

## Modelo para el análisis de miembros estructurales compuestos con deslizamiento relativo

José Enrique Blanco, David Murià-Vila y José Alberto Escobar S.

Instituto de Ingeniería, UNAM  
Coordinación de Estructuras y Materiales  
Ciudad Universitaria, Coyoacán 04510, México D.F.  
Tel.: 55-56-22 34 71; Fax: 55-56-22 34 68  
e-mail: jblb@pumas.iingen.unam.mx  
e-mail: dmv@pumas.iingen.unam.mx  
e-mail: jess@pumas.iingen.unam.mx

### Resumen

En este trabajo se estudian miembros estructurales compuestos en los que pueden existir deslizamientos relativos entre las partes que los forman. Comúnmente, para calcular las fuerzas en los elementos componentes, se acepta como hipótesis de análisis la adherencia perfecta entre los distintos materiales, sin embargo, esto puede originar errores importantes en varios casos y conducir a un diseño inadecuado del miembro. Para evaluar este problema se han desarrollado modelos de fibras viga-columna basados en el método de las diferencias finitas que permiten considerar el deslizamiento entre elementos. Sin embargo, estos modelos emplean procedimientos numéricos que parten de un extremo articulado en el miembro y requieren localizar una sección donde los deslizamientos en la interfaz sean nulos, lo cual limita las condiciones de frontera y estados de carga que se pueden considerar. Además, se producen complicaciones numéricas importantes cuando se incluyen más de dos planos de deslizamientos, incrementando el costo computacional. Por esta razón se desarrolla y calibra un nuevo modelo que resuelve estas limitaciones. Los resultados obtenidos muestran que los miembros compuestos, en donde ocurran deslizamientos relativos entre sus elementos, pueden sufrir degradación de resistencia y rigidez significativa respecto a la respuesta de elementos con adherencia perfecta.

**Palabras clave:** miembros compuestos, deslizamiento relativo, comportamiento no lineal, diferencias finitas.

### ANALYSIS MODEL OF COMPOSITE STRUCTURAL MEMBERS WITH BOND SLIP

### Summary

Structural composite members, in which bond slip at the interface among its components can occur, are studied. The forces in the composite members are usually calculated assuming perfect adherence among the different materials. Nevertheless, with this assumption, important mistakes may arise in several cases and lead to an inappropriate design of the members. In order to study this problem, several theoretical fibre beam-column models, based on the finite difference method where the bond slip may be taken into account, have been developed. These models use numerical methods, they start from a pinned end of the member and require locating a section where the interface slip is zero which is a strong limitation on the boundary conditions and load states to be considered. In addition, if more than two slip layers are considered, numerical complications arise and the computational cost is increased. By these reasons, a new model that solves these limitations is developed and calibrated. The results obtained show that the composite members in which relative slip among their elements could occur, significant stiffness and strength degradation in the composite elements may arise.

**Keywords:** composite members, relative slip, non-linear behaviour, finite difference.

## INTRODUCCIÓN

Existe una gran variedad de materiales de construcción, cada uno tiene las ventajas e inconvenientes, que los hacen más idóneos para la ejecución de una obra determinada. Sin embargo, en muchos casos resulta conveniente combinar distintos materiales, buscando aprovechar las ventajas de cada uno y minimizar las limitaciones de éstos por separado. De esta manera se obtienen materiales con mejores propiedades y de ahí que haya múltiples materiales compuestos. Una de las combinaciones más empleadas es la de acero y concreto que se analiza en el presente trabajo.

Para lograr un comportamiento óptimo en los miembros mixtos de concreto y acero es necesario comprender los mecanismos que rigen el comportamiento en la interfaz entre éstos. El desarrollo de deslizamientos relativos en la interfaz puede disminuir significativamente el trabajo de conjunto. Las superficies potenciales de deslizamiento pueden aparecer entre materiales distintos o en zonas del miembro donde existan juntas constructivas debido a la secuencia de construcción empleada.

Uno de los casos más estudiados es una viga metálica con una losa de concreto<sup>10</sup>. Su resistencia varía notablemente con las características de la conexión en la interfaz entre ambos elementos, lo cual se ha plasmado inclusive en los códigos de diseño de distintos países<sup>9</sup>. Para llegar a esto se desarrollaron investigaciones teóricas y experimentales<sup>10</sup>.

Los modelos teóricos se diferencian en cuanto a su grado de complejidad y aproximación. Como en todos los campos del análisis estructural, existe el debate de cuál es el mínimo grado de refinamiento necesario para representar los principales aspectos del comportamiento del fenómeno. En el caso del estudio de miembros de materiales compuestos con planos potenciales de deslizamiento existen modelos muy refinados de elementos finitos<sup>2</sup>, en los cuales se divide el miembro en elementos tridimensionales o planos, para realizar la integración de las deformaciones y los esfuerzos del material en el volumen del miembro y obtener su respuesta ante una acción externa. Estos modelos se pueden emplear en una gran variedad de geometrías e incluir distintas fuentes de comportamiento no lineal. Sin embargo, su desventaja son los grandes recursos de cómputo que requieren. En el análisis de miembros viga-columna este proceso se puede reducir notablemente integrando las propiedades del material en secciones transversales escogidas a lo largo del miembro<sup>14</sup>. El proceso de integración se realiza con modelos de fibras y la respuesta del miembro se calcula mediante el método de los elementos finitos<sup>17</sup>. Este modelo para el miembro viga-columna se conoce en la literatura como modelo de fibra viga-columna<sup>14</sup> (FVC).

La aplicación de modelo FVC al estudio de miembros con deslizamientos relativos se complica debido a que la respuesta de las secciones transversales depende de la respuesta de la interfaz. Para considerar analíticamente las características de la interfaz de deslizamiento se han desarrollado dos procedimientos. Uno basado en el método del elemento finito, en donde se proponen funciones de forma para el flujo de fuerzas, el deslizamiento o ambos a lo largo de la interfaz<sup>12</sup>. El otro procedimiento plantea las ecuaciones diferenciales que rigen el comportamiento de la interfaz entre los elementos componentes de un miembro con diferencias finitas y reduce el problema a un sistema de ecuaciones lineales<sup>5,6,10</sup>.

El modelo FVC combinado con la función de forma en la interfaz permite representar la degradación de resistencia y rigidez en la interfaz y en las secciones. Sin embargo, su campo de aplicación se ha limitado al análisis de estructuras de barras, con una superficie de deslizamiento cuando los elementos componentes se encuentran sometidos a efectos combinados de carga axial y momento flexionante. Para el caso de varias superficies de deslizamiento, sólo un elemento componente puede estar en flexo-tensión o flexo-compresión<sup>1</sup>, por ejemplo, columnas de concreto armado con posibilidad de deslizamiento relativo entre las barras de acero y el concreto<sup>15</sup>. En este caso, las barras se encuentran sometidas a fuerza axial solamente. Por otro lado, los modelos FVC que emplean el método de las diferencias finitas se han aplicado al estudio de miembros con dos superficies de deslizamiento<sup>6</sup>,

pero los métodos numéricos utilizados dificultan analizar miembros con más de dos superficies de deslizamiento y restringen el análisis para miembros estructurales con un extremo articulado.

Ninguno de los modelos FVC propuestos en la literatura permiten estudiar el comportamiento de miembros más complejos, como, por ejemplo, una columna sometida a flexo-compresión o flexo-tensión con varias superficies de deslizamiento. Esta situación impide analizar miembros rehabilitados con elementos metálicos, como ángulos en las esquinas de la sección transversal o perfiles canales en sus lados u otros esquemas de estructuras compuestas<sup>10</sup>. Para superar esta limitación se decidió emplear los modelos FVC combinados con diferencias finitas, puesto que sus limitaciones se deben a los procedimientos numéricos, mientras que los que emplean funciones de forma en la interfaz requieren de una reformulación para ampliar su campo de trabajo. Por esta razón, en este trabajo se desarrolla un nuevo modelo FVC de diferencias finitas para el análisis de miembros estructurales compuestos que admite emplear los procedimientos numéricos desarrollados para los modelos FVC<sup>14</sup>, con lo que se pretende lograr:

- estudiar distintas condiciones de frontera y estados de carga en el miembro y evitar las limitaciones de modelos existentes en la literatura<sup>5,6</sup>;
- analizar miembros estructurales con varias superficies de deslizamiento donde todos sus elementos componentes puedan estar sometidos a efectos combinados de carga axial y flexión;
- reducir el costo computacional, ya que los procedimientos existentes para modelos FVC de diferencias finitas<sup>5,6</sup> requieren un proceso iterativo por cada interfaz del miembro, lo cual incrementa notablemente el esfuerzo de cómputo;
- plantear la solución de manera incremental para aplicar el modelo FVC con diferencias finitas al estudio de miembros sometidos a carga cíclica.

## MIEMBRO COMPUESTO VIGA-COLUMNA

Por simplicidad en la explicación del modelo se estudia un miembro lineal con un extremo articulado y otro simplemente apoyado. Las acciones son una carga  $Q$  y una fuerza axial  $N$  en el extremo simplemente apoyado (Figura 1).

La carga  $Q$  es la magnitud de la carga aplicada. Ésta puede ser el valor de una carga distribuida en una porción o en toda la longitud del miembro o la magnitud de una o varias cargas aplicadas en el mismo.

