Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería. Vol. 5 , 2, 185–202(1989)

ESTABILIDAD Y CONVERGENCIA DE ESQUEMAS NUMERICOS PARA SISTEMAS DE DIRAC NO LINEALES

J. DE FRUTOS

Departamento de Matemática Aplicada y Computación,
Facultad de Ciencias,
Universidad de Valladolid,
Valladolid

RESUMEN

Siguiendo una técnica desarrollada por López-Marcos y Sanz-Serna, probamos la estabilidad y convergencia de tres esquemas en diferencias finitas para la solución numérica de sistemas de Dirac no lineales. Los esquemas se comparan por medio de experimentos numéricos.

SUMMARY

We study, following a method developed by López-Marcos and Sanz-Serna, the stability and convergence of three finite-differences schemes for the numerical integration of nonlinear Dirac systems in (1+1) —dimensions. The three schemes are assessed in the numerical experiments.

INTRODUCCION

Las perturbaciones no lineales de ecuaciones de ondas dispersivas permiten obtener modelos donde los efectos de la no linealidad y la dispersión se equilibren dando lugar a la aparición de ondas solitarias[24] de gran interés en el modelado matemático de muchos fenómenos físicos. En este sentido, las ecuaciones de Schrödinger no lineales han sido objeto de numerosas contribuciones (ver, por ejemplo[14,19,23]). Menos atención han recibido las distintas modificaciones del sistema de Dirac, que puede considerarse la contrapartida relativista de la ecuación de Schrödinger. En este trabajo tratamos de sistemas de Dirac no lineales de la forma:

$$u_t \;=\; Au_x + \;\text{if}\,(|u_1|^2 - |u_2|^2)Bu \tag{1}$$

donde $u = u(x,t)$ es la incógnita espinorial representada como un vector de dos componentes complejas $u = [u_1, u_2]^T$, i es la unidad imaginaria, f es una función real de variable real y A y B denotan las matrices

Recibido: Abril 1988

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sistemas de esta forma, que pueden dar lugar a la aparición de ondas solitarias, han sido propuestos como modelos de formaciones análogas a partículas (ver[1] y las referencias que allí aparecen).

Alvarez y otros[2], siguiendo una técnica debida a Guo Ben-Yu[7], han mostrado la convergencia de un esquema Crank-Nicolson para (1) cuando el término no lineal viene dado por la elección particular

$$f(s) \;=\; m - 2\lambda s, m, \lambda, \quad \text{constantes reales.} \tag{2}$$

El análisis de estos autores usa explícitamente la forma de la no linealidad (2) y por tanto no puede ser extendido, en principio, al caso general que tratamos aquí.

En este artículo se estudia no sólo el esquema de tipo Crank-Nicolson sino también otros dos de los tipos "leap-frog" y "box". Empleamos una técnica desarrollada en[10,11,12], que usa una definición de estabilidad de métodos numéricos para problemas no lineales basada en los llamados umbrales de estabilidad dependientes de h. Para una mejor comprensión del resto del trabajo hemos incluído una breve sección en la que se exponen las definiciones y resultados principales de este formalismo. Basta comparar nuestra prueba de convergencia del esquema Crank-Nicolson, válida para f arbitraria, con la prueba alternativa mucho más compleja dada en[2], válida sólo para (2), para darse cuenta de las ventajas del formalismo de López-Marcos y Sanz-Serna.

FORMALISMO DE DISCRETIZACION

En el formalismo todas las relaciones que definen un método numérico se reescriben en forma abstracta como

$$\Phi_h(\mathbf{U_h}) \;=\; \mathbf{0}, \tag{3}$$

donde los $\mathbf{U}_h$ recogen todas las aproximaciones numéricas a la solución de un problema dado (problema que no juega ningún papel en esta formulación) y Φ_h es una aplicación (en general no lineal) con dominio $D_h \subset X_h$ que toma valores en Y_h. X_h e Y_h son espacios **normados** de la **misma dimensión finita** y h toma valores en un conjunto de números positivos H con $\inf H = 0$.

Para cada $h \in H$ sea $\mathbf{u} \in D_h$ una representación discreta de la solución teórica (habitualmente en un método en diferencias $\mathbf{u}$ es la restricción a la red de dicha solución teórica). Se dice que la discretización (3) es **convergente** si para $h \in H$, h es suficientemente pequeño, las ecuaciones (3) poseen una solución $\mathbf{U}_h$ con

$$\lim_{h\to 0} \| \mathbf{u}_h - \mathbf{U}_h \|_{X_h} = 0.$$

La convergencia se dice que es de orden p si además $\| \mathbf{u}_h - \mathbf{U}_h \|_{X_h} = O(h^P)$ cuando $h \to 0$. La discretización (3) es **consistente** (resp. consistente de orden p) si

$\| \Phi_h(\mathbf{u}_h) \|_{Y_h} = o(1)$ (resp. $O(h^P)$).

Supongamos que, para cada $h \in H$, R_h es un valor con $0 < R_h \leq +\infty$. Diremos que (3) es **estable restringida a los umbrales** R_h, si existen constantes positivas h_0 y S tales que para cada $h \in H$, $h \leq h_0$, la bola $B(\mathbf{u}_h, R_h)$ de centro en $\mathbf{u}_h$ y radio R_h está contenida en D_h y para cada $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{W}_h \in B(\mathbf{u}_h, R_h)$ se verifica

$$\| \mathbf{V}_h - \mathbf{W}_h \|_{X_h} \leq S \| \Phi_h(\mathbf{V}_h) - \Phi_h(\mathbf{W}_h) \|_{Y_h} . \tag{4}$$

El resultado principal del formalismo es el siguiente teorema[11], basado en un resultado topológico debido a Stetter[21].

