

Estimación y Corrección del Error en el Análisis Estructural por el MEF

G. Bugeda

Estimación y Corrección del Error en el Análisis Estructural por el MEF

G. Bugeda

Monografía CIMNE N°-9, Diciembre 1991

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA
Edificio C1, Campus Norte UPC
Gran Capitán s/n
08034 Barcelona, España
www.cimne.upc.es

Primera edición: Diciembre 1991

**ESTIMACIÓN Y CORRECCIÓN DEL ERROR EN EL
ANÁLISIS ESTRUCTURAL POR EL MEF**

Monografía CIMNE M 9
© Los autores

ISBN: 84-87867-08-1

INDICE

CAPÍTULO 1 :		
	INTRODUCCIÓN	1
CAPÍTULO 2 :		
	DESARROLLO HISTÓRICO	5
CAPÍTULO 3 :		
	FORMULACIÓN JERÁRQUICA DE LAS FUNCIONES DE FORMA	11
	3.1 FUNCIONES DE FORMA JERÁRQUICAS	12
	3.2 ESTRUCTURA DE LAS ECUACIONES	21
	3.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE FORMA JERÁRQUICAS	24
CAPÍTULO 4 :		
	ANÁLISIS DEL ERROR	27
	4.1 NORMAS DE MEDICIÓN DE ERROR	29
	4.2 VELOCIDAD DE CONVERGENCIA	35
	4.3 ESTIMADORES E INDICADORES DE ERROR	38
CAPÍTULO 5 :		
	INDICADORES DE ERROR	39
CAPÍTULO 6 :		
	ESTIMADORES DE ERROR	45
	6.1 ESTIMADOR DE ERROR DE BABUŠKA, RHEINBOLDT, ZIENKIEWICZ, KELLY Y GAGO	46
	6.2 ESTIMADORES DERIVADOS DE LOS INDICADORES DE ERROR	51
	6.3 ESTIMADOR LOCAL DE ERROR DE SPECHT	52

6.4 ESTIMADOR DE ZIENKIEWICZ Y ZHU	56
6.5 ESTIMADOR DE ERROR DE ROBERTI Y MELKANOFF	62
6.6 ESTIMADOR DE KELLY, MILLS, REIZES Y MILLER	64

CAPÍTULO 7 :

ESTRATEGIAS PARA LA CORRECCIÓN DE ERRORES	67
7.1 ESTRATEGIAS PARA LOS REFINAMIENTOS NO JERÁRQUICOS	68
7.2 ESTRATEGIAS PARA LOS REFINAMIENTOS JERÁRQUICOS	70
7.3 ESTRATEGIAS PARA LOS REMALLADOS AUTOMÁTICOS	72
7.3.1 Definición del remallado	74
7.3.2 Criterios de optimalidad de la malla	76

CAPÍTULO 8 :

EJEMPLO DE UTILIZACIÓN DE UN ESTIMADOR DE ERROR	83
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS	89

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

El método de los elementos finitos no proporciona una indicación directa acerca de la exactitud de las aproximaciones que se realizan. Aunque dicho método ha sido adoptado como una herramienta muy eficaz para la resolución, tanto de problemas estructurales como de mecánica de medios continuos en general, sólo a partir de tiempos relativamente recientes se han propuesto expresiones para la estimación de errores a posteriori.

A pesar del gran desarrollo que han experimentado los métodos de cálculo por elementos finitos, no existe un uso generalizado de las técnicas de estimación de error para conocer el grado de precisión obtenido en un cálculo. Por ello, en la inmensa mayoría de los casos, el calculista no conoce si la malla utilizada para un cierto cálculo ha sido suficientemente adecuada para proporcionar unos resultados con la precisión requerida. Tampoco son de uso generalizado las técnicas de refinamiento o de remallado tendentes a proporcionar resultados con una precisión predeterminada, a base de realizar mejoras sobre las mallas utilizadas. Hasta el momento, la generación de las mallas de elementos finitos utilizadas en los cálculos se basa en la intuición y en la experiencia previa del ingeniero calculista, pero sin la utilización de criterios objetivos que faciliten dicha labor.

Evidentemente, la evaluación exacta del error existente en una determinada aproximación a la solución de un problema es imposible sin conocer la solución exacta del mismo. Sin embargo en esta monografía se presentarán diversas técnicas para estimar dicho error de manera muy razonable, con las que es posible obtener una solución a un determinado problema, por elementos finitos, cuyo error esté por debajo de una determinada tolerancia.

En los últimos años se han desarrollado diversas técnicas para resolver el problema de la estimación y la corrección del error. De hecho, la mayoría de los avances que se han realizado dentro del campo de los elementos finitos se pueden entender como formas distintas de minimizar el error existente en las soluciones.

En esta monografía se hablará sobre dos técnicas distintas para la corrección de errores:

- Técnicas de refinamiento: se definen como tales aquellas en las que a una malla utilizada previamente se le añaden nuevos grados de libertad para obtener una solución mejorada sobre la anterior.
- Técnicas de remallado: se definen como tales aquellas en las que a partir de la información obtenida con una determinada malla se genera otra malla totalmente nueva y más adecuada para obtener unos resultados con la precisión requerida.

A pesar de la existencia de las diversas técnicas que se presentarán en este trabajo no hay que olvidar el importante papel que deben jugar la experiencia y la intuición del ingeniero a la hora de juzgar la bondad de unos resultados obtenidos con ordenador. Sin embargo, el crecimiento del coste de la mano de obra cualificada y el descenso del coste del tiempo de ordenador hacen que se tienda cada vez más a que sea este último el que haga la mayor parte posible del trabajo. Ello implica que los programas de ordenador se deben diseñar para precisar de un número mínimo de datos, para minimizar el trabajo de definición del problema (geometría, condiciones de contorno y cargas), y de una tolerancia prescrita en cuanto a errores. Un algoritmo automático debe ser capaz de obtener la mejor malla y los mejores resultados a un coste razonable. Además debe tener una gran robustez teniendo en cuenta que muchas veces los usuarios de los programas no son expertos en las formulaciones matemáticas que éstos utilizan.

En el capítulo 2 se presenta un desarrollo histórico de los primeros intentos llevados a cabo por algunos investigadores en busca de expresiones que permitieran conocer, al menos de forma aproximada, el nivel de error existente en unos resultados obtenidos por el MEF.

En el capítulo 3 se expone la formulación jerárquica de las funciones de forma por ser una herramienta necesaria y muy útil en los procesos de refinamiento de mallas.

Posteriormente, en el capítulo 4, se presenta un pequeño desarrollo matemático para clarificar el significado de los errores existentes en las soluciones obtenidas por el MEF, así como diversas alternativas para medirlo.

En capítulos 5 y 6 se exponen, respectivamente, diversas técnicas de indicación y estimación de errores así como comentarios críticos sobre algunos de ellos desde el punto de vista de su utilización práctica.

En el capítulo 7 se presenta un nuevo criterio de optimalidad que

proporciona la manera de distribuir el error obtenido sobre todo el dominio del problema. Este nuevo criterio se compara con otros ya existentes y se demuestra su mayor adecuación al contexto de los métodos de resolución de problemas estructurales por el método de los elementos finitos.

Por último, en el capítulo 8 se presenta un ejemplo de utilización de uno de los estimadores de error comentados.

CAPÍTULO 2

DESARROLLO HISTÓRICO

El artículo de McNeice y Marcal ^[23] publicado en 1971 parece ser el primero en el cual se consideró el problema de distribuir los nodos de una malla para obtener los mejores resultados. La técnica utilizada para ello consistió en minimizar la energía potencial total, dada por

$$\Pi_p = \sum_{e=1}^n \frac{1}{2} \mathbf{u}^e T \left[\int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \right] \mathbf{u}^e - \mathbf{P}^T \mathbf{u} \quad (2.1)$$

con respecto a las variable nodales y a las coordenadas nodales. En la ecuación (2.1) n es el número total de elementos de la malla necesaria para discretizar la estructura, \mathbf{D} es la matriz de constantes elásticas, \mathbf{B} es la matriz de transformación de desplazamientos a deformaciones, \mathbf{u}^e es el vector de desplazamientos asociado al elemento e , \mathbf{u} y \mathbf{P} son los vectores globales de desplazamientos y cargas aplicadas y Ω es el volumen ocupado por el elemento e .

Si denotamos por \mathbf{c} el vector de coordenadas nodales, la condición para que la energía potencial sea mínima es:

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial u_i} = 0 \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial c_j} = 0 \quad (2.3)$$

donde i y j varían sobre el número de grados de libertad y de coordenadas nodales respectivamente. La ecuación (2.2) conduce a la ya familiar expresión

$$\mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{P} = 0 \quad (2.4)$$

donde

$$\mathbf{K} = \sum_{e=1}^n \int_{\Omega^e} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} d\Omega \quad (2.5)$$

y la ecuación (2.3) conduce a

$$\frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial c_j} \mathbf{u} + \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial c_j} \mathbf{u} = 0 \quad (2.6)$$

La expresión (2.4) son las conocidas expresiones de las ecuaciones de equilibrio discretizadas mientras que el problema de la localización óptima de los nodos de la malla está gobernada por la ecuación (2.6). Esta última es un conjunto de ecuaciones no lineales que depende de la posición inicial de los nodos.

Se han aplicado diversas técnicas de minimización para resolver este problema. Carrol et al. [8] utilizaron el método del gradiente conjugado, Turcke y McNeice [34] usaron la técnica de la búsqueda directa de Rosenbrock, y Felippa [11][12] comparó los anteriores dos métodos con el método de Powell concluyendo que este último era el más eficaz.

No obstante, todas las publicaciones sobre las posibles técnicas para solucionar las ecuaciones (2.6) muestran que el grado de no linealidad de las mismas es tan alto que resulta impracticable tanto numérica como económicamente el intentar resolverlas en situaciones fuera del ámbito académico. Felippa muestra que el coste de la resolución de las mismas crece con un factor entre la tercera y la cuarta potencia del número de grados de libertad del modelo discreto.

Oliveira en 1971 [24] sugirió que la configuración óptima de una malla depende de la orientación de las isolíneas de igual energía de deformación. Por ello, propuso el colocar las coordenadas de los elementos siguiendo esas isolíneas que deberían obtenerse mediante un análisis previo. Sin embargo no se daban indicaciones sobre como generar dicha nueva malla.

Después de verificar la no viabilidad de los métodos de minimización, debido al esfuerzo computacional necesario para ello, Turcke y McNeice [34]

desarrollaron la idea de Oliveira dando una serie de directrices para su implementación práctica. Turcke^[35] mostró en 1976 que en un proceso iterativo en el cual los nodos de la malla se posicionan a lo largo de las líneas de isoenergía obtenidas en las soluciones previas, las posiciones de las mismas convergen modificándose cada vez menos. De esta forma se llegaría a la que sería la malla óptima para un número fijado de grados de libertad.

Los trabajos mencionados trataban de mejorar una malla con un número de grados de libertad determinado. Sin embargo no estimaban en ningún momento cual era el error existente en unos resultados. Tampoco abordaban el problema de intentar conocer como cambiarían los resultados añadiendo nuevos grados de libertad, o cambiando el tipo de elemento.

Un avance importante se produjo cuando Melosh y Killian^[21] abordaron en 1977 el problema de mejorar la malla añadiendo nuevos grados de libertad en contraste con el movimiento de los nodos de los trabajos anteriores. Para ello analizaron el cambio que se producía en la energía potencial total al añadir un nuevo nodo suponiendo que la posición de los nodos ya existentes no variaba.

Una técnica similar fue propuesta por Peano et al.^[25] en 1978 al introducir la adaptabilidad asociada a una formulación jerárquica de las funciones de forma de los elementos.

Tanto el método de Melosh y Killian como el de Peano intentan estimar la diferencia en energía entre la solución obtenida y la que se obtendría al añadir un determinado nodo. Entonces el refinamiento se realiza en función de estas estimaciones.

Aunque las bases de ambos métodos son las mismas las técnicas para realizar la estimación son distintas. Melosh y Killian sostienen un comportamiento a priori de la energía de deformación de la forma

$$\|e\|_E^2 = Ae^{BD} \quad (2.7)$$

donde $\|e\|_E^2$ es el error en la energía, D es el número de grados de libertad del análisis y A y B son constantes a determinar a partir de dos soluciones sucesivas. El principal problema de este método es que en general no existe ninguna evidencia de que el error se comporte de forma exponencial.

Peano evita este tipo de aproximaciones al basar su indicador de

refinamiento en la extensión que sufre la matriz de rigidez \mathbf{K} al añadir un nuevo grado de libertad de forma jerárquica. Si representamos las ecuaciones de equilibrio correspondientes al problema a resolver por

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}_1 = \mathbf{P}_1 \quad (2.8)$$

entonces las nuevas ecuaciones de equilibrio asociadas a un refinamiento jerárquico introduciendo un conjunto adicional de variables \mathbf{u}_2 se pueden escribir como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{11} & \mathbf{K}_{21} \\ \mathbf{K}_{12} & \mathbf{K}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^1 \\ \mathbf{u}^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}^1 \\ \mathbf{P}^2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

Si la ecuación (2.9) se resuelve mediante un esquema de Gauss-Seidel se obtiene:

$$\mathbf{K}_{11}\mathbf{u}_1^n = \mathbf{P}_1 - \mathbf{K}_{12}\mathbf{u}_2^{n-1} \quad (2.10)$$

$$\mathbf{K}_{22}\mathbf{u}_2^n = \mathbf{P}_2 - \mathbf{K}_{21}\mathbf{u}_1^{n-1} \quad (2.11)$$

Como \mathbf{u}_1 es conocido partir de una solución previa, \mathbf{u}_2 se puede estimar y tomar en consideración los valores más significativos después de una normalización en la energía. Este método tiene no obstante dos dificultades:

- Se requiere el cálculo de términos de la matriz de rigidez de alto orden.
- La convergencia hacia la energía exacta del proceso no es adecuada para determinar concentraciones de tensiones.

El primer inconveniente se solucionó con la introducción de la formulación jerárquica de las funciones de forma. La utilización de las mismas se desarrollará en el apartado siguiente ya que son la base de un grupo importante de métodos de refinamiento automático. Por ello no van a ser comentadas con detalle en este apartado.

La técnica desarrollada en el artículo de Peano tiene su origen en otro trabajo de Melosh y Marcal [22] publicado en 1977 en el cual la decisión sobre cuales son los nuevos grados de libertad que mejoran sensiblemente los resultados se toma en función de la sensibilidad de la energía potencial total respecto a la introducción de un nuevo nodo δ_i :

$$\frac{\partial \Pi_p}{\partial \delta_i} = \frac{\partial \mathbf{u}^T}{\partial \delta_i} \mathbf{K} \mathbf{u} + \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \delta_i} \mathbf{u} - \frac{\partial \mathbf{P}^T}{\partial \delta_i} \mathbf{u} \quad (2.12)$$

Ello introduce una forma alternativa para decidir cuales son los grados de libertad a añadir a la malla.

A pesar de los avances descritos seguía sin existir una forma de estimar la magnitud del error que existía en cada una de las soluciones obtenidas. Babuška y sus colaboradores [2] sustituyeron para ello las soluciones aproximadas obtenidas por el FEM en las ecuaciones diferenciales que definían el problema. Debido a la aproximación realizada, aparecen al hacer esta sustitución unos residuos que Babuška interpretó de una forma energética para conseguir un estimador de error a posteriori.

Con el trabajo de Babuška y sus colaboradores, el problema de la estimación de errores y la adaptabilidad para un problema general de elementos finitos se aborda por primera vez desde un punto de vista matemático. Así Babuška y Rheinboldt [3] relacionan en 1978 la estimación del error con unas cantidades localizadas η_i que se pueden calcular de forma aproximada. El teorema en que se basa el proceso muestra que esas cantidades conducen a una estimación del error que es óptima en el sentido de que con unas constantes multiplicativas se pueden obtener cotas superiores e inferiores al error, siendo

$$\eta^2 = \sum \eta_i^2 \quad (2.13)$$

el error total estimado. Entonces

$$K_1 \eta \leq \|\mathbf{e}\|_E \leq K_2 \eta \quad (2.14)$$

donde K_1 y K_2 son constantes independientes de la malla y de la solución.

Babuška y colaboradores desarrollaron esa teoría y la aplicaron a la solución de diversos problemas ^[4]. Incluso realizaron una extensión a problemas no lineales. No obstante un defecto inicial de esta teoría es que sólo afectaba a elementos lineales.

En tiempos más recientes han aparecido diversos desarrollos de estas técnicas que se describirán en apartados posteriores.

CAPÍTULO 3

FORMULACIÓN JERÁRQUICA DE LAS FUNCIONES DE FORMA

En el método de los elementos finitos la solución u a un problema de contorno se aproxima mediante expresiones del tipo:

$$u \approx \hat{u} = \sum_{i=1}^n N_i a_i \quad (3.1)$$

donde N_i es la función de forma correspondiente al i -ésimo grado de libertad, y a_i es el valor de la variable nodal correspondiente al mismo. Para hacer más sencillas las explicaciones, en este apartado se supondrá que cada función de forma multiplica a un solo coeficiente a_i , es decir, cada una de ellas representará un solo grado de libertad. Además se supondrá que la función u es unidimensional.

Este tipo de aproximaciones es común con otros muchos métodos de resolución de ecuaciones diferenciales, en especial con todos aquellos que expresan la solución mediante un desarrollo en serie. Este es el caso de los desarrollos en serie de Fourier, polinomios de Legendre, funciones de Bessel, etc.

En las formulaciones clásicas de elementos finitos la definición de las funciones de forma N_i cambia totalmente al aumentar el número de grados de libertad. Por tanto, una vez determinada una solución utilizando n_1 grados de libertad y obteniendo por tanto n_1 coeficientes a_i de la expresión (3.1) si se quiere refinar la misma utilizando un número mayor de grados de libertad n_2 es preciso recalcular de nuevo los coeficientes a_i correspondientes a todos los grados de libertad. Por ello el refinar una determinada malla obliga a repetir todos los cálculos realizados previamente.

En otros tipos de aproximación como los comentados desarrollos en serie, el realizar un refinamiento de una solución previa requiere solamente el cálculo de términos de mayor orden del desarrollo, pero el valor de los términos ya calculados no varía.

Para evitar este tipo de problemas Zienkiewicz et al. [37] propusieron ya en 1970 una expresión jerárquica de las funciones de forma N_i . Se dice que una aproximación a una función u es jerárquica si al incrementar de n a $n + 1$ el número de funciones N_i las n primeras no alteran su expresión.

3.1 FUNCIONES DE FORMA JERÁRQUICAS

Se definen los elementos finitos jerárquicos como aquellos en los cuales los refinamientos sucesivos son aditivos de forma similar a las series de Fourier. Con ello se consigue que la matriz de rigidez de un elemento correspondiente a un cierto nivel de refinamiento sea una submatriz de la que le correspondería para un nivel más alto.

Para conseguir que las funciones de forma N_i que aparecen en (3.1) no varíen al aumentar el grado de refinamiento debe abandonarse la idea tradicional de que los coeficientes a_i corresponden a los desplazamientos de cada nodo de la malla, ya que no se van a obtener directamente como resultados los movimientos de cada uno de ellos. Los coeficientes mencionados sirven para realizar la combinación lineal (3.1) de las funciones de forma pero sin el significado al que se está acostumbrado normalmente. Ocurre algo similar al interpolar la geometría de los elementos isoparamétricos mediante las funciones de forma, donde las constantes que multiplican a cada una de ellas, que usualmente son las coordenadas de los nodos, pierden su significado geométrico.

Existen dos versiones distintas de las formulaciones jerárquicas que se diferencian entre si en la forma en que las funciones de forma se van refinando al aumentar el número de grados de libertad de un elemento. Dichas versiones son las llamadas p y h . En la versión p la aproximación de la solución (3.1) se mejora con la introducción de funciones de forma N_i formadas por polinomios de orden p cada vez más alto, mientras que en la versión h lo que se introduce son funciones de forma formadas por polinomios que son siempre del mismo orden pero que están definidas sobre recintos de tamaño h cada vez más pequeño.

En una dimensión, la versión p del MEF trae consigo la adición de funciones de forma cuadrática, cúbica, etc. al elemento lineal, tal como se muestra en la figura 1.