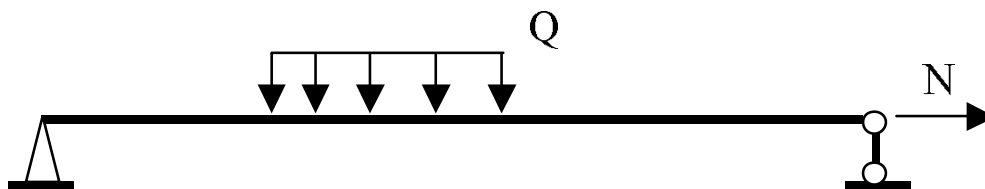
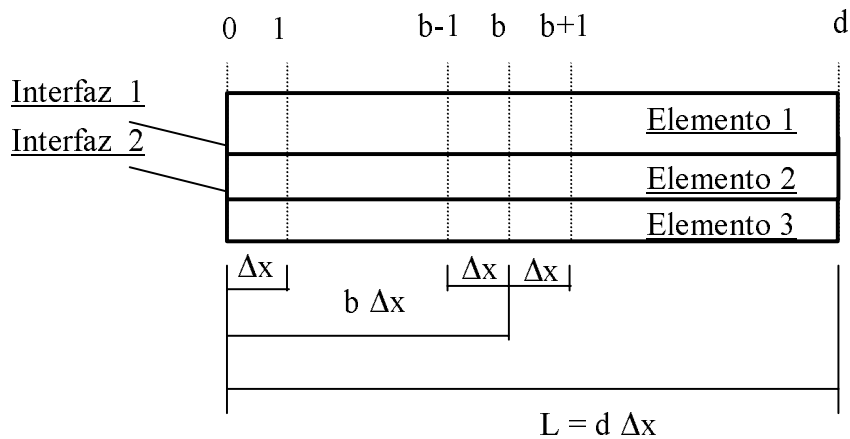


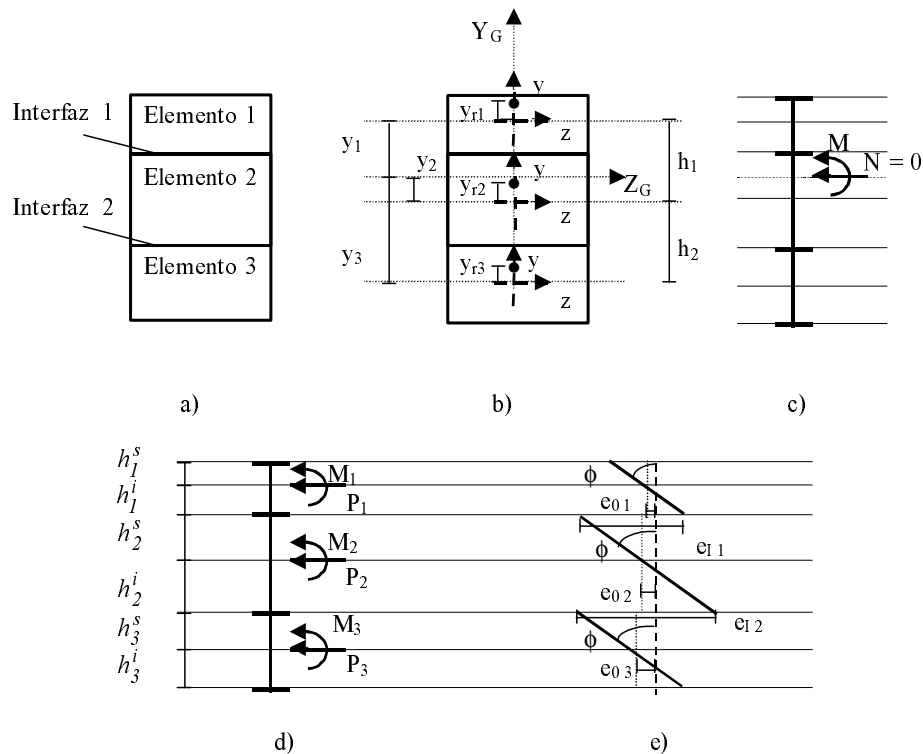
Figura 1. Miembro viga-columna

La respuesta de una viga o columna compuesta de  $n$  elementos (Figura 2) se obtiene integrando numéricamente la respuesta de sus secciones transversales. Para realizar esta integración, la viga se divide en un número  $d$  de secciones. La cantidad de éstas depende de las condiciones particulares de cada problema y del método de integración numérica que se emplee para obtener la respuesta de la viga. La separación entre las secciones es constante a lo largo del miembro e igual a  $\Delta x$ .



**Figura 2.** Secciones consideradas de una viga compuesta por tres elementos y dos interfaces

La respuesta de cualquier sección transversal  $b$  de la viga (Figura 2) difiere notablemente del comportamiento de una sección transversal totalmente acoplada. Como se muestra posteriormente, su comportamiento depende de las fuerzas internas en la misma y se relaciona con la respuesta en otras secciones a través de la interfaz entre ellas.



**Figura 3.** Características de la sección transversal de una viga de tres elementos y dos interfaces: a) división en elementos, b) sistemas de referencias, c) acción en la sección, d) fuerzas internas en los elementos, e) estado deformado

Las principales características del comportamiento de la sección transversal  $b$  se muestran en la Figura 3. Se ejemplifica una sección compuesta por tres elementos y dos interfaces,

aunque el procedimiento que se expone es general y permite estudiar secciones con  $n$  elementos y  $m$  interfaces.

Al someter la sección  $b$  a la acción de un momento flexionante y una carga axial (Figura 3c) se produce un estado deformado caracterizado por el deslizamiento en la interfaz. Producto de estas deformaciones aparecen fuerzas normales y momentos en cada elemento (Figura 3d) cuya suma equilibra al momento actuante en la sección (Figura 3c). El análisis de la sección transversal consiste en determinar el estado deformado a partir de las acciones en la viga. El estado deformado en una sección se define con las deformaciones axiales y la curvatura (Figura 3e). La curvatura en se considera igual en todos los elementos componentes, debido a que se desprecia la separación entre los mismos.

En la sección  $b$  (Figura 2) se producen los incrementos de fuerzas internas

$$\Delta M_b = a_b \Delta Q \quad (1)$$

$$\Delta N_b = \Delta N \quad (2)$$

donde  $a_b$  es el momento producido en la sección  $b$  por una carga  $Q$  unitaria. El símbolo  $\Delta$  indica que se trata de un incremento y se usa en este trabajo en todas las variables en las cuales se esté haciendo referencia a un incremento de la misma.

De la Figura 3d se puede plantear la relación entre las fuerzas y momentos internos de los elementos y de la sección transversal (Figura 3c) mediante las condiciones de equilibrio

$$\Delta M = \sum_{i=1}^n (\Delta M_i + \Delta P_i y_i) \quad (3)$$

$$\Delta N = \sum_{i=1}^n \Delta P_i = \Delta P_1 + \Delta P_2 + \Delta P_3 = 0 \quad (4)$$

donde  $\Delta M$  es el momento flexionante en la sección transversal,  $\Delta M_i$  y  $\Delta P_i$  son el momento flexionante y la fuerza normal en el  $i$ -ésimo elemento componente, respectivamente;  $y_i$  es la distancia del origen del sistema de referencia local del elemento componente  $i$  al origen del sistema de referencia global (Figura 3b); y  $n$  el número de elementos componentes.

Conocidas las fuerzas y momentos internos en los elementos componentes, se calculan sus deformaciones axiales ( $\Delta e_{0i}$ ) y la curvatura de la sección transversal ( $\Delta \phi$ ). Para realizar esto se deben considerar los efectos no lineales debido al comportamiento inelástico del material, los cuales se incorporan mediante el método iterativo de la referencia 14 basado en el de Newton-Raphson. En cada iteración se supone que los materiales se comportan linealmente y, por lo tanto, se debe aceptar un residuo debido al comportamiento no lineal. Partiendo de estos razonamientos, en la referencia 14 los autores plantean que el estado deformado en una sección transversal totalmente acoplada (equivalente a un elemento componente  $i$ ) se puede calcular a partir del estado de carga en una iteración  $\alpha$

$$\Delta \begin{Bmatrix} e_{0i}^\alpha \\ \phi^\alpha \end{Bmatrix} = \mathbf{F}_s^{\alpha-1} \Delta \begin{Bmatrix} P_i^\alpha \\ M_i^\alpha \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \ddot{e}_{0i}^{\alpha-1} \\ \ddot{\phi}^{\alpha-1} \end{Bmatrix} \quad (5)$$

donde  $\mathbf{F}_s^{\alpha-1}$  es la matriz de flexibilidad de la viga. Ésta se calcula a partir de la distribución del módulo de elasticidad tangente asociado al estado deformado de la iteración  $\alpha - 1$

$$\mathbf{F}_s^{\alpha-1} = \begin{bmatrix} f_{nn}^{\alpha-1} & f_{na}^{\alpha-1} \\ f_{na}^{\alpha-1} & f_{aa}^{\alpha-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_{-h_1^s}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b \, dy & \int_{-h_1^s}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b y \, dy \\ \int_{-h_1^s}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b y \, dy & \int_{-h_1^s}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b y^2 \, dy \end{bmatrix}^{-1} \quad (6)$$

$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{e}_{0i}^{\alpha-1} \\ \ddot{\phi}^{\alpha-1} \end{array} \right\}$  es el vector de residuos en la deformación axial y en la curvatura en la iteración

$\alpha - 1$  debido a los residuos en las fuerzas<sup>14</sup>  $\left\{ \begin{array}{c} \ddot{P}_i^{\alpha-1} \\ \ddot{M}_i^{\alpha-1} \end{array} \right\}$  y se expresa como

$$\left\{ \begin{array}{c} \ddot{e}_{0i}^{\alpha-1} \\ \ddot{\phi}^{\alpha-1} \end{array} \right\} = \mathbf{F}_s^{\alpha-1} \left\{ \begin{array}{c} \ddot{P}_i^{\alpha-1} \\ \ddot{M}_i^{\alpha-1} \end{array} \right\} \quad (7)$$

Definidos los principales parámetros del estado deformado, se pueden conocer la curvatura y las deformaciones en las interfaces.

