

# **Generació de Malles Estructurades a Partir d'Equations El.líptiques**

R. Codina

# **Generació de Malles Estructurades a Partir d'Equations El.íptiques**

R. Codina

**Publicación CIMNE N°-7, Octubre 1990**

# GENERACIÓ DE MALLES ESTRUCTURADES A PARTIR D'EQUACIONS EL·LÍPTIQUES

**Resum.** En aquest treball es descriu un mètode de generació de malles estructurades d'elements finits basat en imposar que les línies coordenades satisfacin una equació el·líptica, analitzant l'efecte de diferents termes amb les incògnites sense derivar d'aquesta equació sobre la malla resultant. Les equacions que cal resoldre es discretitzen en diferències finites, adaptant-hi les tècniques anomenades d'*upwind* pròpies del mètode dels elements finits. Es presenta també una tècnica de resolució del sistema algebraic d'equacions resultant.

## 1. Introducció

Bona part de la investigació duta a terme en aquests darrers deu anys en el camp dels elements finits s'ha centrat en tècniques de generació automàtica de malles. Les raons d'aquest interès són diverses. En primer lloc, la simulació numèrica de fenòmens de mecànica de sòlids cada cop més complexos fa que calguin propietats específiques de la malla en algunes zones del domini (problemes de localització, fractura, etc.). Per una altra banda, l'anàlisi matemàtica del mètode i el seu coneixement cada cop més extens proporciona informació sobre quin ha de ser el tamany dels elements per aconseguir un cert error màxim. La possibilitat de poder actuar sobre la malla per aconseguir aquest tamany determinat és indispensable. Però potser l'impuls més important en les tècniques de generació de malles ha vingut de la mecànica computacional de fluids, en la qual el mètode dels elements finits (MEF) no va començar a aplicar-se fins a finals dels anys setanta. La gran quantitat d'elements que són necessaris per modelar la física dels medis fluids ha fet que l'etapa de generació de la malla esdevingui extraordinàriament important en el procés de simulació numèrica.

Una forma de classificar els possibles tipus de malla d'elements finits és en *estructurades* i *no-estructurades*. Una definició del concepte de malla estructurada és que els nodes dels elements es trobin sobre un conjunt de corbes que defineixin un sistema de línies coordenades. Quan això no sigui possible la malla s'anomena no-estructurada. D'aquesta definició ja es desprèn que les malles estructurades són molt més flexibles que no pas les estructurades, encara que aquestes darreres segueixen conservant diversos aspectes d'interès. En primer lloc, els algorismes de generació de malles no-estructurades d'elements quadrangulars (en dues dimensions) o hexaèdrics (en tres dimensions) són

molt complexos o bé molt limitats. La gran flexibilitat que caracteritza les malles no-estructurades només es pot aconseguir generant elements triangulars o tetraèdrics. Tanmateix, els elements quadrangulars segueixen tenint interès més enllà del purament teòric. Per exemple, l'element que proporciona velocitat de convergència òptima en la resolució pel MEF de les equacions de Navier-Stokes bidimensionals per a fluids incompressibles, fent servir la formulació de penalització, és quadrangular (c.f. [2]), amb nou nodes amb incògnites de velocitat i integració reduïda de tres punts per al terme de penalització. D'altres exemples es podrien presentar en aquesta mateixa línia, però val la pena indicar que també hi ha casos en els quals les malles estructurades d'elements quadrangulars es fan servir simplement per ajustar-se als detalls del fenomen físic, com ara en el contorn d'un sòlid en un camp fluid viscos per tal se representi la variació de velocitats a la capa límit.

L'objectiu d'aquest treball és presentar una tècnica de generació de malles estructurades. El lector interessat en conèixer l'estat de l'art en tècniques de generació de malles (estructurades i no-estructurades) pot consultar [1], [13].

Dins dels mètodes de generació de malles estructurades, tres són les tècniques d'ús més freqüent. Potser la més habitual en programes comercials és l'algebraica [10], basada en la interpolació de nodes dins del domini a partir de valors nodals del contorn. Un altre mètode és el basat en aplicacions conformes [5], [9], consistent en transformar el domini on es vol resoldre el problema en un altre de més simple, on es genera la malla, a partir d'una transformació conforme. Invertint aquesta transformació s'obté la malla en el domini físic del problema. Aquest mètode està restringit naturalment a problemes bidimensionals, encara que s'ha aplicat en tres dimensions en combinació amb tècniques algebraiques.

El tercer procediment habitual de generació de malles estructurades consisteix en imposar que les línies coordenades sobre les quals es trobin els nodes compleixin una determinada equació. Encara que s'han fet servir equacions parabòliques i hiperbòliques, en aquest treball es presenta una tècnica proposada per Thompson, Thames i Mastin [12], basada en imposar que les línies coordenades compleixin una equació el·líptica.

L'ús d'equacions el·líptiques com a generadors de punts de la malla es pot motivar de diferents formes. La naturalesa de les equacions el·líptiques és "suavitzar" els valors del contorn, cosa desitjable si el que es pretén és obtenir una distribució uniforme de nodes. En el cas de la mecànica de fluids, a més, la malla obtinguda es pot ajustar a les característiques del fenomen físic. En particular, en flux bidimensional, estacionari, incompressible i irrotacional, les funcions de corrent i de potencial satisfan l'equació de Laplace. Si impossem que les línies coordenades siguin també harmòniques i sapiguéssim quins han de ser els nodes de la frontera del domini per tal que les condicions de contorn sobre elles fossin les mateixes que sobre les funcions de corrent i potencial, simplement la generació de la malla ens descriuria el flux.

Els diferents punts que es tractaran en el treball són els següents. A l'apartat 2 es presenten les bases del mètode i s'escriu el sistema d'equacions diferencials que cal resoldre. A l'apartat 3 es descriu la discretització en diferències finites de les equacions

anteriors i a l'apartat 4 s'indica quins termes de font es poden emprar en aquestes equacions per tal d'obtenir certes propietats de la malla resultant. Al cinquè apartat es proposa un mètode iteratiu per resoldre les equacions en diferències que s'obtenen, basat en la resolució d'un problema transitori associat. A continuació es presenten alguns exemples numèrics i finalment es treuen algunes conclusions del mètode desenvolupat.

## 2. El sistema d'equacions diferencials a resoldre

En aquest apartat es descriu el mètode de generació de malles estructurades proposat per Thompson et al. [12]. El mètode és aplicable amb tota generalitat tant a problemes bidimensionals com a tridimensionals, encara que tots els desenvolupaments els farem en el cas bidimensional.

Suposem que tenim un domini  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  que volem discretitzar en elements finits amb una malla estructurada. Siguin  $x, y$  les coordenades cartesianes de  $\mathbb{R}^2$  i  $\xi = \xi(x, y), \eta = \eta(x, y)$  les famílies de línies coordenades associades a la malla. La idea bàsica del mètode és imposar que aquestes línies coordenades verifiquin les equacions:

$$\begin{aligned}\Delta\xi &= P(\xi, \eta) \\ \Delta\eta &= Q(\xi, \eta)\end{aligned}\tag{2.1}$$

on  $\Delta$  és l'operador diferencial  $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$  i  $P(\xi, \eta), Q(\xi, \eta)$  són funcions donades que s'introdueixen per obtenir certes propietats de la malla resultant. Algunes possibilitats es discutiran al quart apartat.

Les incògnites del nostre problema, però, són les funcions  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ , les quals ens permetran determinar com col·locar els nodes de la malla sobre les línies coordenades. Les condicions de contorn les tenim, a més, sobre aquestes funcions, doncs coneixem quant han de valer a  $\partial\Omega$ .

Sense pèrdua de generalitat, considerarem les línies coordenades parametritzades de manera que  $(\xi, \eta) \in \Omega' := [0, 1] \times [0, 1]$

Plantegem ara de forma abstracta de quin problema han de ser solució les funcions  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ . Suposarem que les solucions de (2.1) són clàssiques a efectes de definir els espais de funcions on es trobaran les incògnites. Els espais que en aquest cas ens interessa considerar són:

$$\mathcal{H}_r = \{\mathbf{r}(x, y) = (\xi(x, y), \eta(x, y)) : \xi, \eta \in C^2(\Omega) \cap C^0(\bar{\Omega})\}$$

$$\mathcal{H}_\rho = \{\rho(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) : x, y \in C^2(\Omega') \cap C^0(\bar{\Omega}')\}$$

Sigui  $\mathcal{H}_r^1$  el subespai de  $\mathcal{H}_r$  de funcions invertibles i considerem  $\mathcal{I} : \mathcal{H}_r^1 \rightarrow \mathcal{H}_\rho$  definit per  $\mathcal{I}\mathbf{r} = \mathbf{r}^{-1}$ , funció inversa de  $\mathbf{r}$ .

Dessignem per  $\rho|_{\partial\Omega'} = \rho_0 = (x_0, y_0)$  la funció que descriu el contorn  $\partial\Omega$  i  $\tilde{\Delta} : [C^0(\Omega')]^2 \rightarrow \mathcal{H}_r$  l'operador definit per  $(P, Q) \mapsto (\xi, \eta)$ , amb  $\Delta\xi = P(\xi, \eta)$ ,  $\Delta\eta = Q(\xi, \eta)$  i  $\mathcal{I}(\xi, \eta)|_{\partial\Omega'} = (x_0, y_0)$ . Per construcció,  $(x, y) = \mathcal{I}\tilde{\Delta}(P, Q)$ .

Per tal d'obtenir la forma concreta del problema de contorn la solució del qual és  $\mathcal{I}\tilde{\Delta}(P, Q)$ , considerem, abusant del llenguatge, les relacions

$$\begin{aligned}\xi &= \xi(x, y) \\ \eta &= \eta(x, y)\end{aligned}$$

de les quals s'obtenen les identitats

$$\begin{aligned}\xi_x x_\xi + \xi_y y_\xi &= 1 \\ \xi_x x_\eta + \xi_y y_\eta &= 0 \\ \eta_x x_\xi + \eta_y y_\xi &= 0 \\ \eta_x x_\eta + \eta_y y_\eta &= 1\end{aligned}\tag{2.2}$$

on els subíndexos indiquen derivació parcial. Suposant la transformació  $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$  invertible, de (2.2) resulta

$$\xi_x = J^{-1}y_\eta, \quad \xi_y = -J^{-1}x_\eta, \quad \eta_x = -J^{-1}y_\xi, \quad \eta_y = J^{-1}x_\xi\tag{2.3}$$

on  $J$  és el determinant de la matriu jacobiana de la transformació  $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ :

$$J = x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi$$

Derivant les equacions (2.3) s'obté

$$\begin{aligned}\xi_{xx} &= -J^{-2}y_\eta J_x + J^{-2}(y_{\xi\eta}y_\eta - y_{\eta\eta}y_\xi) \\ \xi_{yy} &= J^{-2}x_\eta J_y - J^{-2}(x_{\eta\eta}x_\xi - x_{\xi\eta}x_\eta) \\ \eta_{xx} &= J^{-2}y_\xi J_x - J^{-2}(y_{\xi\xi}y_\eta - y_{\xi\eta}y_\xi) \\ \eta_{yy} &= -J^{-2}x_\xi J_y + J^{-2}(x_{\xi\eta}x_\xi - x_{\xi\xi}x_\eta)\end{aligned}\tag{2.4}$$

on

$$\begin{aligned}J_x &= J_\xi \xi_x + J_\eta \eta_x = J_\xi J^{-1}y_\eta - J_\eta J^{-1}y_\xi \\ J_y &= J_\xi \xi_y + J_\eta \eta_y = -J_\xi J^{-1}x_\eta + J_\eta J^{-1}x_\xi \\ J_\xi &= x_{\xi\xi}y_\eta + x_{\xi y_\xi\eta} - x_{\xi\eta}y_\xi - x_\eta y_{\xi\xi} \\ J_\eta &= x_{\xi\eta}y_\eta + x_{\xi y_\eta\eta} - x_{\eta\eta}y_\xi - x_\eta y_{\xi\eta}\end{aligned}\tag{2.5}$$

Per ser  $J \neq 0$ , el sistema d'equacions (2.1) és equivalent a

$$\begin{aligned}-J^2 x_\xi (\xi_{xx} + \xi_{yy}) - J^2 x_\eta (\eta_{xx} + \eta_{yy}) &= -J^2 (x_\xi P + x_\eta Q) \\ -J^2 y_\xi (\xi_{xx} + \xi_{yy}) - J^2 y_\eta (\eta_{xx} + \eta_{yy}) &= -J^2 (y_\xi P + y_\eta Q)\end{aligned}\tag{2.6}$$

Emprant les expressions (2.4) i (2.5) resulta finalment el sistema d'equacions no lineals acoblat

$$\begin{aligned} \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} &= -J^2(x_{\xi}P + x_{\eta}Q) \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} &= -J^2(y_{\xi}P + y_{\eta}Q) \end{aligned} \quad (2.7)$$

on

$$\begin{aligned} \alpha &= x_{\eta}^2 + y_{\eta}^2 \\ \beta &= x_{\xi}x_{\eta} + y_{\xi}y_{\eta} \\ \gamma &= x_{\xi}^2 + y_{\xi}^2 \end{aligned} \quad (2.8)$$

Les equacions (2.7) caldrà resoldre-les amb les condicions de contorn que resultin d'imposar que  $\partial\Omega'$  es transformi en  $\partial\Omega$ , que amb la notació introduïda anteriorment són

$$\rho|_{\partial\Omega'} = \rho_0 \quad (2.9)$$

La solució del problema de contorn anterior,  $\rho(\xi, \eta) = (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ , ens proporcionarà la forma de generar la malla al domini  $\Omega$ . El primer pas serà generar una malla al domini  $\Omega' = [0, 1] \times [0, 1]$ , la qual cosa es pot fer de forma immediata. L'opció més senzilla és prendre el conjunt de nodes  $(\xi_i, \eta_j)$ , amb  $\xi_i = (i - 1)h_{\xi}$ ,  $i = 1, \dots, N_{\xi} + 1$ ,  $\eta_j = (j - 1)h_{\eta}$ ,  $j = 1, \dots, N_{\eta} + 1$ , on  $N_{\xi}$  i  $N_{\eta}$  són el nombre de particions que es volen considerar segons les direccions  $\xi$  i  $\eta$  respectivament i  $h_{\xi} = N_{\xi}^{-1}$ ,  $h_{\eta} = N_{\eta}^{-1}$ .

Els nodes de la malla de la discretització del domini  $\Omega$  seran simplement  $(x_{ij}, y_{ij}) = (x(\xi_i, \eta_j), y(\xi_i, \eta_j))$

La topologia de la malla final, és a dir, la matriu de connectivitats entre nodes per formar els elements, la podem establir també a partir de la topologia de la malla del domini  $\Omega'$ . Podrem obtenir, per exemple, malles d'elements triangulars de 3 o 6 nodes i malles d'elements quadrangulars de 4 o 9 nodes en el cas bidimensional.