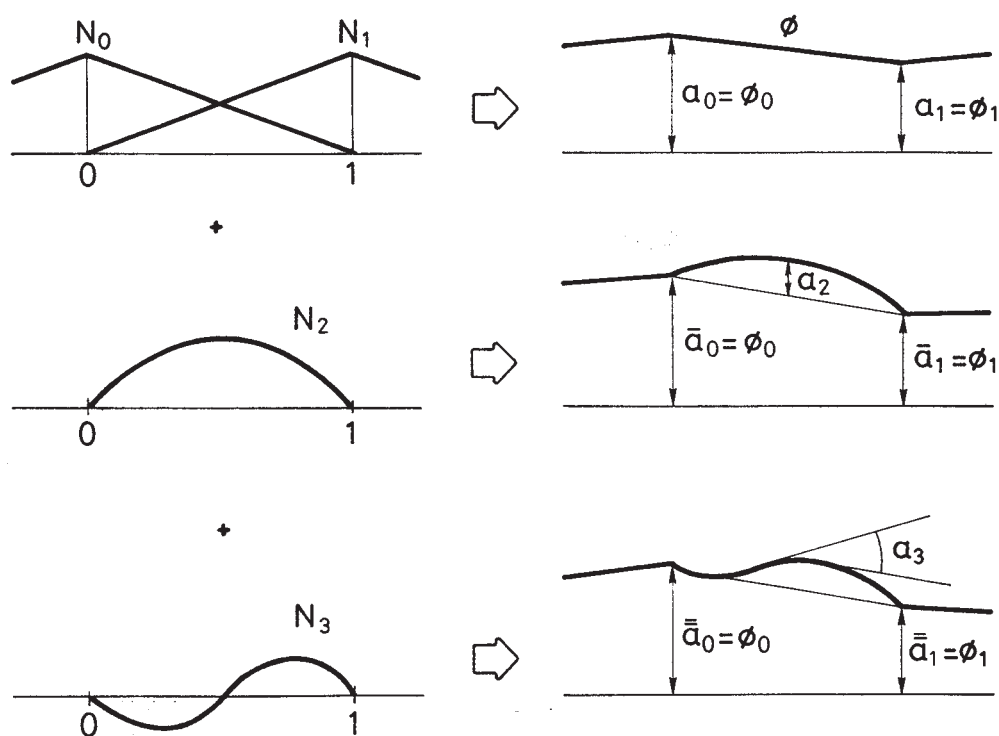


FIGURA 1 Elementos jerárquicos unidimensionales para la versión p del método de los elementos finitos.

Si se expresa las funciones de forma en función de la coordenada isoparamétrica con $-1 \leq \xi \leq 1$ se pueden obtener las funciones de forma que se presentan a continuación. Para los términos lineales:

$$\begin{cases} N_0 = \frac{1-\xi}{2} \\ N_1 = \frac{1+\xi}{2} \end{cases} \quad (3.2)$$

Para el término cuadrático se escoge una parábola que se anule en los

puntos $\xi = -1$ y $\xi = 1$ de forma que no interfiera con los coeficientes a_0 y a_1 . Por tanto:

$$N_2 = (\xi - 1)(\xi + 1) \quad (3.3)$$

Para los términos cúbicos y de mayor orden la única condición es que las funciones de forma se anulen para $\xi = -1$ y $\xi = 1$. Entonces para el término de orden p se puede escribir:

$$N_p = (\xi - 1)(\xi + 1)\xi^{p-2}, \quad p \geq 2 \quad (3.4)$$

Existen expresiones alternativas a las anteriores; una de ellas es la propuesta por Peano [25]:

$$N_p = \frac{\xi^p - b}{p!} \quad \begin{cases} b = 1 & \text{si } p \text{ es par} \\ b = \xi & \text{si } p \text{ es impar} \end{cases} \quad (3.5)$$

donde $p \geq 2$ es el orden del polinomio.

En este caso, el significado de las variables asociadas a_i es el de derivadas de \hat{u} , esto es

$$a_{p+1} = \frac{d^p \hat{u}}{d\xi^p} \quad (3.6)$$

En general la forma óptima de las funciones de forma será aquella que haga diagonal la matriz de rigidez. Si la ecuación diferencial a considerar es

$$-u'' + q = 0 \quad (3.7)$$

la mejor expresión coincide con las integrales de los polinomios de Legendre:

$$N_p = \frac{1}{(p-1)!} \frac{1}{2^{p-2}} \frac{d^{p-2}}{d\xi^{p-2}} (1-\xi^2)^{p-1} \quad (3.8)$$

Esta última expresión fue introducida por Zienkiewicz et al. [37]. La ventaja de esta última formulación es que para problemas unidimensionales no existe acoplamiento entre los grados de libertad de orden mayor a 2 y por ello las matrices de rigidez sólo presentan valores no nulos en su diagonal para dichos grados de libertad. Ello es debido a que estas funciones de forma son ortogonales con respecto al producto escalar energético que se definirá más adelante.

En el caso de que la ecuación diferencial a resolver sea distinta de la (3.7) se pueden hallar expresiones análogas a la (3.8) con sus mismas propiedades.

Para la versión h del MEF también existe un número infinito de posibilidades para definir los refinamientos jerárquicos correspondientes a subdivisiones del elemento inicial en partes iguales o desiguales. Si se considera un refinamiento jerárquico como el representado en la figura 2 las funciones de forma serán:

$$\begin{cases} N_0 = \frac{1-\xi}{2} \\ N_1 = \frac{1+\xi}{2} \\ N_2 = \begin{cases} 1 + \xi & \text{si } \xi \leq 0 \\ 1 - \xi & \text{si } \xi \geq 0 \end{cases} \end{cases} \quad (3.9)$$

Viendo la figura 2 es obvio que el significado físico de las variables lineales jerárquicas es el de desplazamientos relativos.

Una vez que se han establecido las fórmulas unidimensionales de interpolación, la generación de las funciones de forma jerárquicas para elementos bidimensionales se realiza siguiendo las siguientes premisas:

- las funciones correspondientes a nodos esquina son productos bilineales.
- las funciones jerárquicas adicionales a las anteriores son siempre nulas en las esquinas.

Las funciones de forma de orden superior para elementos bidimensionales se pueden obtener mediante productos de las expresiones unidimensionales. Sin

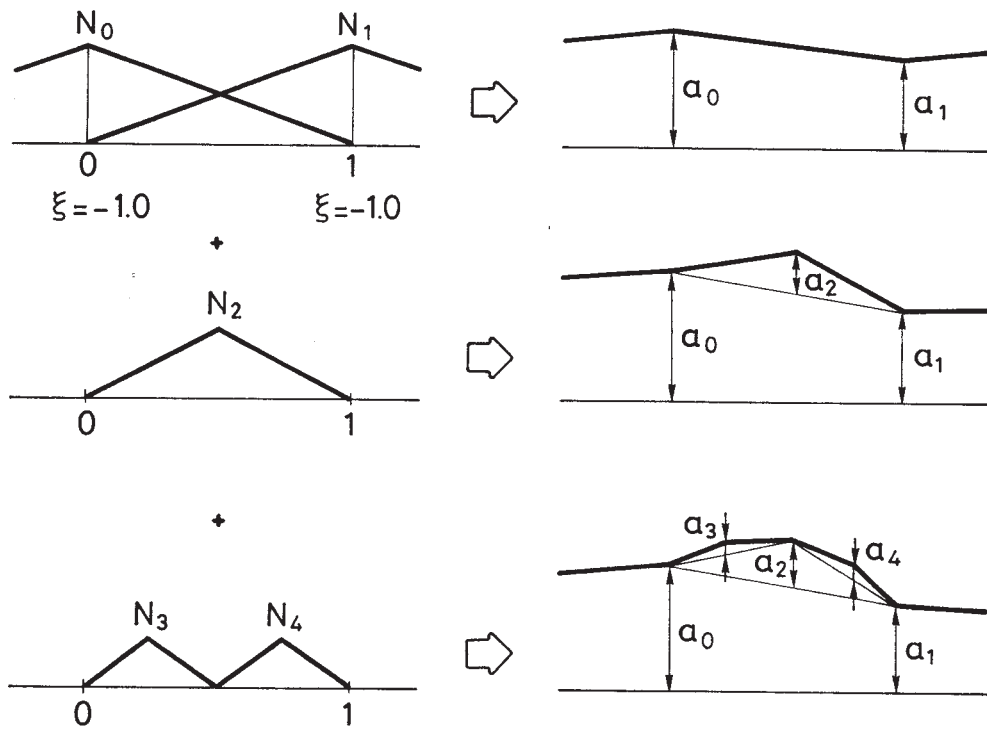


FIGURA 2 Elementos jerárquicos unidimensionales para la versión h del método de los elementos finitos.

embargo, al pasar a problemas con más de una dimensión se pierden en general las propiedades de ortogonalidad mencionadas anteriormente.

El caso tridimensional, así como el de los elementos triangulares son simplemente casos especiales de los conceptos presentados anteriormente.

En las figuras 3 y 4 puede verse para el caso bidimensional las funciones de forma clásicas y jerárquicas en las versiones p y h .

En el caso de definiciones de tipo p puede observarse que las funciones

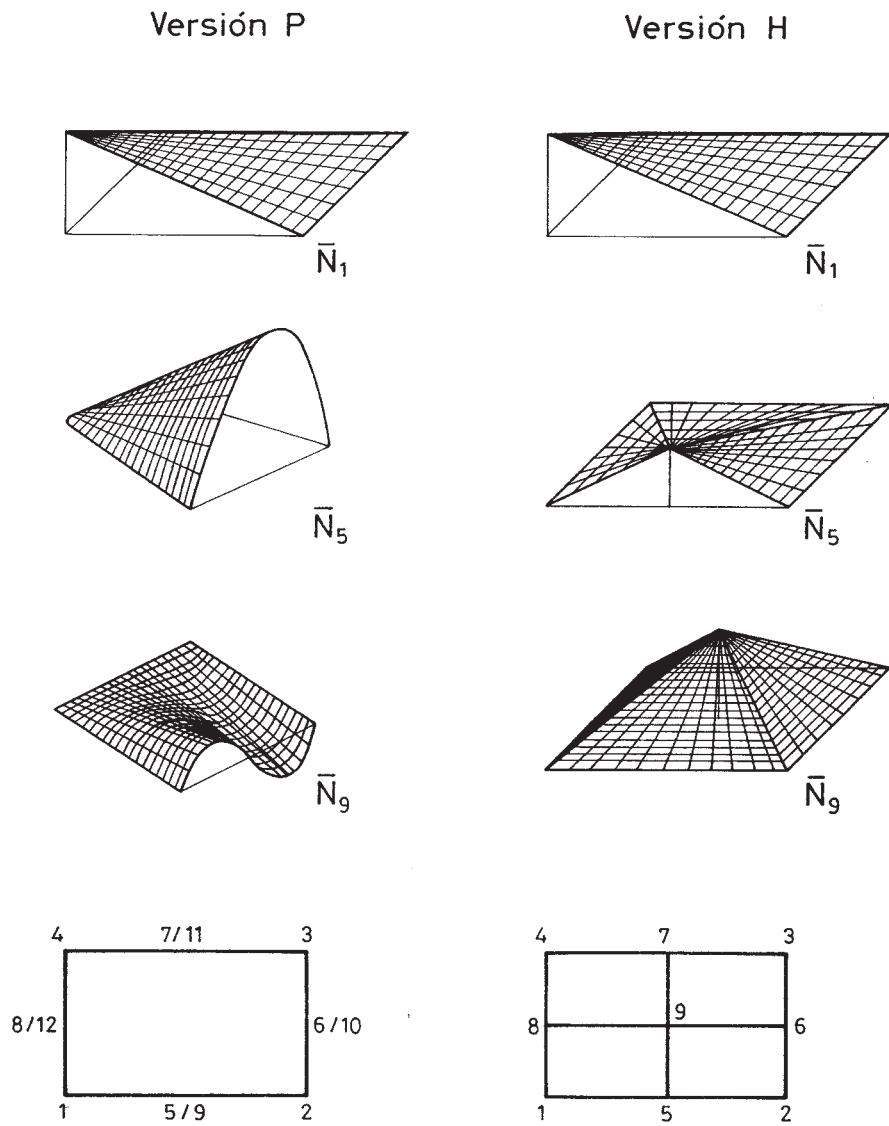


FIGURA 3 Formulación clásica de las funciones de forma bidimensionales para las versiones p y h .

de forma están jerarquizadas en el sentido de que para las de segundo orden existen unas funciones cuadráticas que se superponen con otras lineales. De la misma forma, para conseguir un elemento cúbico se superpondrían a las anteriores unas nuevas funciones definidas por polinomios de un orden superior y así sucesivamente. Con definiciones de tipo h sucede algo parecido, aunque lo que se superpone en cada refinamiento son funciones lineales definidas sobre recintos cada vez más pequeños.

En el presente contexto, el número de grados de libertad de una malla no es el número total de nodos multiplicado por el número de grados de libertad de cada uno de ellos sino que se entiende por ello el número total de funciones N_i empleadas para aproximar el campo de desplazamientos. Esta idea también existe en la formulación clásica de las funciones de forma si bien la idea de grado de libertad se asocia de forma tradicional con la del movimiento de un determinado nodo.

Un punto importante es que los campos de corrimientos generados por las formulaciones clásica y jerárquica son exactamente los mismos. La diferencia estriba en que en un caso y otro éstos están expresados como combinación lineal de funciones distintas. Las funciones de forma clásicas y las jerárquicas son, respectivamente, dos conjuntos de polinomios cuya combinación lineal genera el mismo espacio vectorial. Así, para un mismo tipo de elemento, existen dos formulaciones equivalentes, una clásica y otra jerárquica, mediante las cuales pueden obtenerse los mismos estados de deformación.

Existe por ello una correspondencia biunívoca entre los coeficientes de las dos descripciones, y por ello después de haber obtenido un campo de desplazamientos mediante la formulación jerárquica se pueden calcular los coeficientes del mismo para la descripción clásica recuperando el significado tradicional de los mismos. Esta operación es en realidad un cambio de base dentro del espacio vectorial de funciones al que pertenecen los campos de desplazamientos. La idea general es que las funciones de forma clásicas y jerárquicas son dos sistemas de generadores distintos que generan el mismo subespacio vectorial. De esta manera ambos tipos de funciones generan los mismos campos polinómicos para la solución del problema planteado.

Si se denotan las variables jerárquicas como \bar{u} mediante una barra y las clásicas mediante un gorro se puede escribir:

$$\hat{u} = N_i u_i = \bar{N}_j \bar{u}_j \quad (3.10)$$

Versión P

Versión H

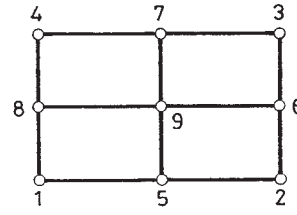
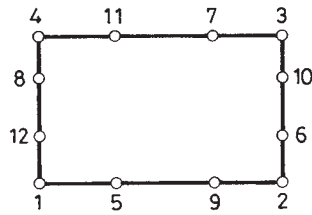
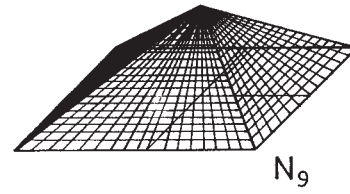
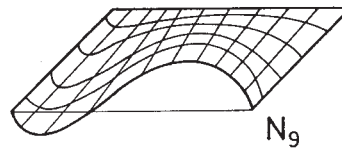
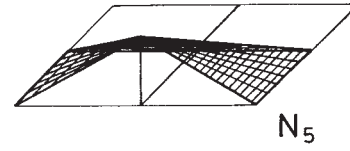
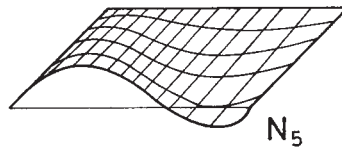
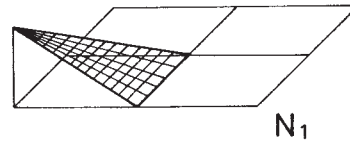
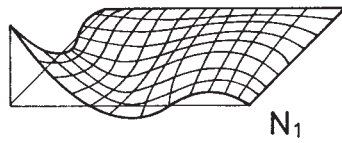


FIGURA 4 Formulación jerárquica de las funciones de forma bidimensionales para las versiones p y h .

Si se escribe la transformación como

$$\bar{u}_j = \tau_{ji} u_i \quad (3.11)$$

sustituyendo (3.11) en (3.10) se debe cumplir

$$N_i u_i = \bar{N}_j \bar{u}_j = \bar{N}_j \tau_{ji} u_i \quad (3.12)$$

para cualquier valor de u_i . En consecuencia:

$$N_i = \bar{N}_j \tau_{ji} \quad (3.13)$$

Dada que la solución obtenida mediante la dos formulaciones es la misma, la energía disipada por ambas debe ser también la misma y, por tanto, debe cumplirse:

$$\begin{aligned} u_i K_{ij} u_j &= \bar{u}_i \bar{K}_{ij} \bar{u}_j \\ &= \tau_{ik} u_k \bar{K}_{ij} \tau_{jl} u_l \\ &= u_k \tau_{ik} \bar{K}_{ij} \tau_{jl} u_l \end{aligned} \quad (3.14)$$

Lo cual da la transformación de la matriz de rigidez para pasar de la formulación clásica a la jerárquica y viceversa.

$$K_{kl} = \tau_{ik} \bar{K}_{ij} \tau_{jl} \quad (3.15)$$

3.2 ESTRUCTURA DE LAS ECUACIONES

Consideremos las ecuaciones del problema de contorno que se quiere resolver por el método de los elementos finitos:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 & \text{en } \Omega \text{ (dominio)} \\ \mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{s} = 0 & \text{en } \Gamma \text{ (contorno)} \end{cases} \quad (3.16)$$

donde \mathbf{L} y \mathbf{M} son operadores diferenciales lineales. El caso de elasticidad lineal es uno de los ejemplos más comunes de lo anterior donde \mathbf{L} es un operador lineal de segundo orden y \mathbf{M} suele ser de primer orden.

El método de los elementos finitos aproxima la solución de la forma ya clásica:

$$\mathbf{u} \approx \hat{\mathbf{u}} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{a}_i = \mathbf{N} \mathbf{a}^{(n)} \quad (3.17)$$

donde $\mathbf{a}^{(n)}$ es el vector de las incógnitas a determinar, \mathbf{a}_i son los coeficientes que corresponden a cada una de las funciones de forma N_i , \mathbf{N}_i son matrices cuadradas de dimensión igual al número de coeficientes (grados de libertad) a que multiplica cada una de ellas estando formadas por las funciones N_i en su diagonal y n es el número total de funciones N_i utilizadas en la malla. Dichas funciones pueden estar expresadas mediante cualquier tipo de formulación, ya sea la clásica o la jerárquica.

Si se utilizan las matrices \mathbf{N}_i , al aplicar el método de Galerkin ^{[16][45]} se obtiene:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{L}(\mathbf{N} \mathbf{a}^{(n)}) d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{q} d\Omega + \mathbf{b} = 0 \quad (3.18)$$

donde \mathbf{b} depende de las condiciones de contorno ^{[10][16][45]}.

De la expresión anterior se obtiene, tras integrar convenientemente por partes, la conocida ecuación matricial:

$$\mathbf{K}_{(n)} \mathbf{a}^{(n)} = \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.19)$$

donde $\mathbf{K}_{(n)}$ es la llamada matriz de rigidez y \mathbf{f} el vector de fuerzas nodales. Los detalles del proceso se pueden ver en cualquier texto sobre el método de los elementos finitos [10][16][45].

Cuando la malla se refina y se añaden m nuevos grados de libertad, el número de incógnitas crece hasta $\mathbf{a}^{(n+m)}$ y el proceso de discretización conduce a

$$\mathbf{K}_{(n+m)} \mathbf{a}^{(n+m)} = \mathbf{f}^{(n+m)} \quad (3.20)$$

Si el refinamiento se hace de forma jerárquica las funciones de forma utilizadas previamente se mantienen. Por ello los coeficientes de la ecuación (3.19) se conservan y lo que se hace es calcular los términos correspondientes a los nuevos grados de libertad, por ello se puede reescribir (3.20) utilizando los términos previamente calculados y añadiendo las nuevas filas y columnas correspondientes a los nuevos grados de libertad:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K}_{(n)} & \mathbf{K}_{(n,m)} \\ \mathbf{K}_{(m,n)} & \mathbf{K}_{(m)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a}^{(n)} \\ \mathbf{a}^{(m)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{(n)} \\ \mathbf{f}^{(m)} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

De esta forma la matriz $\mathbf{K}_{(n)}$ permanece invariable pudiendo ahorrarse con ello un considerable tiempo de cálculo. Esto por sí solo ya es una ventaja importante. Además, después de la resolución de (3.19) se puede obtener una primera aproximación a la solución de (3.21) que se puede utilizar como solución inicial de un proceso iterativo de resolución. Esta primera aproximación $\mathbf{a}^{(n)*}$ se obtiene mediante las siguientes expresiones:

$$\mathbf{a}^{(n)*} = (\mathbf{K}_{(n)})^{-1} \mathbf{f}^{(n)} \quad (3.22)$$

$$\mathbf{a}^{(m)*} = (\mathbf{K}_{(m)})^{-1} (\mathbf{f}^{(m)} - \mathbf{K}_{(m,n)} \mathbf{a}^{(n)*}) \quad (3.23)$$

También puede utilizarse la forma triangulada de $\mathbf{K}_{(n)}$ para, a partir de ella, obtener la de $\mathbf{K}_{(n+m)}$ para una resolución directa del sistema de ecuaciones.

