

ESTIMACION DEL ERROR DE DISCRETIZACION CON PRINCIPIOS VARIACIONALES MULTICAMPO: II. FLEXION DE PLACAS

F.J. BELTRAN

y

E. ALARCON

*Dpto. de Mecánica Estructural y Construcciones Industriales,
E.T.S. de Ingenieros Industriales,
José Gutiérrez Abascal 2,
28006 Madrid.*

RESUMEN

Desarrollos recientes para encajar dentro de un marco variacional la llamada Formulación Libre sugieren la posibilidad de introducir un nuevo tipo de estimador de error para cálculos por elementos finitos. Este estimador se basa en una diferencia entre ciertos funcionales multicampo, que toman el mismo valor para la solución exacta del problema. En el presente artículo, dividido en dos partes, se introduce la formulación del estimador para problemas de elasticidad y de flexión de placas según las hipótesis clásicas de Kirchhoff. Se presentan también algunos ejemplos para dar idea de los comportamientos numéricos observados.

SUMMARY

Recent developments to fit the so called Free Formulation into a variational framework have suggested the possibility of introducing a new category of error estimates for finite element computations. These error estimates are based on differences between certain multifield functionals, which give the same value for the true solution. In the two parts of the present paper the formulation of such estimates is introduced for elasticity and plate bending problems respectively. In order to give an idea of the numerical performance of these new error measures several examples are also presented.

INTRODUCCION

Esta es la segunda parte de un trabajo que resume la investigación realizada por los autores para introducir una nueva categoría de estimadores del error de discretización en cálculos por el método de los elementos finitos¹. El concepto fundamental es que si un determinado problema puede resolverse utilizando indistintamente varios principios variacionales que se derivan unos de otros mediante la técnica de los multiplicadores de Lagrange, entonces todos los funcionales asociados toman el mismo valor para la solución exacta del problema². De este modo, para una solución aproximada, parece

Recibido: Octubre 1990

que podría utilizarse una cierta diferencia entre el valor de distintos funcionales para estimar el error cometido³.

En la primera parte del trabajo⁴, tras un breve repaso a los estimadores de error recogidos en la literatura, se expuso la aplicación de las nuevas ideas a problemas de elasticidad (problemas C^0), proponiéndose un nuevo estimador de error y dándose la formulación de los elementos finitos utilizados junto con el mismo. Para dar idea de los comportamientos numéricos observados, se estudió también un ejemplo concreto con solución analítica conocida.

Esta segunda parte se dedica al estudio de problemas de flexión de placas según las hipótesis clásicas de Kirchhoff (problemas C^1) y su desarrollo es paralelo al empleado en la parte primera al tratar los problemas de elasticidad. Tras introducir un nuevo estimador de error, se proporciona la formulación de una familia de elementos para ser usados con el mismo. Estos elementos son de tipo híbrido, salvan de forma natural los problemas de conformidad que aparecen cuando se utilizan principios variacionales con un solo campo independiente⁵ y cumplen automáticamente también la prueba de la parcela¹. Finalmente se presenta un ejemplo sencillo para ilustrar el funcionamiento del estimador propuesto.

NOTACION

El planteamiento del problema de la flexión de placas según las hipótesis de Kirchhoff⁶ sirve para establecer la notación.

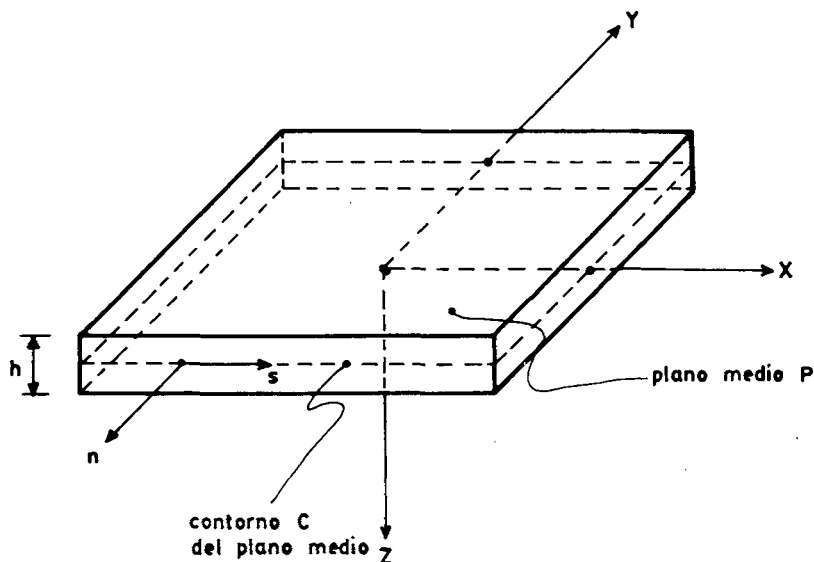


Figura 1. Sistema de referencia para una placa.

Sea una placa de espesor o canto h cuya superficie media se supone plana (Figura 1). En el sistema de referencia que se emplea los ejes X e Y están contenidos en esta superficie media y el eje Z es normal a la misma. La placa se supone que es simplemente conexa y su superficie lateral cilíndrica, esto es, paralela al eje Z . El plano medio de

la placa constituye un dominio $P \subset \mathbb{R}^2$ con contorno $C = C_d \cup C_t$, de versor normal $\mathbf{n} \equiv (n_x, n_y)$. En C_d son dato los movimientos $\bar{\mathbf{d}}$ (Figura 2), mientras que en C_t son conocidos los esfuerzos unitarios o por unidad de longitud $\bar{\mathbf{m}}$ (Figura 3). Otro campo que también se conoce es el campo q de fuerza normal al plano medio por unidad de superficie, definido en P .

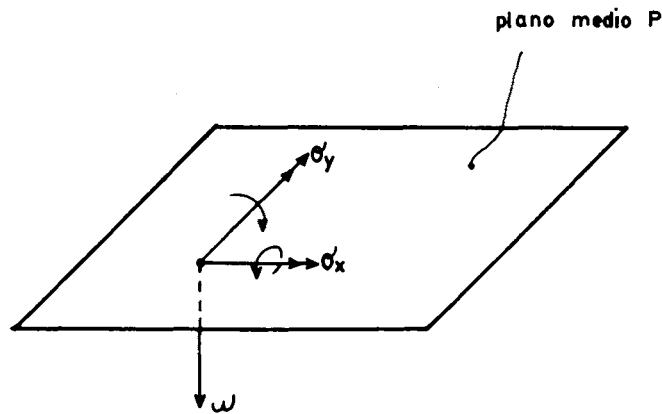


Figura 2. Movimientos del plano medio de la placa.

