical simulation of flow in Czochralski Crystal Growth. *Journal of Crystal Growth* 126:682–694.
3. Davidson P.A (2001) *An Introduction to Magnetohydrodynamics*. Primera Edición, Cambridge University Press, Cambridge U.K.
4. Brooks A.N., Hughes T.J.R. (1982) Streamline Upwind/Petrov–Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier–Stokes Equations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 32:199–259.
5. Codina R., Blasco J. (2000) Analysis of a Pressure Stabilized Finite Element Approximation of the Stationary Navier–Stokes Equations. *Numerische Matematik* 87:59–81.
6. Jiang B., Wu J., Povinelli L.A. (1996) The Origin of Spurious Solutions in Computational Electromagnetics. *Journal of Computational Physics* 125:104–123.
7. Codina R., Hernández N. (2010) Approximation of the thermally coupled MHD problem using a stabilized finite element method. Enviado a *Journal of Computational Physics*.