Aunque los refinamientos se hagan de forma jerárquica los valores de las primeras n incógnitas varían. Esto es debido a que las nuevas funciones de forma que se añaden a la malla no están totalmente desacopladas de las anteriores. Como se ha comentado en el apartado anterior, sólo en problemas unidimensionales es posible expresar las funciones de forma de manera que eso no ocurra. Por ello, en dos o más dimensiones hay que recalcular todas las incógnitas y no sólo las m añadidas. No es posible en esos casos el conseguir expresar las funciones N_i de manera que formen una base ortonormal en el sentido del producto escalar energético definido como:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{L} \mathbf{b} d\Omega \quad (3.24)$$

Es decir:

$$\int_{\Omega} \mathbf{N}_i^T \mathbf{L} \mathbf{N}_j d\Omega \neq \delta_{ij} \quad (3.25)$$

Por otro lado, al añadir los nuevos grados de libertad se puede destruir la estructura en banda de la matriz de rigidez ya que su numeración no será en general la óptima si se considera toda la malla en conjunto. Si se realiza una renumeración de la misma entonces se debe volver a ensamblar toda la matriz y se pierde la posibilidad de aprovechar la forma triangulada de $\mathbf{K}_{(n)}$ para cálculos posteriores. En caso contrario, la adición de nuevas filas y columnas a continuación de las ya existentes puede producir una matriz muy vacía desaprovechando la memoria del ordenador y su tiempo de cálculo al invertir la matriz o al utilizar métodos iterativos de resolución. Es por todo ello que el aspecto práctico del refinamiento en lo que se refiere a la construcción de la nueva matriz $\mathbf{K}_{(n+m)}$ no es tan sencillo como los párrafos anteriores podrían parecer indicar.

Otro aspecto que hay que tratar con cuidado en refinamientos de tipo p es el de las cuadraturas utilizadas al integrar las matrices de rigidez. Cada vez que se incrementa un orden el grado de los polinomios que forman las funciones N_i debe utilizarse también una cuadratura de más alto orden. Por ello, cuando al finalizar el proceso se quiere evaluar el valor de ciertas derivadas de la función incógnita \mathbf{u} , como pueden ser las deformaciones en un problema de elasticidad

lineal, éstas deben calcularse en los puntos de integración de las cuadraturas de más alto orden utilizadas en virtud de que en ellos se obtienen los mejores valores. Pero debido a que antes de cada refinamiento las cuadraturas empleadas son de un orden inferior, los productos de las matrices DB que usualmente se almacenan al calcular las matrices de rigidez elementales, no sirven al cambiar de cuadratura. Por ello deben recalcularse esos productos en los nuevos puntos de integración para todos los grados de libertad. En el caso de refinamientos de tipo h el problema es similar aunque en vez de incrementar el orden de las cuadraturas lo que varía son los recintos de integración en cada refinamiento.

3.3 PROPIEDADES DE LAS FUNCIONES DE FORMA JERÁRQUICAS

Las funciones de forma jerárquicas reúnen una serie de propiedades que las hacen atractivas para su utilización. A saber:

- 1) Utilización de cálculos y soluciones previas a cada refinamiento.
- 2) Generación de un esquema simple de iteración al resolver el problema para los sucesivos refinamientos.
- 3) Mejora del condicionamiento de la matriz de rigidez. Esta propiedad es debida a que los grados de libertad jerárquicos son perturbaciones añadidas a las soluciones obtenidas con funciones de forma de más bajo orden. Por ello la matriz de rigidez resultante es más diagonal dominante que la que se obtendría utilizando una formulación clásica. Gracias a ello, la diferencia entre el máximo y el mínimo autovalor de la matriz de rigidez es menor en una formulación jerárquica que en una formulación clásica [10][40][45].
- 4) Proporciona una medida del error. Esta capacidad será comentada más adelante.

En contraposición a lo anterior, la utilización de funciones de forma jerárquicas presenta algunas dificultades que hacen que su implementación en un programa de ordenador no sea sencilla. Es más, una mala utilización de las

mismas puede eliminar las ventajas enumeradas en los puntos anteriores. Los principales problemas que se presentan son:

- 1) Necesidad de utilizar reglas especiales de integración debido al orden creciente de los polinomios que definen las funciones de forma en cada refinamiento.
- 2) Pérdida de la identificación de cada variable con el movimiento de un determinado nodo. Ello obliga a una transformación previa a la interpretación de los resultados.
- 3) Mala numeración de los grados de libertad añadidos en cada refinamiento. Ello puede provocar que resulte en ocasiones más rentable repetir todos los cálculos con una nueva numeración de los nodos que intentar aprovechar los antiguos, desperdiciando tiempo y memoria de ordenador al trabajar con la nueva matriz.
- 4) Necesidad de recalcular los productos **DB** en los puntos de integración de cada nueva cuadratura utilizada para el cálculo de deformaciones. Ello representa más de un 50% del esfuerzo necesario para calcular una nueva matriz de rigidez.

A partir de los razonamientos anteriores se pueden extraer una serie de conclusiones:

- Dejando aparte el tema de los refinamientos, la utilización de las formulaciones jerárquicas para las funciones de forma es siempre recomendable para conseguir mejoras en el condicionamiento de la matriz de rigidez. En este caso la única dificultad que ello representa es la pérdida de la identificación de cada variable con el movimiento de cada nudo.
- La utilización práctica de las formulaciones jerárquicas en procesos de refinamiento es muy compleja debido a las dificultades comentadas en los puntos anteriores. Este hecho hace que el atractivo teórico que presenta la utilización de estas formulaciones desaparezca al tratar de solucionar los problemas que aparecen al implementarlas en un programa de ordenador. Esta idea, que en principio parece acertada, puede quedar totalmente desvirtuada a no ser que su implementación sea muy cuidadosa.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DEL ERROR

Las ecuaciones de equilibrio que se emplean dentro del campo de la mecánica de estructuras son siempre ecuaciones diferenciales de segundo orden. Ejemplos clásicos de ecuaciones de este tipo son las ecuaciones de Laplace, Poisson o Navier [10][16][45].

Las ecuaciones que gobiernan el correspondiente problema de contorno son:

$$\begin{cases} \mathbf{L}\mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{M}\mathbf{u} - \mathbf{t} = 0 & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (4.1)$$

Donde \mathbf{L} es un operador diferencial elíptico de segundo orden, \mathbf{u} es la solución que se trata de aproximar y \mathbf{q} el término de fuerzas. Las dos últimas ecuaciones representan las condiciones de contorno. El contorno del dominio Γ se considera dividido en dos partes $\Gamma = \Gamma_D \cup \Gamma_N$ donde se especifican condiciones de Dirichlet y Neuman respectivamente. Debe ocurrir que $\Gamma_D \neq \emptyset$ para que la solución sea única.

La solución \mathbf{u} se aproxima de la forma descrita en (3.17) con un determinado conjunto de funciones de forma \mathbf{N}_i y con unos coeficientes \mathbf{a}_i que se determinan mediante las ecuaciones (3.18).

El hecho de que $\hat{\mathbf{u}}$ sea una aproximación y no la solución exacta a las ecuaciones (4.1) hace que si se sustituye en (4.1) aparezcan unos residuos \mathbf{r}_Ω y \mathbf{r}_Γ .

$$\begin{cases} \mathbf{L}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{q} = \mathbf{r}_\Omega & \text{en } \Omega \\ \mathbf{M}\hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t} = \mathbf{r}_\Gamma & \text{en } \Gamma \end{cases} \quad (4.2)$$

Como se verá más adelante estos residuos proporcionan estimaciones sobre el error local y global en una solución y sobre la mejor manera de reducirlo.

El ámbito de este trabajo se reduce principalmente al caso de problemas de elasticidad lineal. La expresión (4.1) se particulariza en este caso a:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{q} = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{t} = 0 & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (4.3)$$

donde se ha utilizado el operador matricial \mathbf{S} que define las deformaciones

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{S} \mathbf{u} \quad (4.4)$$

y la matriz elástica \mathbf{D} que define las tensiones como

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (4.5)$$

A partir de las expresiones anteriores se pueden identificar $\mathbf{L} = \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}$ y $\mathbf{M} = \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S}$. A su vez \mathbf{q} representa las fuerzas de volumen y \mathbf{t} las tensiones prescritas sobre parte del contorno. \mathbf{n} representa el vector normal al contorno en Γ_D .

La matriz \mathbf{B} presentada en (2.1) resulta ser el producto:

$$\mathbf{B} = \mathbf{S} \mathbf{N} \quad (4.6)$$

Al sustituir la solución aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ en las ecuaciones (4.3) aparecen los residuos como:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{q} = \mathbf{r}_\Omega & \text{en } \Omega \\ \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} - \mathbf{t} = \mathbf{r}_\Gamma & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (4.7)$$

Asimismo, el producto escalar energético definida en (3.24) se convierte para este caso particular en:

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{b} d\Omega \quad (4.8)$$

Puede verse de forma casi inmediata que con este producto escalar, la norma del campo \mathbf{u} coincide con el trabajo realizado por las fuerzas de volumen.

$$\begin{aligned} \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Omega \end{aligned} \quad (4.9)$$

4.1 NORMAS DE MEDICIÓN DE ERROR

La resolución de un problema de contorno mediante el método de los elementos finitos consiste fundamentalmente en una minimización de algún tipo de “energía”, es decir, una solución obtenida por el MEF es óptima en un sentido “energético”. En el caso de problemas de elasticidad esta “energía” coincide con la energía real que constituye el funcional a minimizar. En este trabajo se utilizará la norma energética como base del análisis del error ya que es la norma “natural” a considerar.

Para definir el error en la energía se debe definir primero el error asociado a la solución aproximada $\hat{\mathbf{u}}$ como la diferencia entre ésta y la solución exacta.

$$\mathbf{e} = \mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}} \quad (4.10)$$

Asimismo conviene definir el error en tensiones \mathbf{e}_{σ} como la diferencia entre las tensiones de la solución exacta $\boldsymbol{\sigma}$ y las obtenidas a partir de la solución aproximada $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$

$$\mathbf{e}_{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (4.11)$$

La medida del error local definida en (4.10) y (4.11) no es en general muy conveniente ya que además de ser difícilmente estimable da en ocasiones informaciones confusas. Por ejemplo, bajo cargas puntuales tanto los errores en desplazamientos como en tensiones pueden ser localmente infinitos pero las soluciones globales pueden ser muy aceptables. Casos similares pueden darse en puntos como entallas o esquinas donde existen singularidades en las tensiones y fuertes concentraciones y gradientes de las mismas. Por ello se introducen 'normas' con forma de integral para representar medidas globales de error.

La forma más extendida de definir la norma del error es la que utiliza el producto escalar ya definido en (3.24) [38][39][40][42][45].

$$\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{a}^T \mathbf{L} \mathbf{b} d\Omega \quad (4.12)$$

La llamada "energía" del error o norma energética del error vendrá dada entonces por:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{L} \mathbf{e} d\Omega \quad (4.13)$$

Particularizando al caso de la elasticidad lineal la norma anterior se puede expresar como:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \langle \mathbf{e}, \mathbf{e} \rangle = \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega \quad (4.14)$$

Esta norma se puede relacionar con los residuos \mathbf{r}_{Ω} y \mathbf{r}_{Γ} definidos en (4.2) y (4.7). Utilizando (4.3) y (4.7) se tiene en el dominio Ω :

$$\begin{aligned} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} &= \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} - \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} \\ &= \mathbf{q} - (\mathbf{r}_{\Omega} + \mathbf{q}) \\ &= -\mathbf{r}_{\Omega} \end{aligned} \quad (4.15)$$

Asimismo, usando la parte definida en el contorno de las mencionadas ecuaciones se tiene en Γ_N :

$$\begin{aligned}
GDS\mathbf{e} &= GDS\mathbf{u} - GDS\hat{\mathbf{u}} \\
&= \mathbf{t} - (\mathbf{r}_\Gamma + \mathbf{t}) \\
&= -\mathbf{r}_\Gamma
\end{aligned} \tag{4.16}$$

y de (4.14) y (4.15) se puede concluir:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = - \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{r}_\Omega d\Omega \tag{4.17}$$

De esta manera se puede identificar la energía del error como un producto interno de los residuos no equilibrados por el error \mathbf{e} existente en la solución.

Además, se puede demostrar que para el caso $\Gamma_N = 0$ esta norma energética del error coincide con la diferencia existente entre la energía de las soluciones exacta y aproximada. Para ello se debe comenzar por probar que:

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \langle \mathbf{u}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \tag{4.18}$$

De (4.7):

$$\begin{aligned}
\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T (\mathbf{q} + \mathbf{r}_\Omega) d\Omega
\end{aligned} \tag{4.19}$$

El residuo \mathbf{r}_Ω es ortogonal a las funciones de forma según el producto escalar (3.24). Si no existiese dicha ortogonalidad, la aplicación del residuo como fuerza externa produciría un vector de fuerzas nodales equivalentes no nulo, y entonces se podría hallar un campo de desplazamientos que lo equilibrase. El hecho de que la existencia de \mathbf{r}_Ω no se refleje en los vectores de fuerzas que se utilizan para hallar los valores de los desplazamientos hace que las soluciones obtenidas no puedan equilibrarlo.

Teniendo en cuenta la ortogonalidad comentada y el hecho de que la solución $\hat{\mathbf{u}}$ es una combinación lineal de las funciones de forma, se cumplirá que:

$$\int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega = 0 \quad (4.20)$$

Por lo tanto la expresión (4.18) puede reducirse a:

$$\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\Omega \quad (4.21)$$

y a partir de la propia definición del problema (4.3):

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{q} d\Omega \\ &= \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \end{aligned} \quad (4.22)$$

Ahora se puede demostrar que la energía del error coincide con el error en la energía para esta clase de problemas y para el caso $\Gamma_N = 0$. De (4.3) y (4.4) se puede escribir:

$$\begin{aligned} \|e\|_E^2 = \langle e, e \rangle &= \int_{\Omega} e^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} e d\Omega \\ &= \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \hat{\mathbf{u}} d\Omega - 2 \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\ &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle \end{aligned} \quad (4.23)$$

En el desarrollo anterior se ha hecho uso de la propiedad conmutativa del producto escalar definido en (3.24), debido a la simetría de la matriz elástica \mathbf{D} .

A partir de (4.22) y (4.23) se puede ver que:

$$\begin{aligned}
\|e\|_E^2 &= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle + \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle - 2 \langle \hat{\mathbf{u}}, \mathbf{u} \rangle \\
&= \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle - \langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle \\
&= \|\mathbf{u}\|_E^2 - \|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2
\end{aligned} \tag{4.24}$$

que es la condición que se quería demostrar. Aunque la demostración anterior sólo es válida para $\Gamma_N = 0$, la expresión (4.24) también se suele aplicar a los casos en que ello no se cumpla.

Desde el punto de vista ingenieril la norma energética no es completamente satisfactoria. Un ingeniero preferiría tener una estimación del error en cada punto del dominio, tanto para las variables principales (desplazamientos), como para sus derivadas (tensiones) que en definitiva son las variables sobre las que se basa el diseño de estructuras. No obstante, no hay que olvidar que el método de los elementos finitos es un método global de aproximación y que por tanto la convergencia local de sus resultados está supeditada a una convergencia global de los mismos.

Existen otras posibilidades para definir la norma o forma de medir el error. Una generalización a (4.13) utilizada por Gago ^[15] consiste en incluir un término correspondiente al incumplimiento de las ecuaciones (4.3) en Γ_N .

$$\|e\|_{E1}^2 = \int_{\Omega} \mathbf{e}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{e}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} d\Omega \tag{4.25}$$

En este caso se puede ver que la norma de la solución \mathbf{u} coincide con la energía de deformación elástica disipada por el sólido. Para ello hay que hacer uso del teorema de Clapeyron:

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{u}\|_{E1}^2 &= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{u}^T \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{u} d\Omega \\
&= \int_{\Omega} \mathbf{u}^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Gamma_N} \mathbf{u}^T \mathbf{t} d\Gamma \\
&= \int_{\Omega} \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega
\end{aligned} \tag{4.26}$$

Zienkiewicz ^[43] propone la utilización de la norma L_2 tanto en desplazamientos como en tensiones:

$$\|e_u\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}})^T (\mathbf{u} - \hat{\mathbf{u}}) d\Omega \quad (4.27)$$

$$\|e_{\sigma}\|_{L_2}^2 = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T (\boldsymbol{\sigma} - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (4.28)$$

Estas normas permiten concretar el error sobre las magnitudes de mayor interés del problema tales como los desplazamientos o las tensiones, de esta forma se pierde la necesidad de tener que medir el error sobre algo tan 'abstracto' como la energía. No obstante, con estas normas se pierde una cierta 'elegancia' matemática por no ser tan coherentes con el ámbito general del MEF ^{[10][16][45]}.

Asimismo Zienkiewicz también propone utilizar valores medios del error obtenidos de la forma:

$$|\Delta\sigma| = \left(\frac{\|e_{\sigma}\|_{L_2}^2}{\Omega} \right)^{1/2} \quad (4.29)$$

Todas las normas anteriores se pueden evaluar sobre todo el dominio, sobre subdominios e incluso sobre elementos individuales; de forma que:

$$\|e\|^2 = \sum_{i=1}^n \|e\|_i^2 \quad (4.30)$$

Otras posibilidades comentadas en ^[15] son:

$$\|e\|_{L_p} = \left(\int_{\Omega} (e^p d\Omega) \right)^{1/p} \quad 1 < p < \infty \quad (4.31)$$

$$\|e\|_{L_{\infty}} = \max |e| \quad x, y \in \Omega \quad (4.32)$$

4.2 VELOCIDAD DE CONVERGENCIA

Una vez definida la magnitud que caracterizará al error asociado a una determinada solución $\hat{\mathbf{u}}$ es necesario conocer la forma en que se va a intentar evaluar. Para ello existen dos grandes familias de estimadores de error, los denominados “a priori” y los “a posteriori”.

Los estimadores de error a posteriori reciben su nombre del hecho de que su cálculo precisa de la resolución previa del problema mediante la malla de elementos finitos que se utilice. Es a partir de los resultados en desplazamientos, deformaciones y tensiones obtenidas con esa malla con los que se calcula, mediante diversas expresiones, una estimación del error asociada a la misma. Este tipo de estimador proporciona, pues, la información una vez realizado ya todo el proceso de cálculo.

Los estimadores de error a priori dan una idea de como crece o decrece el error al variar la malla que se emplee sin necesidad de un cálculo sobre la misma. La expresión más completa es quizás la dada por Babuška y Dorr [6]:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^{\min(p,m-1)} p^{-(m-1)+\epsilon}, \quad \epsilon > 0 \quad (4.33)$$

donde h es el mayor diámetro de los elementos empleados, p es el grado de los polinomios que describen las funciones de forma, m es una medida del orden de singularidad del problema y C es una constante que depende del problema.

En la expresión (4.33) se observa como el error tiende a cero (se converge hacia la solución exacta), tanto al disminuir el tamaño de los elementos como al aumentar el grado de los polinomios.

Zienkiewicz y Craig [42] muestran que si las singularidades del problema se encuentran en el contorno, una expresión inversa a la anterior dice que refinamientos de tipo p convergen hacia la solución exacta dos veces más rápido que los refinamientos de tipo h . En ese y otros trabajos se comprueba mediante ejemplos que con el aumento del número de grados de libertad el error decrece más rápidamente si se aumenta el orden p de los polinomios que si se disminuye el tamaño de los elementos. Es por ello que los refinamientos jerárquicos suelen ser de tipo p , pues su convergencia hacia la solución exacta es más rápida.

De lo anterior se desprende, que si se comparan dos mallas con igual

número de grados de libertad pero utilizando en una de ellas polinomios de más alto orden y en la otra elementos más pequeños, los resultados obtenidos con la primera serán, en general, mejores que con la segunda. No obstante, hay que tener en cuenta que el ancho de banda de la matriz de rigidez obtenida en el primer caso será mayor que en el segundo al tener sus elementos más grados de libertad. Si se tiene en cuenta que el coste de la inversión o triangulación de la matriz de rigidez crece aproximadamente con el cuadrado de su semiancho de banda, se comprende que el coste de la resolución en el primer caso puede ser bastante mayor que en el segundo. Por ello, si los resultados se comparan en función de su coste de obtención ya no es tan evidente la ventaja de los refinamientos de tipo p .

La expresión (4.33) y similares no pueden utilizarse directamente para estimar el error cometido con una cierta malla ya que en general no se conoce el valor de C . Si se reescribe dicha expresión haciéndola depender del número n de grados de libertad de la malla se obtiene una nueva estimación del tipo [5]:

$$\|e\|_E \leq C_1 n^{-\alpha} \quad (4.34)$$

donde C_1 y α son funciones de p , h , m , y la topología de la malla. No obstante estos dos valores tienden a ser constantes al ir aumentando los niveles de refinamiento y ello conduce a la llamada extrapolación de Richardson [29] para predecir la solución exacta a partir de dos o más resoluciones previas.

Un último punto a tener en cuenta es el hecho conocido de que el uso de funciones de forma de orden p alto tiende a producir grandes oscilaciones de sus derivadas (tensiones y deformaciones) en las proximidades de los puntos singulares tales como cargas puntuales o puntos angulosos del contorno. Sucede algo parecido al intentar aproximar mediante un desarrollo en serie de Fourier una función de tipo escalón donde los términos con frecuencias altas también producen oscilaciones (ver figura 5).