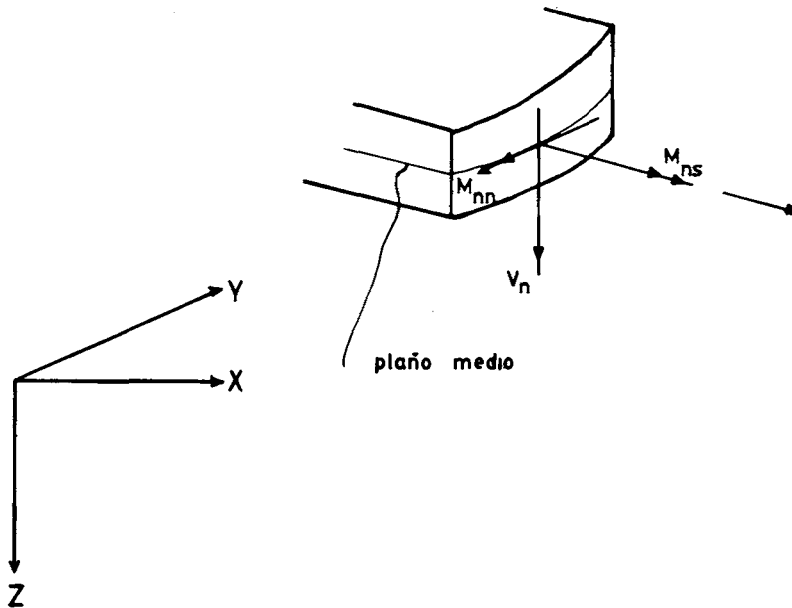


Figura 3. Esfuerzos unitarios en el contorno de la placa.

En el problema de la flexión de la placa según la teoría clásica aparecen como incógnitas el campo escalar de flechas w en P , el campo tensorial de momentos o tensiones generalizadas $\mathbf{M}$ en P y el campo tensorial de curvaturas o deformaciones generalizadas $\boldsymbol{\kappa}$ en P . Obsérvese el paralelismo general con el problema elástico.

En los párrafos que siguen se empleará la notación ya establecida⁴ para distinguir

entre campos primarios o sujetos a variaciones y campos secundarios o dependientes. Un campo que puede variarse independientemente se denotará colocando una tilde “~” sobre su símbolo, por ejemplo: $\tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\boldsymbol{\kappa}}$. En los campos derivados la dependencia se identifica colocando como superíndice el símbolo del campo primario. Así se tiene, por ejemplo:

$$\boldsymbol{\kappa}_{xx}^{\omega} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial x^2}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{yy}^{\omega} = -\frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}, \quad \boldsymbol{\kappa}_{xy}^{\omega} = 2\frac{\partial^2 \omega}{\partial x \partial y} \quad (1)$$

$$\mathbf{M}^{\omega} = \mathbf{D}\boldsymbol{\kappa}^{\omega}$$

donde $\mathbf{D}$ es un tensor de constantes elásticas.

Los símbolos sin tilde ni superíndice $\mathbf{M}, \boldsymbol{\kappa}, \omega$ se reservan para los campos solución exacta del problema.

La escritura de las integrales de superficie y de línea se abrevia generalmente colocando el integrando entre paréntesis o entre corchetes respectivamente. El dominio de integración se indica mediante un subíndice:

$$(f)_P \equiv \int_P f \, dP \quad , \quad [f]_{C_t} \equiv \int_{C_t} f \, dC \quad (2)$$

En el caso de que $\mathbf{f}$ y $\mathbf{g}$ sean funciones tensoriales se define la notación:

$$(\mathbf{f}, \mathbf{g})_P \equiv \int_P \mathbf{f} : \mathbf{g} \, dP \quad [\mathbf{f}, \mathbf{g}]_C \equiv \int_C \mathbf{f} : \mathbf{g} \, dC \quad (3)$$

PLANTEAMIENTO VARIACIONAL

El problema de la flexión de una placa no es más que un problema elástico en el que se hacen una serie de hipótesis sobre los campos de desplazamientos, tensiones y deformaciones. Estas hipótesis permiten disminuir en un grado la dimensionalidad del problema, ya que lo reducen al estudio del plano medio de la placa. De este modo los principios variacionales convencionales en flexión de placas pueden obtenerse a partir de los principios variacionales empleados para problemas de elasticidad por integración a través del espesor de la placa.

El principio de la mínima energía potencial se expresa diciendo que la solución ω para el campo de flechas hace mínimo el funcional:

$$\Pi_P(\tilde{\omega}) = \frac{1}{2}(\mathbf{M}^{\omega}, \boldsymbol{\kappa}^{\omega})_P - (q, \tilde{\omega})_P - (\tilde{\omega}, \bar{\mathbf{m}})_{C_t} \quad (4)$$

cuando éste se define entre campos $\tilde{\omega}$ que satisfacen las condiciones esenciales de contorno: $\tilde{\omega} = \bar{\mathbf{d}}$ en C_d . En (4) el campo vectorial $\tilde{\omega}$ es:

$$\tilde{\omega} = [\tilde{\omega}, \theta_x^{\omega}, \theta_y^{\omega}] \quad (5)$$

donde, según la hipótesis de Kirchhoff:

$$\theta_x^\omega = -\frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial y}, \quad \theta_y^\omega = \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial x} \quad (6)$$

De este principio de la mínima energía potencial pueden obtenerse los otros principios variacionales convencionales (Hu-Washizu, Hellinger-Reissner ...) utilizando la técnica de los multiplicadores de Lagrange, como ya se hizo en la parte de este trabajo dedicada a la elasticidad⁴.

Considérese ahora el dominio $P \subset \mathbb{R}^2$, correspondiente al plano medio de la placa, dividido en una serie de subdominios P_j (Figura 4). Sea $C_d \cup C_t$ el contorno exterior de P y representemos por C_i los contornos interiores de los subdominios P_j . Consideremos un campo de movimientos $\tilde{\omega}^{(j)}$ definido en el interior del recinto P_j y cuya variación es independiente de la de los campos definidos en el resto de los subdominios. La conjunción de estos campos $\tilde{\omega}^{(j)}$ da lugar a un campo $\tilde{\omega}$ de movimientos para el dominio P completo.

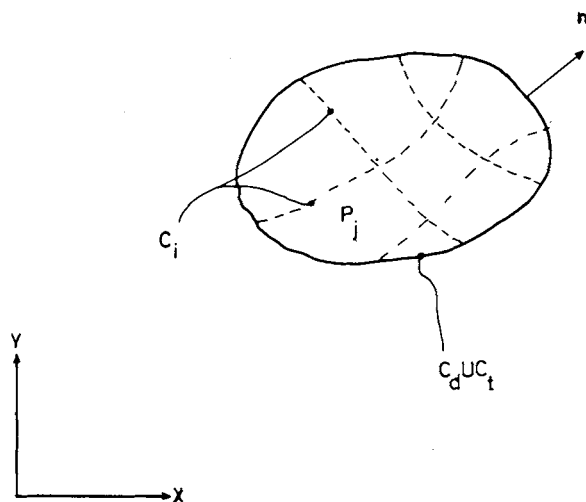


Figura 4. División del dominio P en subdominios.

Sea también un campo $\tilde{\mathbf{d}}$ de movimientos definido sobre el contorno $C_d \cup C_t$ de P y sobre los contornos interiores C_i de los subdominios. Es decir, $\tilde{\mathbf{d}}$ es un campo definido en un contorno "ampliado" $C = C_d \cup C_t \cup C_i$. Si se satisfacen las condiciones:

- La función $\tilde{\omega}^{(j)}$ es continua y unívoca dentro del subdominio P_j .
- La función $\tilde{\omega}^{(j)}$ coincide con el campo $\tilde{\mathbf{d}}$ en el contorno del subdominio P_j .
- El campo $\tilde{\mathbf{d}}$ toma el valor de los movimientos impuestos $\tilde{\mathbf{d}}$ en la parte C_d del contorno de P .

entonces el funcional de la energía potencial puede escribirse como:

$$\begin{aligned} \Pi_P(\tilde{\omega}) &= \sum_j \Pi_{P_j}(\tilde{\omega}^{(j)}) = \\ &= \sum_j \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{M}^\omega, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} - (q, \tilde{\omega}^{(j)})_{P_j} - [\tilde{\mathbf{m}}, \tilde{\omega}^{(j)}]_{C_{t_j}} \right\} \end{aligned} \quad (7)$$

Puede pensarse en introducir la condición b dentro del funcional (7) mediante un campo multiplicador de Lagrange $\tilde{\lambda}$ definido en el contorno generalizado C . De este modo los campos $\tilde{d}$ y $\tilde{\omega}^{(j)}$ podrían variarse independientemente. Los principios variacionales en los que la condición $\tilde{d} = \tilde{\omega}$ no se fuerza *a priori* en el contorno ampliado C , se conocen con el nombre de principios generalizados en desplazamientos o principios d-generalizados^{7,8}.