### 3. Discretització en diferències finites

#### 3.1 Consideracions generals

La resolució del sistema d'equacions diferencials (2.7) amb les condicions de contorn (2.9) es duu a terme discretitzant les esmentades equacions pel mètode de diferències finites. L'opció més immediata que es presenta és emprar diferències centrals per discretitzar les derivades primeres i segones que hi apareixen. Tanmateix, veurem que localment cada equació del sistema (2.7) té l'estructura de l'equació de convecció-difusió

$$\text{div}(\mathbf{K}\text{grad}\phi) - \mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi = 0$$

on  $\phi$  és la funció incògnita,  $\mathbf{K}$  el tensor de conductivitat o de difusió i  $\mathbf{u}$  el camp de velocitats, en la terminologia habitual de la física matemàtica. És important destacar que  $\mathbf{K}$  ha de ser un tensor definit positiu.

És ben conegut que quan el terme de convecció  $u \cdot \text{grad} \phi$  és important, la discretització de les primeres derivades en diferències centrals provoca oscil·lacions que només és possible eliminar disminuint la distància entre nodes de forma de vegades inviable.

Aquest mateix fenomen es produeix en el mètode dels elements finits fent servir la formulació estàndar de Galerkin. En aquest context, s'han desenvolupat diverses tècniques per eliminar el problema. Discutirem a continuació una d'elles, originada en el camp de les diferències finites però que ha adquirit generalitat dins dels elements finits. Al subapartat 3.4 es descriurà de quina manera el mètode es pot aplicar al problema que considerem fent servir diferències finites.

### 3.2 L'equació de convecció-difusió unidimensional

La motivació inicial de l'algorisme de discretització que emprarem es troba en el problema de convecció-difusió unidimensional, estacionari i homogeni: trobar la funció  $\phi = \phi(x)$  que verifica:

$$\begin{aligned} u \frac{d\phi}{dx} - K \frac{d^2\phi}{dx^2} &= 0, \quad 0 < x < L \\ \phi(0) &= \phi_0 \\ \phi(L) &= \phi_L \end{aligned} \tag{3.1}$$

on  $K > 0$  i  $u$  són constants i  $\phi_0$  i  $\phi_L$  els valors prescrits al contorn de la funció incògnita  $\phi$ . El fet de considerar condicions de contorn de Dirichlet no suposa cap restricció pel que veurem.

Sigui  $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = L$  una partició de l'interval  $[0, L]$ , amb  $x_{i+1} - x_i = h$ ,  $i = 0, \dots, N-1$ . Anomenem  $Pe = \frac{uh}{2K}$  el *nombre de Péclet* del problema (3.1) amb la partició definida. Si resollem aquest problema numèricament amb el MEF fent servir la formulació de Galerkin i considerant elements finits lineals entre els punts d'abscisa  $x_i$  i  $x_{i+1}$ , s'obté el següent sistema d'equacions en diferències:

$$(1 - Pe)\phi_{i+1} - 2\phi_i + (1 + Pe)\phi_{i-1} = 0, \quad i = 1, \dots, N-1 \tag{3.2}$$

essent  $\phi_i$  la incògnita nodal al punt  $i$  ( $\phi_0$  i  $\phi_L$  són coneguts per les condicions de contorn). El mateix sistema (3.2) s'obté si en lloc de fer servir el MEF es fa servir una aproximació en diferències centrals per a les derivades:

$$\begin{aligned} \left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i &\simeq \frac{\phi_{i+1} - \phi_{i-1}}{2h} \\ \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i &\simeq \frac{\phi_{i+1} - 2\phi_i + \phi_{i-1}}{h^2} \end{aligned} \tag{3.3}$$

Si la solució exacta del problema (3.1) és substituïda a l'esquema (3.2) s'obté (c.f. [4])

$$\left( u \frac{d\phi}{dx} - K \frac{d^2\phi}{dx^2} \right) \Big|_i + K^* \frac{d^2\phi}{dx^2} \Big|_i = 0 \tag{3.4}$$



on

$$K^* = -\frac{K}{2Pe} \left[ \frac{1}{Pe} (\cosh(2Pe) - 1) - \sinh(2Pe) \right] \quad (3.5)$$

és a dir, l'error de truncament de (3.2) és

$$\tau = K^* \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i$$

És fàcil demostrar (c.f. [4]) que  $K^* \rightarrow 0$  quan  $Pe \rightarrow 0$  i  $\text{sgn}(K^*) = \text{sgn}(K)$ . De (3.4) observem que (3.2) resol de forma exacta als nodes l'equació infradifusiva

$$u \frac{d\phi}{dx} - (K - K^*) \frac{d^2\phi}{dx^2} = 0$$

La idea que sorgeix ara és afegir una difusió numèrica  $K'$  a l'equació (3.1), de manera que en lloc de considerar la difusió real  $K$  es prengui, a efectes numèrics,  $\bar{K} = K + K'$ . Si la difusió  $K'$  es pren de la forma

$$K' = \bar{\alpha} \frac{uh}{2} \quad (3.6)$$

amb  $\bar{\alpha}$  una funció del nombre de Péclet a determinar, l'esquema que es troba, en lloc de (3.2), és

$$[1 + Pe(\bar{\alpha} - 1)]\phi_{i+1} - 2(1 + \bar{\alpha}Pe)\phi_i + [1 + Pe(\bar{\alpha} + 1)]\phi_{i-1} = 0 \quad (3.7)$$

i l'error de truncament que resulta és

$$\tau = -\frac{K}{2Pe} \left[ \left( \frac{1}{Pe} + \bar{\alpha} \right) (\cosh(2Pe) - 1) - \sinh(2Pe) \right] \left. \frac{d^2\phi}{dx^2} \right|_i$$

Imposant que  $\tau = 0$  s'obté

$$\bar{\alpha} = \coth Pe - \frac{1}{Pe} \quad (3.8)$$

En resum, si resollem numèricament (3.1) amb el MEF fent servir la formulació de Galerkin amb elements lineals o bé aproximant les derivades amb diferències centrals com indica (3.3) i afegim una difusió numèrica  $K'$  de la forma (3.6) amb  $\bar{\alpha}$  donada per (3.8), obtindrem una solució nodalment exacta (amb error de truncament nul als nodes de la discretització).

El fet d'afegir una difusió artificial com l'expressada a (3.6) es pot reinterpretar en el MEF com considerar les funcions de pes

$$W = N + \bar{\alpha} \frac{h}{2} \frac{dN}{dx} \quad (3.9)$$

on  $N$  és una funció de forma genèrica i el terme  $\bar{\alpha} \frac{h}{2} \frac{dN}{dx}$  s'aplica només a l'interior dels elements. En el cas de diferències finites, l'esquema (3.7) s'obté si les primeres derivades s'aproximen per

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \simeq \frac{(1 - \bar{\alpha})\phi_{i+1} + 2\bar{\alpha}\phi_i - (1 + \bar{\alpha})\phi_{i-1}}{2h} \quad (3.10)$$

### OBSERVACIONS

- (1) És fàcil veure que la funció  $\bar{\alpha}$  donada per (3.8) és antisimètrica i verifica que  $\bar{\alpha} \rightarrow 1$  quan  $Pe \rightarrow \infty$  i  $\bar{\alpha} = \frac{1}{3}Pe + \mathcal{O}(Pe^3)$  quan  $Pe \rightarrow 0$ . Sovint s'aproxima (3.8) per

$$\alpha_a(Pe) = \begin{cases} \frac{Pe}{3} & \text{si } 0 \leq |Pe| \leq 3 \\ \text{sgn}(Pe) & \text{si } |Pe| > 3 \end{cases} \quad (3.11)$$

- (2) L'expressió (3.8) va ser obtinguda per Christie et al. [3].  
 (3) Si  $\bar{\alpha} = 1$ , de (3.10) observem que les primeres derivades s'aproximen per diferències enrere

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \simeq \frac{\phi_i - \phi_{i-1}}{h}$$

i si  $\bar{\alpha} = -1$  per diferències endavant

$$\left. \frac{d\phi}{dx} \right|_i \simeq \frac{\phi_{i+1} - \phi_i}{h}$$

Aquestes aproximacions de les derivades en diferències van ser el punt de partida de les tècniques anomenades d'*upwind* (ponderació contracorrent), tant en el camp de les diferències finites com en el dels elements finits, l'objectiu de les quals és eliminar les oscil·lacions que resulten de les aproximacions en diferències centrals. Cal observar que són aproximacions de primer ordre  $\square$

### 3.3 Extensió a problemes multidimensionals

Considerem ara el següent problema de contorn: trobar  $\phi = \phi(x, y)$  tal que

$$\mathbf{u} \cdot \text{grad}\phi - \text{div}(\mathbf{K}\text{grad}\phi) = 0, \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.12)$$

$$\phi(x, y) = g(x, y), \quad (x, y) \in \partial\Omega$$

on  $\Omega$  és un obert de  $\mathbb{R}^2$  i  $g(x, y)$  és una funció donada. La resta de notació és la definida anteriorment.

La idea bàsica del mètode que implementarem consisteix en aplicar els conceptes vistos anteriorment en el cas unidimensional sobre les *línies de corrent* que defineix el camp

de velocitats  $\mathbf{u} = (u_1(x, y), u_2(x, y))$ . Per això, es demostra (Hughes i Brooks, [6]) que cal introduir un tensor de difusió numèrica

$$K'_{ij} = K' \frac{u_i u_j}{\|\mathbf{u}\|^2} \quad (3.13)$$

on

$$\begin{aligned} K' &= \bar{\alpha} \frac{\|\mathbf{u}\| h}{2} \\ \bar{\alpha} &= \coth Pe - \frac{1}{Pe} \\ Pe &= \frac{\|\mathbf{u}\| h}{2K_s} \end{aligned} \quad (3.14)$$

essent  $h$  la longitud característica de l'element segons la direcció del flux i  $K_s$  la difusió segons les línies de corrent

$$K_s = \sum_{i,j=1}^2 \frac{K_{ij} u_i u_j}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

De forma semblant al que hem vist en el cas unidimensional, la idea és ara resoldre (3.12) numèricament amb un tensor de conductivitat  $\tilde{K}_{ij} = K_{ij} + K'_{ij}$ , aplicant el mètode de Galerkin en el cas del MEF o emprant diferències centrals per aproximar les derivades en el cas de diferències finites.

Pel que fa al MEF, el procediment descrit resulta ser equivalent, si es fan servir elements lineals, a considerar com a funcions de pes

$$W = N + \frac{\bar{\alpha} h}{2\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \cdot \text{grad} N \quad (3.15)$$

on  $N$  indica una funció de forma genèrica i el terme de pertorbació  $\frac{\bar{\alpha} h}{2\|\mathbf{u}\|} \mathbf{u} \cdot \text{grad} N$  afecta només l'interior dels elements. Donat que les funcions de pes no pertanyen al mateix espai que les d'interpolació, la formulació variacional resultant s'anomena de Petrov-Galerkin. Aquesta en concret es coneix com *SUPG (Streamline Upwind Petrov-Galerkin)* [6].

### OBSERVACIONS

- (1) La formulació SUPG ha estat analitzada matemàticament per Johnson et al. [7]. En particular, es demostra que l'ordre de convergència és  $\mathcal{O}(h^{r+\frac{1}{2}})$ , essent  $r$  l'ordre dels polinomis d'interpolació. Per al cas d'elements lineals que considerem,  $r = 1$ .
- (2) En el cas de mètode de diferències finites, el procediment a seguir per aplicar aquesta formulació serà simplement afegir el tensor de difusió numèrica (3.13) al tensor  $\mathbf{K}$  de (3.12) i discretitzar totes les derivades en diferències centrals. En qualsevol cas, coneixem les propietats de convergència de l'algorisme a través de la seva interpretació en el context del MEF  $\square$

### 3.4 Aplicació a les equacions de generació de malla

La idea és ara veure com aplicar els conceptes vistos anteriorment al cas de les equacions (2.7), que reescrivim de la forma

$$\begin{aligned}\alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(x_{\xi}P + x_{\eta}Q) &= 0 \\ \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(y_{\xi}P + y_{\eta}Q) &= 0\end{aligned}\tag{3.16}$$

on  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  depenen de les derivades de  $x(\xi, \eta)$  i de  $y(\xi, \eta)$ . Tanmateix, linealitzant localment les equacions anteriors observem que cadascuna d'elles té l'estructura de l'equació de convecció-difusió de (3.12), prenent

$$\mathbf{u} = (-J^2P, -J^2Q)$$

com a camp de velocitats i

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \alpha & -\beta \\ -\beta & \gamma \end{pmatrix}\tag{3.17}$$

com a tensor de conductivitat. Per tal que aquesta analogia sigui certa hem de veure que la matriu  $\mathbf{K}$  donada per (3.17) és definida positiva.

**Proposició.** *La matriu  $\mathbf{K}$  de (3.17) amb  $\alpha, \beta$  i  $\gamma$  donats per (2.8) és definida positiva.*

*Demostració.* Sigui  $\mathbf{U}$  la matriu ortonormal

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Observem que  $\mathbf{U}^t \mathbf{K} \mathbf{U} = \mathbf{G}$ , on

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} \gamma & \beta \\ \beta & \alpha \end{pmatrix}$$

De (2.8) veiem que  $\gamma, \beta, \alpha$  són precisament les components del tensor mètric a l'espai de coordenades  $(x, y)$  transformat del tensor de la mètrica euclídia a l'espai de coordenades  $(\xi, \eta)$  a través de l'aplicació  $(\xi, \eta) \mapsto (x, y)$ . Així doncs,  $\mathbf{G}$  és la matriu d'una mètrica, i per tant definida positiva. Per ser  $\mathbf{U}$  ortonormal,  $\mathbf{K}$  serà també definida positiva.

