

FORMULAÇÃO NÃO-LINEAR GEOMÉTRICA PARA ANÁLISE DE CASCAS USANDO ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONAIS DEGENERADOS

FERNANDO LUIZ BASTOS RIBEIRO

y
LUIZ LANDAU

*Laboratório de Métodos Computacionais em Engenharia (LAMCE),
COPPE/UFRJ,
Cidade Universitária - Centro de Tecnologia,
Bloco B sala 100, Caixa Postal 68506,
Rio de Janeiro, RJ 21945, Brasil.*

SUMÁRIO

Apresenta-se neste trabalho uma formulação Lagrangeana total para análise não-linear geométrica de estruturas de cascas utilizando-se elementos finitos tridimensionais degenerados. A geometria do elemento é representada pelas normais e coordenadas dos nós da superfície média. O campo de deslocamentos permite a consideração de grandes rotações, e é descrito a partir das translações dos nós da superfície média e de duas rotações das normais em torno de eixos locais. Emprega-se um esquema de transformação seletiva destas rotações para o sistema global de referência, o que possibilita a análise de estruturas definidas por superfícies poliédricas.

SUMMARY

A total Lagrangian formulation for geometrically non-linear analysis of shell structures using three-dimensional degenerated elements is presented. The geometric definition of the element is given by the normals and coordinates of the mid-surface nodes. The displacement field allows the consideration of large rotations and, is described by the translations of the mid-surface nodes and two rotations of the normals about local axes. A selective transformation scheme of the rotation, from local to global axes, is employed in order to extend this procedure to the case of shell structures defined by folded surfaces.

INTRODUÇÃO

A análise não-linear geométrica de cascas desempenha um papel de grande interesse dentro da engenharia. Apesar da extensa literatura disponível sobre o assunto, é ainda uma área de intensa atividade no desenvolvimento de novas formulações mais simples e, conseqüentemente, de menor custo computacional. Dentre os inúmeros trabalhos

Recibido: Marzo 1990

publicados nos últimos anos, são exemplos de pesquisa neste sentido os trabalhos de Surana¹, Oliver², e Hsiao³.

Apresenta-se neste trabalho uma formulação Lagrangeana total para grandes deslocamentos/rotações, utilizando-se o elemento tridimensional degenerado inicialmente proposto por Ahmad⁴. Partindo das hipóteses de que a normal à superfície média permanece reta, e que as deformações em sua direção são desprezíveis, o campo de deslocamentos é descrito através de três translações e duas rotações.

A consideração de eixos locais para definição destas rotações torna-se um problema no caso de superfícies que não sejam totalmente suaves, tais como cascas constituídas por superfícies poliédricas. Por outro lado, a inclusão do sexto grau de liberdade⁵ através de transformação das rotações locais para o sistema global de referência traz evidentes prejuízos numéricos, principalmente em se tratando de análises não-lineares, onde a introdução de rigidez fictícia⁶ pode retardar, e até mesmo impedir a convergência do método de resolução das equações de equilíbrio. Para contornar este problema, adota-se um esquema de transformação seletiva que possibilita a análise de qualquer tipo de superfície. Exemplos numéricos mostram as potencialidades e características do elemento.

GEOMETRIA E CAMPO DE DESLOCAMENTOS

Discretizando-se a superfície média através de elementos curvos (Figura 1), o vetor $\mathbf{r}$ de coordenadas globais de um ponto da casca pode ser aproximado por,

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{r}_i + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^n h_i N_i(\xi, \eta) \mathbf{n}_i \quad (1)$$

onde n é o número de nós do elemento, $N_i, H_i, \mathbf{r}_i = (x_i \ y_i \ z_i)^t$ e $\mathbf{n}_i = (n_{x_i} \ n_{y_i} \ n_{z_i})^t$ representam respectivamente as funções de interpolação, espessura da casca, vetor de coordenadas, e vetor unitário normal à superfície média correspondentes ao nó i . ξ, η e ζ são as coordenadas naturais do elemento.

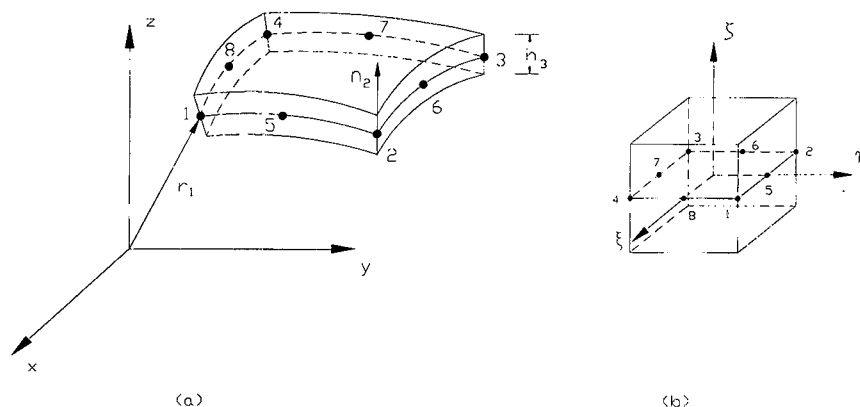


Figura 1. Elemento tridimensional degenerado de 8 nós: (a) coordenadas globais; (b) coordenadas naturais.

A representação do campo de deslocamentos baseia-se nas hipóteses de que a normal à superfície média da casca permanece reta e que as deformações em sua direção são desprezíveis.

O deslocamento $\mathbf{u} = (u \ v \ w)^t$ de qualquer ponto da casca é então unicamente determinado pelos deslocamentos nodais $\mathbf{u}_i = (u_i \ v_i \ w_i)^t$ da superfície média e a diferença $\Delta \mathbf{n}_i$ entre os vetores normais unitários $\mathbf{n}_i$ da configuração indeformada e $\mathbf{n}'_i$ da configuração deformada,

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^n N_i(\xi, \eta) \mathbf{u}_i + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^n h_i N_i(\xi, \eta) \Delta \mathbf{n}_i \quad (2)$$

O vetor $\Delta \mathbf{n}_i$ pode ser expresso² em termos dos ângulos α_i , β_i e dos vetores unitários $\mathbf{l}_i = (l_{xi} \ l_{yi} \ l_{zi})^t$, $\mathbf{m}_i = (m_{xi} \ m_{yi} \ m_{zi})^t$ e $\mathbf{n}_i = (n_{xi} \ n_{yi} \ n_{zi})^t$, que formam o sistema de eixos ortogonais x' , y' e z' , como mostra a Figura 2,

$$\Delta \mathbf{n}_i = \begin{bmatrix} \Delta n_{xi} \\ \Delta n_{yi} \\ \Delta n_{zi} \end{bmatrix} = \sin \alpha_i \cos \beta_i \mathbf{l}_i - \sin \alpha_i \sin \beta_i \mathbf{m}_i + (\cos \alpha_i - 1) \mathbf{n}_i \quad (3)$$