Teorema 1

Supongamos que: (i)(3) es estable con umbrales R_h. (ii) Φ_h está definida y es continua en $B(\mathbf{u}_h, R_h)$. (iii) (3) es consistente y

$$\| \Phi_h(\mathbf{u}_h) \|_{Y_h} = o(R_h), \qquad h \to 0. \tag{5}$$

Entonces, para h suficientemente pequeño, la ecuación (3) posee una única solución $\mathbf{U}_h$ en la bola $B(\mathbf{u}_h, R_h)$ y

$$\| \mathbf{u}_h - \mathbf{U}_h \|_{X_h} = O(\| \Phi_h(\mathbf{u}_h) \|_{Y_h}), \qquad h \to 0. \tag{6}$$

Notas

(i) El formalismo anterior es general y ha sido aplicado tanto para el estudio de esquemas en diferencias como de elementos finitos y métodos espectrales[11,12,5].

(ii) La idea básica es que la prueba de la cota de estabilidad (4) se efectúa sólo para $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{W}_h$ "cerca" de la solución teórica $\mathbf{u}_h$. Esta noción de estabilidad es, entonces, más débil que otras existentes en la literatura pero suficiente para la obtención del teorema 1 (ver[11] para una discusión más completa).

(iii) Otros autores[8,21] han usado definiciones más restrictivas de estabilidad utilizando umbrales de estabilidad no dependientes del parámetro h. La noción de estabilidad empleada por nosotros no es una generalización arbitraria sino, como puede verse en[6,22], una necesidad para el estudio de métodos numéricos para problemas de ecuaciones en derivadas parciales no lineales.

UN ESQUEMA CRANK-NICOLSON

Descripción del esquema

Usaremos la abreviatura $g(u) = \mathrm{if}(|u_1|^2 - |u_2|^2)Bu$. Se considera el problema 1-periódico para (1) dado por

$$u_t = Au_x + g(u), \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \leq T < +\infty. \tag{7.a}$$

$$u(x+1,t) = u(x,t), \qquad -\infty < x < +\infty, \quad 0 < t \le T < +\infty. \tag{7b}$$
$$u(x,0) = q(x), \tag{7c}$$

donde q es una función 1-periódica, conocida, de variable real que forma valores en $\mathbb{C}^2$. Supondremos que el problema (7) tiene una única solución clásica definida en $\mathbb{R} \times [0,T]$.

Para cada $J \in \mathbb{N}$ sean $h = \frac{1}{J}$ y $x_j = jh$, $j = 0, 1, ..., J$. Para $k > 0$ introduzcamos los niveles de tiempo $t_n = nk$, $n = 0, 1, ..., [\frac{T}{k}] = N$. Si representamos por U_j^n la aproximación numérica a $u_j^n = u(x_j, t_n), 0 \le j \le J$, $0 \le n \le N$, el esquema Crank-Nicolson para (7) viene dado, tras agrupar los U_j^n correspondientes a un mismo nivel temporal en un vector $\mathbf{U}^n = [U_1^{nT}, U_2^{nT}, ..., U_J^{nT}]^T$, por el sistema de ecuaciones.

$$k^{-1}(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n) = L_h \left[\left(\frac{1}{2}\right) (\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n) \right] + \mathbf{G} \left[\frac{(\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n)}{2} \right], \quad n = 0, \ldots, N-1, \tag{8a}$$

donde L_h es la matriz

$$L_h = (2h)^{-1} \begin{bmatrix} 0 & A & 0 & \cdots\cdots & 0 & -A \\ -A & 0 & A & \cdots\cdots & 0 & 0 \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ A & 0 & 0 & \cdots\cdots & -A & 0 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{G}$ representa la aplicación diagonal dada por $\mathbf{G}(\mathbf{V}) = [g(V_1)^T, g(V_2)^T, \ldots, g(V_J)^T]^T$ si $\mathbf{V} = [V_1^T, V_2^T, \ldots\ldots, V_J^T]^T \in \mathbb{C}^{2J}$. (8a) se suplementa con la condición inicial.

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{q}_h. \tag{8b}$$

donde $\mathbf{q}_h$ es una aproximación a $[q(x_1)^T, q(x_2)^T, \ldots\ldots, q(x_J)^T]^T$.

Para colocarnos dentro del marco general descrito anteriormente, se reescribe el esquema (8) en la forma siguiente:

(i) Sean $X_h = Y_h = [\mathbb{C}^{2J}]^{N+1}$. En $\mathbb{C}^{2J}$ usaremos las normas

$$\| \mathbf{V} \| = [h \sum_{1 \le i \le J} |V_i|^2]^{1/2}$$

$$\| \mathbf{V} \|_\infty = \max{}_{1 \le i \le J} |V_i|,$$

donde $\mathbf{V} = [V_1^T, V_2^T, \ldots\ldots, V_J^T]^T \in \mathbb{C}^{2J}$ y $|.|$ denota la norma euclídea usual en $\mathbb{C}^2$. En X_h e Y_h se definen las normas

$$\| \mathbf{V}_h \|_{X_h} = \max\{\| \mathbf{V}^n \| : 0 \le n \le N\}, \mathbf{V}_h = [\mathbf{V}^{0T}, \mathbf{V}^{1T}, \ldots, \mathbf{V}^{NT}]^T \in X_h,$$

$$\| \mathbf{F}_h \|_{Y_h} = \| \mathbf{F}^0 \| + k \sum_{1 \le n \le N} \| \mathbf{F}^n \|, \mathbf{F}_h = [\mathbf{F}^{0T}, \mathbf{F}^{1T}, \ldots, \mathbf{F}^{NT}]^T \in Y_h.$$

Con esta elección de normas de la estabilidad en el sentido de Sanz-Serna y López-Marcos es equivalente, para problemas de valores iniciales **lineales** a la estabilidad en el sentido habitual de Lax[15,17].