Una demostració més directa és veure que els valors propis de  $\mathbf{K}$  són positius. Aquests valors propis, l'expressió dels quals farem servir posteriorment, són

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= \frac{1}{2} \left\{ \alpha + \gamma + [(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2]^{\frac{1}{2}} \right\} \\ \lambda_2 &= \frac{1}{2} \left\{ \alpha + \gamma - [(\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2]^{\frac{1}{2}} \right\}\end{aligned}\tag{3.18}$$

Ens cal veure que  $\lambda_2 > 0$ . Donat que suposem que la transformació  $(\xi, \eta) \mapsto (x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$  és invertible

$$J^2 = (x_\xi y_\eta - x_\eta y_\xi)^2 > 0$$

d'on

$$\begin{aligned} x_\xi^2 y_\eta^2 + x_\eta^2 y_\xi^2 &> 2x_\xi x_\eta y_\xi y_\eta, \\ \alpha\gamma &= (x_\xi^2 + y_\xi^2)(x_\eta^2 + y_\eta^2) > (x_\xi x_\eta + y_\xi y_\eta)^2 = \beta^2, \\ \alpha^2 + \gamma^2 + 2\alpha\gamma &> \alpha^2 + \gamma^2 - 2\alpha\gamma + 4\beta^2, \\ (\alpha + \gamma)^2 &> (\alpha - \gamma)^2 + 4\beta^2, \end{aligned}$$

és a dir,  $\lambda_2 > 0$   $\square$

L'aplicació de les idees del subapartat 3.3 a la resolució de les equacions (3.16) és ara immediata. Suposem que  $\Omega' = [0, 1] \times [0, 1]$  està discretitzat de la forma indicada a l'apartat 2. Les aproximacions que prendrem de les derivades seran

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial x}{\partial \xi} \right|_{ij} &\simeq \frac{x_{i+1,j} - x_{i-1,j}}{2h_\xi} \\ \left. \frac{\partial x}{\partial \eta} \right|_{ij} &\simeq \frac{x_{i,j+1} - x_{i,j-1}}{2h_\eta} \\ \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \xi^2} \right|_{ij} &\simeq \frac{x_{i+1,j} - 2x_{i,j} + x_{i-1,j}}{h_\xi^2} \\ \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \eta^2} \right|_{ij} &\simeq \frac{x_{i,j+1} - 2x_{i,j} + x_{i,j-1}}{h_\eta^2} \\ \left. \frac{\partial^2 x}{\partial \xi \partial \eta} \right|_{ij} &\simeq \frac{x_{i+1,j+1} - x_{i+1,j-1} - x_{i-1,j+1} + x_{i-1,j-1}}{4h_\eta h_\xi} \end{aligned} \tag{3.19}$$

i expressions anàlogues per a les derivades de  $y(\xi, \eta)$ .

A continuació caldrà calcular els coeficients  $\alpha, \beta, \gamma, J, -J^2 P$  i  $-J^2 Q$  i afegir la difusió numèrica donada per (3.14):

$$\begin{aligned} \alpha &\leftarrow \alpha + K' u_\xi u_\xi \\ -\beta &\leftarrow -\beta + K' u_\xi u_\eta \\ \gamma &\leftarrow \gamma + K' u_\eta u_\eta \end{aligned} \tag{3.20}$$

on

$$\begin{aligned} u_\xi &= \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \\ u_\eta &= \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2}} \\ K' &= \bar{\alpha} \frac{h}{2} J^2 \sqrt{P^2 + Q^2} \end{aligned}$$

En la implementació del mètode s'ha pres com a valor de la longitud característica  $h = \max(h_\xi, h_\eta)$  i la funció  $\bar{\alpha}$  s'ha aproximat per

$$\alpha_a(Pe) = \begin{cases} \frac{Pe}{3} & \text{si } 0 \leq Pe \leq 3 \\ 1 & \text{si } Pe > 3 \end{cases}$$

$$Pe = \frac{h}{2K_s} J^2 \sqrt{P^2 + Q^2}$$

$$K_s = \alpha u_\xi u_\xi - 2\beta u_\xi u_\eta + \gamma u_\eta u_\eta$$
(3.21)

El que queda ara és veure com resoldre el sistema d'equacions algebraiques que resulta d'aplicar la discretització presentada a les equacions (3.16), la qual cosa es discutirà a l'apartat 5.

#### 4. Termes de font

L'error comès al realitzar un càlcul pel MEF no és el mateix a tot el domini del problema. Per tal de fer-lo el més uniforme possible, és necessari concentrar elements en certes zones, és a dir, discretitzar-les amb elements de longitud característica menor que a la resta del domini. Si es coneix un estimador d'error per al problema que s'està analitzant, és possible saber amb certa precisió quin tamany d'element cal i tractar d'aproximar-s'hi fent servir tècniques adaptatives. En qualsevol cas, la física del problema proporciona ja una idea intuïtiva sobre a quines zones interessa concentrar els elements de la malla.

Les funcions  $P(\xi, \eta)$  i  $Q(\xi, \eta)$  introduïdes anteriorment com a termes "de font" a les equacions (2.1) tenen com a objectiu l'obtenir propietats de la malla que *a priori* puguin semblar adequades per reproduir numèricament la solució de l'equació que es pretén resoldre.

Thompson, Thames i Mastin van proposar a la referència [12] com a funcions de font per concentrar la malla en un punt  $(\xi_i, \eta_i)$

$$P_i(\xi, \eta) = -b_i \text{sgn}(\xi - \xi_i) \exp \left\{ -d_i \left[ (\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$

$$Q_i(\xi, \eta) = -b_i \text{sgn}(\eta - \eta_i) \exp \left\{ -d_i \left[ (\xi - \xi_i)^2 + (\eta - \eta_i)^2 \right]^{\frac{1}{2}} \right\}$$
(4.1)

on  $b_i$  i  $d_i$  són constants positives. S'aconsegueix concentrar la malla al voltant de la línia coordenada  $\xi = \xi_m$  si es pren

$$P_m(\xi, \eta) = -a_m \text{sgn}(\xi - \xi_m) \exp[-c_m |\xi - \xi_m|]$$

$$Q_m(\xi, \eta) = 0$$
(4.2)

amb  $a_m$  i  $c_m$  constants positives. Expressions anàlogues es poden emprar per tal de concentrar la malla al voltant de  $\eta = \eta_n$ .

Si  $I$  és el nombre de punts amb termes de font de la forma (4.1),  $M$  el de línies coordenades amb termes de font com indica (4.2) i  $N$  l'anàleg segons línies  $\eta = \text{constant}$ , la forma general de les funcions  $P(\xi, \eta)$ ,  $Q(\xi, \eta)$  que permeten concentrar major nombre d'elements al voltant de punts i línies coordenades és

$$P(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I P_i(\xi, \eta) + \sum_{m=1}^M P_m(\xi, \eta)$$

$$Q(\xi, \eta) = \sum_{i=1}^I Q_i(\xi, \eta) + \sum_{n=1}^N Q_n(\xi, \eta)$$

De les expressions (4.1) i (4.2) s'observa que les constants  $b_i$  i  $a_m$  determinen la "intensitat" de la font, mentre que  $d_i$  i  $c_m$  permeten regular la distància sobre la qual es vol que aquesta font tingui més efecte.

Als exemples que es presentaran a l'apartat 6 es veu que es possible concentrar de forma uniforme els elements de la malla en una zona limitada per les línies coordenades  $\xi = \xi_1$ ,  $\xi = \xi_2$ ,  $\eta = \eta_1$  i  $\eta = \eta_2$  modificant lleument i combinant expressions de la forma (4.2). Una possible manera de fer-ho és prenent les funcions  $P$  i  $Q$  com

$$P(\xi, \eta) = -a_1 \chi_+(\xi_1 - \xi) \exp[-c_1 |\xi - \xi_1|]$$

$$- a_2 \chi_+(\xi - \xi_2) \exp[-c_2 |\xi - \xi_2|]$$

$$Q(\xi, \eta) = -a'_1 \chi_+(\eta_1 - \eta) \exp[-c'_1 |\eta - \eta_1|]$$

$$- a'_2 \chi_+(\eta - \eta_2) \exp[-c'_2 |\eta - \eta_2|]$$
(4.3)

on  $a_1, a_2, a'_1, a'_2, c_1, c_2, c'_1$  i  $c'_2$  són constants i  $\chi_+$  es defineix per

$$\chi_+(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x \leq 0 \end{cases}$$

Un tipus de funcions de font totalment diferent és el proposat per Steger i Sorenson [11], les quals es determinen imposant que hi hagi una certa velocitat de creixement de la distància entre línies coordenades properes a una part del contorn del domini on es vol generar la malla. S'imposa també que prop d'aquest contorn les dues famílies de línies coordenades es tallin de forma quasi ortogonal. Per implementar aquesta idea cal determinar les funcions  $P$  i  $Q$  de forma iterativa, doncs resulten ser dependents de les derivades de les funcions incògnita  $x(\xi, \eta)$ ,  $y(\xi, \eta)$

## 5. Resolució del sistema d'equacions

### 5.1 Consideracions generals

La discretització de les equacions (3.16) descrita al subapartat 3.4 donarà lloc a un sistema d'equacions algebraiques no lineal  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ , on  $\mathbf{x}$  és el vector que conté les incògnites  $x_{ij}, y_{ij}, i = 2, \dots, N_\xi - 1, j = 2, \dots, N_\eta - 1$  (la resta de coordenades nodals vindrà donada per les condicions de contorn).

Usualment, el sistema resultant es resol pel mètode de sobrerelaxament successiu (SOR) [12]. Tanmateix, només és possible provar convergència d'aquest mètode per resoldre equacions de la forma  $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  quan la matriu jacobiana de la funció  $\mathbf{F}$  és simètrica (c.f. [8]) i suposant que els valors a partir dels quals es comença a iterar són propers a la solució final.

En el cas que ens ocupa, la matriu jacobiana de l'aplicació  $\mathbf{F}$  no és simètrica, a causa de la presència de les funcions  $P$  i  $Q$  de l'equació (3.16), les quals proporcionen un terme de caràcter convectiu. Quan aquest terme és important, experiments numèrics indiquen que la convergència del mètode SOR es veu dificultada [11] i el paràmetre de sobrerelaxament s'ha de prendre molt petit (entre 0.02 i 0.06 en els casos tractats a la referència [11]).

El mètode de resolució que aquí es presentarà es basa en aprofitar el caràcter local d'equació de convecció-difusió de (3.16), ja explotat a l'hora de discretitzar aquestes equacions de manera que s'evitin les oscil·lacions numèriques quan  $P$  i  $Q$  prenen valors elevats.

És sabut que els mètodes de Jacobi, Gauss-Seidel i sobrerelaxament aplicats als sistema que resulta de discretitzar en diferències centrals el problema de trobar  $v = v(x, y)$  tal que

$$\begin{aligned} \Delta v &= f, & (x, y) \in \mathcal{D} &= [0, 1] \times [0, 1] \\ v(x, y) &= g(x, y), & (x, y) \in \partial\mathcal{D} \end{aligned} \quad (5.1)$$

on  $f$  i  $g$  són funcions donades, es poden interpretar com la resolució de certs problemes transitoris associats discretitzant l'operador de derivació temporal amb el mètode d'Euler endavant (explícit).

Partint d'aquesta idea, ens plantegem resoldre, en lloc de (3.16), el sistema d'equacions

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial t} &= \alpha x_{\xi\xi} - 2\beta x_{\xi\eta} + \gamma x_{\eta\eta} + J^2(x_\xi P + x_\eta Q) \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= \alpha y_{\xi\xi} - 2\beta y_{\xi\eta} + \gamma y_{\eta\eta} + J^2(y_\xi P + y_\eta Q) \end{aligned} \quad (5.2)$$

i obtenir la solució de (3.16) com l'estat estacionari per al problema (5.2) amb una certa condició inicial i les condicions de contorn que corresponen a  $x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)$ . Aquest estat estacionari podem preveure que existirà en virtut del caràcter difusiu del terme en derivades segones de les incògnites de (5.2).



Per desenvolupar l'algorisme de resolució ens cal en primer lloc veure quines són les condicions d'estabilitat del mètode d'Euler endavant per a les equacions (5.2). Després caldrà veure si és possible accelerar d'alguna manera la convergència per tal d'arribar el més ràpidament possible a l'estat estacionari d'aquestes equacions.

## 5.2 Estabilitat de l'equació de convecció-difusió unidimensional transitòria

El sistema d'equacions (5.2) és acoblat, bidimensional i no lineal. Escometre l'anàlisi d'estabilitat d'esquemes d'integració en el temps en la situació més general és inviable. Tanmateix, podem obtenir una idea de quin pot ser el pas de temps crític per a l'esquema d'Euler endavant analitzant l'estabilitat d'aquest mètode per a l'equació unidimensional i lineal

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} = K \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} - u \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (5.3)$$

La discretització espacial suposarem que és la descrita al subapartat 3.2, del qual en conservarem la notació en tot el que segueix.

Si  $\Delta t$  és el pas de temps que fem servir i  $\tilde{K}$  és la difusió total (real més numèrica) que s'introdueix, les equacions de la discretització total de (5.3) fent servir en el temps l'esquema d'Euler explícit són

$$\phi_i^{n+1} = \phi_i^n + \Delta t \left[ \tilde{K} \frac{\phi_{i+1}^n - 2\phi_i^n + \phi_{i-1}^n}{h^2} - u \frac{\phi_{i+1}^n - \phi_{i-1}^n}{2h} \right] \quad (5.4)$$

on els superíndexos fan referència al nivell de temps i els subíndexos al node de la discretització a l'espai.

El nombre de Courant  $Cr$  es defineix com

$$Cr := \frac{u\Delta t}{h} \quad (5.5)$$

Si  $u \neq 0$ , les condicions d'estabilitat de l'algorisme (5.4) es podran expressar en termes del nombre de Courant  $Cr$  i del nombre de Péclet  $Pe$ . Obtindrem aquestes condicions amb mètodes clàssics d'anàlisi de problemes de valor inicial.

**Proposició.** *L'algorisme (5.4) per a l'equació (5.3), com a problema de valor inicial, és estable si, i només si*

$$\Delta t \leq \frac{h^2}{2\tilde{K}} \quad (5.6)$$

on  $\tilde{K} = K + K'$  i  $K'$  és la difusió numèrica definida per (3.6) i (3.8).

*Demostració.* Analitzarem (5.4) fent servir l'anàlisi d'estabilitat de von Neumann (c.f. [8]). La matriu d'amplificació de l'algorisme té dimensions  $1 \times 1$  i és per tant normal. La condició necessària i suficient d'estabilitat de l'algorisme és en aquest cas que el factor d'amplificació (única component de la matriu d'amplificació) tingui mòdul  $\leq 1$ .