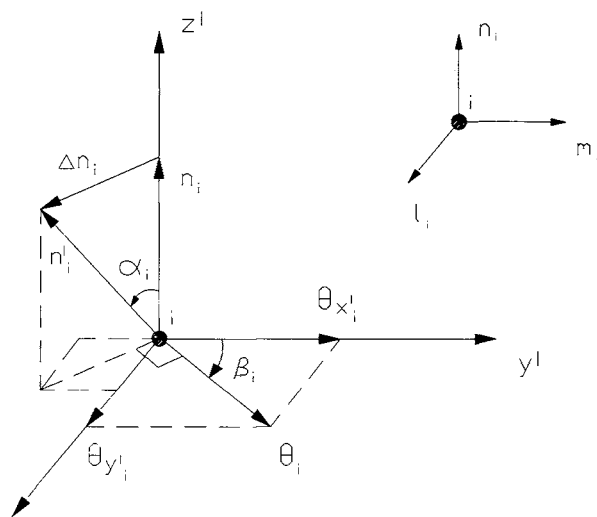


Figura 2. Rotação da normal em um nó genérico i .

Matricialmente, a expressão (2) pode ser escrita na forma,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n \mathbf{N}_i \mathbf{p}_i \quad (4)$$

com,

$$\mathbf{N}_i = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & \frac{\zeta}{2} h_i N_i & 0 & 0 \\ 0 & N_i & 0 & 0 & \frac{\zeta}{2} h_i N_i & 0 \\ 0 & 0 & N_i & 0 & 0 & \frac{\zeta}{2} h_i N_i \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$\mathbf{p}_i = (u_i \ v_i \ w_i \ \Delta n_{x_i} \ \Delta n_{y_i} \ \Delta n_{z_i})^t \quad (6)$$

Representando a rotação da normal do nó i através do vetor θ_i , de componentes $\theta_{x'_i}$ e $\theta_{y'_i}$ (Figura 2), obtém-se as seguintes relações,

$$|\theta_i| = \alpha_i = (\theta_{x'_i}^2 + \theta_{y'_i}^2)^{1/2} \quad (7.a)$$

$$|\theta_{x'_i}| = \theta_{x'_i} = \alpha_i \cos \beta_i \quad (7.b)$$

$$|\theta_{y'_i}| = \theta_{y'_i} = \alpha_i \sin \beta_i \quad (7.c)$$

As relações acima permitem reduzir a cinco o número de incógnitas nodais,

$$\mathbf{a}_i = (u_i \ v_i \ w_i \ \theta_{x'_i} \ \theta_{y'_i})^t \quad (8)$$

Substituindo as relações (7) em (3) pode-se escrever,

$$\Delta \mathbf{n}_i = \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \theta_{x'_i} \mathbf{l}_i - \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \theta_{y'_i} \mathbf{m}_i + (\cos \alpha_i - 1) \mathbf{n}_i \quad (9)$$

e, no limite, quando α_i tende a zero,

$$\Delta \mathbf{n}_i = \theta_{x'_i} \mathbf{l}_i - \theta_{y'_i} \mathbf{m}_i \quad (10)$$

Observe-se que esta última expressão fornece o campo de deslocamentos quando são consideradas pequenas rotações,

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^n N_i \mathbf{u}_i + \frac{\zeta}{2} \sum_{i=1}^n h_i N_i (\theta_{x'_i} \mathbf{l}_i - \theta_{y'_i} \mathbf{m}_i) \quad (11)$$

DEFORMAÇÕES

Considerando-se as direções ortogonais x' , y' e z' definidas pelos vetores unitários $\mathbf{l} = (l_x \ l_y \ l_z)^t$, $\mathbf{m} = (m_x \ m_y \ m_z)^t$ e $\mathbf{n} = (n_x \ n_y \ n_z)^t$, sendo $\mathbf{n}$ a normal em qualquer ponto de uma superfície $\zeta = \text{constante}$ (Figura 3), as componentes de deformação são dadas pelo tensor de Green,

$$\boldsymbol{\epsilon} = (\epsilon_{x'} \ \epsilon_{y'} \ \gamma_{x'y'} \ \gamma_{x'z'} \ \gamma_{y'z'})^t = \boldsymbol{\epsilon}_0 + \boldsymbol{\epsilon}_1 \quad (12)$$

sendo,

$$\boldsymbol{\epsilon}_0 = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\epsilon_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}[(\frac{\partial u'}{\partial x'})^2 + (\frac{\partial v'}{\partial x'})^2 + (\frac{\partial w'}{\partial x'})^2] \\ \frac{1}{2}[(\frac{\partial u'}{\partial y'})^2 + (\frac{\partial v'}{\partial y'})^2 + (\frac{\partial w'}{\partial y'})^2] \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial y'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial y'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial u'}{\partial z'} + \frac{\partial v'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial z'} + \frac{\partial w'}{\partial y'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} \quad (14)$$

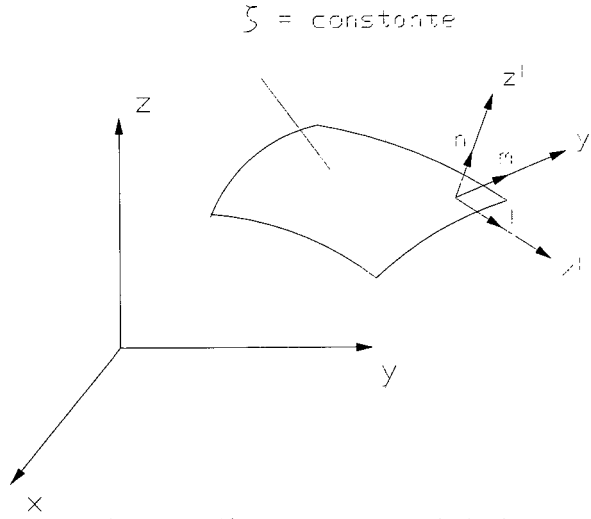


Figura 3. Sistema local de referência.