(ii) Supondremos en lo que sigue que los incrementos en tiempo y espacio están ligados por una relación $k = \sigma(h)$ con σ una función continua y creciente tal que $\sigma(0) = 0$.

(iii) Se define la aplicación Φ_h de X_h en Y_h por las relaciones.

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{V}^0 - \mathbf{q}_h. \tag{9a}$$

$$\mathbf{F}^{n+1} = k^{-1}\left(I - \left(\frac{k}{2}\right)L_h\right)\mathbf{V}^{n+1} - k^{-1}\left(I + \left(\frac{k}{2}\right)L_h\right)\mathbf{V}^n - \mathbf{G}\left(\frac{(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n)}{2}\right),$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1. \tag{9b}$$

donde $\Phi_h(\mathbf{V}_h) = \mathbf{F}_h, \mathbf{V}_h \in X_h, \mathbf{F}_h \in Y_h$.

Obviamente, un vector $\mathbf{U}_h = [\mathbf{U}^{0T}, \mathbf{U}^{1T}, \ldots, \mathbf{U}^{NT}]^T$ en X_h es una solución de la ecuación

$$\Phi_h(\mathbf{U}_h) = \mathbf{0} \tag{10}$$

si y sólo si sus componentes $\mathbf{U}^n, 0 \leq n \leq N$, son solución de (8).

(iv) Como representación de la solución teórica u tomaremos su restricción a la red $\mathbf{u}_h = [\mathbf{u}^{0T}, \mathbf{u}^{1T}, \ldots, \mathbf{u}^{NT}]^T$ con $\mathbf{u}^m = [u(x_1, t_m)^T, u(x_2, t_m)^T, \ldots, u(x_J, t_m)^T]^T \in \mathbb{C}^{2J}$.

ANALISIS DEL ESQUEMA

Consistencia

Denotemos por $\mathbf{I}_h$ al vector de errores locales $\Phi_h(\mathbf{u}_h)$, es decir al vector de Y_h de componentes

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}^0 =& \mathbf{u}^0 - \mathbf{q}_h, \\
\mathbf{I}^{n+1} =& k^{-1}(\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n) - L_h[(\frac{1}{2})(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n)] - \\
& - \mathbf{G}[\frac{(\mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{u}^n)}{2}], n = 0, \ldots, N-1.
\end{aligned}$$

Un desarrollo de Taylor hasta el orden dos permite probar el siguiente resultado:

Proposición 1

Supongamos que se verifican las siguientes hipótesis:

(i) La función f en (1) es continuamente diferenciable.

(ii) u posee derivadas acotadas de orden 3 en $0 < x < 1, 0 < t \leq T$.

(iii) Cuando $h \to 0$, los vectores $\mathbf{q}_h$ se eligen de forma que:

$$\| \mathbf{u}^0 - \mathbf{q}_h \| = O(h^2).$$

Entonces

$$\| \Phi_h(\mathbf{u}_h) \|_{Y_h} = \| \mathbf{I}^0 \| + k \sum_{1 \leq n \leq N} \| \mathbf{I}^n \| = O(k^2 + h^2), h \to 0.$$

Estabilidad

En el caso lineal en el que $f \equiv 0$, el esquema Crank-Nicolson viene dado por

$$\left(I - \left(\frac{k}{2} \right) L_h \right) \mathbf{U}^{n+1} = \left(I + \left(\frac{k}{2} \right) L_h \right) \mathbf{U}^n, \tag{11}$$

y es estable en el sentido de Lax[13,15] como se prueba en la siguiente proposición:

Proposición 2

El operador $(I - (\frac{k}{2})L_h)$ es invertible y

$$\| \left(I - \left(\frac{k}{2} \right) L_h \right)^{-1} \| \leq 1, \| \left(I - \left(\frac{k}{2} \right) L_h \right)^{-1} \left(I + \left(\frac{k}{2} \right) L_h \right) \| = 1. \tag{12}$$

Demostración

Los autovalores de $(I - (\frac{k}{2})L_h)$ y $(I + (\frac{k}{2})L_h)$ son respectivamente de la forma $1 - (\frac{k}{2})\mu$ y $1 + (\frac{k}{2})\mu$ con μ un autovalor de L_h. Como L_h es antisimétrica cada μ es imaginario puro y, en consecuencia, $(I - (\frac{k}{2})L_h)$ invertible. Por otra parte como $(I - (\frac{k}{2})L_h)$ y $(I + (\frac{k}{2})L_h)$ son matrices normales, su norma es el correspondiente radio espectral de donde se concluye el resultado inmediatamente.