Sigui

$$\psi_j^n = e^{-\nu^h n \Delta t} e^{ikjh} \quad (5.7)$$

un harmònic al punt  $x_j = jh$  i a l'instant  $t^n = n\Delta t$  de la solució analítica de (5.3) com a problema de valor inicial. A (5.7) es considera  $\nu^h > 0$  (constant),  $k$  enter i  $i = \sqrt{-1}$ . Introduint  $\psi_j^n$  a l'esquema (5.4) s'obté el factor d'amplificació

$$\begin{aligned} A^h &= \frac{\psi_j^{n+1}}{\psi_j^n} = \text{Re}A^h + i\text{Im}A^h \\ \text{Re}A^h &= 1 - \frac{2\tilde{K}\Delta t}{h^2} + \frac{2\tilde{K}\Delta t}{h^2} \cos kh \\ \text{Im}A^h &= -\frac{u\Delta t}{h} \sin kh \end{aligned}$$

La condició d'estabilitat resultarà d'imposar que  $|A^h|^2 \leq 1 \quad \forall k$ . Anomenant  $x = \cos kh$ , considerem la funció

$$f(x) = \left(1 - \frac{2\tilde{K}\Delta t}{h^2} + \frac{2\tilde{K}\Delta t}{h^2}x\right)^2 + \left(\frac{u\Delta t}{h}\right)^2 (1 - x^2)$$

Ens cal ara veure que  $f(x) \leq 1$ ,  $x \in [-1, 1]$  si, i només si, es compleix (5.6). Escrivim  $f(x)$  de la forma

$$f(x) = (b^2 - Cr^2)x^2 + 2b(1 - b)x + (1 - b)^2 + Cr^2$$

on

$$b = \frac{2\tilde{K}\Delta t}{h^2}$$

Si  $b^2 - Cr^2 \geq 0$ , els màxims de  $f$  es poden trobar a  $x = 1$  o a  $x = -1$ . Per a  $x = 1$  és  $f(x) = 1$  i per a  $x = -1$  obtenim la condició

$$\begin{aligned} \frac{4\tilde{K}\Delta t}{h^2} - 1 &\leq 1, \\ \Delta t &\leq \frac{h^2}{2\tilde{K}} \end{aligned} \quad (5.8)$$

Si  $b^2 - Cr^2 < 0$  el màxim de  $f$  es troba al punt

$$x_0 = \frac{(1 - b)b}{Cr^2 - b^2}$$

i es té que

$$\begin{aligned} f(x_0) &= (1 - b^2) \frac{Cr^2}{Cr^2 - b^2} + Cr^2 \\ &= \frac{(Cr^2 - b)^2}{Cr^2 - b^2} + 1 \geq 1 \end{aligned}$$

L'única possibilitat per tal que l'algorisme sigui estable és que  $|x_0| \geq 1$ . Si es compleix (5.8) es té que  $b \leq 1$ , per la qual cosa el que cal és que

$$\frac{(1-b)b}{Cr^2 - b^2} \geq 1$$

d'on resulta la condició

$$Cr^2 = \frac{\Delta t^2 u^2}{h^2} \leq b = \frac{2\tilde{K}\Delta t}{h^2}$$

i si  $u \neq 0$

$$\Delta t \leq \frac{2\tilde{K}}{u^2} \quad (5.9)$$

Finalment, ens queda demostrar que la condició (5.8) és més restrictiva que no pas (5.9), és a dir

$$\frac{h^2}{2\tilde{K}} \leq \frac{2\tilde{K}}{u^2} \quad (5.10)$$

Tenim

$$\begin{aligned} 1 \leq \coth Pe &= \bar{\alpha} + \frac{1}{Pe} = \bar{\alpha} + \frac{2K}{uh} \\ &= \frac{2}{uh} \left( K + \frac{\bar{\alpha}uh}{2} \right) = \frac{2\tilde{K}}{uh} \end{aligned}$$

d'on s'obté (5.10)  $\square$

### OBSERVACIÓ

La condició (5.10) només té sentit si  $u \neq 0$ . Suposem que aquest és el cas. Es pot veure aleshores que les condicions (5.8) i (5.10) es poden escriure conjuntament com

$$Cr \leq \min \left( \frac{Pe}{1 + \bar{\alpha}Pe}, \bar{\alpha} + \frac{1}{Pe} \right) \quad (5.11)$$

Si  $\bar{\alpha}$  ve donada per (3.8), la desigualtat (5.10) implica que

$$\frac{Pe}{1 + \bar{\alpha}Pe} \leq \bar{\alpha} + \frac{1}{Pe}$$

Però si  $\bar{\alpha} = 0$  (és a dir, si discretitzéssim l'espai sense introduir difusió numèrica), la condició (5.11) esdevé

$$Cr \leq \min \left( Pe, \frac{1}{Pe} \right)$$

de manera que l'algorisme es fa *incodicionalment inestable* quan  $Pe \rightarrow \infty$  (en particular, quan  $K = 0$  i  $u \neq 0$ ). A la Figura 1 es representen les funcions

$$Cr = \frac{Pe}{1 + \bar{\alpha}Pe} \quad \text{i} \quad Cr = \bar{\alpha} + \frac{1}{Pe}$$

que defineixen la regió d'estabilitat de l'algorisme al pla  $(Pe, Cr)$  per a  $\bar{\alpha} = \coth Pe - \frac{1}{Pe}$  i a la Figura 2 per a  $\bar{\alpha} = 0$   $\square$

### 5.3 Un algorisme iteratiu per a les equacions de generació de malla

Ja s'ha indicat que la idea bàsica és obtenir la solució del sistema (3.16) com l'estat estacionari del problema de contorn i valor inicial (5.2). Anomenem  $R_x$  i  $R_y$  els termes de la dreta d'aquestes equacions (5.2), de manera que ara es podran escriure

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial t} &= R_x \\ \frac{\partial y}{\partial t} &= R_y\end{aligned}\tag{5.12}$$

Si apliquem el mètode d'Euler explícit per discretitzar en el temps (5.12) obtindrem

$$\begin{aligned}x^{n+1} &= x^n + \Delta t R_x^n \\ y^{n+1} &= y^n + \Delta t R_y^n\end{aligned}\tag{5.13}$$

on el superíndex fa referència al pas de temps. Els termes  $R_x$  i  $R_y$  els discretitzarem aplicant el mètode descrit al subapartat 3.4, de manera que per a cada node de coordenades  $(\xi_i, \eta_j)$  en el domini  $\Omega'$  tindrem

$$\begin{aligned}x_{ij}^{n+1} &= x_{ij}^n + \Delta t (R_x^n)_{ij} \\ y_{ij}^{n+1} &= y_{ij}^n + \Delta t (R_y^n)_{ij}\end{aligned}\tag{5.14}$$

Donat que el que ens interessa és arribar el més ràpidament possible a l'estat estacionari de (5.2), el pas de temps  $\Delta t$  el prendrem proper al crític (aquell a partir del qual l'algorisme deixa de ser estable). El que hem vist a l'apartat anterior ens permet estimar quant pot valer aquest pas de temps,  $\Delta t_{crit}$ . Segons (5.6), el podríem prendre com

$$\Delta t_{crit} = \frac{h^2}{2\tilde{K}}\tag{5.15}$$

on  $\tilde{K}$  és una constant característica de la matriu  $\tilde{\mathbf{K}}$ , resultat d'afegir a la matriu  $\mathbf{K}$  de (3.17) la difusió numèrica com indica (3.20). El valor de  $\tilde{K}$  que hem triat es fonamenta en criteris heurístics. Si el terme de difusió de les equacions (3.16) predomina sobre el de convecció (cas que es pot definir a partir de la condició  $Pe < 1$ , amb  $Pe$  donat per (3.21)), no hi ha una direcció de propagació de la solució definida. En aquest cas, s'ha pres  $\tilde{K} = \tilde{\lambda}_1$ , el màxim valor propi de la matriu  $\tilde{\mathbf{K}}$  (veure (3.18)). Si en canvi és el terme convectiu el que predomina, les línies de corrent del camp  $\mathbf{u} = (-J^2 P_2 - J^2 Q)$  defineixen la direcció predominant de transport de la solució i en aquest cas  $\tilde{K}$  es pot prendre com  $\tilde{K} = \tilde{K}_s$ , on

$$\tilde{K}_s = \frac{\mathbf{u}^t \tilde{\mathbf{K}} \mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

Els experiments numèrics han indicat que aquestes conjectures són vàlides. Prenent a (5.14) el pas de temps com

$$\Delta t = f \Delta t_{crit} \quad (5.16)$$

amb  $\Delta t_{crit}$  donat per (5.15), per a valors de  $f \leq 0.9$  l'algorisme (5.14) s'ha comprovat que és estable, mentre que per a valors de  $f > 1$  no s'ha aconseguit estabilitat en cap cas.

### EL MÈTODE DE PARTIDA

Les equacions (5.14), (5.15) i (5.16) defineixen ja un mètode de resolució de (3.16). Ara cal entendre el superíndexos de (5.14) com a passos del procés iteratiu més que no pas com a estats en el temps.

El valor de  $\Delta t$  donat a (5.16) dependrà del node  $(\xi_i, \eta_j)$  que considerem. Per tal que totes les equacions de (5.14) siguin estables, haurem de prendre el mínim  $\Delta t$  dels calculats a tots els nodes. L'algorisme iteratiu quedarà com s'indica a l'esquema 1. Per l'analogia amb el mètode corresponent que resultaria per al problema (5.1), aquest mètode l'anomenarem *tipus Jacobi*.

- Llaç d'iteracions
- Fixar  $\Delta t_{min} = 1$
- Llaç per a  $i$ 
  - Llaç per a  $j$ 
    - . Calcular  $\Delta t$  (eq. (5.16))
    - . Si  $\Delta t < \Delta t_{min}$ ,  $\Delta t_{min} \leftarrow \Delta t$
    - . Calcular  $(R_x)_{ij}$  i  $(R_y)_{ij}$
  - Fi del llaç per a  $j$
- Fi del llaç per a  $i$
- Llaç per a  $i$ 
  - Llaç per a  $j$ 
    - . Actualitzar:
      - $x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \Delta t_{min}(R_x)_{ij}$
      - $y_{ij} \leftarrow y_{ij} + \Delta t_{min}(R_y)_{ij}$
  - Fi del llaç per a  $j$
- Fi del llaç per a  $i$
- Avaluar convergència
- Fi del llaç d'iteracions

Esquema 1. Algorisme de tipus Jacobi

### MÈTODE TIPUS GAUSS-SEIDEL

De manera semblant al que es fa en el cas de sistemes lineals, podem pensar en calcular  $(R_x)_{ij}$  i  $(R_y)_{ij}$  fent servir totes les incògnites actualitzades que sigui possible, la qual cosa correspon al mètode de Gauss-Seidel. Això porta a la variant de l'esquema anterior indicada a l'esquema 2. S'observa que en el còmput de  $(R_x)_{ij}$  i  $(R_y)_{ij}$  els valors de  $x_{i-1,j}$ ,  $x_{i,j-1}$ ,  $y_{i-1,j}$  i  $y_{i,j-1}$  que es faran servir corresponen ja als valors de la iteració actual.

- Llaç d'iteracions
- Fixar  $\Delta t_{min} = 1$
- Llaç per a  $i$ 
  - Llaç per a  $j$ 
    - . Calcular  $\Delta t$  (eq. (5.16))
    - . Si  $\Delta t < \Delta t_{min}$ ,  $\Delta t_{min} \leftarrow \Delta t$
  - Fi del llaç per a  $j$
- Fi del llaç per a  $i$
- Llaç per a  $i$ 
  - Llaç per a  $j$ 
    - . Calcular  $(R_x)_{ij}$  i  $(R_y)_{ij}$
    - . Actualitzar:
      - $x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \Delta t_{min}(R_x)_{ij}$
      - $y_{ij} \leftarrow y_{ij} + \Delta t_{min}(R_y)_{ij}$
  - Fi del llaç per a  $j$
- Fi del llaç per a  $i$
- Avaluar convergència
- Fi del llaç d'iteracions

Esquema 2. Algorisme de tipus Gauss-Seidel

### PAS DE TEMPS LOCAL

Donat que no ens interessa el transitori del sistema (5.2), una nova estratègia que es pot assajar és emprar (5.14) amb el pas de temps  $\Delta t$  donat per (5.16) *diferent per a cada equació*. Això accelera notablement la convergència vers l'estat estacionari. A més, l'algorisme resultant (esquema 3) és molt més simple i fàcil d'implementar.

- Llaç d'iteracions
- Llaç per a  $i$ 
  - Llaç per a  $j$ 
    - . Calcular  $\Delta t$  (eq. (5.16))
    - . Calcular  $(R_x)_{ij}$  i  $(R_y)_{ij}$
    - . Actualitzar:
      - $x_{ij} \leftarrow x_{ij} + \Delta t(R_x)_{ij}$
      - $y_{ij} \leftarrow y_{ij} + \Delta t(R_y)_{ij}$
  - Fi del llaç per a  $j$
- Fi del llaç per a  $i$
- Avaluar convergència
- Fi del llaç d'iteracions

Esquema 3. Algorisme de tipus Gauss-Seidel amb pas de temps local

A l'apèndix s'inclou un llistat del mòdul de resolució del sistema (3.16) del programa d'ordinador escrit per generar malles estructurades amb el procediment presentat. El mètode de resolució implementat és el de l'esquema 3, doncs s'ha comprovat numèricament en diversos casos que és el més eficient. Al primer exemple del següent apartat es compara la velocitat de convergència obtinguda amb la proporcionada pels algorismes dels esquemes 1 i 2.

## AVALUACIÓ DE LA CONVERGÈNCIA

El procés iteratiu presentat s'atura quan la diferència en una certa norma entre les incògnites en una iteració i l'anterior és prou petita. El paràmetre de convergència que s'ha pres és

$$conv = \frac{\| (x^{n+1} - x^n, y^{n+1} - y^n) \|_2}{\| (x^{n+1}, y^{n+1}) \|_2} \quad (5.16)$$

on

$$\| (x, y) \|_2^2 := \sum_{i,j} (x_{ij}^2 + y_{ij}^2)$$

El procés es considera convergit quan  $conv < TOL$ , on  $TOL$  és una certa tolerància donada.

### OBSERVACIONS

- (1) Amb totes les modificacions fetes de l'algorisme de partida, es podria ara pensar si no és possible prendre  $f > 1$  a (5.16) (sobrerelaxament). Experiments numèrics indiquen que això no és possible i que el pas de temps crític per a l'estabilitat del mètode segueix essent aproximadament el mateix.
- (2) El mètode presentat convergirà *independentment* de quina sigui la condició inicial, la qual només determinarà el nombre d'iteracions necessàries per assolir convergència. En la implementació del mètode, els valors inicials de les incògnites a l'interior del domini s'han pres interpolant els valors del contorn.
- (3) Per al tipus de termes de font de l'apartat 4, només és  $Pe > 1$  en alguns punts de la malla. Per tal d'evitar introduir un condicionant en el programa, a (5.15) s'ha pres sempre  $\tilde{K} = \tilde{\lambda}_1$ , àdhuc quan  $Pe > 1$ , cas en el qual ja s'ha dit que  $\tilde{K} = \tilde{K}_s$  resulta suficient.

## 6. Exemples

Tots els exemples presentats en aquesta secció s'han corregut en un ordinador CONVEX C-120 en doble precisió, amb l'opció de compilació vectorial.

Aquests exemples tracten de ser il·lustratius. No s'ha pretès, per tant, obtenir la malla més adient a un determinat càlcul. Per això, les condicions de contorn d'un exemple (i.e. coordenades dels nodes de contorn) no s'han modificat en els diferents casos considerats d'aquest exemple.

Tots els casos s'han corregut amb  $f = 0.9$  a l'equació (5.16) i generant elements quadrangulars de 4 nodes.

*EXEMPLE 1.* L'objectiu d'aquest exemple és veure com afecten les funcions de font

$P(\xi, \eta)$  i  $Q(\xi, \eta)$  a la malla resultant i comparar la velocitat de convergència dels algorismes presentats a l'apartat anterior.