A parcela não-linear do tensor de Green pode ser escrita matricialmente na seguinte forma,

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A} \mathbf{g} \quad (15)$$

com,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} & \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} & 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} & \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \end{bmatrix} \quad (16)$$

$$\mathbf{g} = \left[\frac{\partial u'}{\partial x'} \frac{\partial v'}{\partial x'} \frac{\partial w'}{\partial x'} \frac{\partial u'}{\partial y'} \frac{\partial v'}{\partial y'} \frac{\partial w'}{\partial y'} \frac{\partial u'}{\partial z'} \frac{\partial v'}{\partial z'} \frac{\partial w'}{\partial z'} \right]^t \quad (17)$$

Como as matrizes de rigidez são obtidas através de integrações envolvendo as expressões acima, as derivadas globais dos deslocamentos $\mathbf{u}$ devem ser transformadas em derivadas locais dos deslocamentos locais $\mathbf{u}' = (u' \ v' \ w')^t$ através da relação ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u'}{\partial x'} & \frac{\partial v'}{\partial x'} & \frac{\partial w'}{\partial x'} \\ \frac{\partial u'}{\partial y'} & \frac{\partial v'}{\partial y'} & \frac{\partial w'}{\partial y'} \\ \frac{\partial u'}{\partial z'} & \frac{\partial v'}{\partial z'} & \frac{\partial w'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \mathbf{R} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \mathbf{R}^t \quad (18)$$

sendo $\mathbf{R}$ a matriz de rotação ,

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} l_x & l_y & l_z \\ m_x & m_y & m_z \\ n_x & n_y & n_z \end{bmatrix} \quad (19)$$

As derivadas globais são obtidas a partir de derivação no sistema de coordenadas naturais,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} & \frac{\partial v}{\partial z} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} & \frac{\partial v}{\partial \xi} & \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} & \frac{\partial v}{\partial \eta} & \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial u}{\partial \zeta} & \frac{\partial v}{\partial \zeta} & \frac{\partial w}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Na equação acima $\mathbf{J}$ é a matriz Jacobiana,

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (21)$$

Considerando-se agora as relações (18), (19), (20) e (21), pode-se escrever,

$$\epsilon_0 = \sum_{i=1}^n \mathbf{B}_{0i} \mathbf{p}_i \quad (22)$$

$$\mathbf{g} = \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i \quad (23)$$

O Apêndice I mostra em detalhes a obtenção das matrizes $\mathbf{B}_{0i}$ e $\mathbf{G}_i$. Substituindo (23) em (15) obtém-se,

$$\epsilon_1 = \frac{1}{2} \mathbf{A} \sum_{i=1}^n \mathbf{G}_i \mathbf{p}_i \quad (24)$$

e somando (22) e (24) chega-se à expressão final do tensor de Green,

$$\epsilon = \sum_{i=1}^n (B_{0i} + \frac{1}{2} A G_i) p_i \quad (25)$$

Tomando o vetor de deformações na forma incremental, obtém-se a expressão,

$$\delta \epsilon = \sum_{i=1}^n B_{0i} \delta p_i + \frac{1}{2} \delta A g + \frac{1}{2} A \delta g \quad (26)$$

Observando-se que $\delta A g = A \delta g$, e que devido a linearidade de G_i , a primeira variação de g é dada por,

$$\delta g = \sum_{i=1}^n G_i \delta p_i \quad (27)$$

a equação (26) pode ser reescrita na forma,

$$\delta \epsilon = \sum_{i=1}^n B_{0i} \delta p_i + \sum_{i=1}^n A G_i \delta p_i = \sum_{i=1}^n (B_{0i} + A G_i) \delta p_i \quad (28)$$

com,

$$\delta p_i = \begin{bmatrix} \delta u_i \\ \delta v_i \\ \delta w_i \\ \delta(\Delta n_{x_i}) \\ \delta(\Delta n_{y_i}) \\ \delta(\Delta n_{z_i}) \end{bmatrix} = C_i \delta a_i = C_i \begin{bmatrix} \delta u_i \\ \delta v_i \\ \delta w_i \\ \delta \theta_{x'_i} \\ \delta \theta_{y'_i} \end{bmatrix} \quad (29)$$

A matriz C_i , que contém às derivadas de p_i em relação as incógnitas a_i , pode ser vista no Apêndice II.

Finalmente, a substituição de (29) em (28) permite escrever,

$$\delta \epsilon = \sum_{i=1}^n (B_{0i} + A G_i) C_i \delta a_i = \sum_{i=1}^n B_i \delta a_i \quad (30)$$

onde,

$$B_i = (B_{0i} + A G_i) C_i \quad (31)$$

TENSÕES

As tensões correspondentes ao tensor de Green de deformações são dadas, na formulação Lagrangeana total, pelo segundo tensor de Piola-Kirchhoff,

$$\sigma = (\sigma_{x'}\sigma_{y'}\tau_{x'y'}\tau_{x'z'}\tau_{y'z'})^t \quad (32)$$

onde x' , y' e z' são os eixos locais definidos na Figura 3. As relações constitutivas são utilizadas na forma incremental,

$$\delta\sigma = D\delta\epsilon \quad (33)$$

onde D é a matriz elástica para material isotrópico⁷, linear, uma vez que não se trata de não-linearidade física no presente trabalho.

EQUAÇÕES DE EQUILÍBRIO

O sistema discreto de equações algébricas não-lineares representativo do equilíbrio da estrutura é dado pela expressão,

$$\psi(a) = P(a) - R(a) = 0 \quad (34)$$

onde $\psi(a)$ é o vetor de forças residuais, $P(a)$ são as forças internas, e $R(a)$ é o vetor de forças externas nodais equivalentes.

Assumindo-se que as forças externas sejam conservativas, o vetor R se torna independente dos deslocamentos nodais a . Para cada nó i , pode-se escrever,

$$\psi_i(a) = \int_v B_i^t \sigma dv - R_i = 0 \quad (35)$$

Na formulação Lagrangeana total, as integrais referem-se ao volume da configuração indeformada da estrutura. Utiliza-se o método de Newton-Raphson para a resolução do sistema de equações (34), onde cada iteração corresponde a,

$$\Delta a^n = -K_T^{-1}(a^n)\psi(a^n) \quad (36)$$

$$a^{n+1} = a^n + \Delta a^n \quad (37)$$

sendo K_T a matriz de rigidez tangente da estrutura.