El funcional potencial total d-generalizado se escribe entonces:

$$\begin{aligned} \Pi_P^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{\lambda}) = \\ = \sum_j \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{M}^\omega, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} - (q, \tilde{\omega}^{(j)})_{P_j} - [\tilde{m}, \tilde{d}]_{C_{t_j}} + [\tilde{\lambda}, \tilde{d} - \tilde{\omega}^{(j)}]_{C_j} \right\} \end{aligned} \quad (8)$$

donde C_j representa el contorno del subdominio P_j .

La solución al problema de la flexión de la placa podrá obtenerse haciendo estacionario el funcional $\Pi_P^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{\lambda})$ con la restricción $\tilde{d} = \bar{d}$ en la parte C_d del contorno de P . Si se obtienen las ecuaciones de Euler y las condiciones naturales de contorno asociadas al principio variacional que acaba de enunciarse, se identifica¹ el campo $\tilde{\lambda}$ como un campo de esfuerzos unitarios $\tilde{m}$ definido en el contorno generalizado C . Con ello el potencial total d-generalizado Π_P^d se escribe:

$$\begin{aligned} \Pi_P^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{m}) = \\ = \sum_j \left\{ \frac{1}{2}(\mathbf{M}^\omega, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} - (q, \tilde{\omega}^{(j)})_{P_j} - [\tilde{m}, \tilde{d}]_{C_{t_j}} + [\tilde{m}, \tilde{d} - \tilde{\omega}^{(j)}]_{C_j} \right\} \end{aligned} \quad (9)$$

Otros principios variacionales d-generalizados pueden encontrarse en los trabajos recientes de Felippa^{3,9}. Para la presente exposición tiene un interés particular un principio variacional de Hellinger-Reissner d-generalizado. El funcional asociado es en este caso:

$$\begin{aligned} \Pi_R^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{M}) = \sum_j \left\{ -\frac{1}{2}(\tilde{M}, \boldsymbol{\kappa}^M)_{P_j} + (\tilde{M}, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} - (q, \tilde{\omega}^{(j)})_{P_j} - \right. \\ \left. - [\tilde{m}, \tilde{d}]_{C_{t_j}} + [\tilde{M}_n, \tilde{d} - \tilde{\omega}^{(j)}]_{C_j} \right\} \end{aligned} \quad (10)$$

donde $\tilde{M}$ es un campo independiente de momentos y $\tilde{M}_n$ son los esfuerzos en el contorno C_j derivados de ese campo. Los campos solución al problema hacen estacionario el funcional Π_R^d cuando éste se define sobre campos $\tilde{d}$ que cumplen $\tilde{d} = \bar{d}$ en C_d .

Siguiendo ahora un razonamiento análogo al empleado para problemas de elasticidad⁴, nótese que los funcionales Π_P^d y Π_R^d son casos particulares del funcional parametrizado:

$$\begin{aligned} \Pi_\gamma^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{M}) = (1 - \gamma)\Pi_P^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{M}_n) + \gamma\Pi_R^d(\tilde{\omega}, \tilde{d}, \tilde{M}) = \\ = \sum_j \left\{ \frac{1}{2}(1 - \gamma)(\mathbf{M}^\omega, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} - \frac{1}{2}\gamma(\tilde{M}, \boldsymbol{\kappa}^M)_{P_j} + \gamma(\tilde{M}, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} - \right. \\ \left. - (q, \tilde{\omega}^{(j)})_{P_j} - [\tilde{m}, \tilde{d}]_{C_{t_j}} + [\tilde{M}_n, \tilde{d} - \tilde{\omega}^{(j)}]_{C_j} \right\} \end{aligned} \quad (11)$$

$$\gamma \in \mathbb{R}, \quad 0 \leq \gamma \leq 1$$

y los campos solución del problema hacen estacionario Π_γ^d cuando éste se define sobre campos $\tilde{d}$ que cumplen la restricción $\tilde{d} = \bar{d}$ en C_d .

ESTIMADOR DE ERROR

Todos los funcionales introducidos más arriba para la resolución del problema de la flexión de placas delgadas toman el mismo valor Π cuando en ellos se sustituyen los campos solución exacta del problema: $\omega, \mathbf{M}, \boldsymbol{\kappa}, \mathbf{d}$. Esta es una propiedad importante del método de los multiplicadores de Lagrange².

De nuevo⁴ surge la pregunta de si es posible aprovechar las diferencias entre los valores que toman los funcionales para una solución aproximada como estimadores energéticos del error de aproximación cometido. Sin repetir los razonamientos hechos en⁴, se tiene que, si Π_P^d y Π_γ^d son los valores que toman el funcional de la energía potencial y el funcional parametrizado para una solución aproximada del problema, entonces las diferencias $|\Pi_P^d - \Pi|$ y $|\Pi_\gamma^d - \Pi|$ son medidas energéticas de la magnitud del error de discretización.

Se propone entonces como estimador de estas medidas energéticas la diferencia:

$$\epsilon = \Pi_P^d(\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{M}}_n) - \Pi_\gamma^d(\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{M}}) \quad (12)$$

En este caso intervienen en el cálculo del estimador tres campos, dos de ellos ($\tilde{\omega}$ y $\tilde{\mathbf{M}}$) definidos en el dominio P y el otro definido en el contorno generalizado C . Ello obligará en general a trabajar con formulaciones de tipo híbrido. Si se dispone de estos tres campos la diferencia (12) es fácil de calcular, ya que:

$$\begin{aligned} \epsilon &= \sum_j \epsilon_j = \sum_j \left\{ \frac{1}{2} \gamma (\mathbf{M}^\omega, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} + \frac{1}{2} \gamma (\tilde{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\kappa}^M)_{P_j} - \gamma (\tilde{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\kappa}^\omega)_{P_j} \right\} = \\ &= \frac{\gamma}{2} \sum_j \left\{ (\mathbf{M}^\omega - \tilde{\mathbf{M}}, \boldsymbol{\kappa}^\omega - \boldsymbol{\kappa}^M)_{P_j} \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

con j variando entre 1 y el número de subdominios P_j .

Las contribuciones ϵ_j son a su vez medidas del error local que, divididas por el área del subdominio P_j , pueden utilizarse como "densidades de error" para indicar aquellos elementos donde el refinamiento sería más productivo. Nótese, por otro lado, que si la relación entre momentos y curvaturas es definida positiva y el parámetro γ es positivo, entonces el estimador ϵ es siempre mayor o igual que cero.

Es de destacar la analogía entre la expresión (13) y la obtenida en el caso de problemas de elasticidad⁴. En ambos casos el estimador está asociado a las diferencias de energía entre dos campos primarios en el funcional parametrizado.