El primer cas consisteix en generar una malla al domini  $\Omega = [0, 2] \times [0, 2]$  amb els elements concentrats al punt  $\xi = 0.75, \eta = 0.75$ . S'han fet servir les funcions de font de (4.1) amb  $b = 10, d = 1$ . La tolerància de convergència s'ha pres  $TOL = 10^{-6}$ . Els resultat obtingut és el presentat a la Figura 3.

A les Figures 4 i 5 es comparen les velocitats de convergència obtingudes amb els algorismes de tipus Jacobi, Gauss-Seidel i Gauss-Seidel amb pas de temps local per a aquest cas. S'observa que la convergència millora extraordinàriament al passar d'un mètode a l'altre. En tots els exemples següents s'ha fet servir el darrer algorisme.

En el segon cas es resol el mateix problema anterior però concentrant ara els elements de la malla al voltant de la línia coordenada  $\xi = 0.75$ . S'han fet servir les funcions de font de (4.2) amb  $a = 10, c = 1$ . La malla resultant és la de la Figura 6.

Finalment, el tercer cas consisteix en concentrar els elements al voltant de la zona definida per les línies coordenades  $\xi_1 = 0.4, \xi_2 = 0.6, \eta_1 = 0.4, \eta_2 = 0.6$ , utilitzant els termes de font (4.3) amb  $a_1 = a_2 = a'_1 = a'_2 = 10, c_1 = c_2 = c'_1 = c'_2 = 1$ , resultant la malla de la Figura 7

*EXEMPLE 2.* Aquest exemple consisteix en la generació d'una malla d'elements finits en una regió en forma de graó (veure la Figura 8). La tolerància s'ha pres  $TOL = 10^{-5}$ .

A les Figures 8 i 9 es representa la malla obtinguda amb  $P(\xi, \eta) \equiv 0, Q(\xi, \eta) \equiv 0$ . La malla de la Figura 10 s'obté concentrant els elements al voltant de la línia coordenada  $\eta = 0$  (que descriu el graó) prenent com a amplitud del terme de font  $a = 1$  i com a coeficient  $c = 1$  (les expressios dels termes de font són les anàlogues a (4.2) però concentrant al voltant de línies  $\eta = \text{constant}$ ).

Finalment, a les Figures 11 i 12 es representa la malla obtinguda fent servir les funcions de font (4.3) amb  $\xi_1 = 0.05, \xi_2 = 1, \eta_1 = 0, \eta_2 = 0.1$  i tots els coeficients iguals a 1. S'observa que s'aconsegueix una distribució dels tamanyes dels elements entre  $\eta = 0$  i  $\eta = 0.1$  més uniforme que en el cas anterior, encara que les funcions de font resulten influir punts més llunyans de la malla havent pres els mateixos coeficients  $a$  i  $c$  que abans.

*EXEMPLE 3.* El domini a discretitzar en aquest cas és un rectangle amb una entrada semicircular. La Figura 13 representa la malla resultant amb  $P(\xi, \eta) \equiv 0$  i  $Q(\xi, \eta) \equiv 0$ , havent pres una tolerància de convergència  $TOL = 10^{-5}$ . La malla obtinguda concentrant els elements al voltant de  $\eta = 0$  ( $a = 1, c = 1$ ) és la de la Figura 14.



## 7. Conclusions

En aquest treball s'han analitzat diversos aspectes del mètode de generació de malles estructurades a partir d'equacions el·líptiques proposat per Thompson, Thames i Mastin [12].

En primer lloc, s'ha vist que es poden introduir termes de font per tal de concentrar els elements de la malla resultant no només al voltant de punts i de línies coordenades, sinó també al voltant de zones tancades per aquestes línies. Dels exemples, però, s'ha vist que és difícil controlar la forma dels elements a tota la malla. Els coeficients adequats de les funcions de font i les zones de concentració s'han de determinar, a l'hora de generar una malla per a un determinat tipus de càlcul, assajant diverses possibilitats fins que s'obtingui la malla que es consideri idònia.

Quan els termes de font indicats són importants, les equacions que cal resoldre tenen un marcat caràcter convectiu. Per tal d'eliminar les possibles oscil·lacions que es poden presentar discretitzant les derivades en diferències centrals, s'ha adaptat la formulació SUPG del MEF al mètode de diferències finites. La discretització resultant ha mostrat un comportament excel·lent en tots els exemples tractats.

Per últim, s'ha presentat un algorisme iteratiu de resolució del sistema d'equacions en diferències resultant basat en l'evolució en el temps d'un problema transitori associat. El mètode finalment adoptat ha demostrat ser molt eficaç, ràpid i, el que és molt important, convergent independentment dels valors inicials a partir dels quals es comenci a iterar. La idea, a més, és aplicable a qualsevol sistema en diferències que resulti de discretitzar un problema de contorn que, a nivell local, es comporti com el de convecció-difusió.

## Agraïments

L'autor agraeix l'ajut a projectes de recerca d'investigadors joves concedit per la CIRIT (Generalitat de Catalunya) en la convocatòria de 1989.

## Apèndix

A continuació es presenta el llistat de la subrutina de resolució numèrica de les equacions (3.16) del programa d'ordinador que implementa el mètode presentat, escrit en FORTRAN-77. L'algorisme que es fa servir és de tipus Gauss-Seidel amb pas de temps local (veure l'apartat 5).

```

      subroutine solver(xc,yc,pf,qf)
c*****
c
c      Aquesta subrutina resol el sistema d'equacions que resulta
c      aproximant les derivades de l'equacio continua en diferen-
c      cies finites. Les variables principals son:
c
c      ns, nt .. Nombre de punts segons les direccions s i t
c      niter ... Maxim nombre d'iteracions permeses
c      toler ... Tolerancia de convergencia
c      facto ... Factor que multiplica el pas de temps critic
c      xc ..... Coordenades x dels nodes
c      yc ..... Coordenades y dels nodes
c      resx .... Residu de l'equacio segons x
c      resy .... Residu de l'equacio segons y
c      pf, qf .. Termes de font
c
c      Els valors de les coordenades dels nodes de contorn son
c      coneguts (es poden programar en cada problema o be llegir
c      d'un fitxer). Els termes de font s'han calculat anterior-
c      ment.
c
c
c*****
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      common/contro/ns,nt,ntfo,ntco,niter,toler,facto
      dimension pf(ns,nt), qf(ns,nt), xc(ns,nt), yc(ns,nt)
c
      hs=1.0d0/dfloat(ns-1)
      ht=1.0d0/dfloat(nt-1)
      hmax=max(hs,ht)
      hmin=min(hs,ht)
c
c      Llac d'iteracions
c
      conv=2.0d0*toler
      iiter=0
      do while(conv.gt.toler. and .iiter.lt.niter)
      iiter=iiter+1
c
      dosn=0.0d0
      dosd=0.0d0
c
      do is=2,ns-1
        do it=2,nt-1

```

```

c
c  Primeres derivades
c
      dxds=(xc(is+1,it)-xc(is-1,it))/(2.0d0*hs)
      dxdt=(xc(is,it+1)-xc(is,it-1))/(2.0d0*ht)
      dyds=(yc(is+1,it)-yc(is-1,it))/(2.0d0*hs)
      dydt=(yc(is,it+1)-yc(is,it-1))/(2.0d0*ht)
c
c  Coeficients alfa, beta, gamma i jacobia
c
      al=dxdt*dxdt+dydt*dydt
      be=dxds*dxdt+dyds*dydt
      ga=dxds*dxds+dyds*dyds
      cj=dxds*dydt-dxdt*dyds
c
c  Afegeix difusio artificial
c
      ves=-cj*cj*pf(is,it)
      vet=-cj*cj*qf(is,it)
      venor=dsqrt(ves*ves+vet*vet)
      if(venor.gt.1.0e-8) then
        difco=al*ves*ves-2.0d0*be*ves*vet+ga*vet*vet
        difco=difco/(venor*venor)
        if(difco.gt.1.0e-8) then
          pecle=venor*hmax/(2.0d0*difco)
          upw=pecle/3.d0
          if(upw.gt.1.) upw=1.0d0
        else
          upw=1.0d0
        endif
        al=al+upw*hmax*ves*ves/(2.0d0*venor)
        be=be-upw*hmax*ves*vet/(2.0d0*venor)
        ga=ga+upw*hmax*vet*vet/(2.0d0*venor)
      endif
c
c  Segones derivades
c
      dxdss=(xc(is+1,it)-2.0d0*xc(is,it)+xc(is-1,it))/(hs*hs)
      dxdst=(xc(is+1,it+1)-xc(is-1,it+1)-xc(is+1,it-1)
             +xc(is-1,it-1))/(4.0d0*hs*ht)
      dxdttt=(xc(is,it+1)-2.0d0*xc(is,it)+xc(is,it-1))/(ht*ht)

```

```

dydss=(yc(is+1,it)-2.0d0*yc(is,it)+yc(is-1,it))/(hs*hs)
dydst=(yc(is+1,it+1)-yc(is-1,it+1)-yc(is+1,it-1)
      +yc(is-1,it-1))/(4.0d0*hs*ht)
dydtt=(yc(is,it+1)-2.0d0*yc(is,it)+yc(is,it-1))/(ht*ht)
c
c  Calcul del residu
c
      resx=al*dxds-2.0d0*be*dxdst+ga*dxdt
      +cj*cj*pf(is,it)*dxds+cj*cj*qf(is,it)*dxdt
      resy=al*dydss-2.0d0*be*dydst+ga*dydtt
      +cj*cj*pf(is,it)*dyds+cj*cj*qf(is,it)*dydt
c
c  Calcul del pas de temps
c
      vap1=0.5d0*(al+ga+dsqrt((al-ga)*(al-ga)+4.0d0*be*be))
      delpro=0.5d0*hmin*hmin/vap1
      deltt=facto*delpro
c
c  Actualitzacio i parametre de convergencia
c
      xn=xc(is,it)+deltt*resx
      yn=yc(is,it)+deltt*resy
      difx=xn-xc(is,it)
      dify=yn-yc(is,it)
      dosd=dosd+difx*difx+dify*dify
      dosn=dosn+xn*xn+yn*yn
      xc(is,it)=xn
      yc(is,it)=yn
c
      enddo
enddo
c
      conv=dsqrt(dosd/dosn)
      if(mod(iiter,100).eq.0)
        write(6,*) 'iiter =',iiter, ' conv =', conv
c
      enddo
c
      if(iiter.gt.niter. or .conv.gt.toler) then
        write(6,*) 'No ha convergit !'
        stop
      endif
c
      return
end

```

## Referències

- [1] G. Bugada. *Utilización de técnicas de estimación de error y generación automática de mallas en procesos de optimización estructural*. Tesi Doctoral, U.P.C. (1990)
- [2] G.F. Carey i J.T. Oden. *Finite Elements: Fluid Mechanics*. The Texas Finite Element Series, vol. VI (Prentice Hall, 1986)
- [3] I. Christie, D.F. Griffiths, A.R. Mitchell i O.C. Zienkiewicz. Finite element methods for second order differential equations with significant first derivatives. *Int. J. Num. Met. in Engng*, vol. 10, (1976) 1389–1396
- [4] R. Codina. *Dues formulacions numèriques per al problema de flux incompressible*. Tesina d'Especialitat, U.P.C. (1989)
- [5] N.D. Halsey. Conformal mapping as an aid in grid generation for complex 3-dimensional configurations. *AIAA*. (1986)
- [6] T.J.R. Hughes i A. Brooks. A multi-dimensional upwind scheme with no crosswind diffusion, a: *FEM for convection dominated flows*, T.J.R. Hughes (ed.) ASME, Nova York (1979).
- [7] C. Johnson, U. Nävert i J. Pitkaranta. Finite element methods for linear hyperbolic equations *Comp. Meth. in Appl. Mech. and Engng.*, vol. 45 (1984) 285–312.
- [8] T. Meis i U. Marcowitz. *Numerical Solution of Partial Differential Equations*. (Springer-Verlag, 1981).
- [9] G. Moreti. Grid Generation Using Classical Techniques. *NASA Conference Publication 2116, Numerical Grid Generation Techniques* (1980)
- [10] R.E. Smith. Algebraic Grid Generation, a: *Numerical Grid Generation*, Ed. J.F. Thompson (North-Holland, 1982)
- [11] R.L. Sorenson i J.L. Steger. Automatic mesh point clustering near a boundary in grid generation with elliptic partial differential equations. *J. Comp. Phys.*, vol. 33 (1979) 405–501
- [12] J.F. Thompson, F.C. Thames i C.W. Mastin. Automatic numerical grid generation of body-fitted curvilinear coordinate system of field containing a number of arbitrary 2-dimensional bodies. *J. Comp. Phys.*, vol. 15 (1974) 299–319
- [13] N.P. Weatherill. Mesh Generation in C.F.D. *Von Karman Lecture Series, IV: Computational Fluid Dynamics* (March 1989)

## ÍNDIX DE FIGURES

**Figura 1.** Representació de les funcions  $Cr = \frac{Pe}{1+\bar{\alpha}Pe}$  i  $Cr = \bar{\alpha} + \frac{1}{Pe}$ , amb  $\bar{\alpha}$  donada per (3.14).

**Figura 2.** Representació de les funcions  $Cr = Pe$  i  $Cr = \frac{1}{Pe}$ .

**Figura 3.** Malla de l'exemple 1 concentrant elements en un punt.

**Figura 4.** Velocitats de convergència dels mètodes tipus Jacobi i tipus Gauss-Seidel.

**Figura 5.** Velocitats de convergència dels mètodes tipus Gauss-Seidel amb pas de temps global i local.

**Figura 6.** Malla de l'exemple 1 concentrant elements en una línia.

**Figura 7.** Malla de l'exemple 1 concentrant elements en una zona.

**Figura 8.** Malla de l'exemple 2 sense termes de font.

**Figura 9.** Detall de la cantonada de la malla de la Fig. 8.

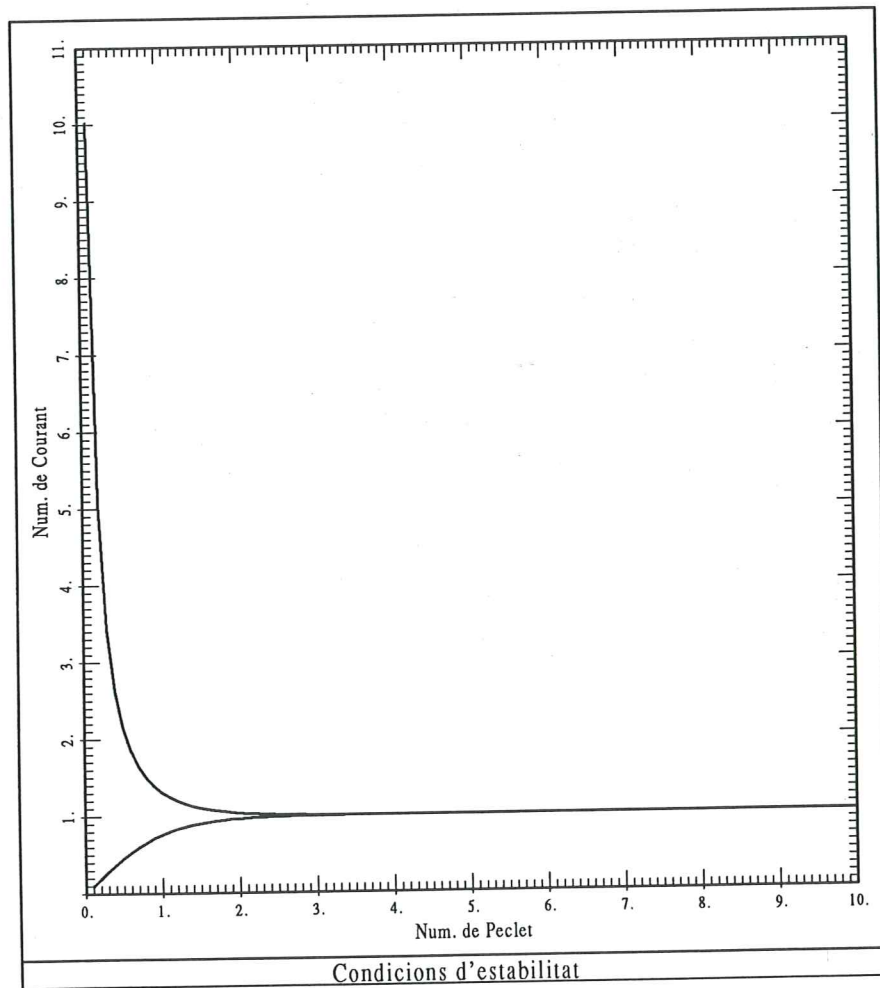
**Figura 10.** Malla de l'exemple 2 concentrant elements a la corba que descriu el graó.