Por ello la mayoría de los autores aconsejan no emplear polinomios de orden mayor que 3 en los refinamientos. Esta limitación obliga a partir inicialmente de mallas no demasiado groseras de forma que no sean necesarios más de uno o dos niveles de refinamiento de tipo p para conseguir resultados aceptables. En particular, es aconsejable comenzar con mallas que ya dispongan de elementos pequeños en las zonas próximas a los puntos singulares.

Los condicionantes anteriores hacen que no sea posible iniciar un proceso

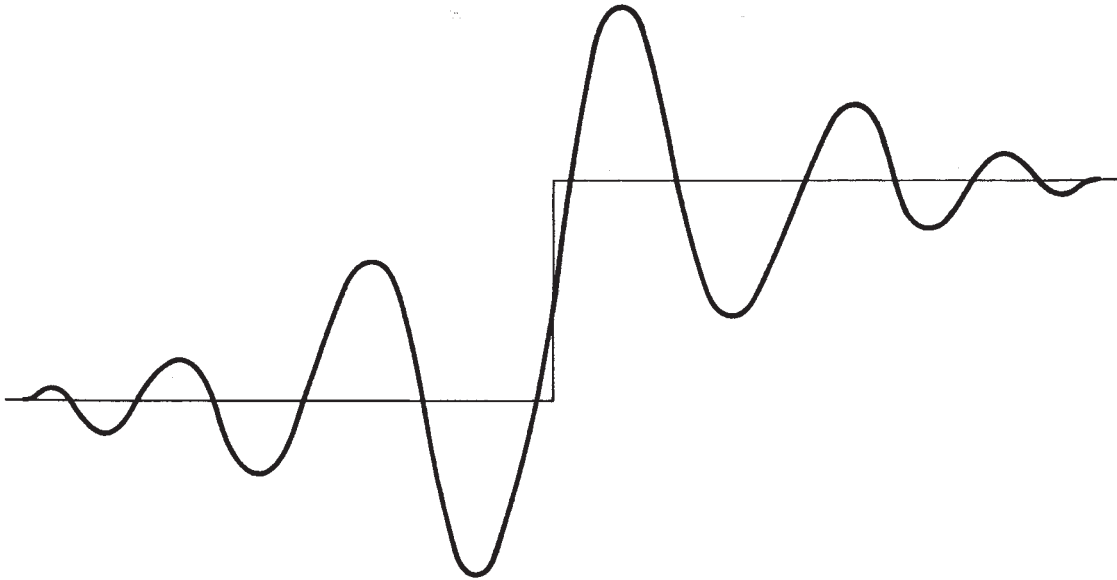


FIGURA 5 Aproximación de una función escalón mediante un desarrollo en serie de Fourier.

iterativo de refinamientos de tipo p partiendo de una malla en la cual sólo se hayan tenido en cuenta criterios de tipo geométrico para modelar el contorno de la estructura ya que puede ocurrir que una malla de este tipo sea demasiado grosera para obtener con ella buenos resultados con un número pequeño de niveles de refinamiento. Por ello muchos autores recomiendan combinar los dos métodos, p y h , para superar esta limitación. Se trataría primero de conseguir un cierto nivel de exactitud a base de refinamientos de tipo h para proseguir después con los de tipo p . Esta forma de actuar es mucho más compleja que el utilizar uno solo de los dos procedimientos por lo que hasta la fecha no se conoce ninguna metodología general para llevarlo a cabo, aunque se está de acuerdo en que sería la forma más eficaz y segura de refinar jerárquicamente cualquier tipo de malla.

En este sentido, Zienkiewicz, Zhu y Gong ^[44] presentan un procedimiento mediante el cual poder alcanzar niveles de error tan bajos como se quiera. Para ello proponen reducir el nivel de error obtenido mediante una primera malla a

través de dos etapas sucesivas en cada una de las cuales se utiliza un método diferente. Por ejemplo, para conseguir una malla con un nivel de error inferior al 1% el proceso sería el siguiente:

1. Utilización de remallados automáticos hasta conseguir un nivel de precisión de un 5%.
2. Realización de un refinamiento jerárquico de tipo p uniforme hasta alcanzar el nivel de error deseado del 1%.

También se presenta la alternativa inversa que consiste en realizar primero refinamientos jerárquicos de tipo p y, a continuación, remallados automáticos.

4.3 ESTIMADORES E INDICADORES DE ERROR

Al obtener una solución mediante el MEF es conveniente conocer no sólo la magnitud del error asociado a la misma sino también la forma más eficaz de mejorarla en caso de que no sea satisfactoria. Por ello existen dos tipos de información: los indicadores y los estimadores del error.

Un indicador de error proporciona información sobre donde refinar una cierta malla, mientras que un estimador de error da una aproximación a la medida del error global existente en un determinado elemento o región.

La utilización de indicadores de error es básica para realizar refinamientos jerárquicos a partir de una malla inicial pues su información permite escoger cuales son los grados de libertad que añadidos a la misma permiten mejorar la solución de la forma más económica hasta llegar a un nivel de precisión dado. La necesidad de estos indicadores viene dada por el hecho de que los estimadores de error proporcionan información acerca del error existente en una solución, pero no sobre la forma de disminuirlo. Es por ello que la utilización de los indicadores de error es necesaria para los procesos de refinamiento jerárquico.

En el caso de que la estrategia a utilizar sea de remallado y no de refinamiento lo que se precisa es información acerca del error existente sobre cada elemento por lo cual si se dispone de un estimador de error que la proporcione no es necesaria la utilización de un indicador de error.

CAPÍTULO 5

INDICADORES DE ERROR

Como ya se ha comentado anteriormente, los indicadores de error se utilizan en los procesos de refinamientos jerárquicos. Es por ello que en su desarrollo intervienen las formulaciones jerárquicas de las funciones de forma.

Basicamente lo que hace un indicador es informar sobre cuales son los grados de libertad que añadidos a una malla previa permitirán reducir el error de la forma más eficaz. Para obtener su expresión se debe considerar la introducción jerárquica de un conjunto de coeficientes \mathbf{a}_{n+1} que multiplicaría a una nueva función de forma N_{n+1} teniendo en cuenta que ésta puede afectar a varios grados de libertad. Si se supone que ya se tiene un sistema con n funciones de forma para el cual ya se ha determinado la solución $\hat{\mathbf{u}}^{(n)}$, con ello se obtendría una nueva solución $\hat{\mathbf{u}}^{(n+1)}$. Se trata de aproximar la parte del error que se corregiría con la introducción del nuevo conjunto de variables para utilizar ese valor como indicador de error.

Para ello se define el campo \mathbf{e}_{n+1} como la diferencia entre los dos campos de desplazamientos $\hat{\mathbf{u}}^{(n)}$ y $\hat{\mathbf{u}}^{(n+1)}$.

$$\mathbf{e}_{n+1} = \hat{\mathbf{u}}^{(n+1)} - \hat{\mathbf{u}}^{(n)} \quad (5.1)$$

El indicador de error que se está buscando η_{n+1} es una aproximación a la norma energética del campo \mathbf{e}_{n+1} . En otras palabras, el indicador de error η_{n+1} intenta aproximar cual sería la variación de la norma energética del campo $\hat{\mathbf{u}}$ al añadir al sistema una nueva función de forma. En virtud de (4.24) puede considerarse que esa variación coincide con la norma energética del campo \mathbf{e}_{n+1} .

$$\|\mathbf{e}_{n+1}\|_E^2 \approx \eta_{n+1}^2 \quad (5.2)$$

A partir de la expresión (3.23) se puede aproximar el valor de las nuevas variables \mathbf{a}_{n+1} por:

$$\mathbf{a}_{n+1} \approx \mathbf{a}_{n+1}^* = \mathbf{K}_{(n+1,n+1)}^{-1} (\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)}) \quad (5.3)$$

siendo como es usual:

$$\mathbf{K}_{n+1,n+1} = \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_{n+1} d\Omega \quad (5.4)$$

$$\mathbf{f}^{(n+1)} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{q} d\Omega \quad (5.5)$$

Si se considera despreciable la variación que sufrirían los n primeros valores \mathbf{a}_i , la corrección que se efectuaría en el campo de desplazamientos sería aproximable por:

$$\mathbf{e}_{n+1} \approx \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{a}_{n+1} \approx \mathbf{N}_{n+1} \mathbf{a}_{n+1}^* \quad (5.6)$$

A partir de ello se puede efectuar el siguiente razonamiento:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)} &= - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{q} d\Omega - \sum_{i=1}^n \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_i d\Omega \right) \mathbf{a}_i \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T [-\mathbf{q} - \sum_{i=1}^n (\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_i) \mathbf{a}_i] d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T [-\mathbf{q} - \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_n \hat{\mathbf{u}}^{(n)}] d\Omega \\ &\quad - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \end{aligned} \quad (5.7)$$

con lo cual:

$$\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)} = - \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (5.8)$$

Utilizando las expresiones (4.17) y (5.2) se puede escribir:

$$\eta_{n+1}^2 \approx - \int_{\Omega} \mathbf{e}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (5.9)$$

Incluyendo (5.5) en (5.9) se tiene:

$$\eta_{n+1}^2 = -\mathbf{a}_{n+1}^* \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \quad (5.10)$$

Y con la aproximación (5.3) y con (5.7) se puede concluir con:

$$\eta_{n+1}^2 = \mathbf{K}_{(n+1,n+1)}^{-1} \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega \right)^2 \quad (5.11)$$

o bien con

$$\eta_{n+1}^2 = \mathbf{K}_{(n+1,n+1)}^{-1} (\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)})^2 \quad (5.12)$$

La expresión (5.12) ya presentada por Peano [26] parece más directa que la (5.11) utilizada por Zienkiewicz et al., sin embargo la expresión (5.11) no precisa del cálculo de los nuevos términos de la matriz de rigidez $\mathbf{K}_{(n+1,n)}$ y sí en cambio el del residuo \mathbf{r}_{Ω} . Algunos autores [38] afirman que por ello esta última es de utilización más económica.

La evaluación del residuo \mathbf{r}_{Ω} en la expresión (5.11) no presenta dificultades si las funciones de forma son de tal grado de continuidad que el valor $\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{N}_i$ $i = 1, \dots, n$ es evaluable en todos los puntos del dominio. No obstante, en general las funciones de forma son de continuidad C^0 mientras que el operador formado por la conjunción de $\mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S}$ tiene normalmente términos en derivadas segundas, por ello el residuo puede tomar valores infinitos en las interfaces entre los elementos de la malla. Para superar esta dificultad se divide el dominio Ω en subdominios interiores a los elementos Ω^e y zonas de interface entre ellos I de espesor δ tal como se muestra en la figura 6.

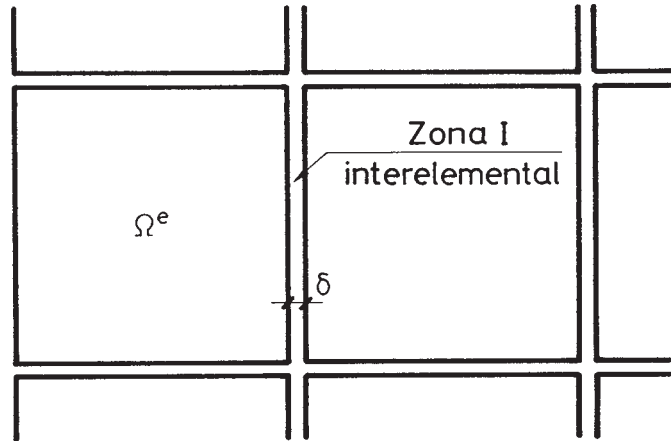


FIGURA 6 Zonas interiores a los elementos Ω e interfaces δ entre ellos.

En los interfaces entre elementos, cuyo espesor δ se supone tendiendo a 0, se puede escribir:

$$\int_I \mathbf{N}_i^T \mathbf{r}_\Omega d\Omega = \int_\Gamma \int_0^\delta \mathbf{N}_i^T \mathbf{r}_\Omega dn d\Gamma \quad i = 1, \dots, n \quad (5.13)$$

donde \mathbf{n} es la dirección normal a la interface y Γ es la directriz de la misma.

Los términos infinitos de \mathbf{r}_Ω vendrán definidos por derivadas segundas de los desplazamientos por lo que se puede expresar:

$$\int_0^\delta \frac{d^2 \hat{\mathbf{u}}}{dn^2} = \frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dn} \Big|_0^\delta \quad i = 1, \dots, n \quad (5.14)$$

lo cual es simplemente el salto del gradiente de $\hat{\mathbf{u}}$ que ocurre entre dos elementos

adyacentes.

Si se denota

$$\int_0^\delta \mathbf{r}_\Omega dn = \mathbf{J} \quad (5.15)$$

\mathbf{J} se podrá expresar en función de las componentes de (5.14). En particular, \mathbf{J} coincide con el vector cuyos valores son la discontinuidad de tensiones entre elementos adyacentes.

Si se acepta que la variación de \mathbf{N}_i^T es despreciable al atravesar el pequeño espesor δ se puede reescribir el término del lado derecho de la expresión (5.11) como:

$$\int_\Omega \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_\Omega d\Omega = \sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_\Omega d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{J} d\Gamma \quad (5.16)$$

donde los sumatorios se extienden sobre todos los elementos y sobre todos los interfaces entre ellos. La segunda de las integrales se extiende sobre dominios que son de una dimensión menor que los de la primera.

Las expresiones anteriores se han deducido suponiendo que los refinamientos jerárquicos se realizan de forma que al añadir una nueva función de forma N_{n+1} se añaden todos los grados de libertad a los que ésta puede afectar. Es decir, para cada nueva función de forma se añade un grado de libertad por cada una de las variables nodales que tiene el problema. Por tanto, en elasticidad tridimensional, la adición de una nueva función afectará a los desplazamientos en x , en y y en z ; y representará la adición de tres nuevos grados de libertad.

Los refinamientos también se pueden realizar añadiendo los grados de libertad uno a uno, de forma que cada una de las nuevas funciones de forma no multiplicará necesariamente a todas las variables nodales posibles. Para ello es preciso expresar los indicadores de error para cada uno de los grados de libertad por separado. Dichas expresiones se pueden obtener reemplazando las matrices \mathbf{N}_{n+1} por otras $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$ de la misma dimensión pero que sólo tienen un solo término no nulo, situado en la diagonal y en la fila correspondiente al grado de

libertad del cual se está calculando el indicador. Su valor será precisamente el de la función de forma N_{n+1} . Hay que tener en cuenta también que para cada grado de libertad, lo que se añade a la matriz de rigidez \mathbf{K} es una sola ecuación y no un conjunto de ellas. Las expresiones (5.11) y (5.12) se convierten entonces respectivamente en:

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{(\int_{\Omega} \hat{\mathbf{N}}_{n+1}^T \mathbf{r}_{\Omega} d\Omega)^2}{K_{(n+1,n+1)}} \quad (5.17)$$

$$\eta_{n+1}^2 = \frac{(\mathbf{f}^{(n+1)} - \mathbf{K}_{(n+1,n)} \mathbf{a}^{(n)})^2}{K_{(n+1,n+1)}} \quad (5.18)$$

siendo en este caso $K_{(n+1,n+1)}$ el término de la diagonal de $\mathbf{K}_{(n+1,n+1)}$ correspondiente al grado de libertad del cual se está calculando el indicador. Asimismo, los términos de $\mathbf{K}_{(n+1,n)}$ son los correspondientes a la ecuación para el grado de libertad correspondiente. El término $\mathbf{f}^{(n+1)}$ se calcula en este caso utilizando la matriz $\hat{\mathbf{N}}_{n+1}$.

CAPÍTULO 6

ESTIMADORES DE ERROR

En este apartado, y siguiendo el orden de su aparición cronológica, se van a presentar una serie de estimadores de error. Todos ellos pretenden evaluar la norma energética del mismo mediante expresiones que provienen de razonamientos, más o menos rigurosos.

Esta presentación no pretende ser exhaustiva sino que lo que se intenta es dar una visión general de los distintos enfoques que se han dado al problema de la estimación de error. Como se verá, existen muy diversas alternativas cada una de ellas con sus ventajas e inconvenientes. Hasta el momento no existe ningún estimador de error que cumpla todos los requisitos que serían deseables y por ello este es un campo en continuo desarrollo.

Aparte de los estimadores que se van a comentar existen otros muchos que no se incluyen debido a su menor interés desde el punto de vista de este trabajo, o bien a que todavía no se han manifestado como suficientemente útiles. Existen otras familias de estimadores de error que son de amplia aplicación en campos muy distintos al que nos ocupa, como puede ser la dinámica de fluidos [27].

Así como la utilización de los indicadores de error está limitada a los procesos de refinamientos jerárquicos, el uso de los estimadores de error es válido para cualquier tipo de algoritmo de corrección de errores. Por ello, las formulaciones de los estimadores que se describen a continuación no se limitan salvo indicación de lo contrario, a formulaciones jerárquicas sino que son de uso general tanto para procesos de refinamiento jerárquico como de remallado automático.

Podrían establecerse una serie de requisitos exigibles a un buen estimador de error con el fin de asegurar su utilidad en análisis prácticos. Estos son:

1. Ser determinado a posteriori (a partir de la información recibida del programa de cálculo).
2. Si se define un índice de efectividad θ como el cociente entre la estimación de la norma energética del error y la norma energética exacta del error

entonces debería ocurrir que $\theta \geq 1$ para cualquier malla y además $\theta \approx 1$. Con ello se pretende conseguir que los valores estimados queden del lado de la seguridad además de ser suficientemente aproximados.

3. Un estimador debe converger hacia un valor exacto de forma asintótica. Es decir, $\theta \rightarrow 0$ al tender el número de grados de libertad a infinito.
4. Un estimador debería dar una idea del grado de error en tensiones existente en una determinada solución.
5. Un estimador debería dar algún tipo de indicación local sobre cuales son las zonas que requieren un mayor grado de refinamiento.

Los estimadores de error que se van a presentar tienden a cumplir los requisitos anteriores. Aunque es muy difícil el conseguir que todos ellos se cumplan de forma simultánea.

6.1 ESTIMADOR DE ERROR DE BABUŠKA, RHEINBOLDT, ZIENKIEWICZ, KELLY Y GAGO

Este estimador apareció por primera vez ^[4] con una justificación matemática detallada a cargo de Babuška y Rheinboldt. Más tarde, Zienkiewicz, Kelly y Gago ^[38] propusieron otra justificación, más sencilla aunque menos matemática, a la misma expresión para problemas unidimensionales extrapolando sus razonamientos a dos dimensiones. Se presentará aquí esta segunda posibilidad ya que los requerimientos matemáticos de la primera exceden de los planteamientos de este trabajo.

El primer aspecto a considerar es que el error \mathbf{e} definido en (4.10) cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} + \mathbf{r}_\Omega = 0 & \text{en } \Omega \\ \mathbf{G} \mathbf{D} \mathbf{S} \mathbf{e} + \mathbf{r}_\Gamma = 0 & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (6.1)$$

donde \mathbf{r}_Ω y \mathbf{r}_Γ han sido previamente definidas en (4.7). La justificación de (6.1)

es inmediata al sustituir la definición de \mathbf{e} en (4.3) y teniendo en cuenta (4.7). De esta forma el campo \mathbf{e} se puede considerar como los desplazamientos que sufriría el dominio en estudio sometido a unas cargas volumétricas \mathbf{r}_Ω y unas cargas de contorno \mathbf{r}_Γ .

Consideremos primero un caso particular de las ecuaciones (4.1) en una sola dimensión:

$$-\frac{d^2u}{dx^2} + q = 0 \quad \text{en } [0, L] \quad \text{con } u(0) = u(L) = 0 \quad (6.2)$$

Consideremos una discretización lineal, a partir de unos puntos nodales x_i , y el correspondiente error e (en este caso escalar). A partir de (6.1) se puede escribir:

$$-\frac{d^2e}{dx^2} + r_\Omega = 0 \quad \text{con } e(0) = e(L) = 0 \quad (6.3)$$

Además se puede demostrar que en este caso particular (ver ref. [15]) $e(x_i) = 0$, por lo que e se puede determinar sobre cada intervalo $I_j = (x_{j-1}, x_j)$.

