

Conducción térmica no estacionaria en una placa circular con borde ligeramente perturbado

Carlos A. Rossit, Patricio A.A. Laura y Enrique Romanelli

Instituto de Mecánica Aplicada (IMA)
Departamento de Ingeniería
Universidad Nacional del Sur
Avenida Alem 1253
8000 Bahía Blanca, Argentina
Tel.: 54-291-459 51 56; Fax: 54-291-459 51 57
e-mail: ima@criba.edu.ar

Resumen

La solución matemática de problemas de difusión transitoria es ampliamente conocida en dominios de geometría convencional y se encuentra disponible en tratados clásicos. Por otro lado, debe admitirse que en muchos casos resulta difícil obtener contornos matemáticamente perfectos, debido a que los procesos de manufactura, conformado o estampado pueden provocar perturbaciones en los mismos.

En el presente trabajo se estudia el problema indicado en su título por medio de un enfoque que combina transformación conforme y métodos variacionales que permite determinar en forma aproximada el campo térmico en un disco circular con pequeñas perturbaciones periódicas a lo largo de su contorno.

Palabras clave: *distribución térmica transitoria, disco circular, borde circular perturbado, métodos variacionales, transformación conforme.*

TRANSIENT HEAT CONDUCTION IN A CIRCULAR PLATE WITH SLIGHTLY DISTURBED BOUNDARY

Summary

The mathematical solution of unsteady diffusion-type problems in classical geometric configurations is well known and, certainly, available in classical treatises. On the other hand mathematically perfect boundaries are not, in general, obtainable in many instances since boundary disturbances occur due to manufacturing or machining processes.

The present study tackles the title problem by means of a combined conformal mapping-variational approach which allows for the approximate determination of the temperature field in a circular disk with small, periodic disturbance along the contour.

Keywords: *transient temperature distribution, circular shape, disturbed circular edge, variational method, conformal mapping.*

INTRODUCCIÓN

El análisis matemático de problemas transitorios de difusión ha sido estudiado con profundidad desde hace más de un siglo en el caso de dominios geoméricamente convencionales: cuadrado, elíptico, circular, etc. El objetivo de la presente investigación es estudiar el problema en el caso en que el borde de un dominio de forma clásica, por ejemplo, el circular, es afectado por perturbaciones leves, que pueden considerarse periódicas y en algunos casos son originadas en el proceso de manufacturación de la placa o disco. Se supone que el dominio circular perturbado en el plano complejo $z = re^{i\phi}$ se consigue, mediante transformación conforme, de un círculo unitario en el plano ξ mediante la función analítica^{1,3}

$$z = \frac{a}{1+m}(1+m\xi^n)\xi \quad (1)$$

donde $\xi = re^{i\phi}$, a es el radio del círculo circunscrito y $m \leq (1/n + 1)$.

El parámetro n es un número entero que define el número de ejes de simetría de la configuración perturbada. En el caso de la Figura 1, $n = 10$, $m = 0,025$. El sistema diferencial que gobierna el problema es transformado utilizando la ecuación (1) y debido a que dicha transformación modifica a las ecuaciones diferenciales o derivadas parciales, los autovalores del problema deben ser calculados mediante un método variacional. Por lo tanto, en el caso en que la temperatura es inicialmente uniforme en el dominio de la placa, la distribución no estacionaria de temperatura se expresa en términos de un desarrollo de Fourier–Bessel en el plano ξ . Utilizando la ecuación (1), se determina en forma aproximada el campo térmico en el plano z .

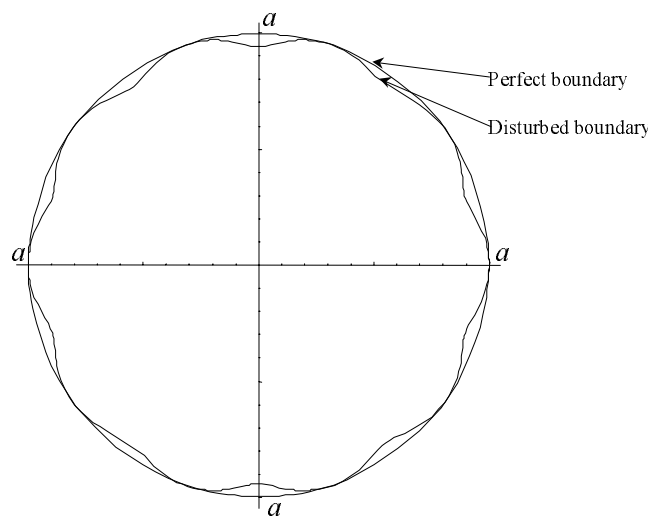


Figura 1. Disco circular con perturbaciones geométricas periódicas ($n = 10$, $m = 0,025$)

SOLUCIÓN APROXIMADA DEL PROBLEMA

El problema en análisis es gobernado por el conocido sistema diferencial

$$\nabla^2 T = \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} \quad (2a)$$

$$T(x, y, t) = 0 \quad \text{en el borde} \quad (2b)$$

$$T(x, y, 0) = T_0 \quad (2c)$$

con $\alpha = C_p \rho / k$.