Para obtener la curvatura en la sección transversal se despeja el momento flexionante en los elementos componentes de la ecuación (5) y se sustituye en la ecuación de equilibrio de momentos (3).

$$\Delta\phi_b^\alpha = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \Delta M_b^\alpha - \frac{(\mathbf{y}_b + \mathbf{y}_{rb}^{\alpha-1})^T}{\sum_{i=1}^n f_{aa_i}^{\alpha-1}} \Delta \mathbf{P}_b^\alpha + \ddot{\phi}_b^{\alpha-1} \quad (8)$$

donde  $\ddot{\phi}_b^{\alpha-1}$  es el residuo en la curvatura debido al residuo en las fuerzas

$$\ddot{\phi}_b^{\alpha-1} = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \ddot{M}_b^{\alpha-1} - \frac{(\mathbf{y}_b + \mathbf{y}_{rb}^{\alpha-1})^T}{\sum_{i=1}^n f_{aa_i}^{\alpha-1}} \ddot{\mathbf{P}}_b^{\alpha-1} \quad (9)$$

Las deformaciones centroidales en los elementos se calculan a partir de la curvatura y de las fuerzas en los elementos componentes, combinando la primera y segunda fila de la ecuación (5). Se despeja en la segunda fila el momento actuante en el elemento componente y el resultado se incorpora en la primera fila de la ecuación (5). De esta manera se obtiene la deformación centroidal de un elemento componente. Si esta ecuación se expresa matricialmente para todos los elementos componentes, se llega a

$$\Delta \mathbf{E}_{ob}^\alpha = \mathbf{\Omega}_b^\alpha \Delta \mathbf{P}_b^\alpha - \mathbf{y}_{rb}^\alpha \Delta \phi_b^\alpha \quad (10)$$

donde  $\Delta \mathbf{E}_{ob}^\alpha$  es el vector de deformaciones centroidales en los elementos  $e_{0i}$   $i = 1, 2, \dots, n$  y  $\mathbf{\Omega}_b^\alpha$  la matriz diagonal de flexibilidad axial. Cada término  $\Omega_{ii}$  de la diagonal representa el inverso de la rigidez axial del elemento componente  $i$

$$\Omega_{ii} = \frac{1}{\int_{-h_1^i}^{h_1^i} E_i^{\alpha-1} b dy} \quad (11)$$

Los términos del vector  $\mathbf{y}_{rb}^\alpha$ ,  $y_{ri}^{\alpha-1}$  son la distancia del centroide instantáneo (Figura 3b) correspondiente a la distribución del módulo de elasticidad tangente  $E$  en la iteración  $\alpha - 1$

$$y_{ri}^{\alpha-1} = - \frac{\int_{-h_1^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b y dy}{\int_{-h_1^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b dy} \quad (12)$$

Con las deformaciones centroidales de los elementos componentes y la curvatura de la sección transversal es posible calcular la deformación en cualquier punto de la sección. Esto incluye las deformaciones en las interfaces.

La deformación en una interfaz  $j$  de la sección  $b$  se calcula mediante la relación geométrica<sup>6</sup>

$$\Delta e_{Ij} = \Delta e_{0s} - \Delta e_{0i} - \phi h_j \quad (13)$$

donde  $s$  e  $i$  son los números del elemento superior e inferior a la interfaz  $j$ , respectivamente;  $e_{0s}$  y  $e_{0i}$  son la deformación centroidal en los elementos superior e inferior a la interfaz  $j$ ; y  $h_j$  es la distancia entre los centroides de los elementos  $s$  e  $i$ .

Aplicando esta ecuación para las  $m$  interfaces

$$\Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha = \mathbf{G} \Delta \mathbf{E}_{ob}^\alpha - \Delta \phi_b^\alpha \mathbf{h} \quad (14)$$

donde  $\Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha$  es el vector de deformaciones en la interfaz para  $j = 1, 2, \dots, m$ ;  $\mathbf{h}$  el vector de distancias  $h_j$  para  $j = 1, 2, \dots, m$ ; y  $\mathbf{G}$  una matriz geométrica con  $n$  elementos (columnas) y  $m$  interfaces (filas). Cada término  $G_{j,i}$  está asociado a una interfaz  $j$  y un elemento  $i$ . Los valores de  $G_{j,i}$  dependen de la posición relativa del elemento  $i$  respecto a la interfaz  $j$ . Si el elemento  $i$  está encima de la interfaz  $j$ ,  $G_{j,i} = 1$ . Si el elemento  $i$  está debajo de la interfaz  $j$ ,  $G_{j,i} = -1$ . Si el elemento  $i$  no tiene contacto con la interfaz  $j$ ,  $G_{j,i} = 0$ .

Las deformaciones en las  $m$  interfaces se obtienen sustituyendo la primera fila de (5) y (8) en (14)

$$\Delta \mathbf{E}_{Ib}^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha \Delta \mathbf{P}_b^\alpha - \bar{\mathbf{E}}_b^\alpha \Delta M_b^\alpha + \ddot{\mathbf{E}}_{Ib}^{\alpha-1} \quad (15)$$

donde  $\bar{\mathbf{E}}_b^\alpha$  es el vector de términos independientes y cada término  $\bar{E}_j$  está relacionado con la interfaz  $j$

$$\bar{E}_j = \frac{h_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}}} \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (16)$$

en esta ecuación  $\ddot{\mathbf{E}}_{Ib}^{\alpha-1}$  es el vector de residuo en las deformaciones en las interfaces debido a los residuos en las fuerzas

$$\ddot{\mathbf{E}}_{Ib}^{\alpha-1} = \mathbf{E}_b^\alpha \ddot{\mathbf{P}}_b^{\alpha-1} - \bar{\mathbf{E}}_b^\alpha \ddot{\mathbf{M}}_b^{\alpha-1} \quad (17)$$

donde  $\mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha$  es la matriz de flexibilidad axial con  $n$  elementos (columnas) y  $m$  interfaces (filas), en que  $EA_{j,i}$  es asociado al elemento  $i$  y a la interfaz  $j$ .

La forma de calcular los valores de  $EA_{j,i}$  depende de la posición relativa del elemento  $i$  respecto a la interfaz  $j$ .

Si el elemento  $i$  está por encima de la interfaz  $j$

$$EA_{j,i} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} + \int_{-h_i^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b dy (y_i + y_{ri}^{\alpha-1}) h_j}{\int_{-h_i^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b dy \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}}} \quad (18)$$

Si el elemento  $i$  está por debajo de la interfaz  $j$

$$EA_{j,i} = \frac{-\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} + \int_{-h_i^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b dy (y_i + y_{ri}^{\alpha-1}) h_j}{\int_{-h_i^i}^{h_1^s} E^{\alpha-1} b dy \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}}} \quad (19)$$

Si el elemento  $i$  no tiene ningún contacto con la interfaz  $j$

$$EA_{j,i} = \frac{(y_i + y_{ri}^{\alpha-1}) h_j}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}}} \quad (20)$$

Como se puede apreciar en las ecuaciones (8) y (15), el estado deformado en el miembro queda definido por las cargas axiales en los elementos y el momento actuante en la sección transversal. Es decir, que el estado deformado no puede ser determinado solamente a partir de las fuerzas internas en la sección, como ocurre en una sección acoplada, debido a que las fuerzas en los elementos componentes se desconocen.

### Comportamiento en la interfaz

Cuando se integran las deformaciones en la interfaz, se obtienen los deslizamientos a lo largo de la misma. Aplicando el método de las diferencias finitas, se calculan los deslizamientos a partir de la deformación en la interfaz con la expresión

$$\Delta \mathbf{S}_b^\alpha = \Delta \mathbf{S}_{b-1}^\alpha + \frac{\{\Delta \mathbf{E}_{I_{b-1}}^\alpha + \Delta \mathbf{E}_{I_b}^\alpha\}}{2} \Delta x \quad (21)$$

donde los vectores  $\mathbf{S}_{b-1}^\alpha$  y  $\mathbf{S}_b^\alpha$  son los deslizamientos en las interfaces en las secciones  $b-1$  y  $b$ , entre las cuales existe una distancia  $\Delta x$ . Estos deslizamientos producen una fuerza en la interfaz entre la sección  $b$  y la  $b-1$

$$\Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha = \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \Delta \mathbf{S}_{b-1}^\alpha \Delta x + \ddot{\mathbf{f}}_{b-1}^{\alpha-1} \quad (22)$$

donde  $\mathbf{k}_{b-1}^\alpha$  es la matriz de rigidez de la interfaz. Es una matriz diagonal donde cada término  $k_{j,j}$  representa la rigidez de la interfaz  $j$ ;  $\Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha$  es el vector de fuerzas en la interfaz entre la sección  $b$  y la  $b-1$ ; y  $\ddot{\mathbf{f}}_{b-1}^{\alpha-1}$  un vector de los residuos en las fuerzas en la interfaz entre ambas secciones, debido al comportamiento no lineal de la interfaz.

La ecuación (22) considera que el flujo de fuerza en la interfaz es constante e igual al valor del flujo producido en la sección  $b-1$ . Esta hipótesis ha brindado resultados adecuados cuando el mecanismo de transferencia de cortante produce un flujo de fuerza. Si la transferencia de cortante es a través de conectores se producen fuerzas concentradas, las cuales se calculan suponiendo que todos los conectores se encuentran en la sección  $b-1$ .