Volviendo al caso de una no linealidad general se tiene:

Proposición 3

Supongamos que se verifica la hipótesis (i) de la proposición 1 y sea R una constante positiva, existen constantes S y k_0, que dependen sólo de R, T y $M = \max\{|u(x,t)| : \infty < x < +\infty, 0 \leq t \leq T\}$, tales que si $k < k_0$ y $\mathbf{V}_h$, $\mathbf{W}_h$ son vectores en X_h satisfaciendo

$$\| \mathbf{V}^n - \mathbf{u}^n \|_\infty < R, \| \mathbf{W}^n - \mathbf{u}^n \|_\infty < R, \quad n = 0, 1, \ldots, N, \tag{13}$$

entonces

$$\| \mathbf{V}_h - \mathbf{W}_h \|_{X_h} \leq S \| \Phi_h(\mathbf{V}_h) - \Phi_h(\mathbf{W}_h) \|_{Y_h} . \tag{14}$$

Demostración

Denotemos por $\mathbf{F}_h$ y $\mathbf{G}_h$ los residuos $\Phi_h(\mathbf{V}_h)$ y $\Phi_h(\mathbf{W}_h)$ respectivamente. Si $\mathbf{e}^n = \mathbf{V}^n - \mathbf{W}^n$ y $\mathbf{r}^n = \mathbf{F}^n - \mathbf{G}^n$, se tiene para $0 \leq n \leq N-1$,

$$\begin{aligned}\left(I - \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{e}^{n+1} = & \left(I + \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{e}^n + k\mathbf{r}^n + k\left[\mathbf{G}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n\right)\right)\right. \\ & \left. -\mathbf{G}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{W}^{n+1} + \mathbf{W}^n\right)\right)\right] .\end{aligned} \tag{15}$$

La condición de umbral (13) implica la desigualdad

$$\| \mathbf{G}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n\right)\right) - \mathbf{G}\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\mathbf{W}^{n+1} + \mathbf{W}^n\right)\right) \| \leq \left(\frac{L}{2}\right)\left(\| \mathbf{e}^{n+1} \| + \| \mathbf{e}^n \|\right), \tag{16}$$

donde $L = L(f, M, R)$ es una constante de Lipschitz de g en la bola de centro 0 y radio $M + R$. Entonces invirtiendo el operador $(I - (\frac{k}{2})L_h)$ y usando (12) y (16) se tiene

$$\begin{aligned}\| \mathbf{e}^{n+1} \| \leq \left(1 - \left(\frac{k}{2}\right) L\right)^{-1} \left(1 + \left(\frac{k}{2}\right) L\right) \| \mathbf{e}^n \| + k\left(1 - \left(\frac{k}{2}\right) L\right)^{-1} \| \mathbf{r}^{n+1} \|, \\ 0 \leq n \leq N-1,\end{aligned} \tag{17}$$

y mediante un consabido argumento de recurrencia se concluye la prueba.

La estabilidad en el sentido de Sanz-Serna y López-Marcos se obtiene de la proposición observando que escogiendo los umbrales $R_h = Rh^{1/2}$, si $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{W}_h$ verifican la condición $\| \mathbf{V}_h - \mathbf{u}_h \|_{X_h} < R_h$, $\| \mathbf{W}_h - \mathbf{u}_h \|_{X_h} < R_h$, entonces verifican (13) y por tanto (14).

Convergencia

El teorema 1 lleva de forma inmediata al siguiente resultado de convergencia.

Teorema 2

Supongamos que se verifican las hipótesis de la proposición 1 y que k y h están sujetos a una relación $k = rh^s$ con r y s constantes, $r > 0$ y $s > \frac{1}{4}$. Sea $R > 0$ fijo. Entonces

(i) Para h (y por tanto k) pequeños (10) posee una solución $\mathbf{U}_h$ que es única en $B(\mathbf{u}_h, R_h)$.

(ii) Existe una constante C, positiva, independiente de h (y k) tal que para h (y k) suficientemente pequeño

$$\| \mathbf{U}_h - \mathbf{u}_h \|_{X_h} = \max{}_{0\leq n\leq N} \| \mathbf{U}^n - \mathbf{u}^n \| \leq C(k^2 + h^2). \tag{18}$$

UN ESQUEMA LEAP-FROG

Emplearemos las notaciones de la sección 3. A lo largo de esta sección supondremos que

$$k = rh, \quad r \quad \text{constante}, \quad 0 < r < 1. \tag{19}$$

El esquema "Leap-Frog" para el problema (7) viene dado por la recurrencia de dos pasos (tres niveles):

$$(2k)^{-1}(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^{n-1}) = L_h\mathbf{U}^n + \mathbf{G}(\mathbf{U}^n), \quad n = 1, 2, \ldots, N-1, \tag{20a}$$

suplementada con condiciones iniciales.

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{q}_h, \mathbf{U}^1 = \mathbf{p}_h. \tag{20b}$$

Para efectuar el análisis descrito en la sección 2, es conveniente reescribir previamente (20) como un esquema de un solo paso (dos niveles) en la forma

$$(2k)^{-1}\begin{bmatrix}\mathbf{U}^{n+1}\\ \mathbf{U}_*^{n+1}\end{bmatrix} = M_h\begin{bmatrix}\mathbf{U}^{n}\\ \mathbf{U}_*^{n}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\mathbf{G}(\mathbf{U}^n)\\ 0\end{bmatrix}, \quad n = 1, 2, \ldots, N \tag{21a}$$

$$\begin{bmatrix}\mathbf{U}^{1}\\ \mathbf{U}_*^{1}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{P}_h\\ \mathbf{q}_h\end{bmatrix}. \tag{21b}$$