DISCRETIZACION POR EL M.E.F.

La utilización del estimador propuesto es fácil cuando se utiliza el principio asociado al funcional parametrizado $\Pi_\gamma^d(\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{d}}, \tilde{\mathbf{M}})$. Dicho principio variacional da lugar a elementos finitos híbridos cuyas variables de conexión son los movimientos nodales. La formulación de estos elementos se ha establecido introduciendo una restricción cinemática adicional entre los campos $\tilde{\omega}$ y $\tilde{\mathbf{d}}$, restricción que sirve para que la prueba de la parcela se satisfaga incondicionalmente cualquiera que sea el valor del parámetro γ utilizado; aún cuando no exista continuidad del campo de movimientos $\tilde{\omega}$ de elemento a elemento. La Formulación Libre de Bergan¹⁰ resulta ser un caso particular del

desarrollo, cuyos puntos principales se presentan a continuación. Los detalles pueden verse en Beltrán¹.

Según es costumbre, las componentes del campo de momentos $\tilde{\mathbf{M}}$ y las del campo de curvaturas $\tilde{\boldsymbol{\kappa}}$ se agrupan en vectores columna de tres elementos, mientras que el tensor $\mathbf{D}$ de coeficientes elásticos pasa a ser una matriz cuadrada simétrica.

La hipótesis en que se basa la discretización por elementos finitos es que el campo $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ de movimientos y el campo $\tilde{\mathbf{M}}$ de momentos pueden expresarse dentro de cada subdominio o elemento P_j como:

$$\tilde{\boldsymbol{\omega}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ -\tilde{\omega}_{,y} \\ \tilde{\omega}_{,x} \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\omega} \\ \theta_x^\omega \\ \theta_y^\omega \end{bmatrix} = \mathbf{N} \mathbf{q} \quad \text{en } P_j \quad (14)$$

y

$$\tilde{\mathbf{M}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{M}_{xx} \\ \tilde{M}_{yy} \\ \tilde{M}_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{A} \mathbf{a} \quad \text{en } P_j \quad (15)$$

Y que el campo de movimientos $\tilde{\mathbf{d}}$ puede obtenerse en el contorno del elemento P_j según:

$$\tilde{\mathbf{d}} \equiv \begin{bmatrix} \tilde{\omega}_n \\ \tilde{\theta}_{nn} \\ \theta_{ns}^\omega \end{bmatrix} = \mathbf{V} \mathbf{v} \quad \text{en } C_j \quad (16)$$

A diferencia de lo que ocurría en el principio variacional escogido para los problemas de elasticidad⁴, no se requiere ahora la continuidad del campo de movimientos internos $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ a través de las fronteras interelementales. La formulación propuesta salva así de forma natural los problemas de conformidad que aparecen cuando se utilizan principios variacionales en los que el campo de flechas es el único campo independiente⁵. Esto proporciona una gran libertad para escoger los modos contenidos en la matriz $\mathbf{N}$. Por otro lado, el campo de movimientos de interfase $\tilde{\mathbf{d}}$ debe ser continuo en el contorno generalizado $C = C_t \cup C_d \cup C_i$.

El número total de modos de movimiento interno (número de componentes del vector $\mathbf{q}$) se toma igual al número de modos de movimiento externo (número de componentes del vector $\mathbf{v}$). Los campos secundarios o derivados de $\tilde{\boldsymbol{\omega}}$ y $\tilde{\mathbf{M}}$ son:

$$\boldsymbol{\kappa}^\omega = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} & 0 & 0 \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} & 0 & 0 \\ 2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{N} \mathbf{q} = \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{en } P_j \quad (17)$$

$$\mathbf{M}^\omega = \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{q} \quad \text{en } P_j \quad (18)$$

$$\boldsymbol{\kappa}^M = \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{a} \quad \text{en } P_j \quad (19)$$

Las relaciones (14) a (19) permiten obtener la forma discretizada del funcional parametrizado:

$$\begin{aligned}
 \Pi_\gamma(\tilde{\omega}, \tilde{\mathbf{M}}, \tilde{\mathbf{d}}) &= \sum_j \Pi_{\gamma_j} = \\
 &= \sum_j \left\{ \frac{1}{2}(1-\gamma) \mathbf{q}^t (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{P_j} \mathbf{q} - \frac{1}{2} \gamma \mathbf{a}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A})_{P_j} \mathbf{a} + \right. \\
 &\quad + \gamma \mathbf{a}^t (\mathbf{A}^t \mathbf{B})_{P_j} \mathbf{q} - (\mathbf{p}^t \mathbf{N})_{P_j} \mathbf{q} - [\tilde{\mathbf{m}}^t \mathbf{V}]_{C_{t_j}} \mathbf{v} + \\
 &\quad \left. \mathbf{a}^t [\mathbf{A}_n^t \mathbf{V}]_{C_j} \mathbf{v} - \mathbf{a}^t [\mathbf{A}_n^t \mathbf{N}_n]_{C_j} \mathbf{q} \right\}
 \end{aligned} \tag{20}$$

donde $\mathbf{p}^t = [q \ 0 \ 0]$ es el vector de cargas por unidad de superficie, la matriz $\mathbf{A}_n$ es:

$$\mathbf{A}_n = \begin{bmatrix} n_x \frac{\partial}{\partial x} & n_y \frac{\partial}{\partial y} & -(n_x \frac{\partial}{\partial y} + n_y \frac{\partial}{\partial x}) \\ n_x^2 & n_y^2 & -2 n_x n_y \\ -n_x n_y & n_x n_y & (n_y^2 - n_x^2) \end{bmatrix} \mathbf{A}$$

y la matriz $\mathbf{N}_n$ es:

$$\mathbf{N}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & n_y & -n_x \\ 0 & n_x & n_y \end{bmatrix} \mathbf{N}$$

Si se definen las matrices:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{K}_u &= (\mathbf{B}^t \mathbf{D} \mathbf{B})_{P_j}, \quad \mathbf{C} = (\mathbf{A}^t \mathbf{D}^{-1} \mathbf{A})_{P_j}, \quad \mathbf{Q}^t = (\mathbf{A}^t \mathbf{B})_{P_j} \\
 \mathbf{L}^t &= [\mathbf{A}_n^t \mathbf{V}]_{C_j}, \quad \mathbf{P}^t = [\mathbf{A}_n^t \mathbf{N}_n]_{C_j}, \quad \mathbf{f}_q^t = (\mathbf{p}^t \mathbf{N})_{P_j}, \quad \mathbf{f}_v^t = [\tilde{\mathbf{m}}^t \mathbf{V}]_{C_{t_j}}
 \end{aligned} \tag{21}$$

la parte del funcional que corresponde a un elemento genérico es:

$$\begin{aligned}
 \Pi_{\gamma_j} &= \frac{1}{2}(1-\gamma) \mathbf{q}^t \mathbf{K}_u \mathbf{q} - \frac{1}{2} \gamma \mathbf{a}^t \mathbf{C} \mathbf{a} + \gamma \mathbf{a}^t \mathbf{Q}^t \mathbf{q} + \\
 &\quad + \mathbf{a}^t \mathbf{L}^t \mathbf{v} - \mathbf{a}^t \mathbf{P}^t \mathbf{q} - \mathbf{f}_q^t \mathbf{q} - \mathbf{f}_v^t \mathbf{v}
 \end{aligned} \tag{22}$$