Si la fuerza resultante en la interfaz entre la sección 0 y la sección  $b-1$  es  $\Delta \mathbf{F}_{b-1}^\alpha$ , entonces la fuerza resultante entre la sección 0 y la sección  $b$  es

$$\Delta \mathbf{F}_b^\alpha = \Delta \mathbf{F}_{b-1}^\alpha + \Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha \quad (23)$$

### Dependencia entre la respuesta de las secciones a través de la interfaz

Para calcular la respuesta de una sección  $b$  se requiere conocer las fuerzas en los elementos  $\Delta \mathbf{P}_b^\alpha$  y el momento actuante ( $\Delta M_b^\alpha$ ) en la sección (ecuaciones (8) y (15)). Sin embargo, no es posible establecer ninguna condición en la sección transversal que permita conocer las fuerzas axiales en los elementos, dado que estas fuerzas se relacionan con las fuerzas en los elementos en la sección anterior  $\Delta \mathbf{P}_{b-1}^\alpha$  y con las resultantes de las fuerzas en la interfaz entre ambas secciones  $\Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha$  por condiciones de equilibrio de fuerza. Esta condición se puede escribir de la forma siguiente

$$\Delta \mathbf{P}_b^\alpha = \Delta \mathbf{P}_{b-1}^\alpha + \mathbf{E} \Delta \mathbf{f}_{b-1}^\alpha \quad (24)$$

donde  $\mathbf{E}$  es una matriz de equilibrio. Cada término  $E_{i,j}$  está asociado al elemento  $i$  y a la interfaz  $j$  y su valor depende de la posición relativa del elemento  $i$  respecto a la interfaz  $j$ . Si el elemento  $i$  está debajo de la interfaz  $j$ ,  $E_{i,j} = -1$ . Si el elemento  $i$  está encima de la interfaz  $j$ ,  $E_{i,j} = 1$ . Si el elemento  $i$  no tiene contacto con la interfaz  $j$ ,  $E_{i,j} = 0$ .

Las resultantes de las fuerzas en la interfaz se calculan con los deslizamientos en la sección  $b-1$  (22). Por esta razón, para determinar las fuerzas en los elementos en la sección

$b$ , se requiere conocer la respuesta en la sección  $b - 1$ . Por lo tanto, si se puede definir la respuesta de la sección en el extremo, se puede calcular la respuesta del miembro. El problema radica en que no es posible definir todos los parámetros de respuestas de esta sección. En la literatura se han propuesto procedimientos iterativos para poder fijar los valores de respuesta de la sección en el extremo<sup>6</sup>, pero estos limitan el campo de aplicación del modelo FVC con diferencias finitas restringiendo las posibles condiciones de frontera y dificultando el análisis de miembros con más de dos interfaces.

Para calcular los parámetros de respuesta de la sección inicial se propone un nuevo procedimiento que elimina las limitaciones impuestas a los modelos propuestos en la literatura. La idea se fundamenta en la relación entre la respuesta de las secciones transversales. Si es posible expresar la respuesta de una sección en función de la anterior, entonces se puede expresar la respuesta de todas las secciones en función de la respuesta de la sección del extremo. Los principales aspectos de la respuesta en la sección del extremo son el deslizamiento en la interfaz  $\Delta\mathbf{S}_0^\alpha$  y la fuerza en los elementos  $\Delta\mathbf{P}_0^\alpha$ .

Se puede demostrar<sup>3</sup> que la relación entre la respuesta en una sección  $b$  y la sección 0, para una iteración  $\alpha$ , se puede expresar de la forma siguiente

$$\Delta\mathbf{F}_b^\alpha = \mathbf{K}_b^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{C}_b^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{C}_b^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{F}}_b^{\alpha-1} \quad (25)$$

$$\Delta\mathbf{E}_{Ib}^\alpha = \mathbf{A}_b^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{D}_b^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{D}_b^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{E}}_b^{\alpha-1} \quad (26)$$

$$\Delta\mathbf{S}_b^\alpha = \mathbf{B}_b^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{R}_b^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{R}_b^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{S}}_b^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{S}}_b^{\alpha-1} \quad (27)$$

donde  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$  es un vector de fuerzas en el elemento;  $\mathbf{I}$  un vector donde todos los valores son nulos excepto el último término que es 1; y  $\mathbf{\Lambda}$  es una matriz de equilibrio de fuerzas en la sección.

Los términos  $\Lambda_{i,j}$  de la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  son 1 si  $i = j$ ; -1 si  $i = n$ ; y el resto cero.

Las matrices y vectores  $\mathbf{K}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{A}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{B}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{C}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{D}_b^\alpha$ ,  $\mathbf{R}_b^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha$ ,  $\ddot{\mathbf{F}}_b^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha$ ,  $\ddot{\mathbf{E}}_b^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_b^\alpha$  y  $\ddot{\mathbf{S}}_b^\alpha$  se calculan como se indica en el Apéndice.

El objetivo es calcular los vectores  $\Delta\mathbf{S}_0^\alpha$  y  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$ . Con estos se obtiene las respuestas en todas las secciones y a lo largo de toda la interfaz (ecuaciones 25 a 27). Para obtener estos valores se deben expresar las ecuaciones (25) y (27) para la sección  $d$  correspondiente al otro extremo del miembro.

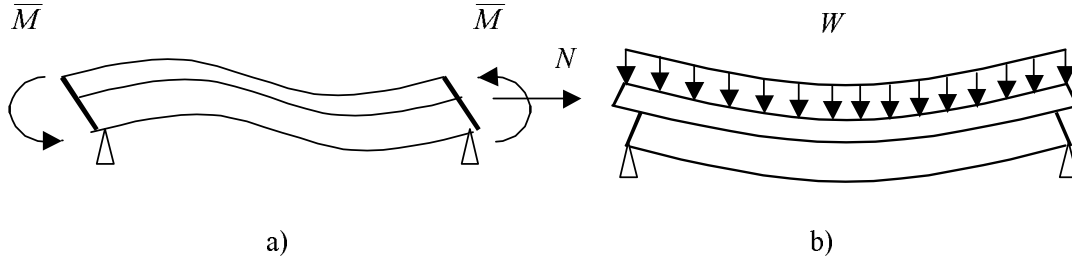
$$\Delta\mathbf{S}_d^\alpha = \mathbf{B}_d^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{R}_d^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{R}_d^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{S}}_d^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{S}}_d^{\alpha-1} \quad (28)$$

$$\Delta\mathbf{F}_d^\alpha = \mathbf{K}_d^\alpha \Delta\mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{C}_d^\alpha \mathbf{\Lambda} \Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{C}_d^\alpha \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \tilde{\mathbf{F}}_d^\alpha \Delta Q^\alpha + \ddot{\mathbf{F}}_d^{\alpha-1} \quad (29)$$

Además de estas ecuaciones se requiere considerar las condiciones de frontera del miembro para obtener la solución elástica de cualquier problema. Por ejemplo, en la Figura 4 se muestran dos casos con distintas condiciones de frontera en la interfaz. En el primer caso, donde se restringen los deslizamientos en las interfaces en los extremos y las fuerzas en los elementos son distintas de cero (Figura 4a), y en el segundo donde, las fuerzas en los elementos son cero y los deslizamientos no están restringidos (Figura 4b).

En el primer ejemplo, los deslizamientos son cero en ambos extremos ( $\Delta\mathbf{S}_0^\alpha$  y  $\Delta\mathbf{S}_d^\alpha$ ), y, por tanto, se pueden calcular las fuerzas en los elementos  $\Delta\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$  en la sección 0 empleando la ecuación (28), mientras que el segundo se resuelve con la ecuación (29), ya que las fuerzas en los elementos en la sección 0 y la resultante de las fuerzas en las interfaces en la sección  $d$   $\Delta\mathbf{F}_d^\alpha$  son cero.

De esta manera se obtiene la solución para una iteración  $\alpha$  de un miembro sometido a una carga  $Q$  y con determinadas condiciones de frontera



**Figura 4.** Posibles condiciones de frontera en la interfaz: a) viga-columna con los deslizamientos restringidos, b) viga-columna con las fuerzas restringidas

### Cálculo de los desplazamientos

Los desplazamientos se obtienen sumando el incremento de los mismos en cada iteración  $\alpha$ . Cada incremento se calcula mediante el método de los residuos pesados<sup>14</sup>, para el caso en estudio se replantea la integral pesada de la ecuación de la curvatura.

$$\int_0^L \tilde{M} \left( \Delta\phi_b^\alpha - \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \Delta M_b^\alpha + \frac{(y_b + y_{rb}^{\alpha-1})^T}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{aa_i}^{\alpha-1}}} \Delta \mathbf{P}_b^\alpha - \ddot{\phi}_b^{\alpha-1} \right) dx = 0 \quad (30)$$

La función de peso  $\tilde{M}$  es una ecuación de momentos. Se recomienda tomar la distribución de momentos producida por una carga unitaria en la ubicación y dirección del desplazamiento que se desea calcular.

Integrando por partes (30), como se detalla en la referencia 3, se llega a

$$\mathbf{W}^{\alpha T} \Delta \mathbf{S}_0^\alpha + \mathbf{Z}^{\alpha T} \mathbf{A} \Delta \bar{\mathbf{P}}_0^\alpha + \mathbf{Z}^{\alpha T} \mathbf{I} \Delta N^\alpha + \left( \frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{\bar{k}^\alpha} \right) \Delta Q^\alpha = \Delta \theta^\alpha - \ddot{\theta}_b^{\alpha-1} \quad (31)$$

Los vectores y términos  $\mathbf{W}^\alpha$ ,  $\mathbf{Z}^\alpha$ ,  $\bar{k}^\alpha$ ,  $\tilde{k}^\alpha$  y  $\ddot{\theta}^{\alpha-1}$  se describen en el Apéndice.

Esta ecuación se combina con las ecuaciones (28) y (29) y se pueden calcular las fuerzas  $\Delta \mathbf{P}_0^\alpha$ , los deslizamientos  $\Delta \mathbf{S}_0^\alpha$  y la carga actuante  $\Delta Q$  para un valor de la rotación  $\theta$  y carga axial  $\Delta N$  y determinadas condiciones de frontera en las secciones transversales en los extremos.

### ANÁLISIS INCREMENTAL

La solución presentada permite obtener la respuesta paso a paso debido a un incremento en la excitación mediante iteraciones  $\alpha$ . El proceso iterativo se basa en la modificación propuesta por la referencia 17 al método de la referencia 14, según la cual no es necesario lograr la compatibilidad de desplazamientos en el miembro y definir los residuos en fuerza en sus extremos para luego realizar las iteraciones en el sistema estructural con el objeto de satisfacer las condiciones de equilibrio. La referencia 17 plantea que se puede lograr la compatibilidad de desplazamiento y el equilibrio de fuerza en el miembro a través de las iteraciones en el sistema estructural. Por esta razón, en cada iteración en este trabajo se busca el incremento de momento  $\Delta M$  debido al incremento en la rotación  $\Delta \theta$  y la carga axial  $\Delta N$  para determinados valores de deslizamientos o fuerzas en los extremos de los miembros según las condiciones de frontera del mismo.