**Figura 11.** Malla de l'exemple 2 concentrant elements a la zona que descriu el graó.

**Figura 12.** Detall de la cantonada de la malla de la Fig. 11.

**Figura 13.** Malla de l'exemple 3 sense termes de font.

**Figura 14.** Malla de l'exemple 3 concentrant elements al contorn inferior.



**Figura 1.** Representació de les funcions  $Cr = \frac{Pe}{1+\bar{\alpha}Pe}$  i  $Cr = \bar{\alpha} + \frac{1}{Pe}$ , amb  $\bar{\alpha}$  donada per (3.14).

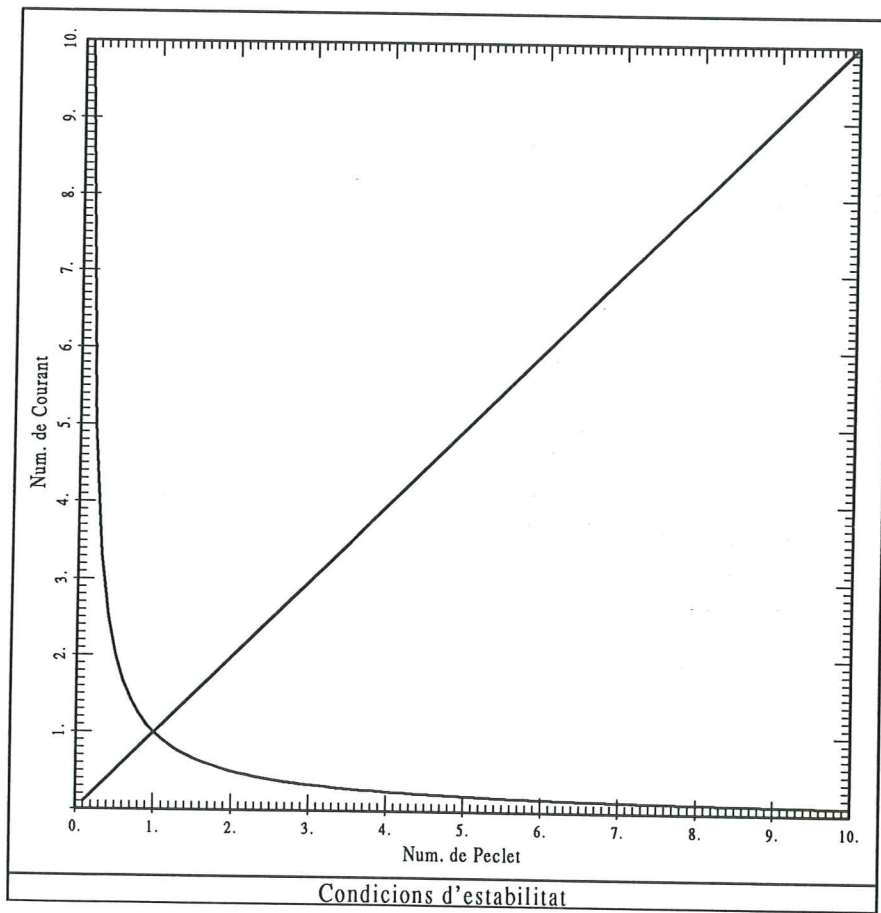
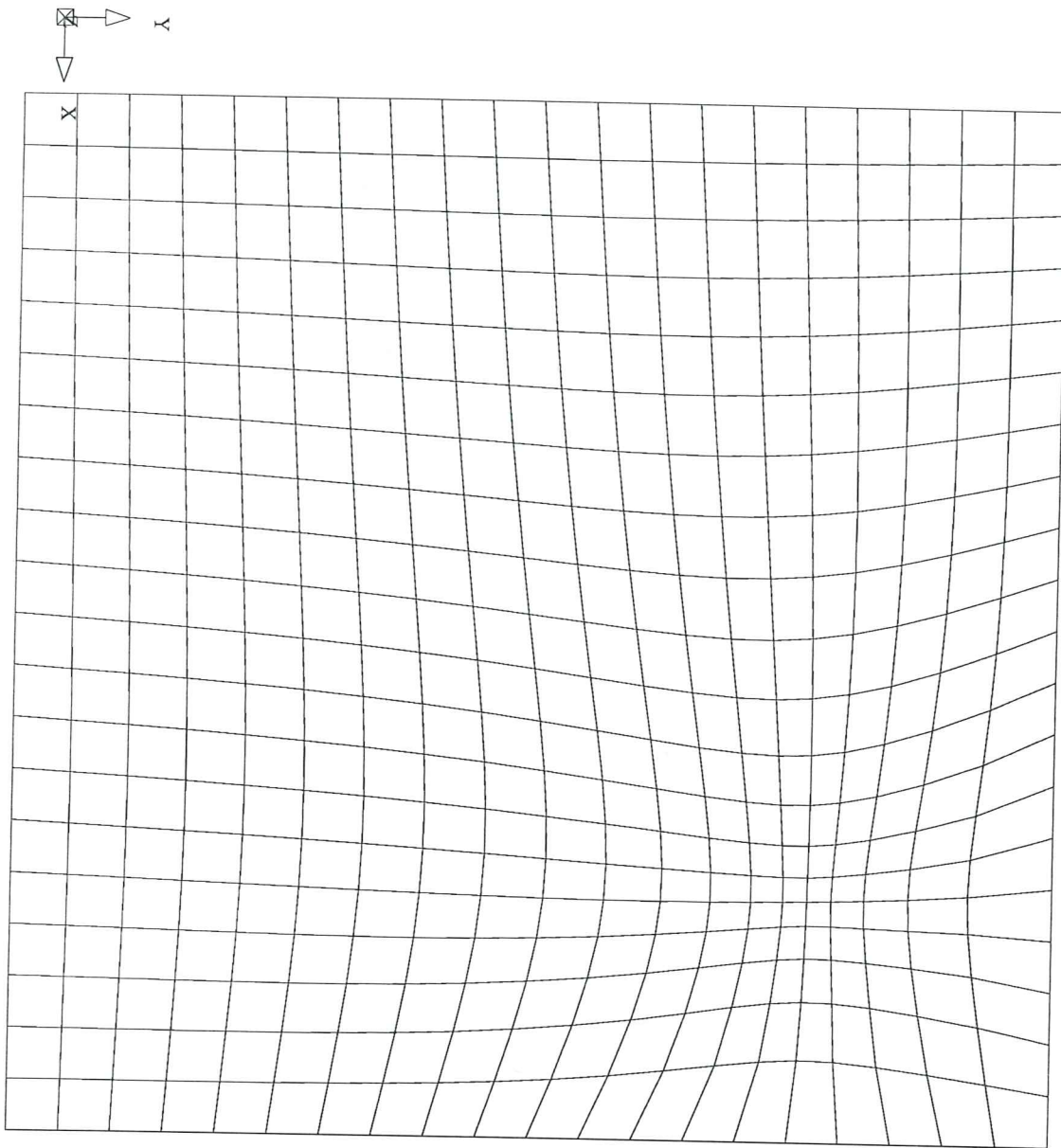


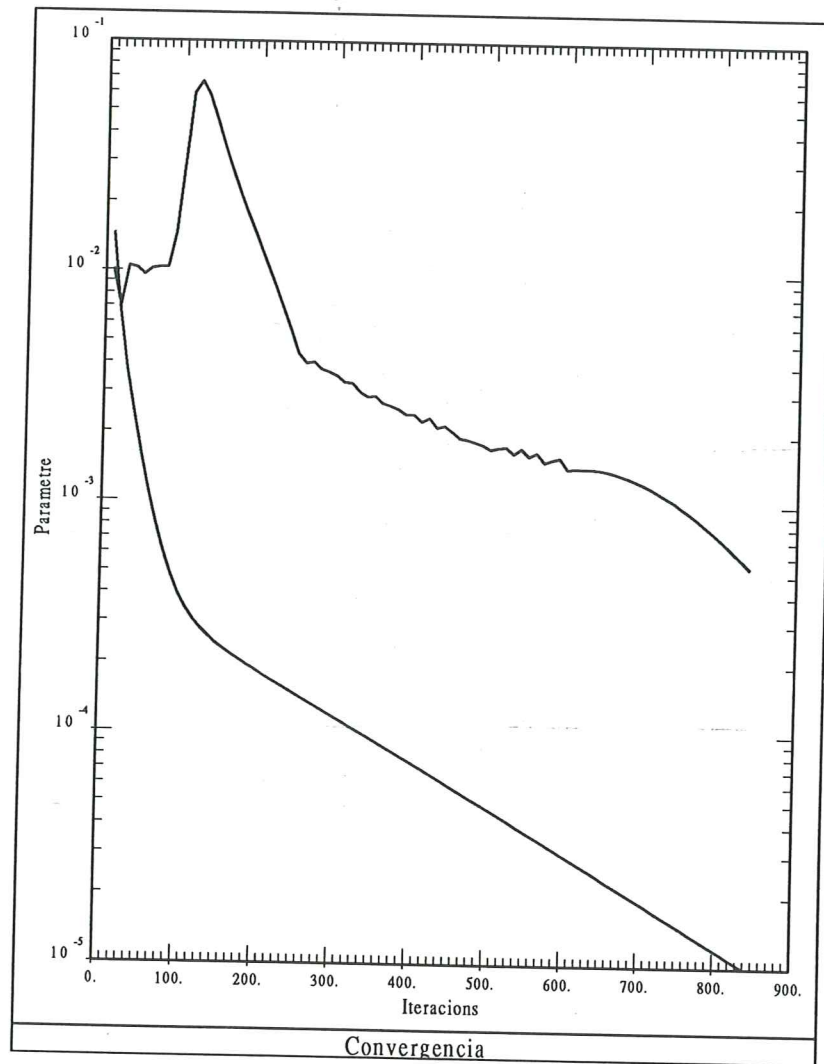
Figura 2. Representació de les funcions  $Cr = Pe$  i  $Cr = \frac{1}{Pe}$ .