MATRIZ DE RIGIDEZ TANGENTE

A submatriz de $\mathbf{K}_T$ que relaciona os graus de liberdade dos nós i e j é obtida através da expressão,

$$\mathbf{K}_{T,ij}(\mathbf{a}) = \frac{\partial \psi_i(\mathbf{a})}{\partial \mathbf{a}_j} \quad (38)$$

Da primeira variação da equação (35) obtém-se,

$$\delta \psi_i(\mathbf{a}) = \int_v \delta \mathbf{B}_i^t \boldsymbol{\sigma} dv + \int_v \mathbf{B}_i^t \delta \boldsymbol{\sigma} dv = \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{T,ij} \delta \mathbf{a}_j \quad (39)$$

Utilizando-se as equações (30) e (33), a segunda integral da expressão acima pode ser escrita na forma,

$$\int_v \mathbf{B}_i^t \delta \boldsymbol{\sigma} dv = \sum_{j=1}^n \int_v \mathbf{B}_i^t \mathbf{D} \mathbf{B}_j dv \delta \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij}^t \delta \mathbf{a}_j \quad (40)$$

com,

$$\mathbf{K}_{ij}^t = \int_v \mathbf{B}_i^t \mathbf{D} \mathbf{B}_j dv \quad (41)$$

Tomando-se a primeira variação de $\mathbf{B}_i$,

$$\delta \mathbf{B}_i = \delta [(\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i) \mathbf{C}_i] = \delta \mathbf{A} \mathbf{G}_i \mathbf{C}_i + (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i) \delta \mathbf{C}_i \quad (42)$$

e substituindo na primeira das integrais de (39), chega-se ao resultado,

$$\int_v \delta \mathbf{B}_i^t \boldsymbol{\sigma} dv = \int_v (\mathbf{G}_i \mathbf{C}_i)^t \delta \mathbf{A}^t \boldsymbol{\sigma} dv + \int_v \delta \mathbf{C}_i^t (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i)^t \boldsymbol{\sigma} dv \quad (43)$$

Tendo em conta que,

$$\delta \mathbf{A}^t \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} \delta \mathbf{g} = \mathbf{S} \sum_{j=1}^n \mathbf{G}_j \mathbf{C}_j \delta \mathbf{a}_j \quad (44)$$

onde,

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sigma_{x'} \mathbf{I}_3 & \tau_{x'y'} \mathbf{I}_3 & \tau_{x'z'} \mathbf{I}_3 \\ \tau_{x'y'} \mathbf{I}_3 & \sigma_{y'} \mathbf{I}_3 & \tau_{y'z'} \mathbf{I}_3 \\ \tau_{x'z'} \mathbf{I}_3 & \tau_{y'z'} \mathbf{I}_3 & 0 \end{bmatrix} \quad (45)$$

pode-se escrever que,

$$\int_v (\mathbf{G}_i \mathbf{C}_i)^t \delta \mathbf{A}^t \boldsymbol{\sigma} dv = \sum_{j=1}^n \int_v (\mathbf{G}_i \mathbf{C}_i)^t \mathbf{S} (\mathbf{G}_j \mathbf{C}_j) dv \delta \mathbf{a}_j = \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{\sigma 1} \delta \mathbf{a}_j \quad (46)$$

com,

$$\mathbf{K}_{ij}^{\sigma_1} = \int_v (\mathbf{G}_i \mathbf{C}_i)^t \mathbf{S}(\mathbf{G}_j \mathbf{C}_j) dv \quad (47)$$

Por outro lado, a segunda integral do lado direito da equação (43) pode ser escrita na forma,

$$\int_v \delta \mathbf{C}_i^t (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i)^t \boldsymbol{\sigma} dv = \sum_{j=1}^n \mathbf{K}_{ij}^{\sigma_2} \delta \mathbf{a}_j \quad (48)$$

onde $\mathbf{K}_{ij}^{\sigma_2}$ é dado pela expressão (ver Apêndice III),

$$\mathbf{K}_{ij}^{\sigma_2} = \int_v \frac{\partial \mathbf{C}_i^t}{\partial \mathbf{a}_j} (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i)^t \boldsymbol{\sigma} dv \quad (49)$$

Como consequência da relação ,

$$\frac{\partial \mathbf{C}_i^t}{\partial \mathbf{a}_j} = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (50)$$

tem-se que,

$$\mathbf{K}_{ij}^{\sigma_2} = 0 \quad \text{se } i \neq j \quad (51)$$

Com o resultado acima, a expressão (49) se reduz a,

$$\mathbf{K}_{ii}^{\sigma_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & H_{11} & H_{12} \\ 0 & 0 & 0 & H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (52)$$

onde,

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{11} \\ H_{21} \end{bmatrix} = \int_v \frac{\partial \mathbf{C}_i^t}{\partial \theta_{x'_i}} (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i)^t \boldsymbol{\sigma} dv \quad (53)$$

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ H_{12} \\ H_{22} \end{bmatrix} = \int_v \frac{\partial \mathbf{C}_i^t}{\partial \theta_{y'_i}} (\mathbf{B}_{0i} + \mathbf{A} \mathbf{G}_i)^t \boldsymbol{\sigma} dv \quad (54)$$

Finalmente, pode-se escrever,

$$\mathbf{K}_{Tij} = \mathbf{K}_{ij}^{\ell} + \mathbf{K}_{ij}^{\sigma_1} + \mathbf{K}_{ij}^{\sigma_2} \quad (55)$$

TRANSFORMAÇÃO DAS ROTAÇÕES

A matriz de rigidez tangente da equação (55) corresponde às incógnitas nodais a_i , com u_i , v_i e w_i referentes ao sistema global de coordenadas, e as rotações $\theta_{x'_i}$ e $\theta_{y'_i}$ definidas em torno dos eixos locais x' e y' , orientados segundo as direções dos vetores l_i e m_i tangentes à superfície média. A definição de eixos locais para representação das rotações implica na condição de que a superfície seja suave, de modo que os eixos locais de dois elementos adjacentes sejam coincidentes. Do contrário, as contribuições individuais dos elementos não seriam somadas corretamente.