Aquí M_h denota el operador lineal en $\mathbb{C}^{2J} \times \mathbb{C}^{2J}$

$$M_h = (2k)^{-1}\begin{bmatrix}2kL_h & I\\ I & 0\end{bmatrix}$$

En $\mathbb{C}^{2J} \times \mathbb{C}^{2J}$ emplearemos la norma de la energía

$$\| \left[\mathbf{V}^T, \mathbf{V}_*^T\right]^T \|_E^2 = \| \mathbf{V} \|^2 + \| \mathbf{V}_* \|^2 - 2kRe(L_h\mathbf{V}_*, \mathbf{V}), \tag{22}$$

donde $(.,.)$ denota el producto escalar en $\mathbb{C}^{2J}$ asociado a la norma L^2-discreta $\| \, . \, \|$, introducida en la sección anterior. Aplicando el teorema de Gershgorin a la matriz L_h se obtiene $\| L_h \| \leq \frac{1}{h}$, cota que, junto a la desigualdad de Cauchy-Schwarz, da

$$(1-r)\left[\| \mathbf{V} \|^2 + \| \mathbf{V}_* \|^2\right] \leq \| \left[\mathbf{V}^T, \mathbf{V}_*^T\right]^T \|_E^2 \leq (1+r)\left[\| \mathbf{V} \|^2 + \| \mathbf{V}_* \|^2\right]. \tag{23}$$

De esta forma se prueba que (22) es, efectivamente, una norma, que es uniformemente equivalente (r es constante) a la norma euclídea habitual. Tras ciertas manipulaciones[4] se obtiene entonces que el operador $2kM_h$ es una isometría en la norma de la energía con lo que, en el caso lineal, el esquema (21) es estable en el sentido de Lax.

El esquema se escribe dentro del marco abstracto descrito en la sección 2, tomando $X_h = Y_h = [\mathbb{C}^{2J} \times \mathbb{C}^{2J}]^N$ dotados de las normas.

$$\| \mathbf{V}_h \|_{X_h} = \max{}_{1 \leq m \leq N} \| \left[\mathbf{V}^{mT}, \mathbf{V}_*^{mT}\right]^T \|_E \tag{24a}$$

$$\| \mathbf{F}_h \|_{Y_h} = \| \left[\mathbf{F}^{1T}, \mathbf{F}_*^{1T}\right]^T \|_E + k \sum_{2 \leq m \leq N} \| \left[\mathbf{F}^{mT}, \mathbf{F}_*^{mT}\right]^T \|_E \tag{24b}$$

donde $[\mathbf{V}^{mT}, \mathbf{V}*^{mT}]^T$ y $[\mathbf{F}^{mT}, \mathbf{F}*^{mT}]^T$ son las componentes de $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{F}_h$ respectivamente. La aplicación Φ_h viene dada ahora por $\Phi_h(\mathbf{V}_h) = \mathbf{F}_h$ con

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}^{n+1} \\ \mathbf{F}_*^{n+1} \end{bmatrix} = (2k)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{n+1} \\ \mathbf{V}_*^{n+1} \end{bmatrix} - M_h \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{n} \\ \mathbf{V}_*^{n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{V}^n) \\ 0 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq n \leq N, \tag{25a}$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{F}^{1} \\ \mathbf{F}_*^{1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}^{1} \\ \mathbf{V}_*^{1} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{p}_h \\ \mathbf{q}_h \end{bmatrix} \tag{25b}$$

La técnica usada en la prueba de la proposición 3 proporciona el resultado de **estabilidad** siguiente.

Proposición 4

Supongamos que la función f en (1) es diferenciable con continuidad y $R > 0$ fijo. Existe una constante positiva S, que depende de r, R, f, T y $M = \max\{|u(x,t)| - \infty < x < +\infty, \ 0 \leq t \leq T\}$, tal que si $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{W}_h$ son vectores en X_h con

$$\max{}_{1 \leq n \leq N} \| \mathbf{V}^n - \mathbf{u}^n \|_\infty < R, \ \max{}_{1 \leq n \leq N} \| \mathbf{W}^n - \mathbf{u}^n \|_\infty < R, \tag{26}$$

se verifica

$$\| \mathbf{V}_h - \mathbf{W}_h \|_{X_h} \leq S \| \Phi_h(\mathbf{V}_h) - \Phi_h(\mathbf{V}_h) \|_{Y_h} . \tag{27}$$

Por tanto la discretización es estable en el sentido de Sanz-Serna y López-Marcos con umbrales $R_h = Rh^{1/2}$.

Se prueba fácilmente que el esquema (21) es consistente de orden 2 si u es suficientemente regular y los vectores de arranque $\mathbf{P}_h$ y $\mathbf{q}_h$ en (21b) se toman verificando $\| [\mathbf{u}^{1T}, \mathbf{u}^{0T}]^T - [\mathbf{p}_h^T, \mathbf{q}_h^T]^T \|_E = O(h^2)$ cuando $h \to 0$. El teorema 1 prueba, entonces, la convergencia de orden 2 del esquema en la norma de la energía y por tanto, aplicando (23), en la norma L^2-discreta habitual.

UN ESQUEMA BOX

Hasta aquí sólo se ha considerado el problema periódico. Para posibilitar el tratamiento numérico conviene a veces introducir otras condiciones frontera. Analizamos a continuación, un esquema "box"[8,9] aplicado al problema:

$$u_t = Au_x + g(u), \; 0 < x < 1, \; 0 < t \leq T < +\infty, \tag{28a}$$

$$b_0^T u(0,t) = b_1^T(1,t) = 0, \; 0 < t \leq T, \tag{28b}$$

$$u(x,0) = q(x), \tag{28c}$$

donde $b_0 = [1,1]^T, b_1 = [1,-1]^T$ y el dato inicial q satisface las condiciones frontera (28b). Supondremos, como antes, en todo lo que sigue que (28) posee una única solución clásica regular u.