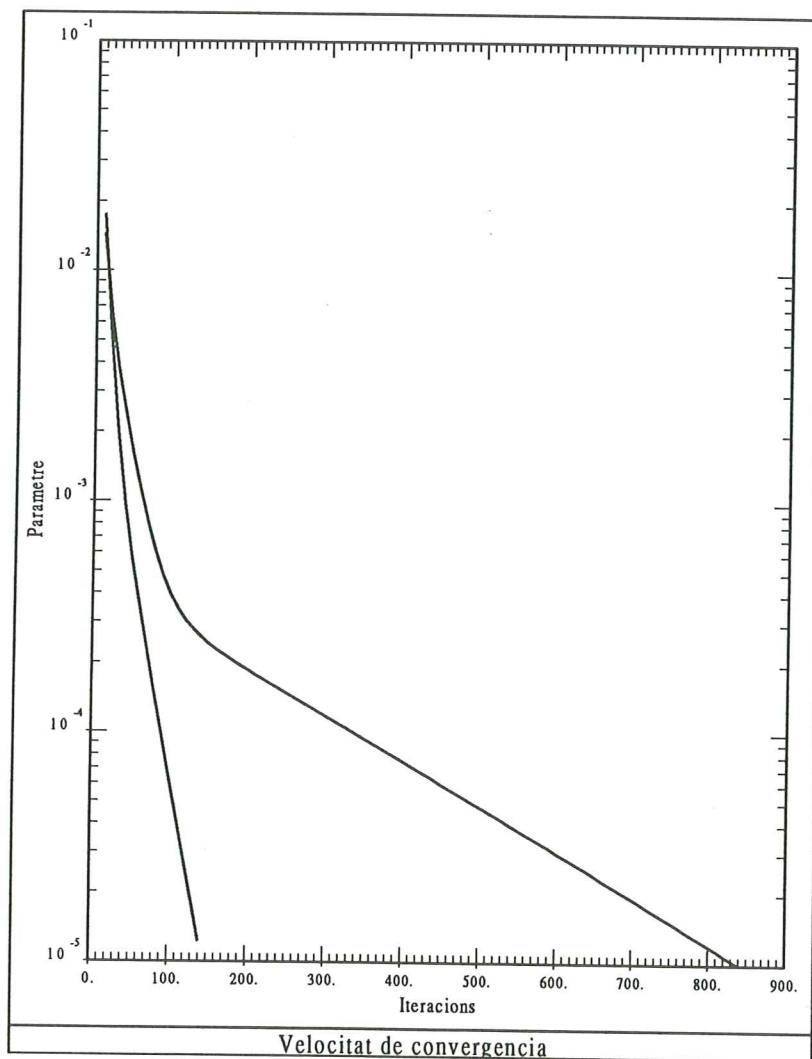


Concentracio en un punt

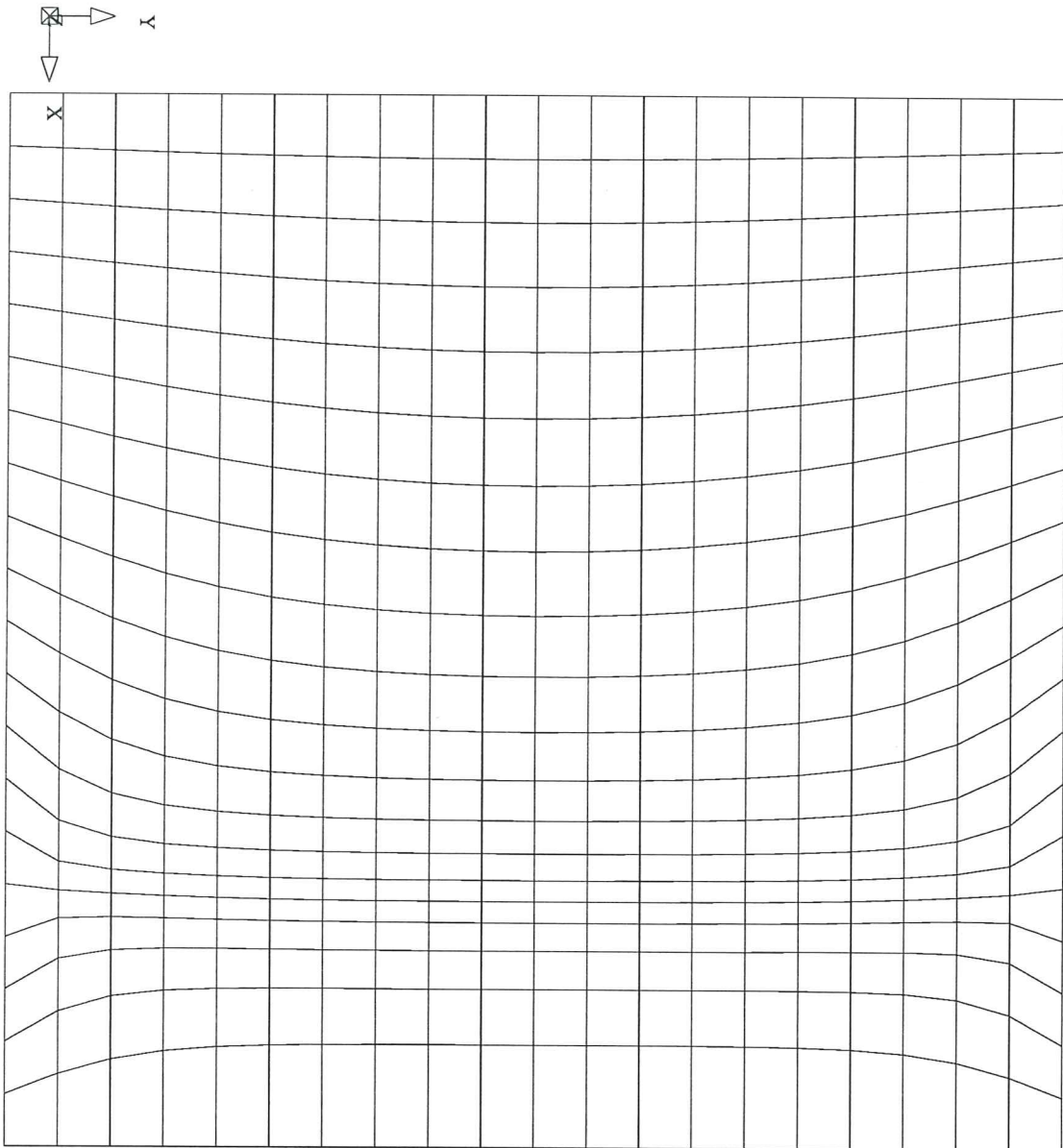
**Figura 3.** Malla de l'exemple 1 concentrant elements en un punt.



**Figura 4.** Velocitats de convergència dels mètodes tipus Jacobi i tipus Gauss-Seidel.

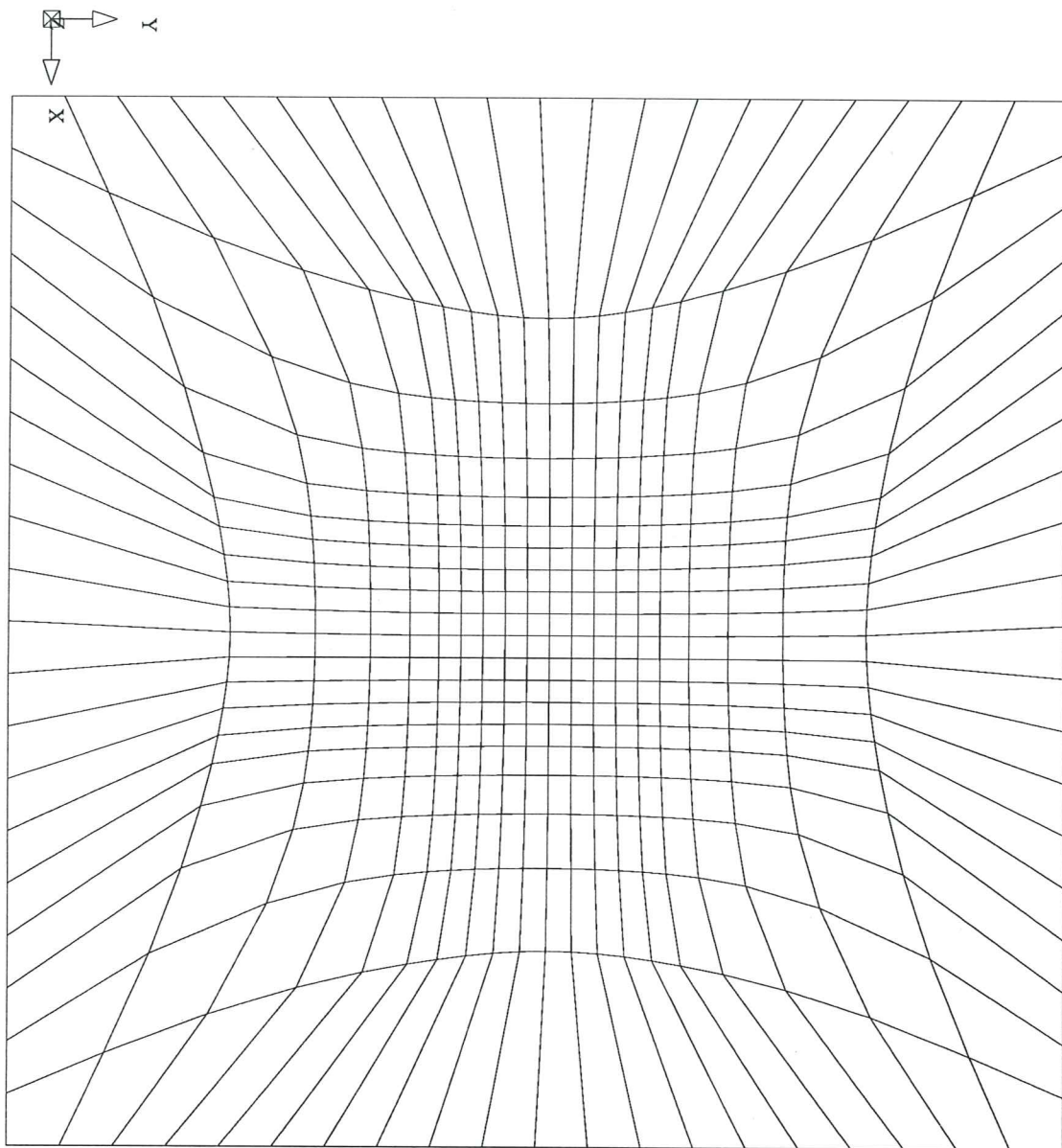


**Figura 5.** Velocitats de convergència dels mètodes tipus Gauss-Seidel amb pas de temps global i local.



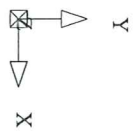
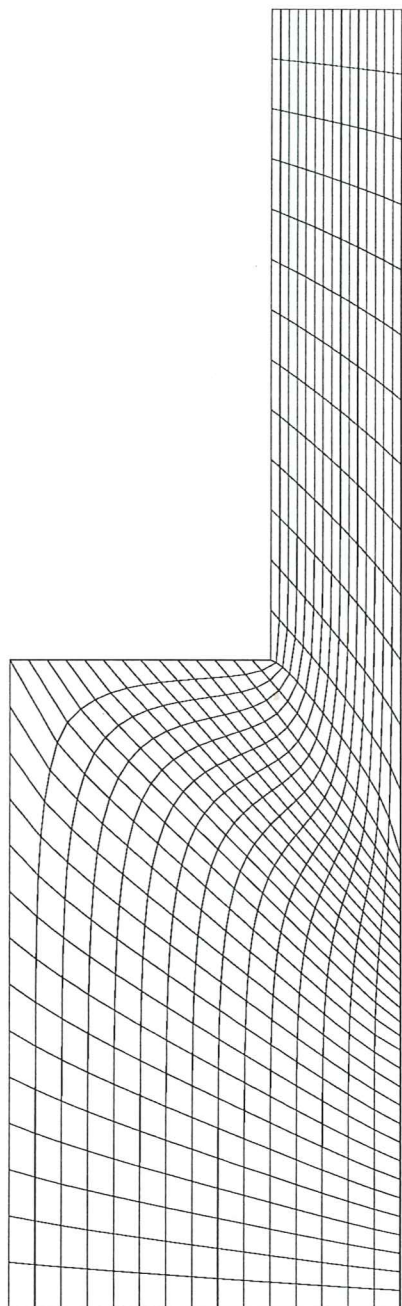
Concentracio en una línia

Figura 6. Malla de l'exemple 1 concentrant elements en una línia.



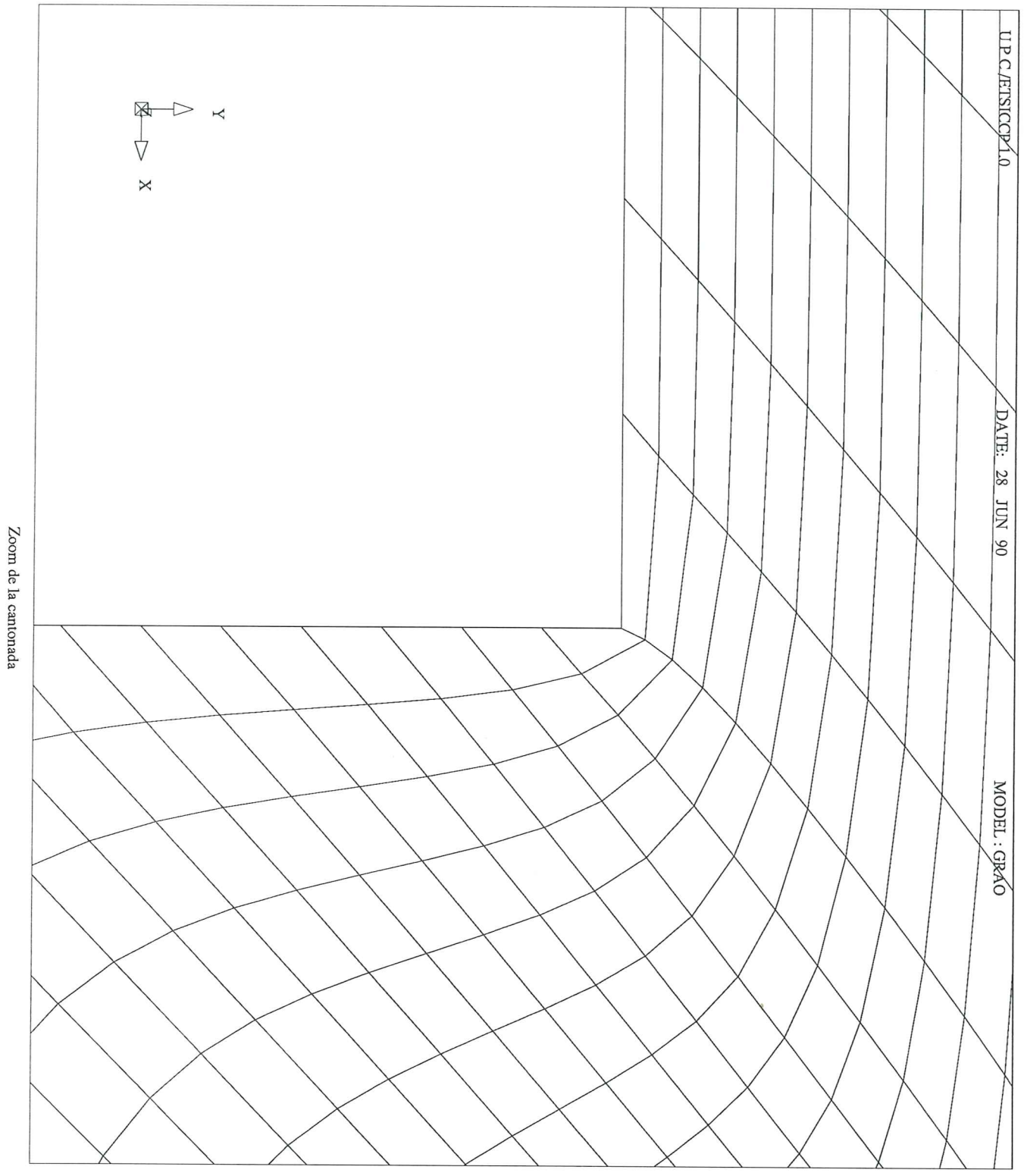
Concentracio a la zona central

Figura 7. Malla de l'exemple 1 concentrant elements en una zona.