Aplicando el clásico método de separación de variables mediante $T = T_1(x, y)\tau(t)$ y sustituyendo en (2a), se obtiene

$$\tau(t) = A_p e^{-\alpha \gamma_p^2 t}; \quad \nabla^2 T_1 + \gamma_p^2 T_1 = 0 \quad (3a, b)$$

Sustituyendo (1) en (3b) conduce a

$$\nabla^2 T_1 + \gamma_p^2 |f'(\zeta)|^2 T_1 = 0 \quad (4)$$

La condición de borde para $T_1(\xi, \bar{\xi})$ es ahora

$$T_1(\xi, \bar{\xi}) \Big|_{(\xi, \bar{\xi})^{1/2}=1} = T_1(r, \theta) \Big|_{r=1} = 0; \quad T_1(\xi, \bar{\xi}) = T_0 \quad (5a, b)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (5a) y (5b), y como una aproximación de primer orden, puede despreciarse la variación en la variable azimutal θ en el plano ξ , con lo que la solución de (4) puede expresarse como

$$T(\xi, \bar{\xi}) \cong T_1(r) = \sum_{p=1}^p B_p J_0(\beta_p) r \quad (6)$$

donde las β_p 's son las raíces de $J_0(x)$ (función de Bessel de primera clase y orden cero)

$$\beta_p = 2,4048; \quad 5,5201; \quad 8,6535; \quad \dots$$

y las constantes B_p 's vienen dadas por

$$B_p = \frac{2T_0}{\beta_p J_1(\beta_p)} = 1,6019; \quad -1,0648; \quad 0,8514, \quad -0,7295; \quad \dots$$

Para valores del tiempo $t \gg 0$, sólo los primeros términos de $T(r, \theta, t) \cong T(r, t)$ serán suficientes y, por lo tanto, habrá que determinar únicamente los valores menores de la constante de separación o autovalor γ_p^2 . Esto puede ser implementado en forma muy simple utilizando un método variacional, por ejemplo, el método de Galerkin con una aproximación polinómica del tipo²

$$T_1 = \phi_p + \Psi_1 \quad (7a)$$

donde

$$\phi_p = \sum_{p=1}^p C_p (1 - r^{sp}); \quad \Psi_1 = D_1 (1 - r^s) r \cos n\theta \quad (7b)$$

Con respecto a las relaciones funcionales definidas en las ecuaciones (7) cabe señalar el hecho de que satisfacen idénticamente la condición de temperatura nula en el contorno del círculo unitario, ya que en el plano transformado (plano ξ) su radio es igual a la unidad y las funciones coordenadas definidas en la expresión (7b) son nulas para $r = 1$. Las funciones que integran ϕ_p pueden ser consideradas como "funciones base" (tienen en cuenta únicamente a la variable radial), mientras que Ψ_1 contiene a la variable azimutal θ y permite una mejor

aproximación al problema físico en cuestión. Por otra parte, tanto ϕ_p como Ψ contienen el parámetro de optimización exponencial de Rayleigh que posibilita una optimización ulterior de los autovalores en virtud del hecho de que el método de Galerkin brinda cotas superiores (en forma similar a las predicciones del método energético de Rayleigh Ritz). Asimismo, el parámetro P que establece el límite superior de la sumatoria que define ϕ_p ha sido tomado igual a 3.

Conviene recordar que el clásico método de Galerkin consiste en sustituir la expresión de T_1 de la ecuación (7a) en la ecuación diferencial a derivadas parciales transformada (4), obteniéndose así la “función residual” o “función error”. Luego se requiere que dicha expresión sea ortogonal con respecto a cada función coordenada. Resulta así en definitiva un sistema lineal y homogéneo de ecuaciones en las constantes C_p y D_1 . De la condición de no trivialidad del sistema resulta un determinante–ecuación en los autovalores del problema que, como último paso del proceso algorítmico, son minimizados con respecto al parámetro exponencial s . Dicho último paso constituye en esencia un proceso de optimización no lineal, que es efectuado numéricamente. En este trabajo se ha considerado de interés utilizar los dos primeros autovalores.