Las cantidades J, h, k, N, x_j y t_n se introducen como en la sección 3 y, ahora, tanto los vectores de aproximaciones numéricos , $\mathbf{U}^n$, como los de restricción a la red de la solución (28) $\mathbf{u}^n$ contienen $J+1$ componentes en $\mathbb{C}^2$, U_j^n y $u_j^n = u(x_j, t_n), 0 \leq j \leq J$. Denotaremos por Z_h, para cada $J \in \mathbb{N}$, $h = \frac{1}{J}$, al subespacio de $\mathbb{C}^{2(J+1)}$ de dimensión $2J$ formado por los vectores $\mathbf{V} = [\mathbf{V}_0^T, \mathbf{V}_1^T, \ldots, \mathbf{V}_J^T]^T$ que verifican las condiciones frontera $b_0^T V_0 = b_1^T V_J = 0$. El esquema box para (28a) puede escribirse en la forma

$$\Pi_h \left[\frac{(\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n)}{k} \right] = \Lambda_h \left[\frac{(\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n)}{2} \right] + \mathbf{G} \left(\Pi_h \left[\frac{(\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n)}{2} \right] \right),$$

$$n = 0, 1, \ldots, N-1, \tag{29a}$$

donde Π_h y Λ_h son operadores que aplican $\mathbb{C}^{2(J+1)}$ en $\mathbb{C}^{2J}$ y están dados por las matrices

$$\Pi_h = (\frac{1}{2}) \begin{bmatrix} I & I & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & I & I & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & I & I \end{bmatrix}$$

$$\Lambda_h = (\frac{1}{h}) \begin{bmatrix} -A & A & 0 & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & -A & A & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & \ldots\ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ldots & -A & A \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{G}$ denota la aplicación diagonal definida en $\mathbb{C}^{2J}$ dada, si $\mathbf{F} = [F_{1/2}^T, F_{3/2}^T, \ldots, F_{J-1/2}^T]^T$, por $\mathbf{G}(\mathbf{F}) = [g(F_{1/2})^T, g(F_{3/2})^T, \ldots, g(F_{J-1/2})^T]^T$. Las condiciones frontera se imponen pidiendo que

$$\mathbf{U}^n \in Z_h, \quad n = 1, 2, \ldots, N, \tag{29b}$$

y la condición inicial es

$$\mathbf{U}^0 = \mathbf{q}_h, \tag{29c}$$

con $\mathbf{q}_h$ en Z_h.

En el formalismo de la sección 2, X_h e Y_h son, en este caso, $X_h = Z_h \times Z_h \times \ldots \times Z_h$ e $Y_h = Z_h \times \mathbb{C}^{2J} \times \ldots \times \mathbb{C}^{2J}$ respectivamente (en X_h el factor Z_h se repite $N+1$ veces y $\mathbb{C}^{2J}$ lo hace N veces en Y_h). La aplicación Φ_h viene dada por las igualdades,

$$\begin{aligned} \mathbf{F}^{n+1} &= k^{-1}\left(\Pi_h - \left(\frac{k}{2}\right)\Lambda_h\right)\mathbf{V}^{n+1} - k^{-1}\left(\Pi_h + \left(\frac{k}{2}\right)\Lambda_h\right)\mathbf{V}^n - \\ &\quad -\mathbf{G}\left(\frac{\Pi_h\left(\mathbf{V}^{n+1} + \mathbf{V}^n\right)}{2}\right), \quad 0 \le n \le N-1, \end{aligned} \tag{30a}$$

$$\mathbf{F}^0 = \mathbf{V}^0 - \mathbf{q}_h, \tag{30b}$$

si $\Phi_h(\mathbf{V}_h) = \mathbf{F}_h, \mathbf{V}_h \in X_h, \mathbf{F}_h \in Y_h$. Los vectores $\mathbf{U}^n, 0 \le n \le N$, son solución de (29) si y sólo si $\mathbf{U}_h = [\mathbf{U}^{0T}, \mathbf{U}^{1T}, \ldots, \mathbf{U}^{NT}]^T \in X_h$ lo es de

$$\Phi_h(\mathbf{U}_h) = \mathbf{0} \tag{31}$$

En X_h e Y_h usaremos las normas

$$\| \mathbf{V}_h \|_{X_h} = \max{}_{0 \le m \le N} \| \mathbf{V}^n \|_{Z_h},$$

$$\| \mathbf{F}_h \|_{Y_h} = \| \mathbf{F}^0 \|_{Z_h} + k \sum_{1 \le n \le N} \| \mathbf{F}^n \|,$$

donde la norma $\|\ .\ \|$ en $\mathbb{C}^{2J}$ es la norma L^2- discreta habitual y la norma en Z_h es

$$\| \mathbf{V} \|_{Z_h} = \| \Pi_h \mathbf{V} \| . \tag{32}$$

Esta expresión define una norma en $Z_h{}^4$ que, cuando $J \to +\infty$ no es uniformemente equivalente a la norma L^2 habitual $\| \mathbf{V} \|_2 = [\sum''_{0 \leq i \leq J} h|V_i|^2]^{1/2}$ (la doble tilde significa que los sumandos primero y último están divididos por dos).

La siguiente proposición prueba que en el caso lineal, $\mathbf{G} = \mathbf{0}$, (29a) junto con las condiciones frontera (29b) es un esquema estable en el sentido de Lax.