Si se supone que el residuo tiene la forma $r_\Omega = \bar{r} \sin \frac{\pi x}{L}$ entonces la ecuación (6.3) es fácil de resolver presuponiendo que e tiene la forma $e = \bar{e} \sin \frac{\pi x}{L}$ obteniéndose:

$$\bar{e} = -\frac{L^2}{\pi^2} \bar{r} \quad (6.4)$$

Además sobre el dominio Ω se tendrá:

$$\|e\|_E^2 = -\int_0^L e r_\Omega dx = \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L r_\Omega^2 dx \quad (6.5)$$

Si se considera el caso más general en que el residuo tenga la forma de un desarrollo en serie de Fourier

$$r_{\Omega} = \sum_i r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (6.6)$$

el error tendrá la forma

$$e = - \sum_i \left(\frac{L}{i\pi} \right)^2 r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \quad (6.7)$$

Sustituyendo lo anterior en (6.5) se obtiene:

$$\|e\|_E^2 = \int_0^L \left[\sum_i r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \right] \left[\sum_i \left(\frac{L}{i\pi} \right)^2 r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \right] dx \quad (6.8)$$

Debido a la ortogonalidad de las funciones seno se cumple:

$$\int_0^L \sin \frac{i\pi x}{L} \sin \frac{j\pi x}{L} dx = \delta_{ij} \quad (6.9)$$

Y, en consecuencia, de (6.8) y (6.9):

$$\begin{aligned} \|e\|_E^2 &= \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \left[\sum_i \frac{r_i}{i} \sin \frac{i\pi x}{L} \right]^2 dx \\ &\leq \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L \left[\sum_i r_i \sin \frac{i\pi x}{L} \right]^2 dx \\ &= \frac{L^2}{\pi^2} \int_0^L r_{\Omega}^2 dx \end{aligned} \quad (6.10)$$

Si se aplica la desigualdad anterior a cada intervalo I_i se obtendrá:

$$\|e\|_E^2 \leq \frac{1}{\pi^2} \sum_i (x_{i+1} - x_i)^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} r_{\Omega}^2 dx \quad (6.11)$$

Para elementos suficientemente pequeños y q suave se ha comprobado que el residuo r_Ω es también suave ^[15] y reemplazando el término π^2 por 12 la cota superior se convierte aproximadamente en el valor exacto de la norma del error. Si se denomina h_i a la longitud de cada elemento se obtiene que la expresión del estimador de error para problemas unidimensionales con elementos lineales es:

$$\|e\|_E^2 = \frac{1}{12} \sum_i h_i^2 \int_{x_i}^{x_{i+1}} r_\Omega^2 dx \quad (6.12)$$

En el caso de dos o tres dimensiones aparecen dos términos de error, uno regular en el interior de cada elemento r_Ω , y otro singular repartido en las interfaces entre ellos r_Γ .

Si se considera primero la parte regular del residuo r_Ω , y se supone que ésta se reparte a partes iguales en las distintas direcciones de los ejes cartesianos, una primera parte del error se puede estimar como:

$$\|e\|_{E_1}^2 = 2 \left[\frac{1}{12} \sum_i h_i^2 \int_\Omega \left(\frac{\mathbf{r}_\Omega}{2} \right)^2 d\Omega \right] \quad (6.13)$$

$$\|e\|_{E_1}^2 = \frac{1}{24} \sum_i h_i^2 \int_\Omega \mathbf{r}_\Omega^2 d\Omega \quad (6.14)$$

Para tener en cuenta el término singular se aproxima el residuo en las interfaces por:

$$\mathbf{r}_\Omega \approx \frac{\mathbf{J}}{h} \quad (6.15)$$

Esta aproximación se justifica en virtud de (5.15) si se considera pequeña la variación de \mathbf{r}_Ω a lo largo de la interface. Sustituyendo ese término en (6.14) se obtiene que en los contornos de los elementos:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_2}^2 = \frac{1}{24} \sum_i h_i \int_{\Gamma} \mathbf{J}^2 d\Gamma \quad (6.16)$$

Al término anterior debe añadirse un factor 1/2 al efectuar la suma sobre todos los elementos pues cada interface aparece dos veces.

La expresión final más general y más utilizada para este estimador en la que se ha incluido el efecto del orden p de los polinomios que aparecen en las funciones de forma es:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \leq \sum_{\Omega_e} \frac{h^2}{24kp} \int_{\Omega_e} \mathbf{r}_{\Omega}^2 d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \frac{h}{24kp} \int_{\Gamma_e} \mathbf{J}^2 d\Gamma \quad (6.17)$$

Donde h es el tamaño de cada elemento, p el grado de los polinomios de las funciones de forma y k una constante dependiente del problema ($k =$ conductividad en problemas térmicos, $E/(1 - \nu)$ en tensión plana, etc.).

Normalmente los valores obtenidos con este estimador son ligeramente inseguros en el sentido de que son inferiores al valor exacto del error. Además el hecho de necesitar una constante dependiente del tipo de problema hace que sea poco generalizable.

Szabo y Dunavant ^[33] presentan una expresión algo más compleja que permite tener en cuenta factores tales como la desigualdad del orden de los polinomios entre dos elementos contiguos.

6.2 ESTIMADORES DERIVADOS DE LOS INDICADORES DE ERROR

Dado que los indicadores de error intentan aproximar la modificación de la energía de deformación que se obtiene al añadir cada nuevo grado de libertad, la suma de todos ellos calculados para todos los grados de libertad que podrían ser añadidos a la malla debería dar una medida relativamente exacta de la norma del error. No obstante, al hablar de todos los posibles grados de libertad debe entenderse los infinitos grados de libertad necesarios para llegar a la solución exacta. Éstos pueden estar asociados a funciones de forma de grado muy alto y desconocido a priori.

Cuando se calcula el valor de los indicadores de error se están teniendo en cuenta únicamente los grados de libertad asociados a funciones de forma uno o dos órdenes superiores a las empleadas hasta ese momento. Dado que ésta es sólo una parte de los posibles grados de libertad a añadir a la malla la suma de esos indicadores será siempre inferior o igual al valor correcto de la norma energética del error. Por ello hay que hacer alguna transformación en los indicadores para obtener un estimador de error que no proporcione valores inferiores a los reales.

A partir de la expresión (5.11) se puede observar que en ocasiones el residuo \mathbf{r}_Ω puede ser ortogonal o casi ortogonal a las funciones de forma candidatas al próximo nivel de refinamiento. En ese caso, el valor de la integral que aparece en la expresión mencionada será muy pequeño para todos los posibles nuevos grados de libertad. Entonces, la corrección del campo de desplazamientos debe hacerse con funciones de más alto orden ya que son los grados de libertad asociados a éstas los que se verían afectados por la aplicación de las cargas correspondientes al residuo \mathbf{r}_Ω . Si en un caso donde se produjese ese efecto se efectuase la suma de los indicadores correspondientes a las funciones de forma casi ortogonales al residuo el resultado sería un valor demasiado bajo para la estimación del error. Una forma de evitar este efecto es intentar buscar una cota superior a la suma de los indicadores que intente aproximarse más al valor real de la norma energética del error. Para ello puede utilizarse la inecuación de Cauchy-Schwarz:

$$\left(\int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^T \mathbf{r}_\Omega d\Omega \right)^2 \leq \int_{\Omega} \mathbf{N}_{n+1}^2 d\Omega \int_{\Omega} \mathbf{r}_\Omega^2 d\Omega \quad (6.18)$$

La utilización de la anterior desigualdad permite conseguir valores más

del lado de la seguridad para la estimación del error. Si a lo anterior se añade el razonamiento realizado para la obtención de (5.16) se puede escribir:

$$\|e\|_E^2 \leq K_{(i,i)}^{-1} \left(\sum_i \left(\sum_{\Omega_e} \int_{\Omega_e} N_i^2 d\Omega \int_{\Omega_e} r_\Omega^2 d\Omega + \sum_{\Gamma_e} \int_{\Gamma_e} N_i^2 d\Gamma \int_{\Gamma_e} J^2 d\Gamma \right) \right) \quad (6.19)$$

donde el subíndice i se extiende sobre todas las posibles nuevas funciones de forma que se puedan añadir en el próximo refinamiento.

La experiencia obtenida con este estimador ^[42] muestra que da valores por encima de los reales con factor de aproximadamente $\sqrt{2}$ por lo que suele dividirse la expresión anterior por ese valor.

Tanto este estimador como el anterior presentan el inconveniente de que en sus expresiones intervienen integrales definidas sobre el contorno de todos los elementos. Los programas usuales de elementos finitos no están preparados para calcular integrales de ese tipo ya que carecen de la información topológica para ello, por esa razón su implementación puede ser laboriosa.

6.3 ESTIMADOR LOCAL DE ERROR DE SPECHT

Specht ^[32] presenta un nuevo tipo de estimador de error cuya justificación es bastante distinta a la de los anteriores. La principal característica de éste es la discretización del residuo mediante unas funciones que tienen unas propiedades de interpolación especiales.

En un problema de elasticidad lineal como el definido en (4.3) el error existente en la solución $\hat{\mathbf{u}}$ obtenida por elementos finitos se manifiesta en las condiciones de equilibrio para las tensiones $\hat{\sigma}_{ij}$ produciéndose unos residuos tanto en el interior del dominio del problema como en su contorno. Para cada elemento e las componentes de estos residuos tendrán la siguiente forma:

$$\begin{cases} r_{\Omega i}^e = \sum_j \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - q_i & \text{en } \Omega_e \\ r_{\Gamma i}^e = \sum_j n_j^e \hat{\sigma}_{ij} - t_i & \text{en } \Gamma_e \cap \Gamma_N \\ r_{\Gamma i}^e = \frac{1}{2} \sum_j (n_j^e \hat{\sigma}_{ij}^e + n_j^f \hat{\sigma}_{ij}^f) & \text{en } \Gamma_e \cap \Gamma_f \end{cases} \quad (6.20)$$

donde r_{Ω}^e es el residuo en el interior del elemento, r_{Γ}^e es el residuo en el contorno del mismo, \mathbf{n} es la normal al contorno en cada punto y \mathbf{t} la tensión prescrita en una parte del mismo $\Gamma_N \subset \Gamma$. Los índices i, j se mueven entre 1 y la dimensión del dominio. En las interfaces entre elementos $\Gamma_e \cap \Gamma_f$ se ha repartido el salto de tensiones entre los dos elementos conectados.

Para discretizar el residuo se utilizan una funciones de forma η_a cuya forma se verá más adelante. Con ello se obtienen unas fuerzas discretas equivalentes r_{ia} que en realidad son tensiones residuales ponderadas de la siguiente forma:

$$r_{ia}^e = \int_{\Omega_e} \sum_j \frac{\partial \eta_a}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) d\Omega \quad (6.21)$$

Si se integra por partes la expresión anterior se obtiene:

$$\int_{\Omega_e} \sum_j \frac{\partial \eta_a}{\partial x_j} (\sigma_{ij} - \hat{\sigma}_{ij}) d\Omega = \int_{\Gamma_e} \eta_a (\sum_j \hat{\sigma}_{ij} n_j - t_i) d\Gamma + \int_{\Omega_e} \eta_a (\sum_j \frac{\partial \hat{\sigma}_{ij}}{\partial x_j} - q_i) d\Omega \quad (6.22)$$

La integral volumétrica obtenida contiene el término definido en (6.20). La integral de superficie contiene un término cuyo valor sólo se conoce en el contorno Γ_N donde se han prescrito tensiones, siendo desconocido en el resto. No obstante parece lógico introducir el término definido en Γ_N en ella como una aproximación. Con ello se obtiene la siguiente expresión:

$$r_{ia}^e \approx \int_{\Gamma_N \cap \Gamma_e} \eta_a r_{\Gamma i}^e d\Gamma + \int_{\Omega_e} \eta_a r_{\Gamma i}^e d\Omega \quad (6.23)$$

La cuestión primordial es el tipo de funciones η_a utilizables para definir el error. En el caso de seleccionar para ello las mismas funciones de forma que

se han utilizado para discretizar el campo de desplazamientos las fuerzas r_{ia} se anularán idénticamente. Specht propone para evitar este efecto la utilización de unas funciones que cumplen unas condiciones de interpolación especiales en forma de integrales ponderadas:

$$\begin{cases} \int_{\Gamma_e} \gamma_b \eta_a d\Gamma = \delta_{ab} & (b = 1, \dots, n_1) \\ \int_{\Omega_e} \varphi_b \eta_a d\Omega = \delta_{ab} & \begin{cases} (b = n_1 + 1, \dots, n) \\ (a = 1, \dots, n) \end{cases} \end{cases} \quad (6.24)$$

Las funciones γ_b y φ_b deben ser capaces de representar los defectos en forma de combinaciones lineales:

$$\begin{cases} r_{\Omega_i}^e = \sum_b \gamma_b r_{ib} & \text{en } \Omega_e, (b = 1, \dots, n_1) \\ r_{\Gamma_i}^e = \sum_b \varphi_b r_{ib} & \text{en } \Gamma_e, (b = n_1 + 1, \dots, n) \end{cases} \quad (6.25)$$

Si se insertan estas ecuaciones en (6.23) y se tiene en cuenta las propiedades (6.24) se observa que los valores discretos r_{ib} coinciden con las fuerzas discretas equivalentes.

Para determinar las expresiones de las funciones η_a a partir de γ_b y φ_b puede partirse de una base de polinomios:

$$Z_a = \{1, x_1, x_2, x_1^2, x_2^2, \dots\} \quad (6.26)$$

resolviendo un sistema de ecuaciones lineales para hallar los coeficientes de cada η_a .

Las funciones γ_b deben ser no nulas sólo en el contorno del dominio pues en su interior no tienen ningún significado.

Las funciones η_a se pueden utilizar para crear una nueva matriz de rigidez asociada a ellas cuyos coeficientes \hat{K}_{ab} tienen la siguiente expresión:

$$\hat{K}_{ab} = \int_{\Omega} \eta_a^T \mathbf{S}^T \mathbf{D} \mathbf{S} \eta_b d\Omega \quad (6.27)$$

donde $\boldsymbol{\eta}_a$, y $\boldsymbol{\eta}_b$ son matrices con las funciones η_a y η_b en su diagonal.

Esta nueva matriz de rigidez es la correspondiente a las nuevas funciones de forma η_a y sus coeficientes son los que corresponderían a la ampliación de la matriz \mathbf{K} inicial con los grados de libertad asociados a las nuevas funciones de forma. Las fuerzas nodales equivalentes correspondientes a esos grados de libertad están definidas en (6.23).

Si se supone que el desplazamiento, que produce la aplicación de cada componente de la fuerza nodal elemental r_{ia}^e se puede aproximar por $r_{ia}^e / \hat{K}_{aa,d}^e$, donde $\hat{K}_{aa,d}^e$ es el término de la diagonal de $\hat{\mathbf{K}}_{aa}^e$, entonces la norma energética del error existente en el elemento e se podrá aproximar por:

$$\|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 \approx \sum_{i,a} \frac{(r_{ia}^e)^2}{\hat{K}_{aa,d}^e} \quad (6.28)$$

En realidad lo que se está haciendo es similar a lo visto en un apartado anterior para la justificación de la expresión de los indicadores de error. La diferencia está en que en esta ocasión se considera la introducción de unas nuevas funciones de forma que en vez de ser jerárquicas están caracterizadas por las expresiones (6.24). Se considera que los nuevos grados de libertad añadidos son los necesarios para llegar a la solución exacta, y que por tanto la energía de deformación que producen los desplazamientos asociados a ellos coincide con la norma energética del error correspondiente a la primera resolución del problema.

Para calcular la expresión (6.27) Specht [32] propone utilizar las mismas cuadraturas que para la obtención de la matriz de rigidez de la malla, ya que éstas producen una integración reducida de la misma por ser las funciones η_a de mayor orden que las funciones de forma N_i . Ello se traduce en valores mayores para el estimador y por tanto una tendencia hacia el lado de la seguridad.

Los términos r_{ia}^e del vector \mathbf{r}_a^e se obtienen de la expresión:

$$\mathbf{r}_a^e = \mathbf{F}_a^e - \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\eta}_a^T \mathbf{S}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega \quad (6.29)$$

donde \mathbf{F}_a^e viene definida por las condiciones de contorno del problema:

$$\mathbf{F}_\alpha = \int_{\Omega_e} \boldsymbol{\eta}_\alpha^T \mathbf{q} d\Omega + \int_{\Gamma_e \cap \Gamma_N} \boldsymbol{\eta}_\alpha^T \mathbf{t} d\Gamma \quad (6.30)$$

Specht [32] presenta la obtención de las funciones η_α correspondientes a los elementos planos de 4 y 8 nodos y su aplicación a un caso sencillo.

El algoritmo para el cálculo del estimador de error (6.28) es atractivo, sin embargo hay que hacer una serie de consideraciones:

- Para el cálculo de (6.27) se precisa repetir el cálculo de la matriz de rigidez empleando las funciones de forma η_α . Esto representa un elevado coste en términos de tiempo de cálculo.
- Para aplicar este estimador a cualquier tipo de elemento es preciso el cálculo previo de la expresión de las funciones η_α correspondientes. Este proceso no parece muy caro pues para cada uno de los elementos usuales sólo debe realizarse una vez. Sin embargo, si se está efectuando un refinamiento jerárquico de una determinada malla aparecen elementos de diversos tipos que pueden incluir o no diversas funciones de forma según el grado de refinamiento alcanzado. El hecho de que a partir de la malla inicial se vayan introduciendo de forma selectiva nuevas funciones de forma a cada elemento hace que en cada paso las funciones η_α deban cambiar de forma no predecible a priori y sea necesario calcularlas para cada una de las nuevas tipologías de elemento que puedan ir apareciendo. Por ello la implementación de este estimador en un proceso de refinamientos jerárquicos puede ser cara y complicada y su utilización parece más indicada en procesos donde en cada paso se efectúe un remallado total de la malla conservando siempre el mismo tipo de elemento.

6.4 ESTIMADOR DE ZIENKIEWICZ Y ZHU

En la resolución por elementos finitos de las ecuaciones (4.3) se utilizan normalmente funciones de forma de continuidad C^0 , lo cual se traduce en una aproximación discontinua a las tensiones $\boldsymbol{\sigma}$. Además es muy conocido el hecho

de que la evaluación de las mismas en puntos que no sean los correspondientes a la cuadratura de integración utilizada produce muy malos resultados. Para obtener resultados aceptables en cualquier punto de la malla se suele hacer un promediado o alisado de las tensiones mismas de forma que el campo resultante σ^* se interpola con las mismas funciones de forma que los desplazamientos. Para un sistema con n nodos se define

$$\sigma^* = \sum_{i=1}^n N_i \bar{\sigma}_i^* = \bar{N}^T \bar{\sigma}^* \quad (6.31)$$

donde $\bar{\sigma}_i^*$ son las tensiones alisadas nodales correspondientes al nodo i -ésimo, \bar{N} es un vector columna formado por las n funciones de forma correspondientes a cada uno de los nodos utilizados y $\bar{\sigma}^*$ es una matriz en la cual la fila i -ésima está formada por las tensiones alisadas nodales $\bar{\sigma}_i^*$. Zienkiewicz y Zhu [43] utilizan estas tensiones alisadas para construir con ellas un estimador de error.

En un proceso de alisamiento global la condición que se impone al campo de tensiones alisadas es:

$$\int_{\Omega} N_i (\sigma^* - \hat{\sigma}) d\Omega = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (6.32)$$

Esta expresión es equivalente a minimizar por mínimos cuadrados la diferencia entre las tensiones σ^* y $\hat{\sigma}$. También puede interpretarse la anterior expresión como una proyección de las tensiones $\hat{\sigma}$ sobre las funciones de forma. La expresión resultante para hallar los valores de $\bar{\sigma}^*$ es:

$$\begin{aligned} \bar{\sigma}^* &= \mathbf{M}^{-1} \int_{\Omega} \bar{N}^T \hat{\sigma} d\Omega \\ \mathbf{M} &= \int_{\Omega} \bar{N} \bar{N}^T d\Omega \end{aligned} \quad (6.33)$$

donde \mathbf{M} tiene la misma forma que las matrices de masas que normalmente se emplean para el análisis dinámico de estructuras [9], y $\bar{\sigma}^*$ es el vector de tensiones nodales alisadas.

La expresión anterior es muy sencilla de calcular, sobre todo si se utiliza una forma condensada de la matriz \mathbf{M} , aunque esto último suele producir malos

resultados para la estimación de errores. Por otro lado los valores de \mathbf{M} para cada una de las componentes del vector de tensiones son iguales y por lo tanto se puede formar la matriz como si este vector tuviese una sola componente y aplicarla de forma reiterada a cada una de ellas. Con ello se consigue disminuir el tamaño de la memoria y el tiempo de cálculo necesarios para invertirla. El número de filas y columnas de \mathbf{M} será por tanto la mitad que el de la matriz de rigidez \mathbf{K} en un problema plano, y la tercera parte en un problema tridimensional.

La evaluación de las integrales (6.33) requiere la utilización de cuadraturas un orden superior a las utilizadas para calcular la matriz \mathbf{K} . Ello es debido a que al calcular la matriz \mathbf{M} dentro de la integral aparecen las funciones de forma, mientras que al calcular \mathbf{K} lo que aparece son términos expresados en función de sus derivadas, que serán de un orden menor.

Las tensiones obtenidas mediante alisados no están, generalmente, en equilibrio sino que necesitan unas fuerzas residuales para ser equilibradas. Se pueden generar esquemas iterativos para minimizar esas fuerzas residuales (ver ref. [41]) pero en general son de convergencia lenta e insegura. No obstante, la magnitud de esas fuerzas residuales decrece al ir refinando la malla con lo que al ir disminuyendo la norma del error también disminuyen éstas.