RESULTADOS NUMÉRICOS

Se ha determinado la distribución aproximada de la temperatura para la configuración indicada en la Figura 1. Los dos primeros autovalores obtenidos mediante el método variacional de Galerkin son

$$(\gamma_1 a)^2 = 6,072a^2; \quad (\gamma_2 a)^2 = 32,04a^2$$

La Figura 2 muestra la variación de la temperatura T/T_0 en el centro de la placa (línea discontinua) en función de la variable adimensional de tiempo, $t = \frac{C_p \rho}{k a^2} t = \frac{\alpha}{a^2} t$. En la Figura 3 se muestra la temperatura T/T_0 en un radio de la placa para distintos valores de t_1 . Nuevamente la línea discontinua muestra la variación térmica en el caso del disco con borde perturbado, mientras que la línea continua corresponde al dominio circular perfecto.

Como han determinado Laura y Faulstich¹, existe un acuerdo excelente entre la solución analítica exacta y los valores aproximados obtenidos por el presente enfoque en el caso de una configuración cuadrada.

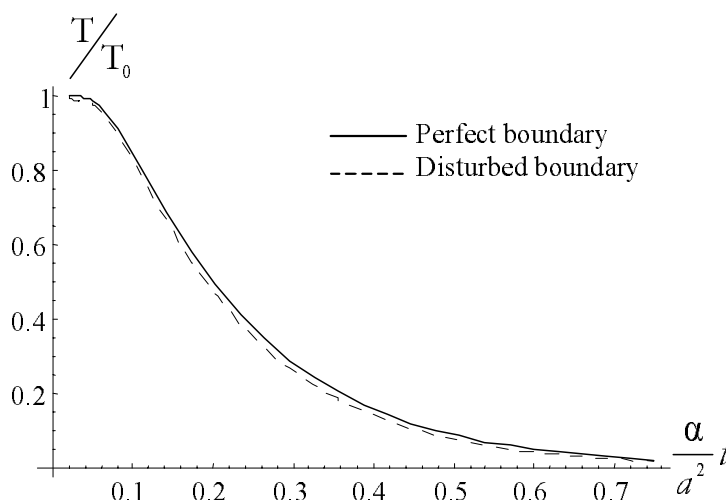


Figura 2. Variación de T/T_0 en el centro del disco

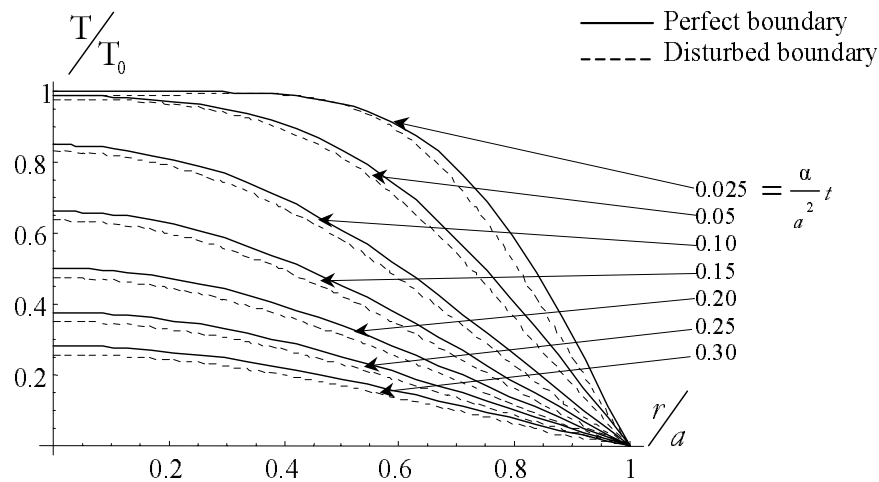


Figura 3. Variación de T/T_0 en un radio del disco

AGRADECIMIENTOS

El presente trabajo ha sido patrocinado por el CONICET, la Secretaría General de Ciencia y Tecnología de la Universidad Nacional del Sur y Techint (Fundación Rocca). Los autores expresan su profundo agradecimiento al Profesor Eugenio Oñate y al evaluador anónimo del trabajo por sus sugerencias y crítica constructiva.

REFERENCIAS

- 1 P.A.A. Laura y A.J. Faulstich, "Unsteady heat conduction in plates of polygonal shape", *International Journals of Heat and Mass Transfer*, Vol. **11**, pp. 297–303, (1968).
- 2 P.A.A. Laura y E. Romanelli, "Lower frequencies of transverse vibrations of circular membranes with disturbed boundaries", *Journal of Sound and Vibration*, Vol. **252**, N° 2, pp. 385–388, (2002).
- 3 R. Schinzinger y P.A.A. Laura, "Conformal mapping: methods and applications", Elsevier, (1991), reedición, Dover, (2003).