Si se realiza el análisis para un incremento  $j$  de la rotación  $\Delta \theta^j$  y la carga axial  $\Delta N^j$ , el incremento en la respuesta del miembro, representada a continuación por la variable genérica  $\Phi$ , sería

$$\Delta\Phi^j = \sum_{\alpha=1}^{ne} (\Delta\Phi^\alpha)^j \quad (32)$$

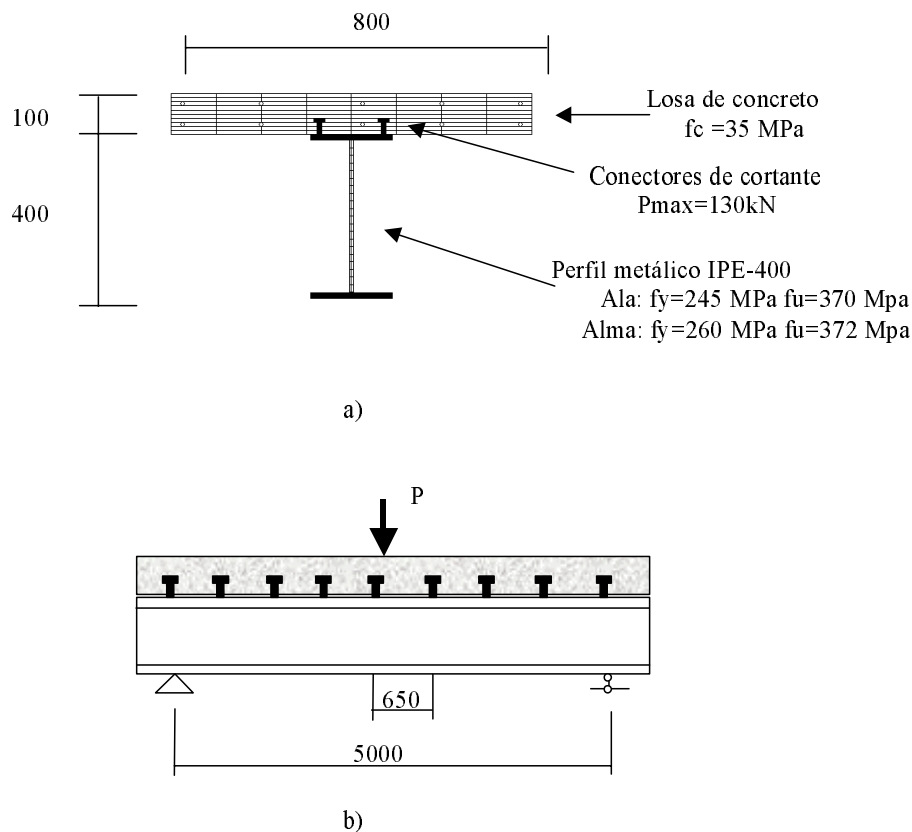
donde  $ne$  es el número de iteraciones, y la variable  $\Phi$  puede ser la deformación, el deslizamiento en la interfaz o cualquiera de las variables de respuesta para las cuales se explicó anteriormente como obtener el incremento en cada iteración  $\alpha$ .

La respuesta total del miembro es la suma de los incrementos  $j$  hasta llegar a los valores de excitación que se deseen.

Esta formulación incremental es general y puede emplearse en el análisis ante carga monótona creciente o cíclica.

## CALIBRACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

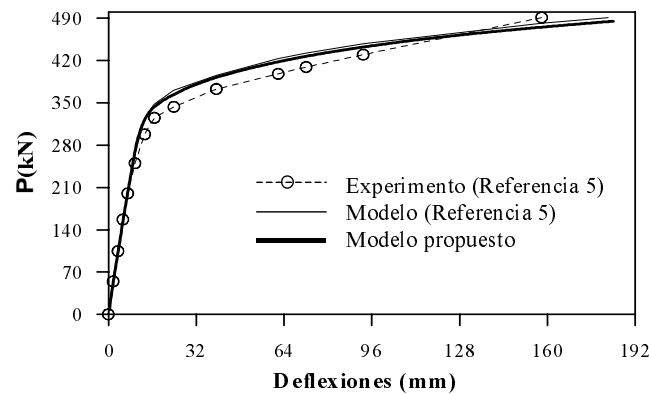
El proceso de validación del modelo consistió en una comparación con los resultados del ensaye experimental descrito en la referencia 5, con el objeto de demostrar que el procedimiento desarrollado puede reproducir el comportamiento de un miembro estructural real. Posteriormente, se realizó un estudio teórico cuyo propósito es mostrar la capacidad del modelo para estudiar otras condiciones de frontera y estados de carga no tratados con modelos FVC de diferencias finitas en la literatura.



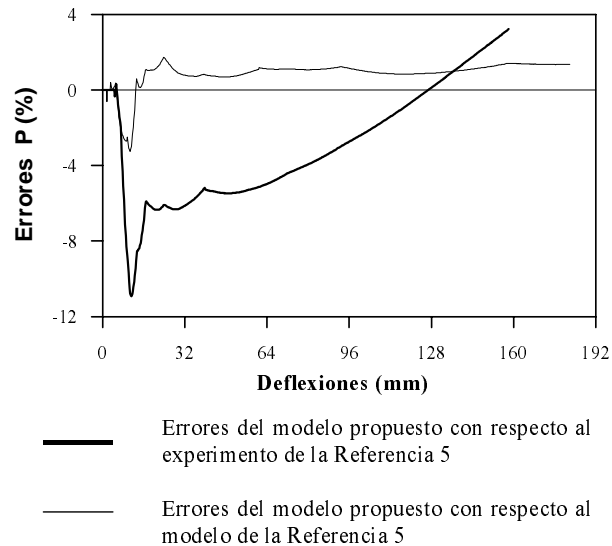
**Figura 5.** Miembro estructural estudiado experimentalmente: a) sección dividida en fibras, b) condiciones de apoyo y estado de carga de la trabe de la referencia 5 (las medidas están en mm)

### Comparación teórico-experimental

Las características del ensayo experimental se resumen en la Figura 5. En la Figura 6a se presenta la relación carga-deflexión al centro del vano calculada con el modelo propuesto en este trabajo y con el de la referencia 5. Los valores de la carga y la deflexión máximas del modelo difieren de los datos experimentales en 1,2 y 17 %, respectivamente. Al comparar estos valores con los del modelo de la referencia 5, los errores son 2 y 1 %. En la Figura 6b aparece la variación de los errores de la carga en función de la deflexión en el centro del vano con respecto a los datos experimentales y teóricos de la referencia 5. Los errores de la carga del modelo propuesto alcanzaron un valor del 11 % y 3,5 % respecto a los datos experimentales y al modelo de la referencia 5, respectivamente. Los resultados obtenidos muestran que el modelo propuesto reproduce adecuadamente el comportamiento del miembro ensayado.



a)



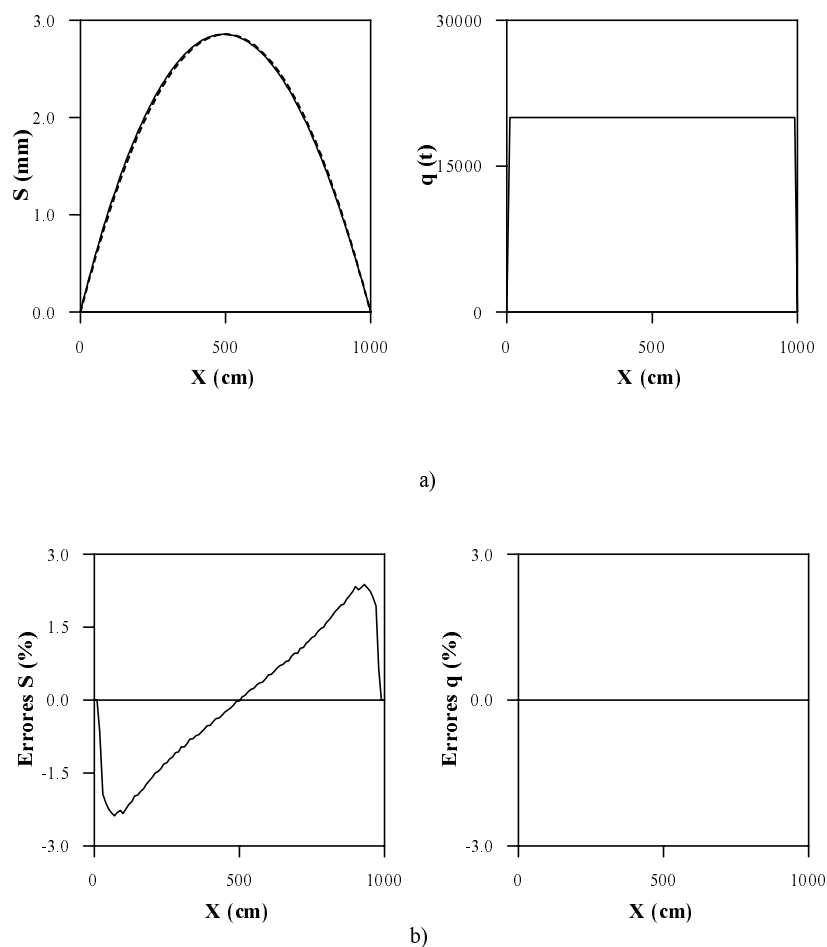
b)

**Figura 6.** Comparación del modelo propuesto con los datos experimentales y el modelo de la referencia 5: a) curvas carga versus deflexiones, b) errores relativos

### Estudio teórico para otras condiciones de apoyo y estados de carga

En esta sección se muestra una aplicación del modelo propuesto a un miembro estructural con las condiciones de frontera y estado de carga de la Figura 4a, el cual incluye dos superficies de deslizamientos. Con este ejemplo se ilustran varias ventajas del modelo desarrollado respecto a los procedimientos expuestos en las referencias 5, 6 y 10, tales como incluir la acción de carga axial, analizar un miembro estructural, donde ninguno de sus extremos presenta momento nulo en la sección y obtener la solución del problema iterando con todas las incógnitas simultáneamente, en vez de emplear un proceso iterativo por cada incógnita del problema<sup>6</sup>, con lo cual se reduce el esfuerzo de cómputo.