También existe la posibilidad de utilizar métodos mixtos en tensiones y desplazamientos (ver ref. [45]) para obtener campos de tensiones continuos y en equilibrio, pero no tiene sentido, por razones de coste, el resolver un nuevo problema de elementos finitos aumentado en su número de incógnitas y complejidad para estimar el error cometido en un cálculo previo. Además, en esta nueva resolución se obtendría un nuevo campo de tensiones de mayor calidad que el anterior por lo que este último sería el que se aceptaría como correcto perdiendo interés el anterior.

Es razonable suponer que las tensiones alisadas σ^* son una mejor aproximación a la solución exacta del problema que las obtenidas directamente de los desplazamientos $\hat{\sigma}$. Hay dos razones que avalan esta hipótesis:

- En el proceso de alisado se eliminan las discontinuidades del campo de tensiones que existen en las caras de contacto entre elementos. Dado que de la solución exacta se espera que sea continua, es razonable suponer que el campo de tensiones alisado es más cercano a aquella.
- Asimismo, mediante el alisado se consigue una distribución de tensiones más uniforme dentro del dominio, de forma que la evaluación de dichas

tensiones es posible en cualquier punto con buenos resultados. Ello no es posible en el campo de tensiones inicial donde éstas sólo pueden evaluarse correctamente en los puntos de integración utilizados. Por ello puede decirse que el campo de tensiones alisadas tiene un nivel más alto de precisión.

Los experimentos numéricos confirman, efectivamente, la obtención de mejores resultados en tensiones después de un proceso de alisado.

En virtud de lo que se acaba de comentar se puede estimar el error en tensiones como:

$$\mathbf{e}_\sigma \approx \boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (6.34)$$

y estimar con ello la norma energética del error mediante:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \approx \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}})^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \quad (6.35)$$

La expresión anterior es la que proponen Zienkiewicz y Zhu [43] como estimador del error. Es fácil ver que la integral anterior se puede realizar sobre cada elemento obteniendo así un valor local del error para cada uno de ellos.

La aproximación (6.34) converge hacia un valor exacto y nulo a medida que se va refinando la malla ya que ambos campos de tensiones se acercan cada vez más a la solución exacta del problema. Por ello el el estimador tenderá también a producir valores más correctos durante dicho proceso.

En este trabajo se ha deducido una expresión equivalente a la expresión (6.35) que viene proporcionada por el producto entre el vector de fuerzas residuales de las tensiones alisadas y los desplazamientos nodales:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 \approx \sum_i \mathbf{a}_i^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right)_i \quad (6.36)$$

Para demostrar dicha equivalencia hay que demostrar previamente la

siguiente igualdad:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega = 0 \quad (6.37)$$

Para ello se desarrolla la expresión (6.37) de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{*T} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega &= \int_{\Omega} \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{*T} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i \left[\int_{\Omega} \bar{\mathbf{N}} \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \right]_i \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i \int_{\Omega} N_i \mathbf{D}^{-1} (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \\ &= \sum_{i=1}^n (\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i \mathbf{D}^{-1} \int_{\Omega} N_i (\hat{\boldsymbol{\sigma}} - \boldsymbol{\sigma}^*) d\Omega \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.38)$$

El término $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i$ denota el vector fila formado por las sucesivas i -ésimas componentes de las tensiones alisadas nodales. La matriz \mathbf{D}^{-1} se puede sacar fuera de la integral por ser constante así como las tensiones $(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^*)_i$. La expresión anterior se anula en virtud de la condición (6.32) que deben cumplir las tensiones alisadas.

Por otro lado la expresión (6.36) se puede desarrollar de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \sum_i \mathbf{a}_i^T \left(\int_{\Omega} \mathbf{N}^T \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right)_i &= \sum_i \mathbf{a}_i^T \left(\int_{\Omega} N_i^T \mathbf{S}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \right) \\ &= \int_{\Omega} \sum_{i=1}^n (\mathbf{S} N_i \mathbf{a}_i)^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \mathbf{D}^{-1} (\boldsymbol{\sigma}^* - \hat{\boldsymbol{\sigma}}) d\Omega \end{aligned} \quad (6.39)$$

Las expresiones (6.35) y (6.39) se diferencian únicamente en el término de (6.37), pero por ser este último nulo se comprueba la realidad de la igualdad de las dos expresiones para el estimador de error. La expresión (6.39) representa además una tercera alternativa para el cálculo del estimador de error obtenida en este trabajo.

Hay cuatro razones que hacen atractiva la utilización de estas expresiones:

- 1.- La sencillez de su cálculo y su facilidad para ser incorporadas a cualquier programa de elementos finitos.
- 2.- El hecho de que precisa del cálculo previo de unas tensiones alisadas no representa muchas veces un coste adicional, pues muchos programas ya lo realizan durante su normal funcionamiento.
- 3.- La circunstancia, no comentada hasta ahora, de que este tipo de estimador es matemáticamente equivalente al presentado en la sección 6.1, al menos para los elementos bilineales, de forma que los estudios matemáticos realizados por Babuška sobre el mismo le son también aplicables. Esta equivalencia puede profundizarse en las referencias [43].
- 4.- El hecho de que el error estimado corresponde al campo de tensiones obtenido de forma directa a partir de los desplazamientos y no al campo de tensiones alisadas. Si se acepta que estas últimas son más exactas, su error será menor que el de las anteriores. Dado que el error estimado mediante la expresión (6.35) es el correspondiente a las tensiones no alisadas, se tendrá la casi total seguridad de que éste es una cota superior al que existe en el campo de tensiones alisadas.

En la expresión de este estimador se supone que las tensiones σ^* son exactas y por tanto se estima el error en tensiones a partir de (6.34). En realidad lo que ocurre es que se acepta que las tensiones σ^* son una mejor aproximación a las existentes en la solución exacta de (4.3) que las obtenidas directamente a partir de \hat{u} . La exactitud de los resultados obtenidos con este estimador dependerá por tanto de la exactitud de las tensiones σ^* . Estas últimas se obtienen mediante un simple alisado de tensiones, sin embargo pueden desarrollarse procedimientos más complejos para conseguir campos de tensiones todavía mejores. La única limitación a estos procesos es su coste, ya que no se considera aceptable que el cálculo del estimador de error suponga un coste superior al de la resolución de las mismas ecuaciones (4.3). Algunas posibilidades para mejorar el campo de tensiones alisadas podrían ser:

- Obtención de un campo de tensiones alisadas cuyas fuerzas residuales nodales sean nulas. Como ya se ha comentado existen procedimientos iterativos para ello pero en general no son muy robustos. El hecho de que un campo de tensiones alisadas esté en equilibrio es, evidentemente, una mejora importante.
- Aplicación de las condiciones de contorno especificadas en Γ_N al campo de tensiones alisadas. De esta forma se obtendría un campo de tensiones mejorado en el sentido de que cumpliría exactamente las condiciones de contorno del problema. Sin embargo, el coste de este proceso sería muy alto ya que en general las condiciones se especificarían sobre tensiones en direcciones arbitrarias. Debido a ello ya no sería posible desacoplar el alisado de cada componente por separado creciendo el tamaño de la matriz de masas \mathbf{M} por encima incluso del de la matriz de rigidez. Además, este procedimiento podría producir problemas en puntos con discontinuidades de tensiones (interfaces entre materiales distintos, puntos de aplicación de cargas puntuales, fronteras entre zonas cargadas y zonas descargadas, puntos singulares, etc).

Ainsworth, Zhu, Craig y Zienkiewicz ^[1] presentan un análisis matemático de las propiedades de este estimador de error. Éste se sitúa dentro de una familia más amplia de estimadores en los cuales se efectúa algún tipo de proyección de las tensiones $\hat{\sigma}$ sobre una familia de funciones que en este caso son las funciones de forma. Se incluyen también en esta familia los estimadores en los cuales se realiza un alisado de deformaciones y no de tensiones. Éstos parecen poseer algunas virtudes adicionales desde el punto de vista matemático.

6.5 ESTIMADOR DE ERROR DE ROBERTI Y MELKANOFF

Roberti y Melkanoff ^[31] proponen un nuevo estimador de error, válido para elementos lineales en una dimensión, y elementos triangulares y tetraédricos, también lineales, en dos y tres dimensiones respectivamente. La justificación de la expresión que presentan se basa en que si los elementos son suficientemente pequeños se pueden considerar como ciertas las siguientes proposiciones:

- La solución exacta para las tensiones σ se puede considerar lineal en el interior de cada uno de los elementos.

- El valor exacto de las tensiones σ coincide con el obtenido del cálculo por elementos finitos $\hat{\sigma}$ en el centroide de cada elemento.

En estas condiciones, los autores mencionados proponen, para refinar una determinada malla A , una estrategia a base de subdividir los elementos tal como se señala en la figura 7 para el caso de triángulos planos. De esta forma cada uno de los elementos de la malla A queda subdividido en cuatro nuevos elementos de una nueva malla B . A partir de las diferencias de tensiones entre las dos mallas se puede estimar el error de las mismas en la malla B .

De una forma muy resumida se puede decir que después de refinar el triángulo A para obtener los cuatro nuevos de B , el máximo error en tensiones de estos últimos se puede obtener a partir de la máxima diferencia de las mismas entre las obtenidas en el centroide del elemento P y las obtenidas en el de H_1 , H_2 y H_3 . En la referencia [31] se justifica la anterior afirmación para el caso de una y dos dimensiones y se razona su rango de validez para una dimensión. Los razonamientos empleados para ello son puramente geométricos tomando como premisas las proposiciones ya mencionadas. Los triángulos donde el error exceda de un determinado límite prefijado se refinan repitiendo el proceso anterior.

La estimación del error propuesta es muy simple pero adolece de las siguientes limitaciones:

- Solo es válida para elementos triangulares o tetraédricos lineales no siendo extrapolable, por el momento, a otros tipos de elementos.
- Precisa del refinamiento de una malla inicial con lo que sólo puede estimarse el error tras un primer refinamiento y, por tanto, después de haber empleado, al menos, dos mallas.
- No queda necesariamente del lado de la seguridad en sus estimaciones pudiendo ser en ocasiones inseguro.
- Los refinamientos deben realizarse de la forma mostrada en la figura 7 y por ello no es posible realizar refinamientos jerárquicos ni remallados automáticos no estructurados.

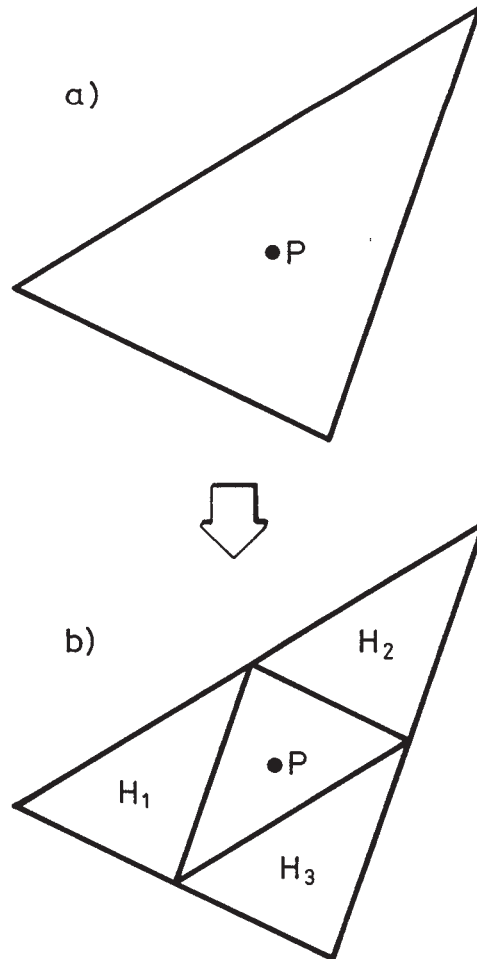


FIGURA 7 Subdivisión de los elementos.

6.6 ESTIMADOR DE KELLY, MILLS, REIZES Y MILLER

Este estimador introducido por Kelly ^[17] y perfeccionado por él mismo y sus colaboradores Mills, Reizes y Miller ^{[18][19]}, proporciona unas cotas superior e inferior para la norma del error de una solución obtenida por cualquier método

numérico. Este estimador está desarrollado para un caso particular de (4.1) que es el siguiente:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{u} = -f & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial n} = g & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{u} = 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \Gamma_N \cup \Gamma_D = \Gamma \\ \Gamma_N \cap \Gamma_D = \emptyset \end{cases} \quad (6.40)$$

Asimismo, el producto escalar que se define para calcular la magnitud del error viene definido, en un espacio bidimensional, por la expresión:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial y} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial y} \right) d\Omega \quad (6.41)$$

Como se puede ver, las ecuaciones anteriores no corresponden a problemas de elasticidad lineal sino más bien a problemas de flujo, torsión o membranas. No obstante, el desarrollo del estimador de error parece extrapolable al primer tipo de problema mencionado si bien éste es un trabajo todavía no realizado.

Kelly y sus colaboradores presentan unas expresiones de las que se puede obtener cotas superior e inferior a la norma del campo \mathbf{u} solución de la ecuación diferencial (6.40) a partir de resultados obtenidos ya sea por elementos finitos, diferencias finitas o elementos de contorno. En el primer caso la norma de la solución $\hat{\mathbf{u}}$ obtenida por el cálculo resulta ser una cota inferior de la norma de \mathbf{u} por lo que todo el problema se centra en hallar una cota superior.

$$\sqrt{\langle \hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{u}} \rangle} \leq \sqrt{\langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle} \quad (6.42)$$

Para ello el primer paso consiste en ver que el error en desplazamientos \mathbf{e} definido en (4.10) cumple las siguientes condiciones:

$$\begin{cases} \nabla^2 \mathbf{e} = \mathbf{r} & \text{en } \Omega \\ \frac{\partial \mathbf{e}}{\partial n} = \mathbf{g} - \frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial n} & \text{en } \Gamma_N \\ \mathbf{e} = 0 & \text{en } \Gamma_D \end{cases} \quad (6.43)$$

donde \mathbf{r} es el residuo definido por:

$$\mathbf{r} = \nabla^2 \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{f} \quad (6.44)$$

A continuación, Kelly propone repartir las discontinuidades que existen en las derivadas del campo $\hat{\mathbf{u}}$ en cada interface entre cada dos elementos contiguos de forma que sobre cada elemento exista un equilibrio entre el residuo r y las partes correspondientes de las discontinuidades mencionadas. A partir de ello se construye un campo de derivadas Q_x, Q_y que cumple las ecuaciones (6.43) y está autoequilibrado con lo que la cota superior a la norma de \mathbf{u} se puede obtener con la expresión:

$$\|\mathbf{e}\|_{\Omega}^2 \leq \int_{\Omega} [(Q_x)^2 + (Q_y)^2] d\Omega \quad (6.45)$$

los detalles para la obtención de Q_x y Q_y se pueden obtener en las referencias [17].

Este estimador presenta algunas deficiencias graves que quizás sean subsanables en un futuro desarrollo más completo. Éstas son:

- Su no aplicabilidad, con el desarrollo actual, a problemas de elasticidad lineal.
- El hecho de que para obtener las funciones Q_x y Q_y sólo existe una construcción, aplicable únicamente a elementos bilineales y con mallas cartesianas, es decir, con mallas cuyo contorno siga la dirección de los ejes coordenados.

CAPÍTULO 7

ESTRATEGIAS PARA LA CORRECCIÓN DE ERRORES

Tras la obtención de unos resultados con una cierta malla y haber estimado el correspondiente error, puede ocurrir que dicho error esté por encima de una determinada tolerancia. En ese caso existen una serie de estrategias para intentar conseguir unos nuevos resultados cuyo error no sobrepase esa tolerancia. Estas estrategias se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Refinamientos de la malla utilizada previamente. En este caso se utiliza la malla anterior añadiendo nuevos grados de libertad. Estos nuevos grados de libertad se pueden obtener subdividiendo elementos de la malla original para obtener otros más pequeños, o bien añadiéndolos de forma jerárquica. Ambas posibilidades se comentarán más ampliamente a continuación.
- Remallados automáticos o adaptables. En este caso se utiliza la información procedente del estimador de error para generar una malla *completamente nueva* y más adecuada con la cual se repetirá el cálculo. La forma en que se utiliza la información de los estimadores de error se explicará en un apartado posterior. En la referencia [7] se describen diversos algoritmos para generar la nueva malla.

En los apartados siguientes se describirán con detalle ambas estrategias.

Como ya se ha comentado anteriormente, los estimadores de error pueden dar una idea bastante aproximada de la magnitud de la norma energética del error. Esta magnitud es la que se pretende que quede por debajo de una cierta tolerancia.

Dado que la norma energética del error está muy relacionada con alguna forma de error en la energía, parece lógico establecer como tolerancia un cierto porcentaje de la energía total de deformación del sólido objeto de estudio. Por ello lo que se suele hacer es limitar la norma energética del error a un cierto porcentaje de la energía de deformación obtenida del cálculo. Esta energía E es fácilmente calculable a partir de unos resultados utilizando una de las dos siguientes expresiones:

$$E = \int_{\Omega} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} d\Omega = \int_{\Omega} \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \hat{\mathbf{u}} d\Omega \quad (7.1)$$

$$E = \hat{\mathbf{u}}^T \mathbf{K} \hat{\mathbf{u}} \quad (7.2)$$

Ambas expresiones, perfectamente equivalentes, proporcionan una estimación a la energía de deformación exacta del problema. Además, las dos se pueden calcular elemento por elemento por lo que puede estimarse así la energía correspondiente a cada uno de ellos.

7.1 ESTRATEGIAS PARA LOS REFINAMIENTOS NO JERÁRQUICOS

Este tipo de refinamientos consiste en subdividir en varias partes los elementos situados en las zonas donde el error sea mayor que el admisible. Para ello es necesario utilizar un estimador de error que estime el error en la energía para cada elemento, y calcular también para cada uno de ellos las expresiones (7.1) o (7.2). Los elementos que deberán ser refinados son aquellos cuyo cociente entre el error estimado y su energía de deformación sea mayor que un porcentaje predeterminado como tolerancia máxima. La forma en que se puede definir este porcentaje se describe en el apartado 7.3.1.

Una vez decidido cuales son los elementos que se van a refinar existe la posibilidad de que al realizar particiones sobre los mismos aparezcan nuevos nodos o grados de libertad a través de los cuales se pierda la continuidad del campo de desplazamientos. Esto es lo que sucede por ejemplo en la figura 8 en la cual los nodos 10 y 17 pertenecientes a los elementos *B* y *C* no tienen contrapartida en el elemento *A*. Por ello si se asignan valores arbitrarios a los desplazamientos de estos nodos, el campo obtenido será discontinuo en la interface entre el elemento *A* y los elementos *B* y *C*. A los nodos como el 10 o el 17 se les llamará nodos no conformes.

Existen diversas técnicas para evitar los problemas mencionados, algunas de las cuales se enumeran a continuación:

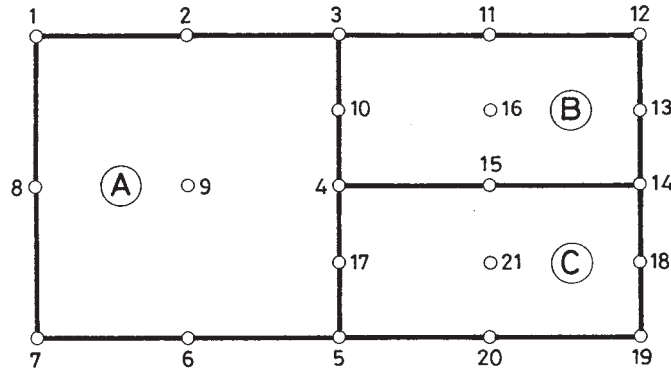


FIGURA 8 Refinamiento no conforme.

- Prolongar todas las subdivisiones entre elementos a través de toda la malla añadiendo todos los elementos y grados de libertad que hagan falta para ello. Para ello, allí donde aparezca un nodo no conforme se parte el elemento contiguo para conseguir que éste también tenga el nodo correspondiente. Este procedimiento es muy caro ya que obliga a refinar no sólo los elementos en que ello sea necesario, sino además todos aquellos situados sobre las líneas con las que se subdivide cada uno de ellos.
- Utilizar alguna técnica de subdivisión de la malla que evite el problema anterior.

Rivara ^[30] y Roberti y Melkanoff ^[31] presentan de forma independiente algoritmos mediante los cuales los elementos situados alrededor de los que precisan ser refinados se subdividen a su vez para mantener la continuidad. El atractivo de estos algoritmos es que su aplicación sucesiva no produce mallas con elementos distorsionados sino que se obtienen mallas muy bien graduadas con elementos bien proporcionados. La desventaja de los mismos es que sólo sirven para mallas con elementos triangulares. Los algoritmos propuestos consisten básicamente en cortar por la bisectriz correspondiente al lado mayor cada uno de los elementos en contacto con un nodo no conforme. La aplicación reiterada de este

proceso elimina los nodos no conformes.

Para mallas de elementos cuadrangulares pueden utilizarse elementos de transición tal como propone Irons ^[16].