La condición de estacionaridad proporciona entonces las ecuaciones siguientes para cada elemento:

$$1) \quad \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \mathbf{a}} j = 0 \quad (\text{compatibilidad})$$

$$-\gamma \mathbf{C} \mathbf{a} + \gamma \mathbf{Q}^t \mathbf{q} - \mathbf{P}^t \mathbf{q} + \mathbf{L}^t \mathbf{v} = 0 \quad (23)$$

$$2) \quad \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \mathbf{q}} j = 0 \quad (\text{equilibrio en dominio y c. exterior})$$

$$(1 - \gamma) \mathbf{K}_u \mathbf{q} + \gamma \mathbf{Q} \mathbf{a} - \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{f}_q \quad (24)$$

$$3) \quad \frac{\partial \Pi_\gamma}{\partial \mathbf{v}} j = 0 \quad (\text{equilibrio cont. interiores})$$

$$\mathbf{L} \mathbf{a} = \mathbf{f}_v \quad (25)$$

Las ecuaciones (23) a (25) constituyen la forma discreta de las condiciones de estacionaridad del funcional. De este sistema deben eliminarse los grados de libertad internos $\mathbf{a}$ y $\mathbf{q}$ para dar lugar a una matriz de rigidez elemental utilizable en un proceso convencional de ensamblaje.

Si se procede simplemente por condensación estática de $\mathbf{a}$ y $\mathbf{q}$ se llega a una matriz de rigidez que resulta independiente del parámetro γ . Se obtiene así la misma solución para los campos $\tilde{\mathbf{M}}$ y $\mathbf{M}^\omega$ en todos los elementos y, por tanto, el estimador de error es siempre nulo. Es decir, se está ante un "bloqueo" del principio variacional de la misma naturaleza que el expuesto al hablar del Principio de Limitación en la primera parte de este trabajo⁴.

Este inconveniente desaparece si los grados de libertad $\mathbf{q}$ se eliminan del sistema de ecuaciones (23) a (25) utilizando la restricción cinemática adicional:

$$[\tilde{\mathbf{M}}_n, \tilde{\mathbf{d}} - \tilde{\omega}]_{C_j} = 0 \quad (26)$$

que simplemente expresa la compatibilidad "débil" de los campos $\tilde{\mathbf{d}}$ y $\tilde{\omega}$ a lo largo del contorno C_j del elemento.

En términos discretos la restricción (26) es satisfecha si los modos $\mathbf{N}, \mathbf{V}, \mathbf{A}$ se escogen de modo que:

$$[\tilde{\mathbf{M}}_n, \tilde{\mathbf{d}} - \tilde{\omega}]_{C_j} = \mathbf{a}^t [\mathbf{A}_n^t \mathbf{V}]_{C_j} \mathbf{v} - \mathbf{a}^t [\mathbf{A}_n^t \mathbf{N}_n]_{C_j} \mathbf{q} = 0 \quad (27)$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{a}^t \mathbf{L}^t \mathbf{v} - \mathbf{a}^t \mathbf{P}^t \mathbf{q} = 0 \quad (28)$$

lo que se satisface si:

$$\mathbf{L}^t \mathbf{v} = \mathbf{P}^t \mathbf{q} \quad (29)$$

El cumplimiento de la relación (29) obliga a que, si las amplitudes $\mathbf{v}$ y $\mathbf{q}$ de los modos de movimiento externo e interno están relacionadas linealmente a través de una matriz $\mathbf{H}$:

$$\mathbf{q} = \mathbf{H}\mathbf{v} \quad (30)$$

entonces esta matriz debe cumplir:

$$\mathbf{P}^t \mathbf{H} = \mathbf{L}^t \quad (31)$$

En la práctica el camino anterior se sigue a la inversa, es decir, se impone el cumplimiento de (30) y (31) para que así se verifique automáticamente (29). La forma de construir numéricamente la matriz $\mathbf{H}$ puede encontrarse en Beltrán¹.

Con todo lo anterior, la condensación estática de $\mathbf{a}$ en el sistema (23) a (25) y la utilización de (30) y (31) para eliminar $\mathbf{q}$ da lugar a la ecuación :

$$\left\{ (1 - \gamma) \mathbf{H}^t \mathbf{K}_u \mathbf{H} + \gamma \mathbf{H}^t \mathbf{Q} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Q}^t \mathbf{H} \right\} \mathbf{v} = \mathbf{H}^t \mathbf{f}_q + \mathbf{f}_v \quad (32)$$

donde la matriz entre corchetes del primer miembro es la matriz de rigidez elemental y el segundo miembro es el vector elemental de cargas. Obsérvese la similitud formal con la expresión obtenida en elasticidad⁴.

ELEMENTOS DESARROLLADOS

A la hora de desarrollar elementos basados en la formulación expuesta en las líneas anteriores, parece lo más apropiado el tomar como grados de libertad externos o de conexión $\mathbf{v}$ los movimientos en nodos situados en el contorno del elemento. De este modo se consigue automáticamente la igualdad del campo $\tilde{\mathbf{d}}$ a lo largo del lado común a dos elementos, si este campo se interpola de modo unívoco a partir de los valores nodales.

En el curso de la presente investigación se han formulado tres elementos para problemas de flexión de placas según las hipótesis de Kirchhoff (Figura 5). Al igual que en el caso de los elementos introducidos para problemas de elasticidad⁴, los modos de movimiento interno se consideran divididos en tres categorías:

$$\mathbf{N} = [\mathbf{N}_r \ \mathbf{N}_m \ \mathbf{N}_h] \quad (33)$$

donde $\mathbf{N}_r$, $\mathbf{N}_m$ y $\mathbf{N}_h$ tienen el significado expuesto anteriormente⁴. En este caso el valor de m (orden máximo del polinomio completo que interpola el campo de flechas $\tilde{\omega}$) oscila entre 2 y 4, dependiendo del elemento concreto.

Esta partición de los modos de movimiento interno conduce a una partición paralela de los modos de curvatura:

$$\mathbf{B} = [0 \ \mathbf{B}_m \ \mathbf{B}_h] \quad (34)$$

El campo $\mathbf{M}^\omega$ será entonces:

$$\mathbf{M}^\omega = \mathbf{D}\mathbf{B}\mathbf{q} = \mathbf{D}[\mathbf{B}_m \ \mathbf{B}_h]\mathbf{q} \quad (35)$$

Para los modos internos de momento se toma simplemente:

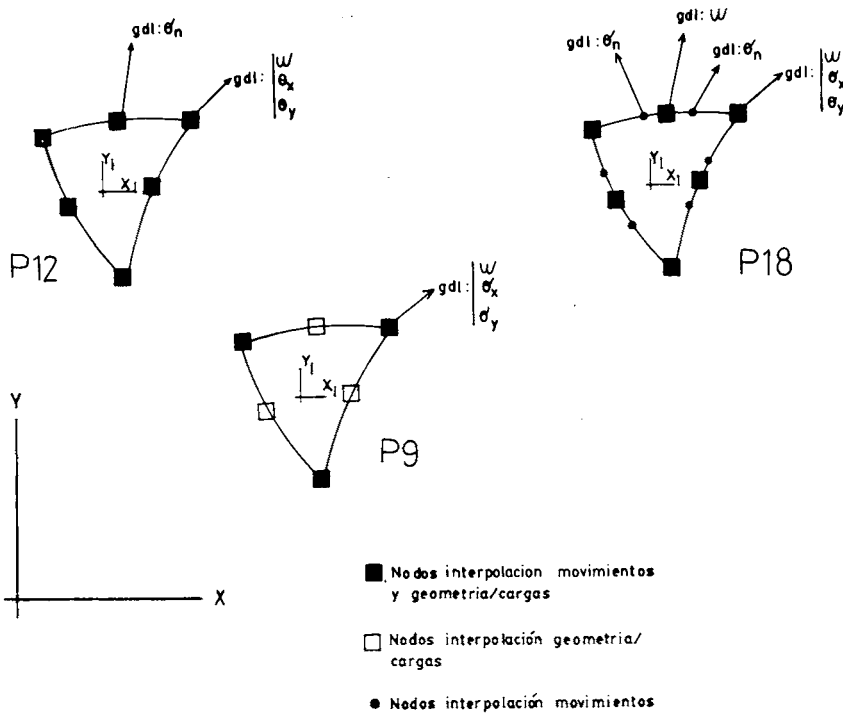


Figura 5. Elementos desarrollados para placas.