Para verificar los resultados del procedimiento se elaboró un modelo en el programa de cómputo RUAUMOKO<sup>4</sup>. El comportamiento de los materiales fue en el intervalo no lineal en la interfaz y elástico-lineal en la sección transversal. En la Figura 7a se muestra el deslizamiento y el flujo de fuerza en la interfaz inferior. Los errores del deslizamiento del modelo, con respecto a los del modelo de elementos finitos (Figuras 7b), son menores del 3 %. En cuanto al flujo de fuerza no hay diferencias en los resultados.



**Figura 7.** Comparación del modelo propuesto con un modelo de elemento finito: a) variación del deslizamiento relativo y el flujo de fuerza en la interfaz a lo largo del miembro, b) errores relativos

Por último, para el ejemplo anterior se realizó un estudio teórico del comportamiento del modelo propuesto cuando se incluye el comportamiento no lineal de los materiales en la sección transversal. El objetivo fue verificar que el procedimiento numérico converja a una solución coherente con las condiciones de compatibilidad de desplazamiento y equilibrio de fuerzas a lo largo del miembro estructural. Con este propósito se seleccionó un punto cualquiera del diagrama momento-rotación ilustrado en la Figura 8. Los residuos en las fuerzas internas en la sección transversal y en la fuerza en la interfaz se presentan en la Figura 9. Se observa que el valor de los residuos tiende a cero, por lo que el procedimiento converge. Con esto se logra el equilibrio de fuerzas y la compatibilidad de desplazamientos entre las secciones transversales y la interfaz a lo largo de todo el miembro.

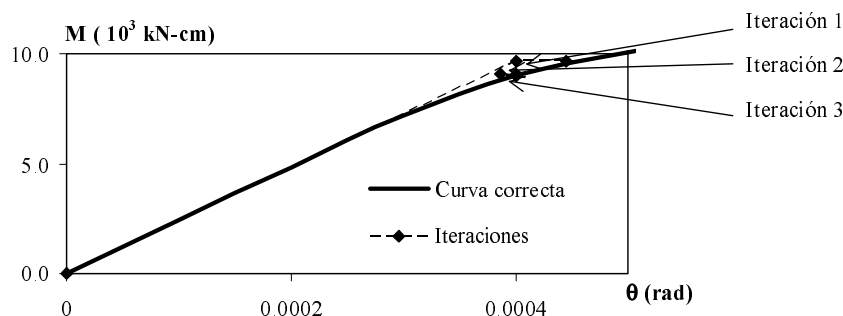


Figura 8. Gráfico momento-rotación

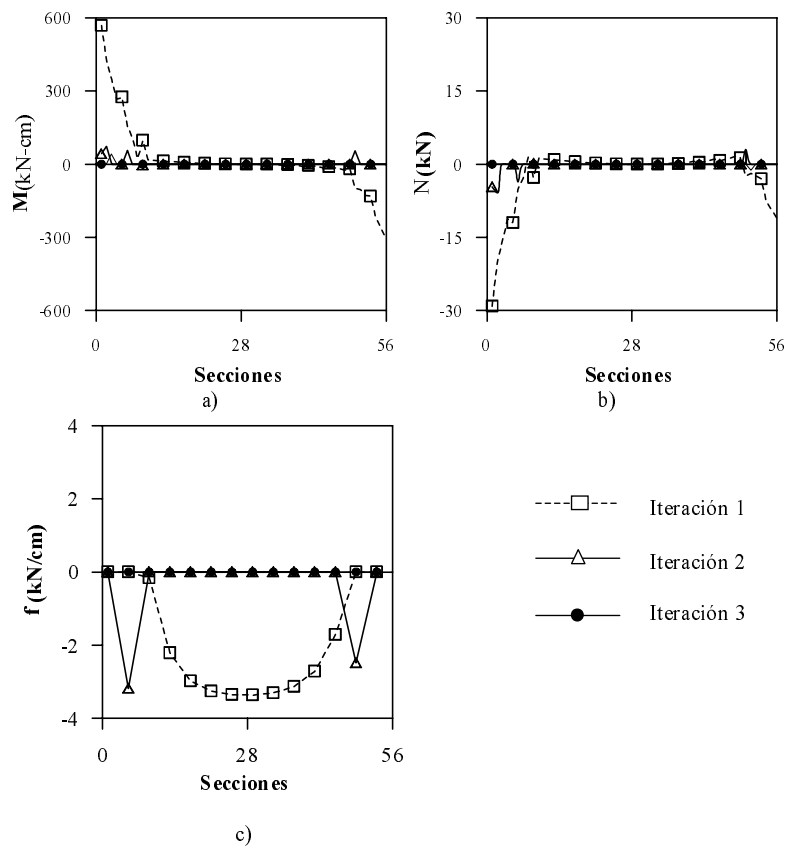


Figura 9. Convergencia de las fuerzas internas en el miembro

## LIMITACIÓN DEL MODELO PROPUESTO

Con las pruebas realizadas en el modelo se detectó inestabilidad numérica cerca de la condición de rigidez infinita en la interfaz. Esta se puede observar en la Figura 10, donde se muestra la deformación calculada  $\mathbf{E}_{Ib}$  a partir de la suma de las respuestas de todas las iteraciones  $\alpha$  (26). En la cercanía de la sección, en el extremo  $d$ , aparece un comportamiento que no se observa en las otras secciones. Para poder verificar si esto se debe a un comportamiento del miembro o son problemas numéricos del método, se calcularon las deformaciones en la interfaz a partir de las fuerzas resultantes en la misma. Primero, por condiciones de equilibrio (24) se obtienen las fuerzas en los elementos componentes y después se calcula la deformación en la interfaz de cada sección  $\mathbf{E}_{Ib}$  (15). Al comparar estas dos curvas (Figura 10) se aprecia que éstas se separan en la zona donde aparece el comportamiento extraño próximo a la sección  $d$ , lo cual demuestra que éste se debe a problemas numéricos del procedimiento.

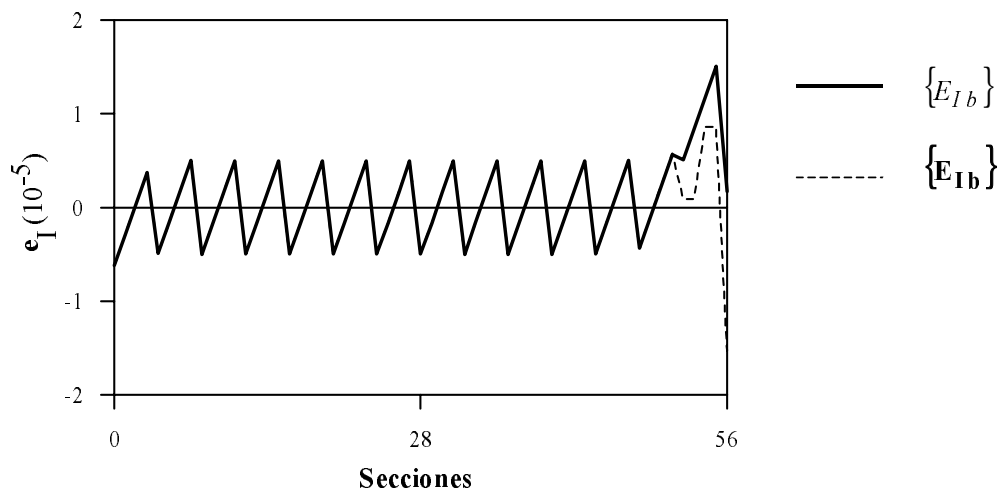


Figura 10. Deformaciones próximas a la condición de rigidez nula

Sin embargo, a pesar de este problema numérico el procedimiento permite estimar prácticamente la condición del deslizamiento nulo, en términos de la respuesta global del miembro, como se mostrará en el ejemplo de la siguiente sección.

## APLICACIÓN DEL MODELO

El modelo se empleó para el estudio de una columna de un edificio rehabilitado<sup>7</sup>. La columna está compuesta por el elemento original de concreto armado y dos elementos de rehabilitación de concreto armado cubiertos con placas de acero y colocadas a ambos lados del elemento original (Figura 11). El objetivo es determinar la influencia de los deslizamientos relativos en las interfaces, la resistencia y la rigidez de la columna compuesta. Por esta razón se acepta la posibilidad de deslizamiento entre las placas de acero y los elementos de rehabilitación y entre éstos y el elemento original. En función de la rigidez de la interfaz, la sección se comporta como totalmente acoplada (rigidez infinita de la interfaz), parcialmente acoplada (rigidez finita) y totalmente desacoplada (rigidez nula).