No entanto, este problema pode ser contornado transformando-se as rotações locais em rotações em torno dos eixos globais de referência,

$$\begin{bmatrix} \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_i} & m_{y_i} & m_{z_i} \\ l_{x_i} & l_{y_i} & l_{z_i} \\ n_{x_i} & n_{y_i} & n_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{bmatrix} \quad (56)$$

Na transformação acima, somente duas rotações são linearmente independentes e, conseqüentemente, uma das rotações globais deve ser eliminada. Dependendo da posição da normal, três casos distintos podem ocorrer:

1º caso. $n_{z_i} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_i} - m_{z_i} \cdot n_{x_i} / n_{z_i} & m_{y_i} - m_{z_i} \cdot n_{y_i} / n_{z_i} \\ l_{x_i} - l_{z_i} \cdot n_{x_i} / n_{z_i} & l_{y_i} - l_{z_i} \cdot n_{y_i} / n_{z_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{y_i} \end{bmatrix} \quad (57)$$

2º caso. $n_{z_i} = 0$, $n_{y_i} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{x_i} - m_{y_i} \cdot n_{x_i} / n_{y_i} & m_{z_i} - m_{y_i} \cdot n_{z_i} / n_{y_i} \\ l_{x_i} - l_{y_i} \cdot n_{x_i} / n_{y_i} & l_{z_i} - l_{y_i} \cdot n_{z_i} / n_{y_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{x_i} \\ \theta_{z_i} \end{bmatrix} \quad (58)$$

3º caso. $n_{z_i} = 0$, $n_{y_i} = 0$, $n_{x_i} \neq 0$

$$\begin{bmatrix} \theta_{x'_i} \\ \theta_{y'_i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{y_i} - m_{x_i} \cdot n_{y_i} / n_{x_i} & m_{z_i} - m_{x_i} \cdot n_{z_i} / n_{x_i} \\ l_{y_i} - l_{x_i} \cdot n_{y_i} / n_{x_i} & l_{z_i} - l_{x_i} \cdot n_{z_i} / n_{x_i} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \theta_{y_i} \\ \theta_{z_i} \end{bmatrix} \quad (59)$$

Efetuada as devidas transformações das rotações, a nova matriz de rigidez tangente relacionando os nós i e j de um elemento é obtida segundo a relação ,

$$\mathbf{K}_{T_{ij}}^* = \mathbf{T}_i^t \mathbf{K}_{T_{ij}} \mathbf{T}_j \quad (60)$$

onde $\mathbf{T}_i$ é a matriz de transformação das incógnitas do nó i ,

$$\mathbf{T}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \lambda \end{bmatrix} \quad (61)$$

A submatriz λ corresponde a uma das transformações definidas em (57), (58) e (59).

Deve-se observar que, embora cada elemento contribua localmente sempre com duas rotações por nó, pode acontecer que em determinados nós haja a ocorrência simultânea das três rotações globais θ_x , θ_y e θ_z , como o caso ilustrado na Figura 4.

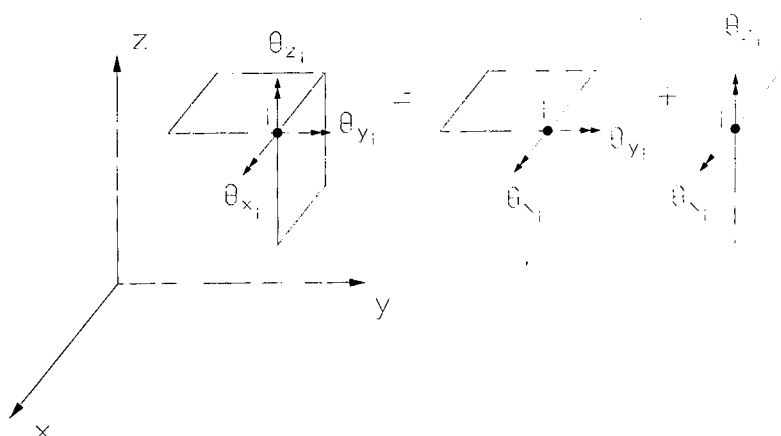


Figura 4. Rotações globais.

Este esquema seletivo de transformação das rotações depende somente da geometria da casca, sendo portanto de fácil implementação computacional.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Com o objetivo de evidenciar o desempenho e as potencialidades da presente formulação, são apresentadas a seguir algumas análises de estruturas de vigas, placas e cascas. São utilizados elementos de 8 nós, e as matrizes de elemento são calculadas através de integração numérica de Gauss com $2 \times 2 \times 2$ pontos de integração.

Exemplo 1

Neste exemplo, analisa-se uma viga em balanço submetida a uma carga momento na extremidade livre, como mostra a Figura 5. Utilizando-se uma malha de 4 elementos obteve-se o gráfico da Figura 6, relacionando o fator de carga f com os deslocamentos horizontal e vertical da extremidade livre da viga.

Exemplo 2

Este exemplo consiste na análise de uma placa retangular em balanço submetida a uma carga concentrada na extremidade livre. A Figura 7 mostra a geometria da placa e suas propriedades físicas. Os resultados correspondentes a uma discretização de 3×4 elementos podem ser vistos na Figura 8.

Exemplo 3

Considere-se a casca cilíndrica da Figura 9. A casca é simplesmente apoiada nos contornos longitudinais, e suas extremidades curvas são livres. Devido à simetria do problema, somente um quarto da estrutura foi analisado. A Figura 10 mostra os resultados obtidos para uma malha de 2×2 elementos.

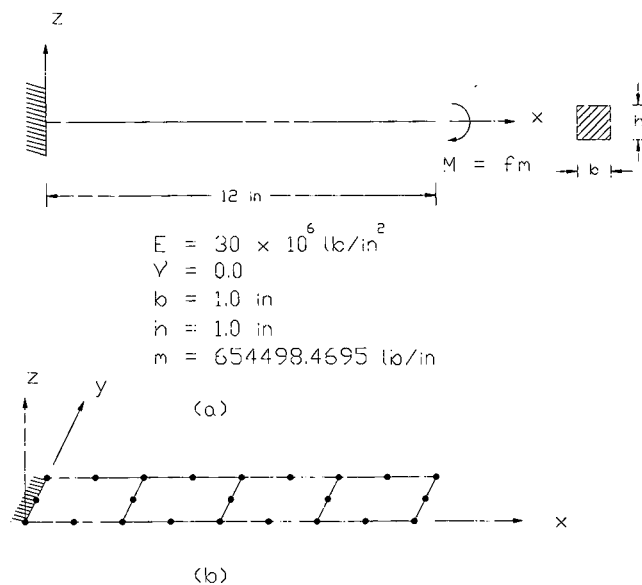


Figura 5. Viga em balanço: (a) geometria e propriedades físicas; (b) malha de elementos finitos.