$$\mathbf{A} = \mathbf{D} \mathbf{B}_m \quad (36)$$

Por otro lado, se hace que los modos de curvatura $\mathbf{B}_m$ sean ortogonales entre sí con respecto a la norma energética, es decir:

$$(\mathbf{B}_m^t \mathbf{D} \mathbf{B}_m)_{P_j} \equiv \int_{P_j} \mathbf{B}_m^t \mathbf{D} \mathbf{B}_m dP = \text{matriz diagonal} \quad (37)$$

y además ortogonales a los modos en $\mathbf{B}_h$:

$$(\mathbf{B}_m^t \mathbf{D} \mathbf{B}_h)_{P_j} \equiv \int_{P_j} \mathbf{B}_m^t \mathbf{D} \mathbf{B}_h dP = 0 \quad (38)$$

En general, la elección de los modos $\mathbf{N}_m$ y $\mathbf{N}_h$ no cumplirá las condiciones (37) y (38), pero estas funciones pueden modificarse elemento a elemento aplicando un proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt a los modos de curvatura $\mathbf{B}_m$ y $\mathbf{B}_h$.

Con lo expuesto hasta aquí y sustituyendo valores en la expresión entre corchetes de (32), resulta que se obtiene una matriz de rigidez elemental que es formalmente idéntica a la derivada para los elementos de elasticidad⁴:

$$\mathbf{K} = \mathbf{H}_m^t \mathbf{K}_{um} \mathbf{H}_m + (1 - \gamma) \mathbf{H}_h^t \mathbf{K}_{uh} \mathbf{H}_h \quad (39)$$

con:

$$\mathbf{H} = [\mathbf{H}_r \mathbf{H}_m \mathbf{H}_h], \quad \mathbf{K}_{um} = (\mathbf{B}_m^t \mathbf{D} \mathbf{B}_m)_{P_j}, \quad \mathbf{K}_{uh} = (\mathbf{B}_h^t \mathbf{D} \mathbf{B}_h)_{P_j}$$

El estimador de error propuesto se expresa como:

$$\varepsilon = \sum_j \varepsilon_j = \sum_j \frac{\gamma}{2} \mathbf{q}_h^t \mathbf{K}_{uh} \mathbf{q}_h \quad (40)$$

valor que representa la energía de deformación asociada a los modos de curvatura $\mathbf{B}_h$ de orden superior multiplicada por el parámetro γ .

EJEMPLO NUMERICO

La Figura 6 ilustra una placa circular empotrada en su contorno, a la que se aplica una fuerza de 10 unidades normal al plano medio y concentrada en el centro. La solución analítica a este problema es conocida⁶ y tiene la particularidad de que el campo de momentos presenta una singularidad en el punto de aplicación de la carga. La doble simetría permite estudiar únicamente un cuarto de la placa y los valores característicos de la solución son la flecha máxima (0.1697 Uds.) y la energía de deformación (1/4 de placa, 0.2122 Uds.).

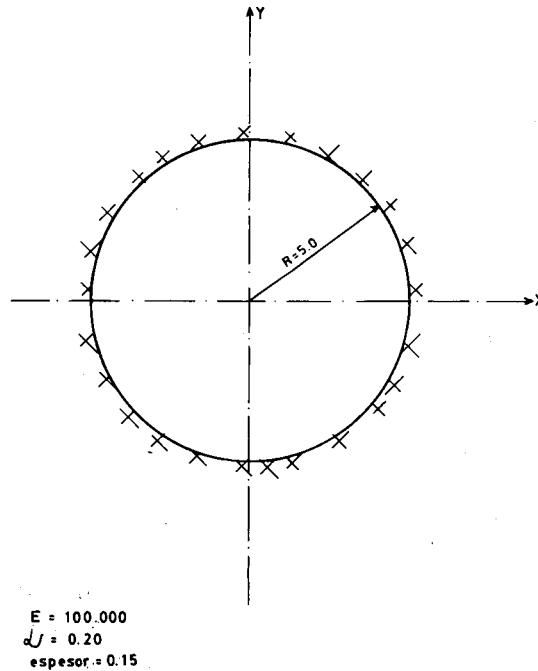


Figura 6. Ejemplo. Placa circular bajo carga concentrada.

El problema ha sido resuelto combinando un proceso h-adaptable selectivo y un refinamiento p completo. El proceso h-adaptable parte casi de la malla más gruesa posible (dos triángulos curvilíneos, un solo grado de libertad) y, utilizando el elemento

de orden más bajo de la serie (P_9), obtiene una malla que se considera adecuada para servir de base para un refinamiento p completo, el cual hace uso sucesivamente de los elementos P_{12} y P_{18} .

La Figura 7 recoge la evolución de la discretización a lo largo del proceso h -adaptable, junto con los valores que toman los indicadores de error (densidad de error) para un parámetro γ de 0.50. Se da también el estimador de error correspondiente a cada malla y los errores reales 1 y 2, que representan los valores absolutos de las diferencias entre el potencial exacto Π y los funcionales Π_γ^d y Π_p^d respectivamente.

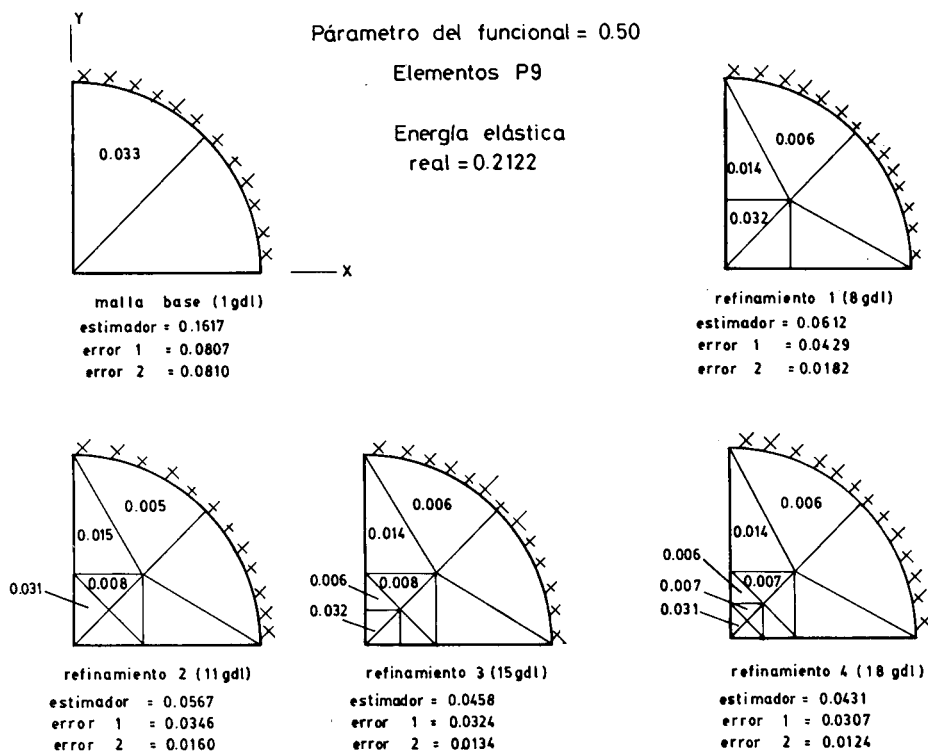


Figura 7. Ejemplo. Evolución refinamiento h .