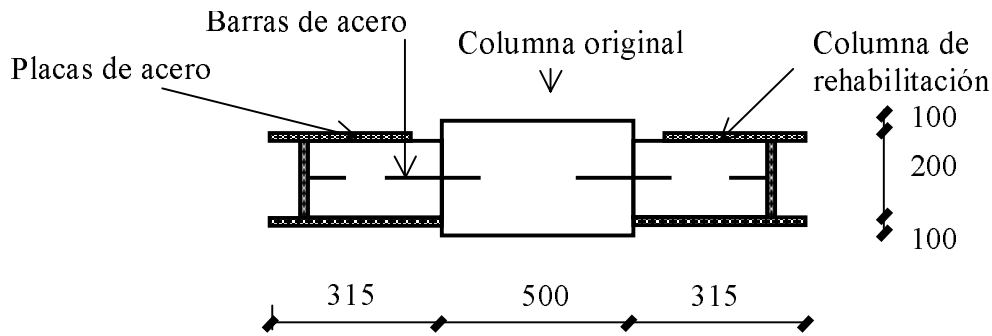


Figura 11. Columna rehabilitada

La columna se supone bajo la acción de las cargas que se muestran en la Figura 4a. Para el concreto del elemento original y los elementos de rehabilitación las resistencias a compresión son 27,2 y 25,0 MPa y los módulos de elasticidad 13 400 MPa y 12 650 MPa, respectivamente. Para el acero la resistencia es 253 MPa (A-36) y el módulo de elasticidad 200 000 MPa y se empleó un modelo elásto-plástico.

El modelo constitutivo supuesto del concreto fue una parábola, la cual se ajustó para que la pendiente secante en el 40 % de la resistencia fuera igual a  $Ec$  y que la pendiente en la resistencia a compresión  $f'c$  fuera cero. No fue necesario especificar el comportamiento del concreto después de alcanzar la resistencia, debido a que con las condiciones anteriores las deformaciones en la resistencia máxima estuvieron entre 0,003 y 0,004 y como criterio de falla se tomó 0,003 de acuerdo al código de diseño<sup>9</sup>. Estos valores están en correspondencia con estudios experimentales realizados en concretos elaborados en la ciudad de México<sup>8</sup>.

En la interfaz se aceptó que la transferencia de cortante se realiza por el mecanismo de fricción-cortante<sup>16</sup>. Para este mecanismo, el modelo constitutivo tiene una rigidez infinita antes de la resistencia y una rigidez nula después de alcanzar su resistencia. La resistencia del mismo se calculó según las recomendaciones de la referencia 9.

El análisis consistió en determinar las relaciones momento-rotación, donde esta última se calcula en el extremo izquierdo y el momento es el que se indica en la Figura 4a. La Figura 12 muestra las gráficas momento-rotación con y sin fuerza normal  $N$ .

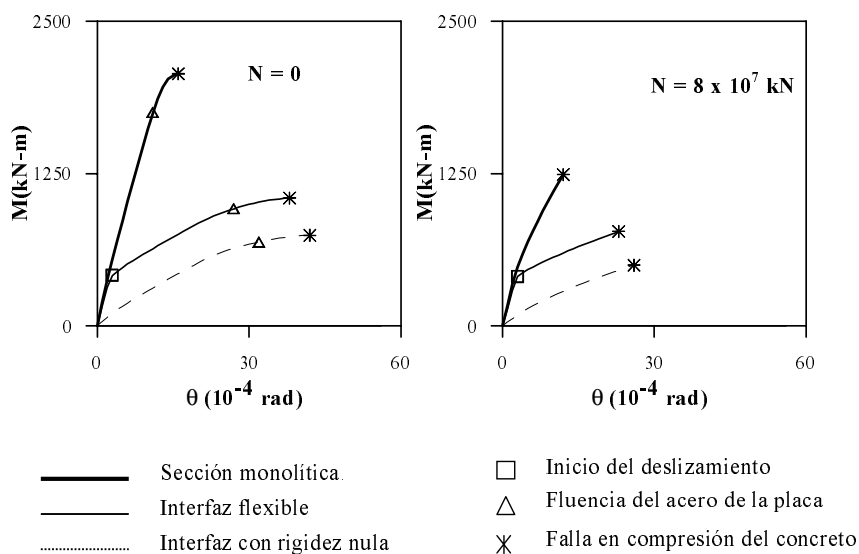


Figura 12. Diagramas momento-rotación con y sin fuerza axial

Para poder comprender mejor estos resultados se muestran dos curvas límite del comportamiento en la interfaz. Una donde la rigidez de la interfaz es infinita, es decir, la sección es monolítica, y la otra donde su rigidez es nula. En el momento en el cual se inicia el deslizamiento en la interfaz, la sección deja de comportarse de manera similar a la sección monolítica y se produce una degradación de resistencia y rigidez importante.

La influencia de la fuerza normal se observa mejor en los diagramas de interacción momento-fuerza axial para distintas etapas de comportamiento. En la Figura 13 se observa como la fuerza normal influye muy poco en el instante que inicia el deslizamiento en las interfaces, pero sí influye en la fluencia del acero de la placa y la falla en compresión del concreto.

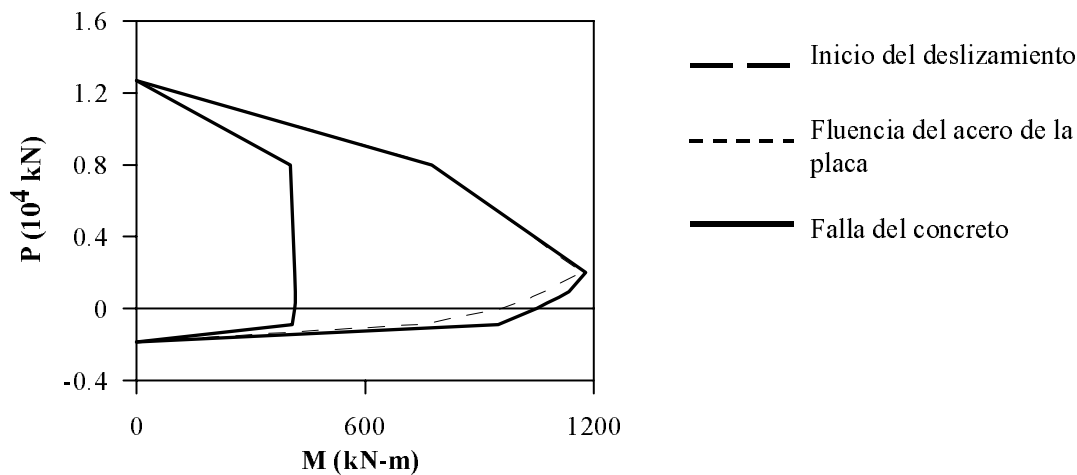


Figura 13. Diagrama de interacción momento-fuerza axial

Este caso no se hubiera podido analizar adecuadamente con los modelos propuestos en la literatura debido a que los elementos componentes se encuentran sometidos a esfuerzos combinados de carga axial y flexión. Por otro lado, para los modelos FVC con diferencias finitas se consideran condiciones de frontera donde los deslizamientos en la interfaz son nulos y las incógnitas son las fuerzas en los extremos de los elementos. En los resultados se observa que el instante en el cual comienzan los deslizamientos en las superficies de contacto es poco sensible a la variación de la carga axial. Además, se produce una degradación importante de la rigidez y la resistencia, respecto al comportamiento del miembro sin deslizamiento en las superficies de contacto entre las partes componentes, lo cual demuestra la necesidad de considerar la flexibilidad de la interfaz para poder estimar correctamente la rigidez y resistencia del miembro.

## CONCLUSIONES

Se propone un nuevo modelo FVC con diferencias finitas para el estudio de miembros compuestos con deslizamientos relativos entre sus partes componentes. Su calibración y validación con resultados experimentales obtenidos de la literatura demuestran que el procedimiento numérico puede reproducir el comportamiento de miembros estructurales reales.

Dicho modelo incorpora procedimientos numéricos más eficientes que permiten incluir nuevos aspectos respecto a los modelos FVC con diferencias finitas propuestos en la literatura los cuales son:

- considerar varias superficies potenciales de deslizamiento relativo entre los elementos sin las complicaciones numéricas de los modelos existentes, los cuales requieren introducir un proceso iterativo por cada superficie de deslizamiento<sup>5,6,10</sup>. El modelo propuesto no necesita realizar iteraciones cuando el comportamiento de los materiales es elástico lineal. Cuando los materiales incursionan en el intervalo no lineal se itera con todas las incógnitas del problema a la vez, reduciendo notablemente el esfuerzo de cómputo requerido.
- incluir la acción de carga axial y momento flexionante en todos los elementos componentes.
- generalizar para las condiciones de frontera y estados de carga que se pueden encontrar en casos prácticos de análisis de miembros estructurales, ya que no se requiere un extremo articulado o localizar una sección en el miembro estructural, donde los deslizamientos son nulos en la interfaz<sup>5,6,10</sup>.

En consecuencia, con este modelo es posible estudiar diversos problemas de pérdida de adherencia entre miembros originales y/o rehabilitados, como pueden ser miembros de concreto armado, reforzados con placas de acero o con un encamisado de concreto armado. Además de estos casos, se pueden analizar otras situaciones donde el alcance de los modelos existentes, no lo permiten, debido a que los efectos de flexión y carga axial son importantes en más de dos elementos componentes del miembro (por ejemplo, una columna reforzada con perfiles canales en dos de sus lados o columnas con ángulos metálicos en sus esquinas).

## AGRADECIMIENTOS

Se le agradece a Santiago Loera Pizarro y Oscar López Bátiz por sus sugerencias en la realización de este trabajo. Los comentarios de los revisores contribuyeron a aclarar el contenido del presente artículo.