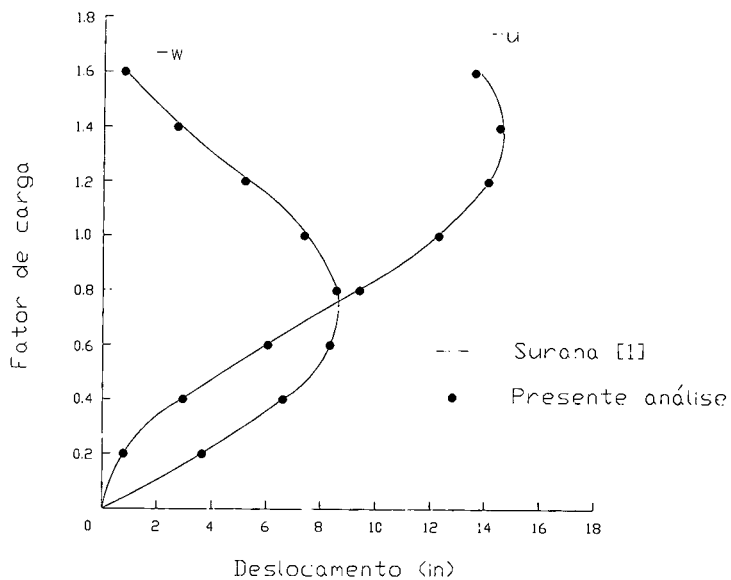
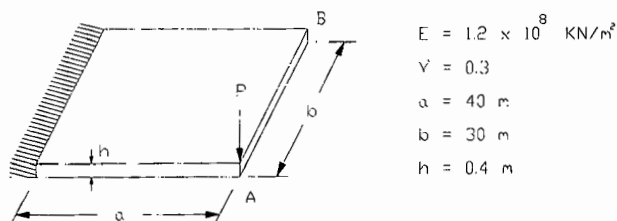
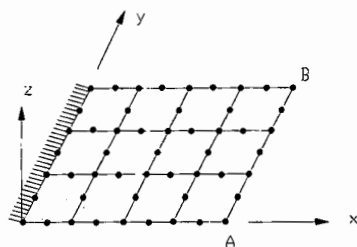


Figura 6. Viga em balanço: relações carga/deslocamentos.



(a)



(b)

Figura 7. Placa em balanço: (a) geometria e propriedades físicas; (b) malha de elementos finitos.

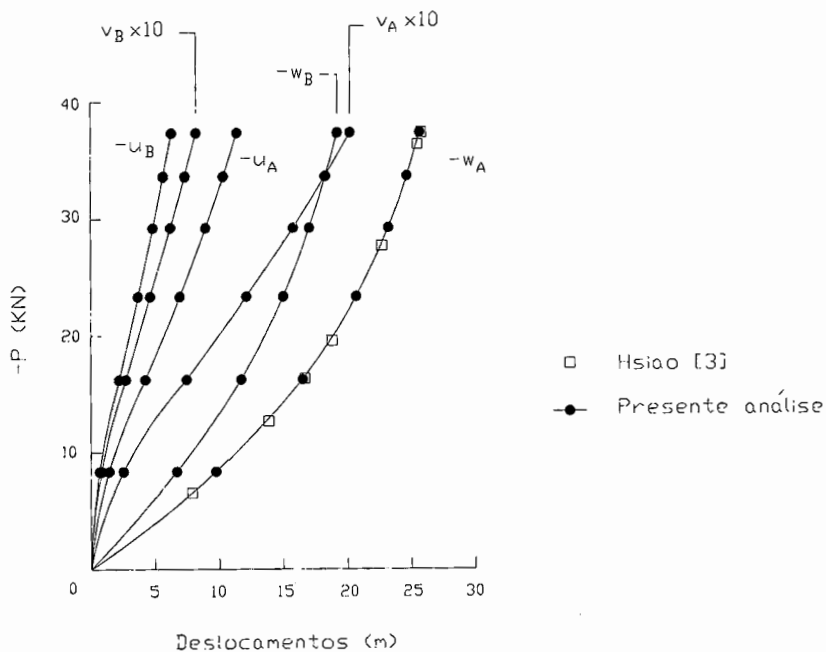


Figura 8. Placa em balanço: relações carga/deslocamentos.

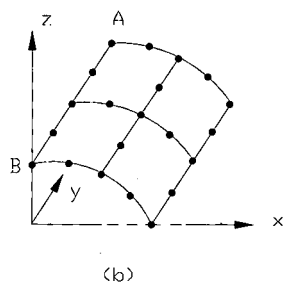
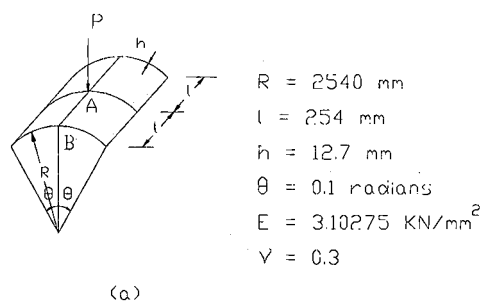


Figura 9. Casca cilíndrica: (a) geometria e propriedades físicas; (b) malha de elementos finitos.

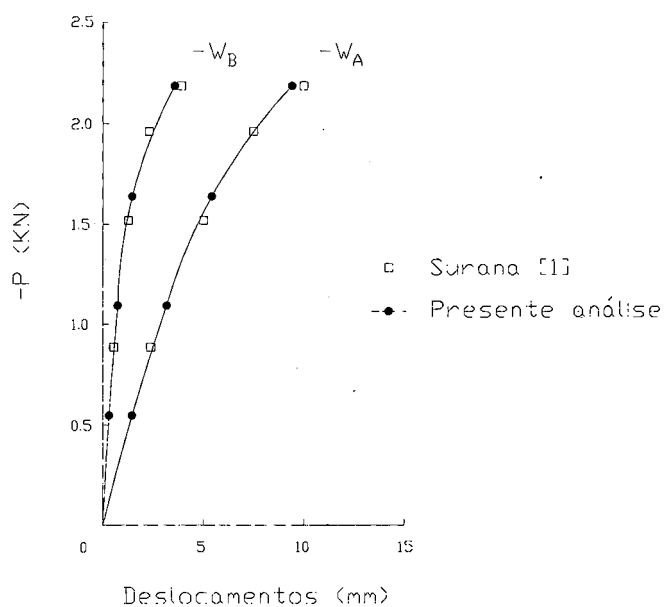


Figura 10. Casca cilíndrica: relações carga/deslocamentos.

CONCLUSÕES

Apresentou-se um procedimento para análise não-linear geométrica (grandes deslocamentos/rotações) de estruturas de cascas baseado na formulação Lagrangeana total. Mostrou-se que, para pequenas rotações, o campo de deslocamentos coincide com aquele do elemento tridimensional clássico⁷.

Apresentou-se também um esquema seletivo de transformações das rotações locais, estendendo-se, assim, a utilização deste tipo de elemento a problemas definidos por superfícies poliédricas. Os resultados obtidos mostraram a flexibilidade e precisão da presente formulação e sugerem a continuidade dos trabalhos no sentido de estendê-la a problemas dinâmicos com a consideração, inclusive, de não-linearidade física.