Se observa como los indicadores de error “señalan” la singularidad que existe en el centro de la placa. Para otros valores de γ se obtienen diferentes valores absolutos de los indicadores, sin embargo, sus cocientes o relaciones apenas se modifican y, por tanto, proporcionan los mismos resultados cuando se utilizan para “guiar” el refinamiento.

La malla correspondiente a 18 grados de libertad se consideró adecuada para servir de base al refinamiento p . Se calculan así dos soluciones, una con elementos P_{12} (32 grados de libertad) y otra con elementos P_{18} (66 grados de libertad). La Figura 8 muestra la evolución de la flecha máxima calculada a lo largo de todo el proceso de refinamiento $h-p$. Nótese la aceleración de la convergencia que produce el proceso p .

Las Figuras 9 a 12 presentan la evolución del estimador de error propuesto durante el proceso $h-p$ y para distintos valores del parámetro γ del funcional. Junto con el estimador se da también la variación en el valor absoluto de las diferencias entre el

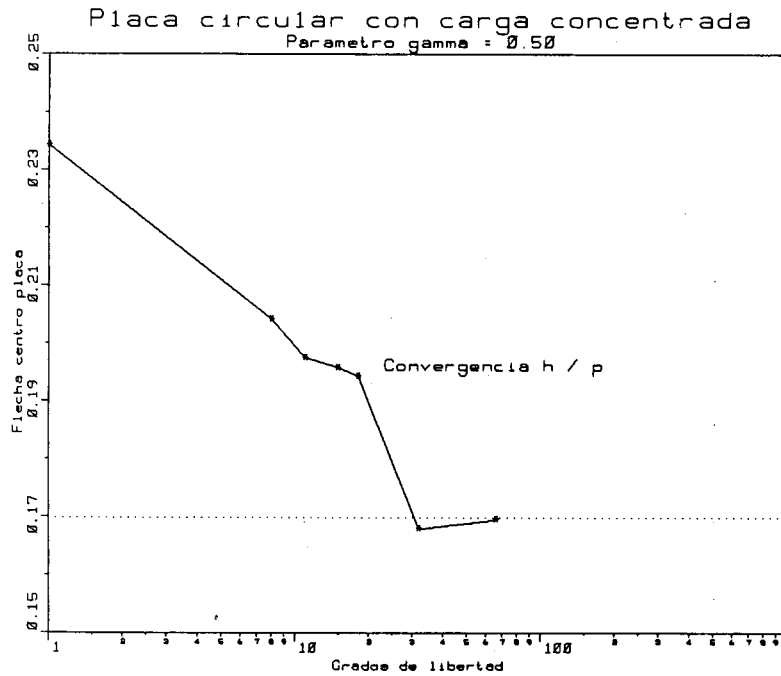


Figura 8. Ejemplo. Evolución flecha máxima.

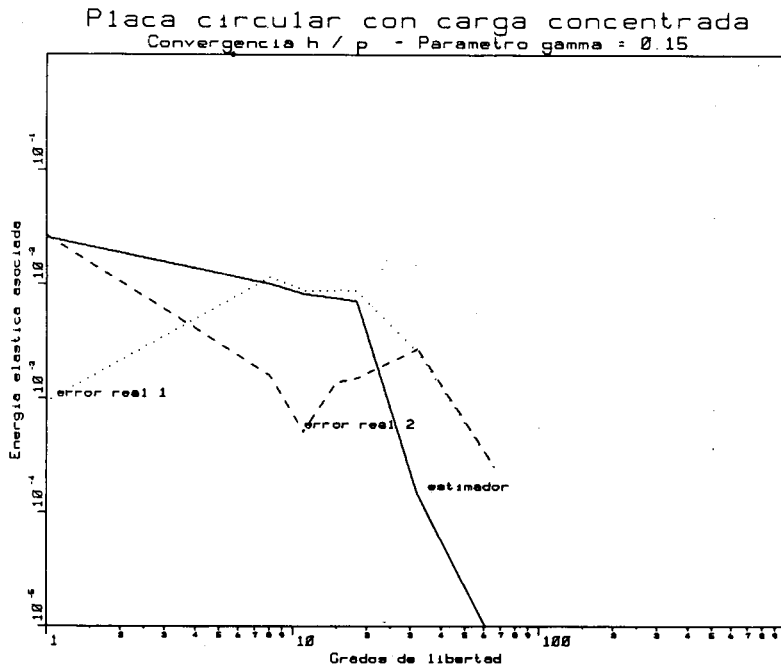


Figura 9. Ejemplo. Evolución estimador de error (I).

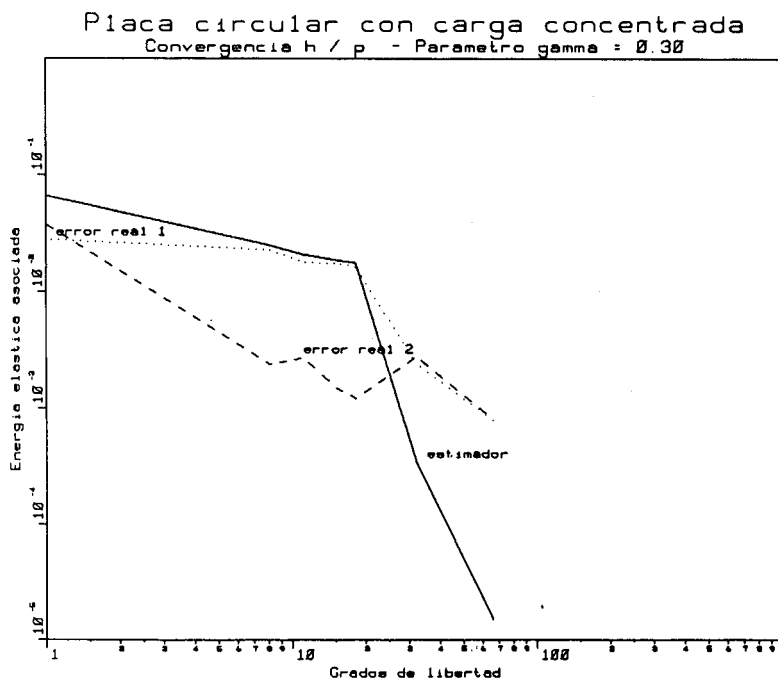


Figura 10. Ejemplo. Evolución estimador de error (II).