Proposición 5

El operador $[\Pi_h - (\frac{k}{2})\Lambda_h]$ es invertible cuando se considera restringido al dominio Z_h. Además

$$\| \left[\Pi_h - \left(\frac{k}{2}\right)\Lambda_h\right]^{-1} \| \leq 1, \tag{33}$$

$$\| \left[\Pi_h - \left(\frac{k}{2}\right)\Lambda_h\right]^{-1} \left[\Pi_h + \left(\frac{k}{2}\right)\Lambda_h\right] \| \leq 1. \tag{34}$$

Las normas en (33) y (34) son las normas de operador de Z_h en $\mathbb{C}^{2J}$ y de $\mathbb{C}^{2J}$ en $\mathbb{C}^{2J}$ respectivamente.

Demostración

Sea $\mathbf{V} \in Z_h$ y $\mathbf{F} = [\Pi_h - (\frac{k}{2})\Lambda_h]\mathbf{V}$. Entonces podemos escribir

$$\begin{aligned} F_{i+1/2} &= \left(\frac{1}{2}\right)\left(I - \left(\frac{k}{h}\right)A\right)V_{i+1} + \left(\frac{1}{2}\right)\left(I + \left(\frac{k}{h}\right)A\right)V_i \\ &= \left(\frac{1}{2}\right)(V_{i+1} + V_i) - \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{h}\right)A(V_{i+1} - V_i), \quad j = 0, 1, \ldots, J-1. \end{aligned}$$

Tomando normas y teniendo en cuenta la simetría de la matriz A, es

$$\begin{aligned} |F_{i+1/2}|^2 &= |\left(\frac{1}{2}\right)(V_{i+1} + V_i)|^2 + |\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{h}\right)A(V_{i+1} - V_i)|^2 \\ &\quad - 2Re\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{h}\right)AV_{i+1}, \left(\frac{1}{2}\right)V_{i+1}\right) \\ &\quad + 2Re\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{h}\right)AV_i, \left(\frac{1}{2}\right)V_i\right), \end{aligned}$$

donde $(.,.)$ denota el producto interno habitual en $\mathbb{C}^2$, sumando en j

$$\begin{aligned} \| \mathbf{F} \|^2 \geq \| \mathbf{V} \|^2_{Z_h} &- 2Re\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{h}\right)AV_J, \left(\frac{1}{2}\right)V_J\right) \\ &+ 2Re\left(\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{k}{h}\right)AV_0, \left(\frac{1}{2}\right)V_0\right). \end{aligned}$$

Por la definición de A y las condiciones frontera se tiene $(AV_J, V_J) = -|V_J|^2$ y $(AV_0, V_0) = |V_0|^2$ y por tanto $\| \mathbf{F} \|^2 \geq \| \mathbf{V} \|_{Z_h}^2$, lo que prueba que $(\Pi_h - (\frac{k}{2})\Lambda_h)$ es biyectivo de Z_h en $\mathbb{C}^{2J}$. Para probar (34), se toma $\mathbf{W} = [\Pi_h - (\frac{k}{2})\Lambda_h]^{-1}[\Pi_h + (\frac{k}{2})\Lambda_h]\mathbf{V}$ y se actúa como antes.

Procediendo como en secciones anteriores se obtiene el siguiente resultado de estabilidad.

Proposición 6

Supongamos que la función f en (1) es diferenciable con continuidad y sea R una constante positiva. Existen constantes S y k_0, positivas, que dependen de R, T, f, y $M = \max \{|u(x,t)| : 0 \leq x \leq 1,\ 0 \leq t \leq T\}$, tales que si $k < k_0$ para cada $\mathbf{V}_h$ y $\mathbf{W}_h$ en X_h verificando,

$$\max_{0 \leq n \leq N} \| \Pi_h(\mathbf{V}^n - \mathbf{u}^n) \|_\infty < R, \quad \max_{0 \leq n \leq N} \| \Pi_h(\mathbf{W}^n - \mathbf{u}^n) \|_\infty < R, \tag{35}$$

se tiene

$$\| \mathbf{V}_h - \mathbf{W}_h \|_{X_h} \leq S \, \| \Phi_h(\mathbf{V}_h) - \Phi_h(\mathbf{W}_h) \|_{Y_h} . \tag{36}$$

En consecuencia la discretización (31) es estable restringida a los umbrales $R_h = R_h^{1/2}$.

Después de comprobar que (31) es consistente de orden 2 bajo las siguientes hipótesis: (i) u posee derivadas de orden tres acotadas, (ii) f es derivable con continuidad y (iii) $\| \mathbf{u}^0 - \mathbf{q}_h \|_{Z_h} = O(h^2)$ cuando $h \to 0$. El teorema 1 de la sección 2 permite probar un resultado de convergencia similar al teorema 2. Notemos que se prueba la convergencia en la norma de Z_h, es decir, la convergencia de las medias de los valores nodales de la solución computada, $\Pi_h \mathbf{U}^n$, a las medias correspondientes de la restricción de la red de la solución teórica $\Pi_h \mathbf{u}^n$, en la norma L^2-discreta. La convergencia es, por el teorema 1, de orden 2.

IMPLEMENTACION Y EXPERIMENTOS NUMERICOS

Los esquemas en diferencias (8), (20) y (29) se han implementado en un VAX 11/780 en lenguaje FORTRAN usando aritmética compleja con precisión simple (compilador VAX-11 FORTRAN).