APÊNDICE I: MATRIZES B_0, EG_i

Considerando-se o produto da matriz R da equação (19) pelo inverso da matriz Jacobiana definida em (21),

$$RJ^{-1} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix} \quad (62)$$

e as relações,

$$\begin{aligned} A_1 &= C_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + C_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ A_2 &= (C_{11} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta + C_{12} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta + C_{13} N_i) \frac{h_i}{2} \\ A_3 &= C_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + C_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ A_4 &= (C_{21} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta + C_{22} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta + C_{23} N_i) \frac{h_i}{2} \\ A_5 &= C_{31} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} + C_{32} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \\ A_6 &= (C_{31} \frac{\partial N_i}{\partial \xi} \zeta + C_{32} \frac{\partial N_i}{\partial \eta} \zeta + C_{33} N_i) \frac{h_i}{2} \end{aligned}$$

as matrizes B_0 , e G_i correspondentes ao nó i são expressas por,

$$B_{0i} = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} & B_{14} & B_{15} & B_{16} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} & B_{24} & B_{25} & B_{26} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} & B_{34} & B_{35} & B_{36} \\ B_{41} & B_{42} & B_{43} & B_{44} & B_{45} & B_{46} \\ B_{51} & B_{52} & B_{53} & B_{54} & B_{55} & B_{56} \end{bmatrix} \quad (63)$$

com,

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= A_1 l_x; & B_{12} &= A_1 l_y \\
 B_{13} &= A_1 l_z; & B_{14} &= A_2 l_x \\
 B_{15} &= A_2 l_y; & B_{16} &= A_2 l_z \\
 B_{21} &= A_3 m_x; & B_{22} &= A_3 m_y \\
 B_{23} &= A_3 m_z; & B_{24} &= A_4 m_x \\
 B_{25} &= A_4 m_y; & B_{26} &= A_4 m_z \\
 B_{31} &= A_3 l_x + A_1 m_x; & B_{32} &= A_3 l_y + A_1 m_y \\
 B_{33} &= A_3 l_z + A_1 m_z; & B_{34} &= A_4 l_x + A_2 m_x \\
 B_{35} &= A_4 l_y + A_2 m_y; & B_{36} &= A_4 l_z + A_2 m_z \\
 B_{41} &= A_5 l_x + A_1 n_x; & B_{42} &= A_5 l_y + A_1 n_y \\
 B_{43} &= A_5 l_z + A_1 n_z; & B_{44} &= A_6 l_x + A_2 n_x \\
 B_{45} &= A_6 l_y + A_2 n_y; & B_{46} &= A_6 l_z + A_2 n_z \\
 B_{51} &= A_5 m_x + A_3 n_x; & B_{52} &= A_5 m_y + A_3 n_y \\
 B_{53} &= A_5 m_z + A_3 n_z; & B_{54} &= A_6 m_x + A_4 n_x \\
 B_{55} &= A_6 m_y + A_4 n_y; & B_{56} &= A_6 m_z + A_4 n_z
 \end{aligned}$$

e,

$$\mathbf{G}_i = \begin{bmatrix} A_1 l_x & A_1 l_y & A_1 l_z & A_2 l_x & A_2 l_y & A_2 l_z \\ A_1 m_x & A_1 m_y & A_1 m_z & A_2 m_x & A_2 m_y & A_2 m_z \\ A_1 n_x & A_1 n_y & A_1 n_z & A_2 n_x & A_2 n_y & A_2 n_z \\ A_3 l_x & A_3 l_y & A_3 l_z & A_4 l_x & A_4 l_y & A_4 l_z \\ A_3 m_x & A_3 m_y & A_3 m_z & A_4 m_x & A_4 m_y & A_4 m_z \\ A_3 n_x & A_3 n_y & A_3 n_z & A_4 n_x & A_4 n_y & A_4 n_z \\ A_5 l_x & A_5 l_y & A_5 l_z & A_6 l_x & A_6 l_y & A_6 l_z \\ A_5 m_x & A_5 m_y & A_5 m_z & A_6 m_x & A_6 m_y & A_6 m_z \\ A_5 n_x & A_5 n_y & A_5 n_z & A_6 n_x & A_6 n_y & A_6 n_z \end{bmatrix} \quad (64)$$

APÊNDICE II: MATRIZ $\mathbf{C}_i$

Da variação da equação (3) resulta,

$$\begin{aligned}
 \delta(\Delta \mathbf{n}_i) &= (\cos \alpha_i \cos \beta_i \delta \alpha_i - \sin \alpha_i \sin \beta_i \delta \beta_i) \mathbf{l}_i - \\
 &- (\cos \alpha_i \sin \beta_i \delta \alpha_i + \sin \alpha_i \cos \beta_i \delta \beta_i) \mathbf{m}_i - \sin \alpha_i \delta \alpha_i \mathbf{n}_i
 \end{aligned} \quad (65)$$

Tendo-se em conta as relações,

$$\delta \alpha_i = \cos \beta_i \delta \theta_{x'_i} + \sin \beta_i \delta \theta_{y'_i} \quad (66)$$

$$\delta \beta_i = \frac{1}{\alpha_i} (\cos \beta_i \delta \theta_{y'_i} - \sin \beta_i \delta \theta_{x'_i}) \quad (67)$$

a equação (65) pode ser reescrita matricialmente na forma,

$$\delta(\Delta \mathbf{n}_i) = \mathbf{L} \begin{bmatrix} \delta\theta_{x'_i} \\ \delta\theta_{y'_i} \end{bmatrix} \quad (68)$$

sendo os coeficientes da matriz $\mathbf{L}$ dados por,

$$L_{11} = e_1 l_x - e_2 m_x + e_4 n_x$$

$$L_{12} = e_2 l_x - e_3 m_x + e_5 n_x$$

$$L_{21} = e_1 l_y - e_2 m_y + e_4 n_y$$

$$L_{22} = e_2 l_y - e_3 m_y + e_5 n_y$$

$$L_{31} = e_1 l_z - e_2 m_z + e_4 n_z$$

$$L_{32} = e_2 l_z - e_3 m_z + e_5 n_z$$

com,

$$e_1 = \cos \alpha_i \cos^2 \beta_i + \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \sin^2 \beta_i$$

$$e_2 = \left(\cos \alpha_i - \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \right) \sin \beta_i \cos \beta_i$$

$$e_3 = \cos \alpha_i \sin^2 \beta_i + \frac{\sin \alpha_i}{\alpha_i} \cos^2 \beta_i$$

$$e_4 = -\sin \alpha_i \cos \beta_i$$

$$e_5 = -\sin \alpha_i \sin \beta_i$$

No limite, quando α_i tende a zero, a matriz $\mathbf{L}$ fica reduzida a,

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_x & -m_x \\ l_y & -m_y \\ l_z & -m_z \end{bmatrix} \quad (69)$$