- Utilizar alguna técnica para imponer que los desplazamientos de los nodos no conformes sean tales que se mantenga la continuidad de los desplazamientos a través de las interfaces entre elementos. Para ello Fortin y Tanguy ^[13] proponen una técnica muy simple y efectiva, válida para problemas tanto lineales como no lineales, que consiste a grandes rasgos en efectuar alteraciones en las funciones de forma de los elementos que contengan nodos no conformes. Esta técnica parece especialmente útil por ser aplicable a todo tipo de elementos realizando cambios mínimos en los programas.

Dado que para recuperar la continuidad, el desplazamiento de los nodos no conformes debe ser igual al de los puntos correspondientes pertenecientes a los elementos contiguos, la técnica propuesta consiste en imponer esa restricción a la matriz de rigidez. La forma de imponer esta restricción consiste básicamente en alterar las funciones de forma de los elementos con nodos no conformes de forma que ésta se cumpla de forma implícita.

Aunque las técnicas anteriores permiten utilizar los refinamientos no jerárquicos de forma práctica, hay que tener en cuenta el hecho de que el partir de una malla inicial demasiado grosera obliga a muchos ciclos de refinamiento hasta llegar a una solución satisfactoria. Las mallas obtenidas, si bien cumplirán los requisitos exigidos en cuanto a la magnitud del error, requerirán para ello un número de elementos superior, en general, a las que se obtendrían mediante procesos de remallados adaptables en los cuales se genera de forma directa la malla adecuada controlando el tamaño y la forma de cada elemento.

7.2 ESTRATEGIAS PARA LOS REFINAMIENTOS JERÁRQUICOS

El primer paso para realizar un refinamiento de este tipo es el calcular el valor de los indicadores de error correspondientes a todas las posibles funciones

de forma candidatas a ser incluidas en la malla. Para ello puede hacerse uso de las expresiones (5.11) o (5.12). Una vez conocidos los valores de los indicadores puede optarse por seguir una de las siguientes estrategias:

- 1) Añadir siempre una proporción fija de todas las funciones de forma disponibles escogiendo aquellas que tengan valores más altos para los indicadores. Esta estrategia tiene el defecto de que, en caso de ser necesarios varios refinamientos sucesivos, puede refinar poco la malla al principio del proceso iterativo de refinamiento y mucho al final.
- 2) Decidir a priori un valor del indicador $\bar{\eta}$ de forma que todas las funciones de forma que produzcan valores mayores para el indicador serán añadidas. Este procedimiento también resulta ser muy rígido y es difícil la elección de $\bar{\eta}$.
- 3) Una alternativa más flexible, a medio camino entre las dos anteriores, es definir un parámetro γ tal que $0 \leq \gamma \leq 1$ y añadir todas las funciones de forma correspondientes a valores del indicador η tales que $\eta \geq \gamma \eta_{max}$. El parámetro γ controla entonces la velocidad de convergencia: si γ es nulo se añaden todas las posibles funciones de forma, mientras que si γ vale 1 no se añade ninguna. De esta forma las funciones de forma que se añaden son una proporción variable del total que depende de los valores de los indicadores de error.

La alternativa utilizada más comunmente es la tercera ya que permite un mayor control sobre el proceso de refinamiento. Además se ha comprobado experimentalmente ^[42] que valores de γ bajos, del orden de 0.1, son los que conducen a procesos iterativos de refinamiento más económicos tanto por el número relativamente pequeño de funciones de forma que se añaden a la malla como por la rapidez de convergencia hacia una solución con la deseada precisión. Ello es debido a que por regla general son pocos los elementos que precisan de refinamiento.

Una vez decidido cuales van a ser las funciones de forma que se van a añadir a la malla, su inclusión se realiza utilizando las propiedades de las formulaciones jerárquicas, es decir, puede aprovecharse la matriz de rigidez calculada anteriormente y añadir a ella los términos correspondientes a los nuevos grados de libertad de orden más alto. Después del nuevo cálculo debe volverse a estimar el error cometido con la malla refinada y, en caso de ser necesario, puede realizarse un nuevo refinamiento repitiendo de forma iterativa todo el proceso comentado.

Los refinamientos jerárquicos pueden realizarse también añadiendo uno por uno todos los grados de libertad que pueden verse afectados por la inclusión de una nueva función de forma. De esta manera se es mucho más selectivo en cuanto al número total de grados de libertad que se añaden en cada refinamiento. En ese caso, para calcular el valor de los indicadores de error se utilizan en vez de las expresiones mencionadas las (5.17) o (5.18). La estrategia para decidir cuales van a ser los nuevos grados de libertad es idéntica al caso anterior.

En todos los procesos de refinamiento se obtiene, después de varios pasos, una situación en la cual los valores de los indicadores son casi constantes (si el proceso se inicia a partir de una malla más densa ese estado se alcanzará con menos iteraciones que si se comienza con una más grosera). Por ello se dice que una malla es óptima cuando se alcanza una distribución uniforme de los indicadores de error. Parece razonable suponer que en ese caso los grados de libertad están colocados de forma que en función de su colocación el error energético es mínimo. No obstante, no existe una demostración analítica que asegure la equivalencia entre la minimización del error respecto a la colocación de los grados de libertad y la distribución uniforme de los indicadores.

Otra característica importante es que los estimadores de error en general alcanzan sus cotas más altas de precisión cuando se llega al estado de malla óptima, y es en ese momento cuando se alcanzan las velocidades de convergencia hacia la solución exacta predichas por los estimadores de error a priori, incluso cuando existen puntos singulares.

Los refinamientos jerárquicos no presentan los problemas que se han comentado en el apartado anterior referentes a la aparición de nodos no conformes. Ello es debido a que durante este proceso lo que se añade a una determinada malla no son nuevos nodos o elementos sino nuevas funciones de forma que se añaden a las anteriores de forma jerárquica. Esta adición es ya conforme pues cada nueva función de forma es continua y afecta para ello a todos los elementos que sea necesario.

7.3 ESTRATEGIAS PARA LOS REMALLADOS AUTOMÁTICOS

Ya se ha comentado anteriormente que una alternativa a los refinamientos, en los cuales se conserva la estructura inicial de la malla durante

todo el proceso, es el generar en cada paso una nueva malla partiendo de la información obtenida con otra anterior. Para llevar a cabo este proceso se precisa de un programa de generación de mallas que sea capaz de funcionar dentro del dominio del problema ajustándose a los tamaños de elemento marcados en cada zona por la estimación de los errores obtenidos con una malla previa. De esta forma se trabaja con un sistema de tres etapas que se repite hasta llegar a una malla óptima:

1. Generación de la malla.
2. Cálculo de la solución al problema sobre la malla generada.
3. Estimación del error cometido con la malla utilizada.

Frente a la posibilidad de aprovechar cálculos previos que se atribuye a los refinamientos jerárquicos (aspecto que se ha criticado en apartados anteriores) se contraponen la simplicidad del proceso que se presenta en este apartado donde cada una de las etapas es independiente de las otras dos y, por tanto, más cómoda de programar. En particular, un programa de cálculo por elementos finitos no necesita sufrir ninguna modificación para ser incorporado a un sistema de este tipo. Simplemente hay que conectarlo con un programa de generación de mallas y con otro de estimación de errores a partir de sus resultados.

El hecho de que en cada momento se genere una malla totalmente nueva hace que el resultado final no dependa de la malla inicial con la que se comienza el proceso de refinamiento. No ocurre así en los refinamientos jerárquicos donde esa independencia es un objetivo todavía no alcanzado y para llegar al cual ya se habla de refinamientos combinados de tipo p y h conduciendo todo ello hacia una complejidad todavía mayor en su programación.

Frente a la alta velocidad de convergencia que se atribuye a los refinamientos de tipo p se puede objetar que ello es a costa de generar matrices de rigidez con grandes anchos de banda y por tanto costosas de invertir. Los refinamientos no jerárquicos conducirán a mallas que quizás precisarán de más grados de libertad, pero su ancho de banda será mucho menor y, en consecuencia, el coste de su inversión también.

Un generador de mallas eficaz será aquel que sea capaz de funcionar con la única información de la forma del contorno y el tamaño máximo de elemento definido en cada subregión. Con estos datos el programa debe ser capaz de llenar de elementos el dominio del problema. Generadores de este tipo son los desarrollados por Peraire [27][28], Löhner [20] y Frey [14] que

utilizan elementos triangulares planos. La ventaja de los elementos triangulares para los generadores de este tipo es que con ellos es más fácil ajustarse a cualquier tipo de contorno que con elementos cuadrangulares y por ello son los preferidos para procesos de generación. Ello no constituye ninguna limitación pues los elementos cuadráticos de este tipo funcionan de forma, cuanto menos, comparable a los planos de 8 ó 9 nodos. Generadores de este tipo están descritos en la referencia [7].

7.3.1 Definición del remallado

La estrategia de remallado dependerá del tipo de criterio que se utilice para decidir cuando unos resultados son suficientemente exactos. Básicamente, lo que se pretende es que a partir de los resultados obtenidos con una cierta malla, y de la estimación de su error, determinar cual debería ser el tamaño de cada elemento para obtener una malla que produjese resultados con un nivel de error acotado a un cierto valor y que además fuese “óptima” según un determinado criterio.

Como ya se ha comentado, una forma muy usual de limitar la norma energética del error es fijar un cierto porcentaje γ de la energía total de deformación.

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq \frac{\gamma}{100} \|\mathbf{u}\|_E \quad (7.3)$$

La forma en que se pretende que se distribuya el error sobre todos los elementos de la malla depende del criterio de optimalidad que se utilice para considerar que una malla es óptima. Existen dos criterios distintos para ello que se comentarán en el siguiente subapartado.

A partir del criterio utilizado y del valor γ adoptado se puede averiguar cual debería ser el valor del error obtenido sobre cada uno de los elementos e de la malla. La forma de obtener este valor se explicará al comentar los distintos criterios de optimalidad en el apartado 7.3.2. Este valor se podrá expresar también como un cierto porcentaje γ_e para cada elemento. Si se denomina por

$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e}$ a la norma del error requerida para cada elemento, entonces se puede expresar:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \frac{\gamma_e}{100} \|\mathbf{u}\|_{E_e} \quad (7.4)$$

A partir de la expresión (4.33) se puede ver que si el orden p de los polinomios usados en las funciones de forma se mantiene constante, la dependencia del error respecto al tamaño de los elementos se puede aproximar por:

$$\|\mathbf{e}\|_E \leq Ch^p \quad (7.5)$$

Si en la zona ocupada por un cierto elemento de tamaño h_e el error energético calculado vale $\|\mathbf{e}\|_{E_e}$, a partir de (7.5) se puede ver que el tamaño que en esa zona debería tener la malla de elementos finitos para obtener un error de valor $\gamma_e \|\mathbf{u}\|_{E_e}/100$ vendrá dado por la expresión:

$$h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/p}} \quad (7.6)$$

siendo

$$\xi_e = \frac{\|\mathbf{e}\|_{E_e}}{\|\mathbf{e}^r\|_{E_e}} = \frac{100 \|\mathbf{e}\|_{E_e}}{\gamma_e \|\mathbf{u}\|_{E_e}} \quad (7.7)$$

En caso de que se utilice una norma del error distinta de la energética, tal como las que se definen en las expresiones (4.25) a (4.32), la ley de evolución del error respecto del tamaño de elemento que se toma es la misma que en (7.5). Aunque esta expresión está justificada únicamente para el caso de la norma energética del error parece que su utilización con otras normas es satisfactoria.

La expresión (7.6) es válida para los elementos que no estén en contacto con una singularidad. Para mejorar el remallado en las zonas donde existen

puntos singulares Zienkiewicz [36][44][45] propone sustituir, para los elementos en contacto con singularidades, la expresión (7.6) por:

$$h = \frac{h_e}{\xi_e^{1/\lambda}} \quad (7.8)$$

donde el valor de λ depende del tipo de singularidad con la que se esté tratando. Por razones de tipo práctico se suele tomar $\lambda = 0.5$ ya que en la mayoría de los casos este valor oscila entre 0.5 y 1.

Mediante las expresiones (7.6) a (7.8) se puede estimar cuales deberían ser los tamaños de cada elemento para que la malla fuese óptima. Utilizando esta información es posible generar una malla completamente nueva que cumpla estos requerimientos y para ello es necesario utilizar un generador de mallas que tenga la capacidad de controlar el tamaño de cada elemento generado.

7.3.2 Criterios de optimalidad de la malla

El criterio de optimalidad más comunmente utilizado considera que una malla es óptima cuando la norma del error es la misma para todos los elementos. Es decir, en el caso más usual en que se utilice la norma energética del error, una malla será óptima, para un cierto nivel de error, cuando ocurra que $\|\mathbf{e}\|_{E_e}$ sea igual para todos los elementos.

Para una malla formada por n elementos que cumpla el anterior criterio de optimalidad se cumplirá, en virtud de la propiedad aditiva de las integrales extendidas sobre subdominios, que:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = \sum_{e=1}^n \|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 = n \|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 \quad (7.9)$$

Si además el error se acota mediante una expresión como la (7.3) debe ocurrir que:

$$\|\mathbf{e}\|_E^2 = n\|\mathbf{e}\|_{E_e}^2 = \frac{\gamma^2}{100^2}\|\mathbf{u}\|_E^2 \quad (7.10)$$

Normalmente la expresión anterior no se cumplirá a no ser que se esté trabajando con una malla que ya sea óptima. En caso contrario dicha expresión se puede utilizar para determinar cual sería el error requerido para cada elemento. Si se denota dicho error como $\|\mathbf{e}^r\|_{E_e}$, ello conduce a la siguiente expresión:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \frac{\gamma}{100} \frac{\|\mathbf{u}\|_E}{\sqrt{n}} \quad (7.11)$$

Mediante la expresión anterior se puede definir el valor de γ_e utilizado en (7.4) para el caso particular de este criterio de optimalidad y se obtiene:

$$\gamma_e = \frac{\gamma}{\sqrt{n}} \frac{\|\mathbf{u}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \quad (7.12)$$

Dado que, como se ha comentado en el apartado 4.1, la norma energética del error se puede interpretar como un aproximación al error existente en la energía de deformación, de acuerdo con la ecuación (4.24) se puede escribir:

$$\|\mathbf{u}\|_E^2 = \|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2 \quad (7.13)$$

La demostración de (7.13) se ha deducido unicamente para los casos en que $\Gamma_N = 0$. No obstante se considera que dicha expresión es una buena aproximación en el resto de los casos.

Mediante (7.13) se puede averiguar cual sería el error “óptimo” para cada elemento y para este criterio en particular:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \frac{\gamma}{100} \sqrt{\frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2}{n}} \quad (7.14)$$

Y por lo tanto se podrá aproximar también:

$$\gamma_e = \frac{\gamma}{\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \sqrt{\frac{\|\hat{\mathbf{u}}\|_E^2 + \|\mathbf{e}\|_E^2}{n}} \quad (7.15)$$

Normalmente se acepta [2][45] que dado un determinado nivel de error global, como el definido por (7.3), de todas las posibles mallas que produzcan resultados con ese nivel de error la que cumpla el criterio de optimalidad comentado es la que estará formada por un menor número de elementos. Es decir, esa malla será óptima en el sentido de que producirá un cierto nivel exigido de error a un coste mínimo.

No existe hasta el momento una demostración sólida para la afirmación anterior, pero sí hay diversas justificaciones para casos particulares que indican que la misma es razonable. Una justificación interesante de esta idea realizada por Babuška y Rheinboldt puede verse en [2][4][45].

Por otra parte, hay dos problemas relacionados con la utilización de este criterio:

1. Produce mallas en las cuales el error en la energía de deformación es el mismo para todos los elementos. Normalmente el interés del ingeniero radica principalmente en las zonas donde se producen concentraciones de tensiones e incluso puntos singulares, ya que es ahí donde se producirán las máximas tensiones que son las que debe comprobarse que estén por debajo de un determinado límite. Por otro lado es en esas zonas donde, debido a las bruscas variaciones de tensión, serán necesarias mayores densidades de elementos para acotar el error cometido. Dado que en esas zonas se localizarán más elementos que en el resto y que el error que se produce en cada uno de ellos será el mismo entonces resulta que el error a su vez se acumulará en las zonas con mayor densidad de elementos.

En vista de lo anterior resulta que el error se concentra, aunque de una forma controlada, en las zonas de mayor interés para la interpretación de resultados por parte de un ingeniero y por ello, desde su punto de vista, esa malla no será tan óptima como este criterio puede indicar. Visto de otra manera, este criterio de optimalidad tiene en cuenta únicamente el coste necesario para alcanzar un cierto nivel global de precisión y no la calidad de los resultados en cuanto a su interpretación.

2. La utilización de este criterio juntamente con la técnica de remallado presentada en el apartado 7.3.1 no conduce necesariamente a una malla "óptima". Dada una malla inicial con la cual se produce un cierto nivel de error, las expresiones (7.6) y (7.8) proporcionan los tamaños h de elemento que serían necesarios para obtener el nivel de error requerido en las zona cubiertas por cada una de los elementos de esa malla inicial. Ello no significa que cada uno de los nuevos elementos generados en una nueva malla con esos tamaños proporcione el mismo nivel de error local.

En efecto, supongamos que en la malla inicial existen dos elementos A y B para los cuales los tamaños de elemento que proporciona la expresión (7.6) resultan ser h_1 y h_2 respectivamente (ver fig 9). Un remallado con estos tamaños producirá una nueva malla en la cual la zona cubierta por el anterior elemento A estará ahora cubierta por n_1 nuevos elementos, y la zona del elemento B lo estará por n_2 elementos. Si se acepta que la expresión (7.5) se cumple resultará que con la nueva malla el nivel de error obtenido en las zonas anteriormente ocupadas por los elementos A y B será el mismo y valdrá $\|e^r\|_E$. Sin embargo, si se acepta que ese error se reparte uniformemente entre los nuevos elementos que ocupan esas zonas se tendrá que para los elementos de la zona A :

$$\|e^r\|_E^2 = n_1 \|e\|_{E_{e_1}}^2 \quad (7.16)$$

$$\|e\|_{E_{e_1}} = \frac{\|e^r\|_E}{\sqrt{n_1}} \quad (7.17)$$

Mientras que para los elementos de la zona B ocurrirá:

$$\|e\|_{E_{e_2}} = \frac{\|e^r\|_E}{\sqrt{n_2}} \quad (7.18)$$

Como se ve, el nivel de error de los elementos pertenecientes a una y otra zona no va a ser el mismo tal como exigiría el criterio de optimalidad. De alguna manera, el algoritmo de regeneración lo que proporciona son mallas que cumplen que el nivel de error existente en la zona ocupada por cada una de los elementos de la malla anterior es el mismo. Pero eso no es lo que se toma como criterio de optimalidad. Luego en este aspecto

aparece una contradicción entre el criterio de optimalidad y el algoritmo de regeneración de mallas.

El algoritmo de regeneración proporcionará mallas más cercanas al cumplimiento del criterio de optimalidad cuanto más cercanas estén a ello las mallas iniciales.

Para evitar los dos inconvenientes comentados se presenta en este trabajo un nuevo criterio de optimalidad. Este consiste en considerar que una malla es óptima cuando el error se reparte de forma uniforme a través de todo el volumen Ω independientemente de la forma y tamaño de los elementos.

Si se acepta de nuevo una limitación del tipo (7.3) lo que este criterio exige a una malla "óptima" es que se cumpla

$$\frac{\|\mathbf{e}\|_{E_e}^2}{\Omega_e} = \frac{\|\mathbf{e}\|_E^2}{\Omega} = \alpha \quad (7.19)$$

siendo α una constante.

Mediante este criterio el error requerido en cada uno de los elementos de una malla previa valdrá:

$$\|\mathbf{e}^r\|_{E_e} = \|\mathbf{e}\|_E \sqrt{\frac{\Omega_e}{\Omega}} \quad (7.20)$$

Y por tanto utilizando las expresiones (7.3), (7.4) y (7.17) se puede obtener en este caso:

$$\gamma_e = \gamma \frac{\|\mathbf{u}\|_E}{\|\mathbf{u}\|_{E_e}} \sqrt{\frac{\Omega_e}{\Omega}} \quad (7.21)$$

La expresión anterior es la que se emplearía en este caso para definir el valor γ_e de (7.4).