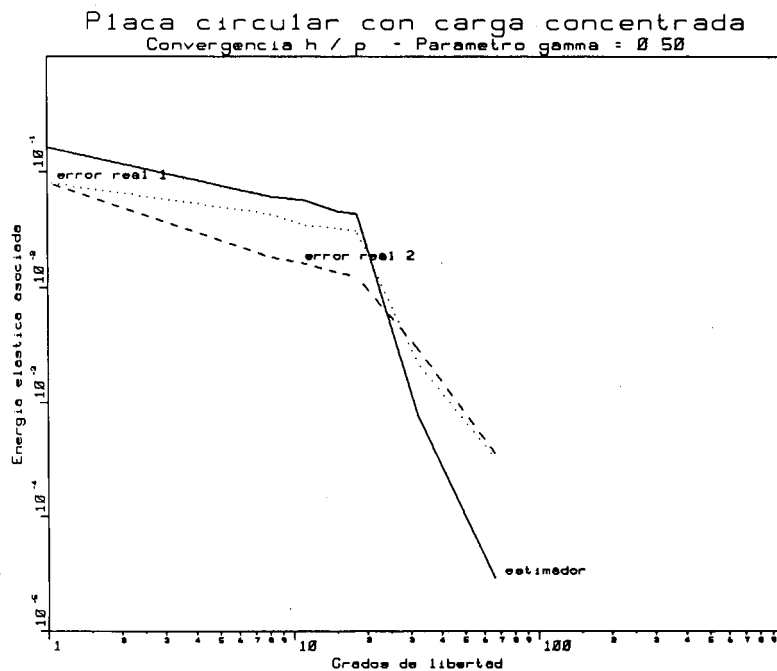


Figura 11. Ejemplo. Evolución estimador de error (III).

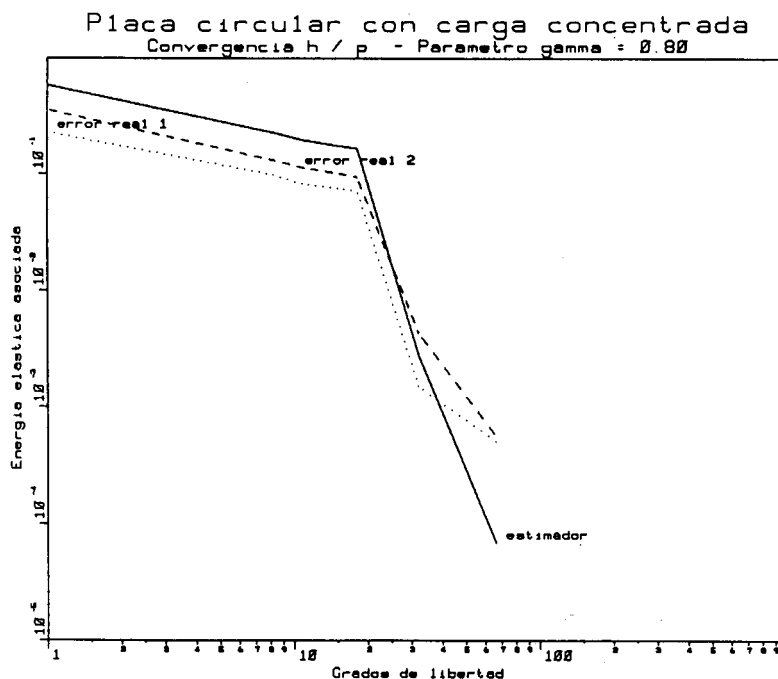


Figura 12. Ejemplo. Evolución estimador de error (IV).

potencial exacto Π y el funcional parametrizado Π_γ^d (error real 1) y entre el potencial exacto Π y el potencial total d-generalizado Π_p^d (error real 2). En abscisas se representa el número de grados de libertad y en ordenadas la magnitud del estimador y de los errores en unidades de energía. Ambas escalas son logarítmicas.

Se observa en todas las figuras la fuerte aceleración de la convergencia que supone la introducción del refinamiento p en la última fase del proceso. El mejor comportamiento del estimador se produce para valores altos del parámetro γ (0.50, 0.80), donde sigue una trayectoria prácticamente paralela a la de los errores reales. Debe notarse sin embargo cómo los errores son menores para valores bajos de γ , aunque su evolución es mucho más caótica.

CONCLUSIONES

Las ideas expuestas en la primera parte de este trabajo⁴ para introducir una nueva categoría de estimadores del error de discretización en problemas de elasticidad, se han generalizado ahora a problemas de flexión de placas según las hipótesis clásicas de Kirchhoff. Así, en la segunda parte del trabajo se ha presentado abreviadamente la base teórica, formulación numérica y evaluación práctica de un nuevo tipo de estimador para este tipo de problemas C^1 .

Las conclusiones son similares a las ya extraídas en la primera parte⁴. La idea fundamental se mantiene. También en el caso de los problemas de flexión de placas, el estimador se obtiene como diferencia entre dos funcionales multcampo, uno de ellos parametrizado. La principal ventaja es que se calcula como suma de

contribuciones elementales y para obtener la contribución de cada elemento sólo hace falta la información correspondiente a ese elemento. Este hecho hace que los estimadores de esta clase sean especialmente adecuados para procesos de cálculo en paralelo y que, además, se eviten las dificultades asociadas a discontinuidades naturales (saltos genuinos de tensión) en los procedimientos más convencionales de estimación de error.

La expresión formal del estimador de error es idéntica a la obtenida en problemas de elasticidad; lo cual sugiere la posibilidad de obtener estimadores de esta clase para cualquier problema que admita formulación variacional.

El comportamiento observado del estimador en las pruebas numéricas realizadas parece aceptable, al menos desde el punto de vista ingenieril, aunque el establecimiento de reglas prácticas (niveles de tolerancia) para su uso requiere aún de cierta experimentación.

AGRADECIMIENTOS

Los autores quieren agradecer al Prof. C.A. Felippa sus valiosas sugerencias y la gran cantidad de documentación facilitada.

REFERENCIAS

1. F. Beltrán, "Estimadores de Error Basados en Principios Variacionales Multicampo para Cálculos por Elementos Finitos", *Tesis Doctoral*, Universidad Politécnica de Madrid, (1990).
2. R. Courant y D. Hilbert, "*Methods of Mathematical Physics*", Vol. I, John Wiley, (1953).
3. C.A. Felippa, "The extended free formulation of finite elements in linear elasticity", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 56, pp. 609-616, (1989).
4. F. Beltrán y E. Alarcón, "Estimación del error de discretización con principios variacionales multicampo: I. Elasticidad", *Rev. Int. Met. Num. Cálculo y Diseño en Ing.*, Vol. 8, no. 1, (1992).
5. O.C. Zienkiewicz, "*El Metodo de los Elementos Finitos*", Reverté, Barcelona (1982).
6. S. Timoshenko y S. Woinowsky-Krieger, "*Theory of Plates and Shells*", McGraw-Hill, (1959).
7. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: I. Mixed functionals", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 69-78, (1989).
8. C.A. Felippa, "Parametrized multifield variational principles in elasticity: II. Hybrid functionals and the free formulation", *Communications in Applied Numerical Methods*, Vol. 5, pp. 79-88, (1989).
9. C.A. Felipa y C. Militello, *Developments in Variational Methods for High-Performance Plate and Shell Elements*, Report CU-CSSC-89-09, University of Colorado at Boulder, (1989).
10. P.G. Bergan y M.K. Nygard, "Finite elements with increased freedom in choosing shape functions", *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 20, pp. 643-664, (1984).