Considerando-se as equações (6), (8), e (68), pode-se escrever,

$$\delta \mathbf{p}_i = \mathbf{C}_i \delta \mathbf{a}_i \quad (70)$$

$$\mathbf{C}_i = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{L} \end{bmatrix} \quad (71)$$

APÊNDICE III: DERIVADAS DA MATRIZ $\mathbf{C}_i$

Fazendo uso das relações abaixo, onde se omite o índice i ,

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \mathbf{J} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_{x'}} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{y'}} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial \alpha} & \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial \theta_{x'}}{\partial \beta} & \frac{\partial \theta_{y'}}{\partial \beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \sin \beta \\ -\alpha \sin \beta & \alpha \cos \beta \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \theta_{x'}} \\ \frac{\partial}{\partial \theta_{y'}} \end{bmatrix} = \mathbf{J}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \alpha} \\ \frac{\partial}{\partial \beta} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \cos \beta & \frac{-\sin \beta}{\alpha} \\ \sin \beta & \frac{\cos \beta}{\alpha} \end{bmatrix}$$

as derivadas de $\mathbf{C}_i$ são dadas por,

$$\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial u_i} = \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial v_i} = \frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial w_i} = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \theta_{x'_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_{x'_i}} \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial \mathbf{C}_i}{\partial \theta_{y'_i}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial \mathbf{L}}{\partial \theta_{y'_i}} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_{11}}{\partial \theta} &= \frac{\partial e_1}{\partial \theta} l_x - \frac{\partial e_2}{\partial \theta} m_x + \frac{\partial e_4}{\partial \theta} n_x \\ \frac{\partial L_{12}}{\partial \theta} &= \frac{\partial e_2}{\partial \theta} l_x - \frac{\partial e_3}{\partial \theta} m_x + \frac{\partial e_5}{\partial \theta} n_x \\ \frac{\partial L_{21}}{\partial \theta} &= \frac{\partial e_1}{\partial \theta} l_y - \frac{\partial e_2}{\partial \theta} m_y + \frac{\partial e_4}{\partial \theta} n_y \\ \frac{\partial L_{22}}{\partial \theta} &= \frac{\partial e_2}{\partial \theta} l_y - \frac{\partial e_3}{\partial \theta} m_y + \frac{\partial e_5}{\partial \theta} n_y \\ \frac{\partial L_{31}}{\partial \theta} &= \frac{\partial e_1}{\partial \theta} l_z - \frac{\partial e_2}{\partial \theta} m_z + \frac{\partial e_4}{\partial \theta} n_z \\ \frac{\partial L_{32}}{\partial \theta} &= \frac{\partial e_2}{\partial \theta} l_z - \frac{\partial e_3}{\partial \theta} m_z + \frac{\partial e_5}{\partial \theta} n_z \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial e_1}{\partial \theta_{x'_i}} &= 3 \operatorname{sen}^2 \beta_i \cos \beta_i \left(\frac{\cos \alpha_i}{\alpha_i} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i^2} \right) - \operatorname{sen} \alpha_i \cos^3 \beta_i \\
\frac{\partial e_2}{\partial \theta_{x'_i}} &= \left(\frac{\cos \alpha_i}{\alpha_i} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i^2} \right) (\operatorname{sen}^3 \beta_i - 2 \operatorname{sen} \beta_i \cos^2 \beta_i) - \\
&\quad - \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{sen} \beta_i \cos^2 \beta_i \\
\frac{\partial e_3}{\partial \theta_{x'_i}} &= \left(\frac{\cos \alpha_i}{\alpha_i} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i^2} \right) (\cos^3 \beta_i - 2 \operatorname{sen}^2 \beta_i \cos^2 \beta_i) - \\
&\quad - \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{sen}^2 \beta_i \cos \beta_i \\
\frac{\partial e_4}{\partial \theta_{x'_i}} &= - \cos \alpha_i \cos^2 \beta_i - \frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i} \operatorname{sen}^2 \beta_i \\
\frac{\partial e_5}{\partial \theta_{x'_i}} &= \left(\frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i} - \cos \alpha_i \right) \operatorname{sen} \beta_i \cos \beta_i \\
\frac{\partial e_1}{\partial \theta_{y'_i}} &= \frac{\partial e_2}{\partial \theta_{x'_i}} \\
\frac{\partial e_2}{\partial \theta_{y'_i}} &= \frac{\partial e_3}{\partial \theta_{x'_i}} \\
\frac{\partial e_3}{\partial \theta_{y'_i}} &= 3 \operatorname{sen} \beta_i \cos^2 \beta_i \left(\frac{\cos \alpha_i}{\alpha_i} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i^2} \right) - \operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{sen}^3 \beta_i \\
\frac{\partial e_4}{\partial \theta_{y'_i}} &= \frac{\partial e_5}{\partial \theta_{x'_i}} \\
\frac{\partial e_5}{\partial \theta_{y'_i}} &= - \cos \alpha_i \operatorname{sen}^2 \beta_i - \frac{\operatorname{sen} \alpha_i}{\alpha_i} \cos^2 \beta_i
\end{aligned}$$

REFERÊNCIAS

1. K.S. Surana, "Geometrically nonlinear formulation for the curved shell elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 19, pp. 581-615, (1983).
2. J. Oliver y E. Oñate, "A total Lagrangian Formulation for the geometrically nonlinear analysis of structures using finite elements. Part I. Two dimensional problems: shell and plate structures", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 20, pp. 2253-2281, (1984).
3. K. Hsiao y Y. Chen, "Nonlinear analysis of shell structures by degenerated isoparametric shell element", *Comput. Struct.*, Vol. 31, no. 3, pp. 427-438, (1989).
4. S. Ahmad, B.M. Irons y O.C. Zienkiewicz, "Analysis of thick and thin shell structures by curved elements", *Int. J. Numer. Meth. Eng.*, Vol. 2, pp. 419-451, (1970).
5. T.J.R. Hughes y F. Brezzi, "On drilling degrees of freedom", *Comput. Meth. Appl. Mech. Eng.*, Vol. 72, no. 1, pp. 105-121, (1989).
6. K.J. Bathe, "Finite Element Procedures in Engineering Analysis", Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., (1982).
7. O.C. Zienkiewicz, "The Finite Element Method", 3rd. ed., McGraw-Hill, London, (1977).