## REFERENCIAS

- 1 Aprile, E. Spacone y S. Limkatanyu, "Role of bond in beams strengthened with steel and FRP plates", *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol. **127**, N° 12, pp. 1445–1452, (2001).
- 2 ASCE Task Committee on Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Structures of the Structural Division y Committee on Concrete and Masonry Structures, "*Finite element analysis of reinforced concrete structures*", A.H. Nilson, (1982).
- 3 J.E. Blanco, "Análisis de elementos compuestos con deslizamiento relativo", Tesis de maestría, División de Estudios de Posgrado, Facultad de Ingeniería, UNAM, (2002).
- 4 A.J. Carr, "RUAUMOKO", Computer program library, University of Canterbury, Nueva Zelanda, (1998).
- 5 G. Fabbrocino, G. Manfredi y E. Cosenza, "Non-linear analysis of composite beams under positive bending", *Computers and Structures*, Vol. **70**, pp. 77–89, (1999).
- 6 G. Fabbrocino, G. Manfredi y E. Cosenza, "Analysis of continuous composite beams including partial interaction and bond", *J. Struct. Engng., ASCE*, Vol. **126**, N° 11, pp. 1288–1294, (2000).
- 7 L. Fuentes y D. Murià Vila, "Modelos calibrados de un edificio instrumentado", *Revista Digital Universitaria*, [www.revista.unam.mx](http://www.revista.unam.mx), Vol. **2**, N° 3, (2001).

- 8 C. J. Mendoza, "Propiedades mecánicas de los concretos fabricados en el Distrito Federal", *Series del Instituto de Ingeniería*, N° 495, (1985).
- 9 NTCEC, "Normas técnicas complementarias para el diseño y construcción de estructuras de concreto del distrito federal", *Gaceta Oficial del Distrito Federal*, marzo, (1996).
- 10 D.J. Oehlers y M.A. Bradford, "*Composite steel and concrete structural members. Fundamental Behavior*", Pergamon, New York, (1995).
- 11 M.R. Salari, E. Spacone, P.B. Shing y D.M. Frangopol, "Nonlinear analysis of composite beams with deformable shear connectors", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **124**, N° 10, pp. 1148-1158, (1998).
- 12 M.R. Salari y E. Spacone, "Finite element formulations of one-dimensional elements with bond-slip", *Engng. Struct.*, Vol. **23**, N° 7, pp. 815-826, (2001a).
- 13 M.R. Salari y E. Spacone, "Analysis of steel-concrete composite frames with bond slip", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **127**, N° 11, pp. 1243-1250, (2001b).
- 14 E. Spacone, F.C. Filippou y F.F. Taucer, "Fiber beam-column model for nonlinear analysis of R/C frames. I: Formulation", *Earthquake Engng. and Struct. Dyn.*, Vol. **25**, N° 7, pp. 711-725, (1996).
- 15 E. Spacone y S. Limkatanyu, "Responses of reinforced concrete members including bond slip", *ACI Struct. J.*, Vol. **97**, N° 6, pp. 831-839, (2000).
- 16 R. Valluvan, M. E. Kreger y J. O. Jirsa, "Evaluation of ACI 318-95 Shear-friction provisions", *ACI Struct. J.*, Vol. **96**, N° 4, pp. 473-481, (1999).
- 17 A. Neuenhofer y F. C. Fillippou, "Evaluation of nonlinear frame finite-element models", *J. Struct. Engng.*, ASCE, Vol. **123**, N° 7, pp. 958-966, (1997).
- 18 R. Durán-Hernández y S. Alcocer, "Seismic performance of a RC building with columns rehabilitated with steel angles and straps. Innovations design with emphasis on seismic, wind and environmental loading; quality control and innovations in materials/hot-weather concreting", *ACI International*, SP209, N° 29, pp. 531-552, (2002).
- 19 E. Jones y J. Jirsa, "Seismic strengthening of reinforced concrete frame using structural steel bracing", PMFSEL Report 86-5, Department of civil engineering/Bureau of engineering research, University of Texas, Austin, (1986).

## APÉNDICE

### Cálculo de las constantes de las ecuaciones del procedimiento propuesto

En la sección en el extremo (sección 0) las fuerzas en los elementos son  $\bar{\mathbf{P}}_0^\alpha$  y los deslizamientos en la interfaz  $\mathbf{S}_0^\alpha$ . Estos provocan deformaciones y fuerzas resultantes en las interfaces entre la sección 0 y la sección siguiente (sección 1) (ecuaciones (15) y (22)).

$$\Delta \mathbf{E}_0^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\alpha (\Delta \mathbf{P}_0^\alpha + \ddot{\mathbf{P}}_0^{\alpha-1}) - \bar{\mathbf{E}}_0^\alpha \Delta M_0^\alpha - \bar{\mathbf{E}}_0^\alpha \ddot{M}_0^{\alpha-1} \quad (1)$$

$$\Delta \mathbf{F}_0^\alpha = \mathbf{k}^\alpha \Delta \mathbf{S}_0^\alpha \Delta x + \ddot{\mathbf{f}}_0^\alpha \quad (2)$$

$$\Delta \mathbf{S}_0^\alpha = \Delta \mathbf{S}_0^\alpha \quad (3)$$

Comparando estas ecuaciones con las ecuaciones (25), (26) y (27), respectivamente, se obtiene que  $\mathbf{A}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{D}_0^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\alpha$ ,  $\tilde{\mathbf{E}}_0^\alpha = -\bar{\mathbf{E}}_0^\alpha M_0^\alpha$ ,  $\ddot{\mathbf{E}}_0^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_0^\alpha \ddot{\mathbf{P}}_0^{\alpha-1} - \bar{\mathbf{E}}_0^\alpha \ddot{M}_0^\alpha$ ,  $\mathbf{K}_0^\alpha = \mathbf{k}_0^\alpha$ ,  $\mathbf{C}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\tilde{\mathbf{F}}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\ddot{\mathbf{F}}_0^\alpha = \ddot{\mathbf{f}}_0^\alpha$ ,  $\mathbf{B}_0^\alpha = \mathbf{I}$ ,  $\tilde{\mathbf{S}}_0^\alpha = \ddot{\mathbf{S}}_0^\alpha = \mathbf{0}$ ,  $\mathbf{R}_0^\alpha = \mathbf{0}$ .

Con las constantes en la sección 0 calculadas se va de una sección a otra siguiendo el procedimiento que se describe a continuación. En este procedimiento se muestra cómo calcular las constantes en una sección  $b$  a partir de la sección  $b-1$ .

Primero se calculan las constantes relacionadas con las resultantes de las fuerzas en las interfaces (25)

$$\mathbf{K}_b^\alpha = \mathbf{K}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \mathbf{B}_{b-1} \Delta x \quad (4)$$

$$\mathbf{C}_b^\alpha = \mathbf{C}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \mathbf{R}_{b-1}^\alpha \Delta x \quad (5)$$

$$\tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha = \tilde{\mathbf{F}}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \tilde{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha \quad (6)$$

$$\ddot{\mathbf{F}}_b^\alpha = \ddot{\mathbf{F}}_{b-1}^\alpha + \mathbf{k}_{b-1}^\alpha \ddot{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha + \ddot{\mathbf{f}}_b^{\alpha-1} \quad (7)$$

Luego se obtienen las constantes relacionadas con las deformaciones en las interfaces (26)

$$\mathbf{D}_b^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha (\mathbf{I} + \mathbf{E} \mathbf{C}_{b-1}^\alpha) \quad (8)$$

$$\mathbf{A}_b^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha \mathbf{E} \mathbf{k}_b^{\alpha-1} \quad (9)$$

$$\tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^\alpha \mathbf{E} \tilde{\mathbf{F}}_{b-1}^\alpha - \bar{\mathbf{E}}_b^\alpha a_b \quad (10)$$

$$\ddot{\mathbf{E}}_b^{\alpha-1} = \mathbf{E} \mathbf{A}_b^{\alpha-1} \mathbf{E} \ddot{\mathbf{F}}_{b-1}^{\alpha-1} - \bar{\mathbf{E}}_b^{\alpha-1} \ddot{M}_b^{\alpha-1} \quad (11)$$

Por último, se calculan las constantes relacionadas con los deslizamientos en las interfaces (27)

$$\mathbf{R}_b^\alpha = \mathbf{R}_{b-1}^\alpha + \frac{(\mathbf{D}_b^\alpha + \mathbf{D}_{b-1}^\alpha)}{2} \Delta x \quad (12)$$

$$\mathbf{B}_b^\alpha = \mathbf{B}_{b-1}^\alpha + \frac{(\mathbf{A}_{b-1}^\alpha + \mathbf{A}_b^\alpha)}{2} \Delta x \quad (13)$$

$$\tilde{\mathbf{S}}_b^\alpha = \tilde{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha + \frac{(\tilde{\mathbf{E}}_{b-1}^\alpha + \tilde{\mathbf{E}}_b^\alpha)}{2} \Delta x \quad (14)$$

$$\ddot{\mathbf{S}}_b^\alpha = \ddot{\mathbf{S}}_{b-1}^\alpha + \frac{(\ddot{\mathbf{E}}_{b-1}^\alpha + \ddot{\mathbf{E}}_b^\alpha)}{2} \Delta x \quad (15)$$

Con las constantes relacionadas con las resultantes de las fuerzas en las interfaces en todas las secciones, se pueden calcular las constantes relacionadas con la ecuación de desplazamiento (31)

$$\ddot{\theta}^{\alpha-1} = \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} [(\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T \mathbf{E} \ddot{\mathbf{f}}_b^{\alpha-1} + \ddot{M}_b^{\alpha-1}] \Delta x \quad (16)$$

$$\mathbf{Z}^{\alpha T} = - \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T (\mathbf{I} + \mathbf{E} \mathbf{C}_b^\alpha) \Delta x \quad (17)$$

$$\mathbf{W}^{\alpha T} = - \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T \mathbf{E} \mathbf{k}_b^\alpha \Delta x \quad (18)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}^\alpha} = - \sum_{b=1}^d \frac{\tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} (\mathbf{y} + \mathbf{y}_r^{\alpha-1})^T \mathbf{E} \tilde{\mathbf{F}}_b^\alpha \Delta x \quad (19)$$

$$\frac{1}{\tilde{k}^\alpha} = \sum_{b=1}^d \frac{a_b \tilde{M}_b}{\left( \sum_{i=1}^n \frac{1}{f_{a_i}^{\alpha-1}} \right)_b} \Delta x \quad (20)$$