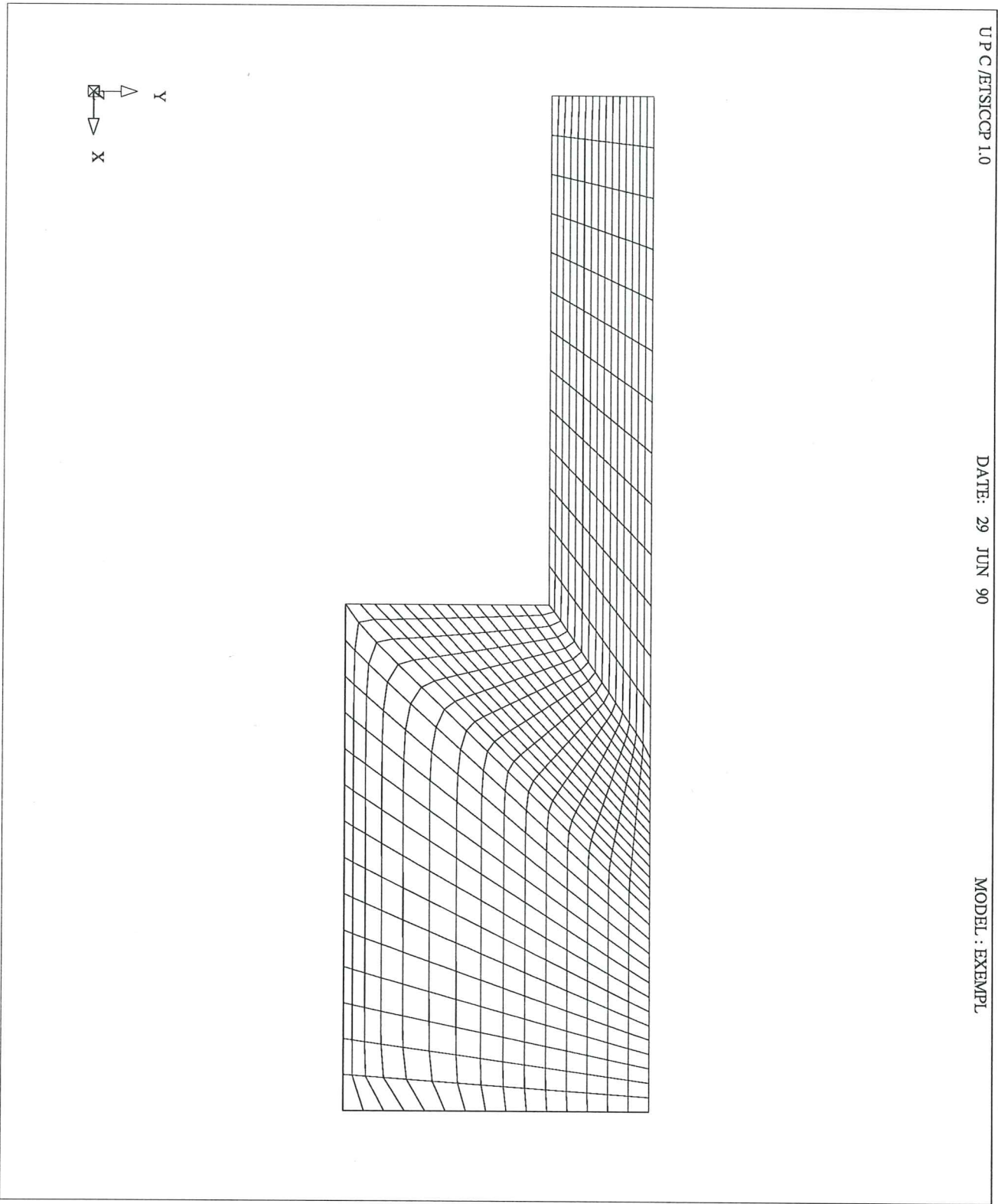


Malla generada en un grao

Figura 8. Malla de l'exemple 2 sense termes de font.



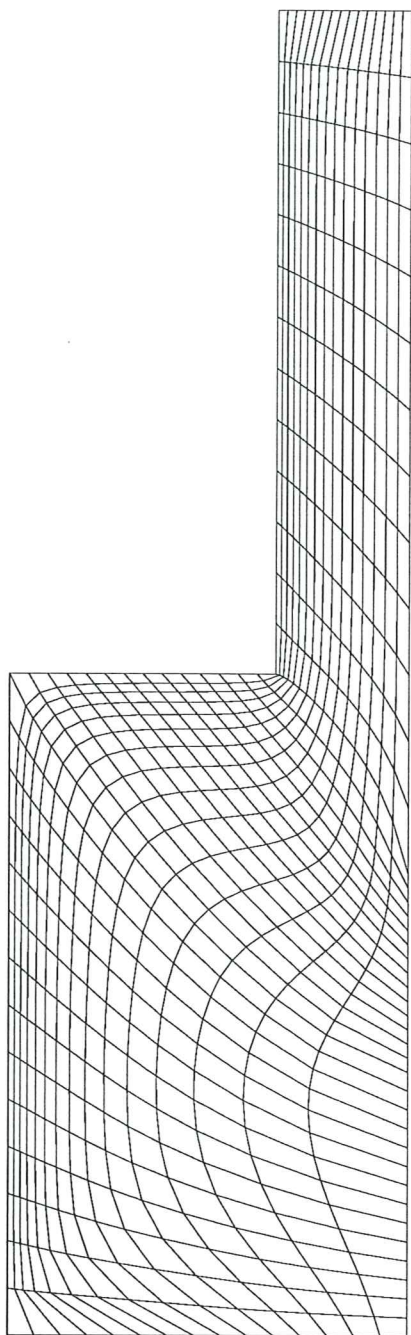
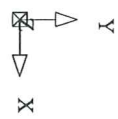
**Figura 9.** Detall de la cantonada de la malla de la Fig. 8.



Concentracio en una linia

Figura 10. Malla de l'exemple 2 concentrant elements a la corba que descriu el graó.





Malla generada en un grao

Figura 11. Malla de l'exemple 2 concentrant elements a la zona que descriu el graó.

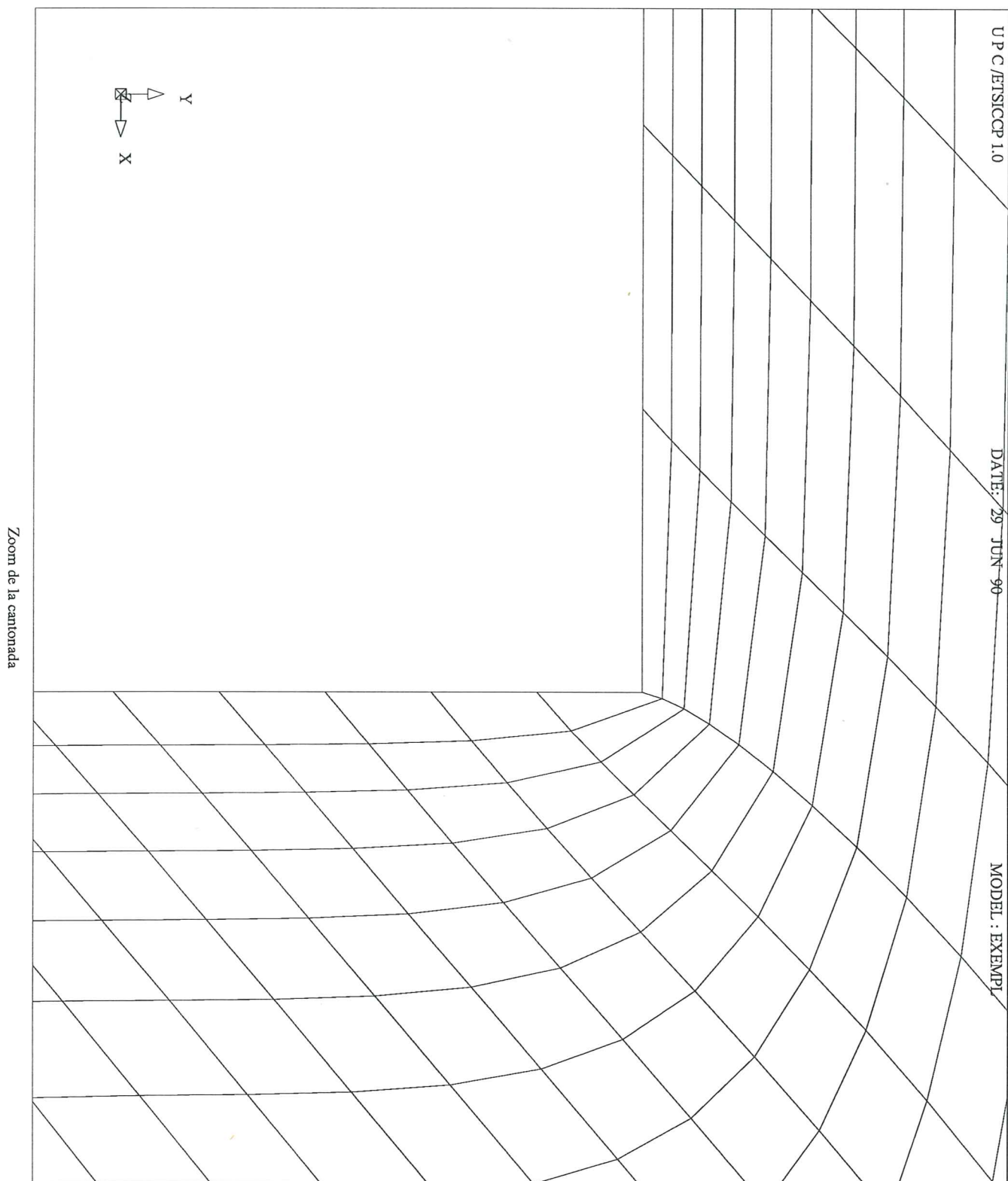
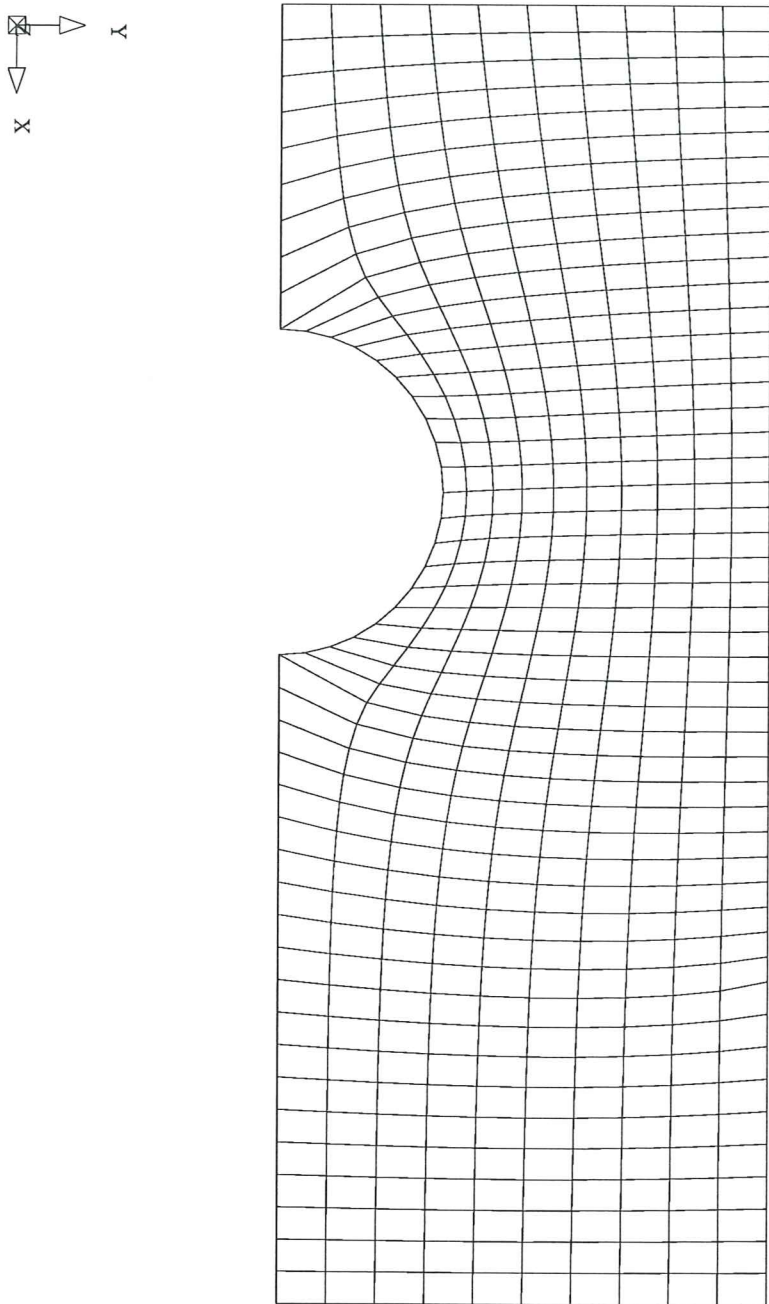
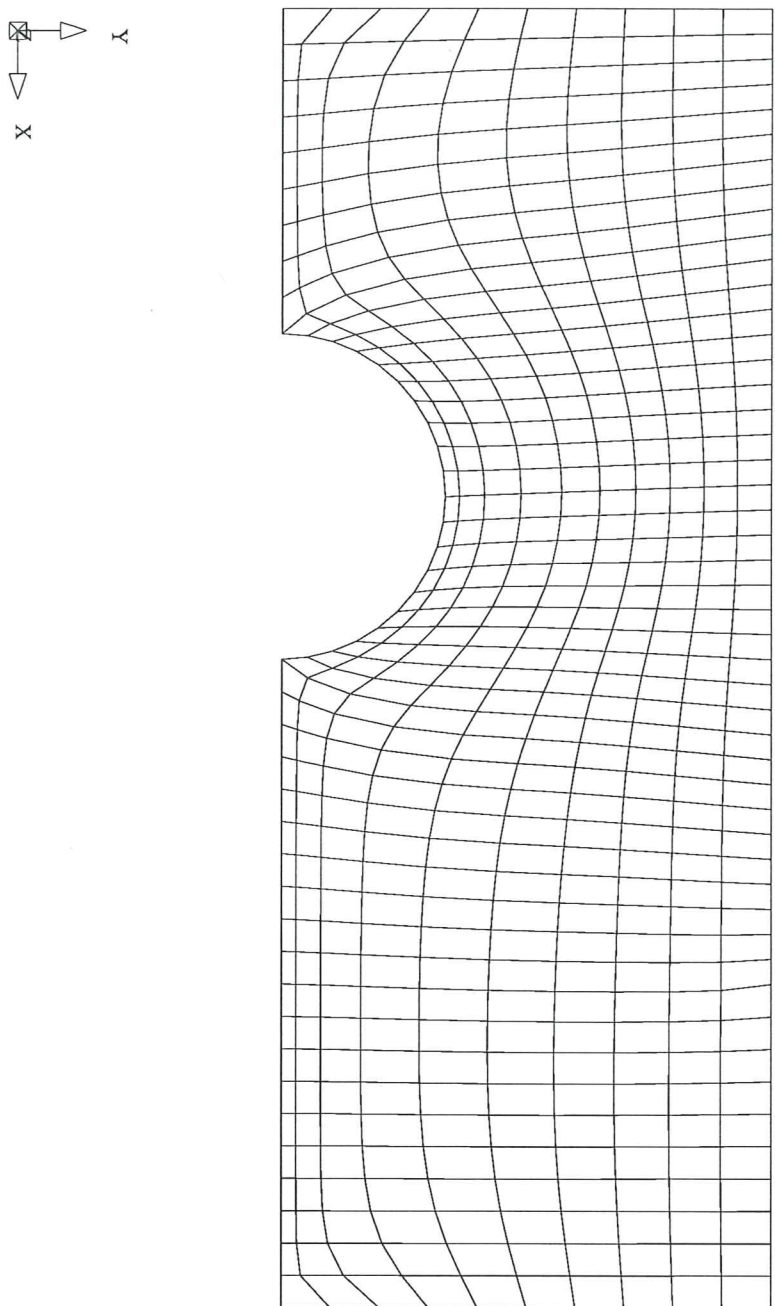


Figura 12. Detall de la cantonada de la malla de la Fig. 11.



cilindre

Figura 13. Malla de l'exemple 3 sense termes de font.



Malla al volant d'un cilindre

Figura 14. Malla de l'exemple 3 concentrant elements al contorn inferior.