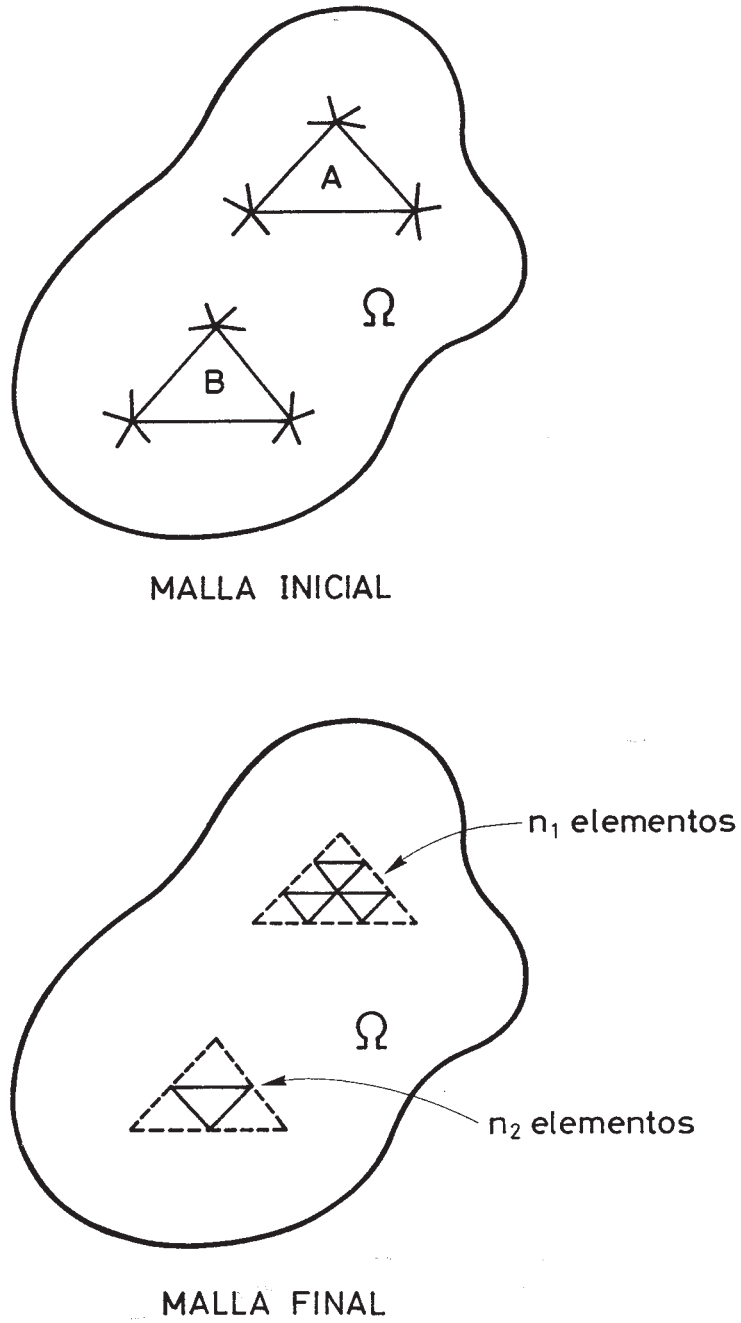


FIGURA 9 Refinamiento de dos elementos distintos A y B.

Con este criterio se define un error por unidad de volumen α que se distribuye de forma uniforme a través de todo el espacio Ω . Por ello los resultados obtenidos presentarán el mismo nivel de error para cualquier zona en observación independientemente del número de elementos que exista en ella. Con ello se obtiene un criterio más ingenieril que permite una mejor interpretación de resultados solucionando el primer problema del criterio clásico.

Además, se puede ver que la utilización conjunta de la técnica de regeneración automática con este criterio sí conduce a mallas "óptimas". En efecto, volviendo a la figura anterior se puede ver que la aplicación de este criterio conducirá a una nueva malla donde la zona ocupada por el antiguo elemento A proporcionará un error de valor:

$$\|e\|_{E_A}^2 = \alpha \Omega_A \quad (7.22)$$

El cual a su vez será la suma de los errores de los n_1 elementos que ocupan la zona. Si se supone que en esos nuevos elementos va a cumplirse el criterio de optimalidad resultará que:

$$\|e\|_{E_A}^2 = \sum_{e=1}^{n_1} \|e\|_{E_e}^2 = \sum_{e=1}^{n_1} \Omega_e \alpha = \alpha \Omega_A \quad (7.23)$$

El último razonamiento confirma que la utilización de este criterio si es compatible con la técnica de regeneración automática por lo que su utilización conjunta parece más razonable que en el caso anterior.

El criterio propuesto conducirá a mallas con mayor número de elementos que el criterio clásico ya que no garantiza que este número sea mínimo para un determinado nivel de error global. Sin embargo su utilización está más de acuerdo con lo que un ingeniero espera de unos resultados y presenta menos problemas de coherencia algorítmica.

CAPÍTULO 8

EJEMPLO DE UTILIZACIÓN DE UN ESTIMADOR DE ERROR

En este trabajo se ha escogido la expresión (6.35), propuesta por Zienkiewicz y Zhu ^[43], para ser utilizada como estimador de error. Dicha elección se basa en las propiedades enumeradas en el apartado 6.4 al describir dicho estimador de error. Basicamente estas propiedades se refieren a la sencillez de su implementación en un programa de elementos finitos y a su equivalencia formal con otros tipos de estimadores.

Para comprobar la bondad de los resultados que se pueden obtener al utilizar la expresión (6.35) se han preparado dos ejemplos. Ambos corresponden al caso de una ménsula discretizada con mallas de distinta densidad y sometida a dos tipos de carga distintos. En la figura 10 se presenta la ménsula con los casos de carga considerados. El primero de ellos corresponde a un ejemplo presentado por Zienkiewicz y Zhu ^[43] al presentar la expresión de su estimador de error.

Las características mecánicas del material que forma la ménsula son $E = 10^5$ y $\nu = 0.3$. No se especifica ningún sistema de unidades por ser los resultados independientes de ellos.

Para cada caso de carga se han utilizado tres mallas distintas con elementos bilineales de 4 nodos. Dichas mallas se presentan en la figura 11.

Los resultados de cada caso se presentan en forma de tablas. En cada una de ellas se pueden observar las siguientes cantidades:

G.D.L. Número de grados de libertad de la malla utilizada.

$\|u\|$ Energía de deformación exacta.

$\|\hat{u}\|$ Energía de deformación obtenida.

$\|e\|$ Error exacto en la energía.

$\|\hat{e}\|$ Error en la energía obtenido.

η Porcentaje exacto de error.

$\hat{\eta}$ Porcentaje de error obtenido.

θ Índice de efectividad ($\|\hat{e}\|/\|e\|$).

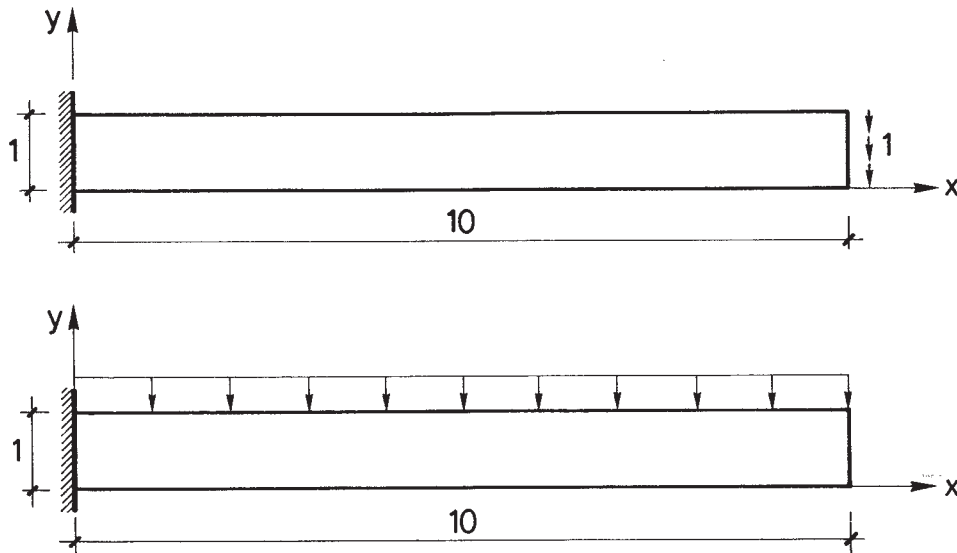


FIGURA 10 Definición de ménsula y casos de carga

Los valores exactos de la energía se han obtenido a partir de la teoría de vigas. Si bien dicha teoría es sólo una aproximación, se puede considerar que en este caso sus valores son exactos en comparación con los obtenidos mediante las mallas utilizadas.

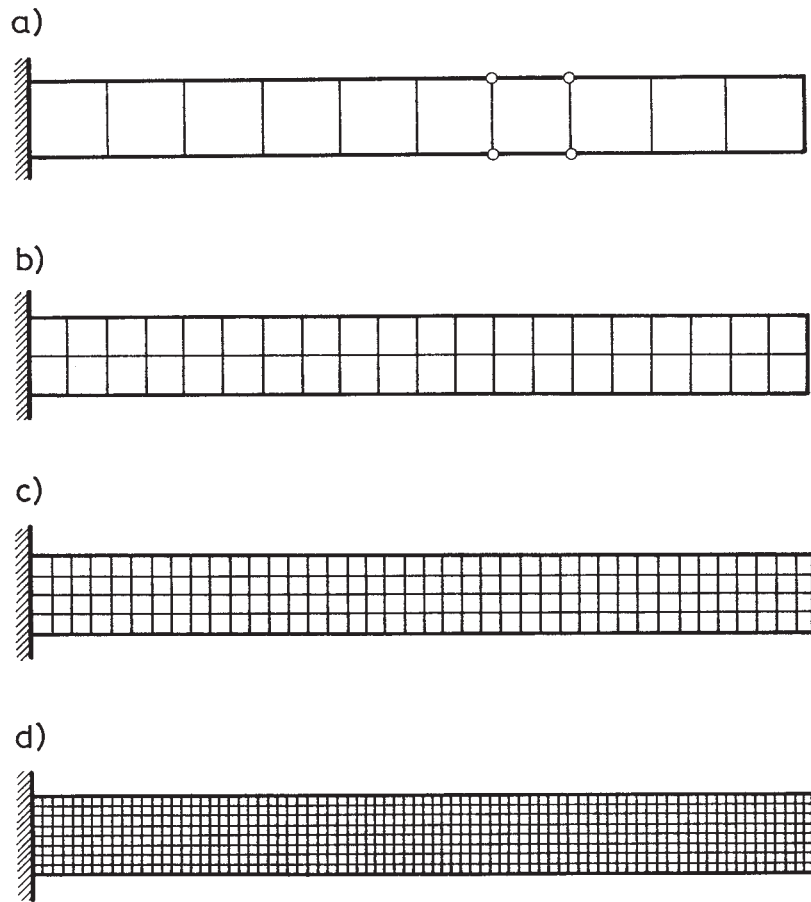


FIGURA 11 Mallas utilizadas para el cálculo de la ménsula

G.D.L.	$\ \mathbf{u}\ $	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \mathbf{e}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	η	$\hat{\eta}$	θ
40	0.201	0.165	0.114	0.080	57.1	43.8	0.701
120	0.201	0.189	0.066	0.059	33.4	29.8	0.888
400	0.201	0.198	0.035	0.033	17.9	16.5	0.943
1440	0.201	0.200	0.018	0.017	9.0	8.6	0.959

TABLA 1 Valores obtenidos con carga en el extremo de la ménsula

G.D.L.	$\ \mathbf{u}\ $	$\ \hat{\mathbf{u}}\ $	$\ \mathbf{e}\ $	$\ \hat{\mathbf{e}}\ $	η	$\hat{\eta}$	θ
40	0.781	0.643	0.443	0.301	56.8	42.4	0.678
120	0.781	0.736	0.260	0.225	33.3	29.3	0.865
400	0.781	0.758	0.138	0.128	17.7	16.4	0.922
1440	0.781	0.778	0.072	0.067	9.2	8.6	0.938

TABLA 2 Valores obtenidos con carga repartida superior.

Los valores obtenidos se presentan en las tablas 1 y 2.

Como se puede apreciar en las tablas, la evolución de las diversas cantidades es muy similar en los dos casos. A la vista de las mismas se pueden extraer las siguientes conclusiones:

- La energía de deformación obtenida $\|\hat{\mathbf{u}}\|$ va convergiendo hacia su valor exacto $\|\mathbf{u}\|$ a medida que se incrementa el número de grados de libertad utilizado. Dicha evolución es, sin embargo, bastante lenta por lo que sería necesario utilizar un número de elementos realmente muy alto para conseguir porcentajes pequeños de error.
- La estimación del error es tanto más exacta cuanto más exacta sea la solución obtenida. Tanto la norma del error como su porcentaje van convergiendo hacia sus valores exactos a medida que se va refinando la malla. También se puede observar como el índice de efectividad θ va convergiendo hacia 1.0.

Estos resultados confirman la convergencia asintótica del estimador hacia valores exactos a medida que se va refinando la solución.

Para mallas muy groseras el valor del estimador es suficientemente alto como para detectar que la solución es bastante inexacta aunque el valor del

estimador mismo lo sea también. A medida que se va refinando la malla para conseguir buenos resultados la exactitud del estimador es suficiente como para dar una buena idea del grado de error obtenido.

Los anteriores comentarios confirman el buen comportamiento del estimador de error y justifican su utilización.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [1] Ainsworth M., Zhu J.Z., Craig A.W., Zienkiewicz O.Z. - *Analysis of the Zienkiewicz-Zhu a-posteriori error estimator in the finite element method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28, pp. 2161-2174 (1989)
- [2] Babuška I., Rheinboldt W.C. - *Error Estimates for Adaptive Finite Element Computations.* - Siam Journal Numerical Analysis, vol 15. No. 4 (1978)
- [3] Babuška I., Rheinboldt W.C. - *A-Posteriori Error Estimates for the Finite Element Method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 12, pp. 1597-1615 (1978)
- [4] Babuška I., Rheinboldt W.C. - *Reliable Error Estimation and Mesh Adaptation for the Finite Element Method.* - Computational Methods in Nonlinear Mechanics, pp. 67-108 Ed. J.T. Oden (1980)
- [5] Babuška I., Szabo B.A. - *On the Rates of Convergence of the Finite Element Method.* - Report WU/CCM-80/2. Center for Computational Mechanics. Washington University (1980)
- [6] Babuška I., Dorr M. - *Error estimates for the combined h y p versions of the finite element method.* - Numerical Mathematica, vol. 25, pp. 257-277 (1981)
- [7] Bugada G. - *Utilización de técnicas de estimación de error y generación automática de mallas en procesos de optimización estructural.* Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Cataluña (1990)
- [8] Carrol W.E. and Baker R.M. - *A Theorem for Optimum Finite Element Idealization.* - Internatiol Journal Solid Structures, vol. 9 pp. 883-895 (1973)
- [9] Clough R.W. and Penzien J. - *Dynamics of Structures.* - McGraw-Hill (1975)

-
- [10] **Crisfield M.A.** - *Finite Elements and Solution Procedures for Structural Analysis. Vol. 1: Linear Analysis.* - T.R.R.L., Crowthorne, U.K. Pineridge Press, Swansea (1986)
- [11] **Felippa C.A.** - *Numerical Experiments in Finite Element Grid Optimization by Direct Energy Search.* - Applied Mathematics Modelling, vol. 1 (1977)
- [12] **Felippa C.A.** - *Optimization of Finite Element Grids by Direct Energy Search.* - Applied Mathematics Modelling, vol. 1 (1978)
- [13] **Fortin M. and Tanguy P.** - *A non-standard mesh refinement procedure through node labelling.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering - Short Communications pp. 1361-1365 (1984)
- [14] **Frey W.H.** - *Selective refinement: a new strategy for automatic node placement in graded triangular meshes.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 2183-2200 (1987)
- [15] **Gago J.P. de S.R.** - *A posteriori error analysis and adaptivity for the finite element method.* - Ph. D. Thesis - University College of Swansea (1982)
- [16] **Irons B. and Ahmad S.** - *Techniques of Finite Elements* - Ellis Horwood Series in Engineering Science, John Wiley & Sons (1980)
- [17] **Kelly D.W.** - *The self-equilibration or residuals and complementary a posteriori error estimates in the Finite Element Method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol 20 pp. 1491-1506 (1984)
- [18] **Kelly D.W., Mills R.J., Reizes J.A. and Miller A.D.** - *A posteriori estimates of the solution error caused by discretization in the finite element, finite difference and boundary element methods.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 1921-1939 (1987)
- [19] **Kelly D.W.** - *A generalised a-posteriori analysis of the discretization error in numerical solutions to linear problems.* - Proceedings of NUMETA 87, Numerical Techniques for Engineering Analysis and Design (1987)

-
- [20] Löhner R. and Parikh P. - *Generation of three-dimensional unstructured grids by the advancing-front method.* - International Journal for Numerical Methods in Fluids, vol. 8 pp. 1135-1149 (1988)
- [21] Melosh R.J. and Killian D.E. - *Finite Element Analysis to Attain a Pre-specified Accuracy.* - Proceedings 3rd National Congress on Computing in Structures (1976)
- [22] Melosh R.J. and Marcal P.V. - *An Energy Basis for Mesh Refinement of Structural Continua.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 2 pp. 1083-1091 (1977)
- [23] McNeic B.M. and Marcal P.V. - *Optimization of Finite Element Grids Based on Maximum Potential Energy.* - Technical Report no. 7, Brown University, Providence (1971)
- [24] Oliveira E.R. de Arantes - *Optimization of Finite Element Solutions.* - Proceedings 3rd Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics, Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, pp. 750-769 (1971)
- [25] Peano A., Riccioni R., Pasini A. and Sardella L. - *Adaptive Approximations in Finite Element Structural Analysis.* - ISMES, Bérgamo (1978)
- [26] Peano A., Fanelly M., Riccioni R. and Sardella L. - *Self adaptive convergence of the crack tip of a am buttres.* - International Conference on Fracture Mechanics, Swansea (1979)
- [27] Peraire J. - *A Finite Element Method for Convection Dominated Flows.* - Ph. D. Thesis - University College of Swansea (1986)
- [28] Peraire J., Morgan K. and Peiró J. - *Unstructured finite element mesh generation and adaptive procedures for CFD.* - AGARD FDP: Specialist's Meeting, Loen, Noruega (1989)
- [29] Richardson L.F. - *The Approximate Arithmetical Solution by Finite Differences of Physical Problems.* Transocanic Royal Society. London. A210 pp. 307-357 (1910)
- [30] Rivara M.C. - *A grid generator based on 4-triangles conforming mesh-refinement algorithms.* - International Journal for Numerical Methods in

Engineering, vol. 24 pp. 1343-1354 (1987)

- [31] **Roberti P. and Melkanoff M.A.** - *Self-adaptive stress analysis based on stress convergence* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 1973-1992 (1987)
- [32] **Specht B.** - *A general construction of local error estimators for conforming finite elements.* - Computers & Structures, vol. 19, no. 5/6 pp. 815-822 (1984)
- [33] **Szabo B.A. and Dunavant D.A.** - *An adaptive procedure based on the P-version of the finite element method.* - Specialist's Conference, Institute for Physical Science and Technology, University of Mariland (1980)
- [34] **Turcke D.J. and Mcneice G.M.** - *Guidelines for Selecting Finite Element Grids Based on an Optimum Study.* - Computers & Structures, vol. 4, pp. 499-519 (1974)
- [35] **Turcke D.J.** - *On Optimum Element Grid Configurations.* - AAA Journal, vol. 14 (1976)
- [36] **Zhu J.Z. and Zienkiewicz O.C.** - *Adaptive Techniques in the Finite Element Method.* - Communications in Applied Numerical Methods, vol. 4 pp. 197-204 (1988)
- [37] **Zienkiewicz O.C., Irons B.M., Scott F.E. and Campbell J.S.** - *High Speed Computing of Elastic Structures.* - Proceedings of the Symposium of International Union of Teoretical and Applied Mechanics, Liege (1970)
- [38] **Zienkiewicz O.C., Kelly D.W., Gago J. and Babuška I.** - *Hierarchical Finite Element Approaches, Error Estimates and Adaptive Refinement.* - The mathematics of finite elements are applications, Ed. J.R.Whiteman, Academic Press (1982)
- [39] **Zienkiewicz O.C. and Craig A.W.** - *A-Posteriori error estimation and adaptive mesh refinement in the finite element method.* - Lecture presented at the Institute of Mathematics and Its Applications, Imperial College, London (1983)
- [40] **Zienkiewicz O.C., Gago J.P. de S.R. and Kelly D.W.** - *The*

- Hierarchical Concept in Finite Element Analysis.* - Computers & Structures, vol. 16, no. 1-4 pp. 53-65 (1983)
- [41] Zienkiewicz O.C. - *Iterative solution techniques of mixed problems and the stress recovery procedures.* - C/R/476/84 Swansea (1984)
- [42] Zienkiewicz O.C. and Craig A. - *Adaptive Refinement, Error Estimates, Multigrid Solution, and Hierarchic Finite Element Method Concepts.* - Accuracy Estimates and Adaptive Refinements in Finite Element Computations, Edited by I. Babuška, O.C. Zienkiewicz, J. Gago and E.R. de A. Oliveira, John Wiley & Sons Ltd. (1986)
- [43] Zienkiewicz O.C. and Zhu J.Z. - *A simple error estimator and adaptive procedure for practical engineering analysis.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 24 pp. 337-357 (1987)
- [44] Zienkiewicz O.C., Zhu J.Z. and Gong N.G. - *Effective and Practical $h-p$ -version adaptive analysis procedures for the finite element method.* - International Journal for Numerical Methods in Engineering, vol. 28 pp. 879-891 (1989)
- [45] Zienkiewicz O.C. and Taylor R.L. - *The Finite Element Method. Fourth Edition. Volume 1. Basic Formulation and Linear Problems.* - McGraw-Hill Book Company (1989)