Como solución teórica se ha empleado la onda estacionaria[1,2]

$$\begin{aligned} \Gamma_\Lambda(x,t) &= [M(x), iN(x)]^T e^{-i\Lambda t}, \\ M(x) &= 2^{1/2}(1-\Lambda^2)^{1/2}(1+\Lambda)^{1/2}\frac{ch((1-\Lambda^2)^{1/2}x)}{1+\Lambda ch(2(1-\Lambda^2)^{1/2}x)} \\ N(x) &= 2^{1/2}(1-\Lambda^2)^{1/2}(1-\Lambda)^{1/2}\frac{sh((1-\Lambda^2)^{1/2}x)}{1+\Lambda ch(2(1-\Lambda^2)^{1/2}x)} \end{aligned} \tag{37}$$

con frecuencia $\Lambda = 0.75$. Las funciones Γ_Λ son soluciones del problema puro de valores iniciales para (1) que decrecen exponencialmente a cero cuando $x \to \pm\infty$ por lo que pueden usarse, sin introducir sustancialmente ningún error, como solución teórica de (1) con condiciones frontera periódicas o del tipo (28b) en un intervalo $[x_L, x_R], x_L < 0 < x_R$, con x_L y x_R suficientemente alejados del origen. En nuestros experimentos hemos tomado $x_L = -16$ y $x_R = 16$. Los errores globales se miden en tiempo $T = 8$ en todos los casos.

Las ecuaciones, no lineales, del esquema Crank-Nicolson se escriben en la forma:

$$\left(I - \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{U}^{n+1} = \left(I + \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{U}^n + k\mathbf{G}\left(\frac{(\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n)}{2}\right), \quad 0 \le n \le N-1. \tag{38}$$

este sistema se resuelve, en cada paso, mediante una iteración de punto fijo obteniéndose primero la "predicción"

$$\mathbf{U}^* = \left(I + \frac{k}{2} L_h\right) \mathbf{U}^n + k\mathbf{G}\left(\mathbf{U}^n\right), \tag{39}$$

para aplicar, después, las etapas correctoras

$$\mathbf{U}_{[0]} = \mathbf{U}^* \tag{40a}$$

$$\left(I - \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{U}_{[r+1]} = \left(I + \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{U}^n + k\mathbf{G}\left(\frac{\left(\mathbf{U}^n + \mathbf{U}_{[r]}\right)}{2}\right), \quad r = 0, 1, \ldots. \tag{40b}$$

De esta manera sólo es necesario factorizar la matriz $(I - (\frac{k}{2})L_h)$ una vez al principio de los cálculos. Por otra parte (40b) se implementa en la forma más eficiente[19]

$$\left(I - \left(\frac{k}{2}\right) L_h\right) \mathbf{U}^{**} = \mathbf{U}^n + \left(\frac{k}{2}\right) \mathbf{G}\left(\frac{\left(\mathbf{U}^n + \mathbf{U}_{[r]}\right)}{2}\right), \tag{41a}$$

$$\mathbf{U}_{[r]} = 2\mathbf{U}^{**} - \mathbf{U}^n, \tag{41b}$$

eliminando la necesidad de computar el término $(I + (\frac{k}{2})L_h)\mathbf{U}^n$.

Las $2J$ ecuaciones con $2J + 2$ incógnitas (29a) del esquema "box" junto con las condiciones frontera (29b) dan lugar al sistema

$$A_h \mathbf{U}^{n+1} = B_h \mathbf{U}^n + 2k\mathbf{G}'\left(\frac{\Pi_h\left(\mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{U}^n\right)}{2}\right), \quad 0 \le n \le N-1, \tag{42}$$

donde

$$A_h = \begin{bmatrix} 1 \quad 1 & 0 \quad 0 & & \\ I+(\frac{k}{h})A & I-(\frac{k}{h})A & & \\ & I+(\frac{k}{h})A & I-(\frac{k}{h})A & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & I+(\frac{k}{h})A & I-(\frac{k}{h})A \\ & & 0 \quad 0 & 1 \quad -1 \end{bmatrix}$$

$$B_h = \begin{bmatrix} 0 \quad 0 & 0 \quad 0 & & \\ I-(\frac{k}{h})A & I+(\frac{k}{h})A & & \\ & I-(\frac{k}{h})A & I+(\frac{k}{h})A & \\ \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \cdots\cdots \\ & & I-(\frac{k}{h})A & I+(\frac{k}{h})A \\ & & 0 \quad 0 & 0 \quad 0 \end{bmatrix}$$

y $\mathbf{G}'(\frac{\Pi_h(\mathbf{U}^{n+1}+\mathbf{U}^n)}{2}) = [0, \mathbf{G}(\frac{\Pi_h(\mathbf{U}^{n+1}+\mathbf{U}^n)}{2})^T, 0]^T$.

Este sistema de ecuaciones se resuelve, como en el caso anterior, mediante una iteración de punto fijo en la forma

$$\mathbf{U}_{[0]} = \mathbf{U}^n \tag{43a}$$

$$A_h\mathbf{U}_{[r+1]} = B_h\mathbf{U}^n + 2k\mathbf{G}'\left(\frac{\Pi_h\left(\mathbf{U}^n+\mathbf{U}_{[r]}\right)}{2}\right), \quad r = 0,1,\ldots. \tag{43b}$$

El sistema lineal ($43b$) se resuelve factorizando la matriz casidiagonal por bloques A_h al principio de los cálculos usando el paquete de software SOLVEBLOK[3].

Las tablas I y II corresponden a los esquemas Crank-Nicolson y box respectivamente. En ambos casos la iteración interna es detenida cuando la diferencia entre dos interantes consecutivos es menor que 10^{-5} (diferencia medida en la norma L^2 en el caso del esquema Crank-Nicolson y en la norma de Z_h en el caso del box). En las tablas el número entre paréntesis es el tiempo de C.P.U. empleado en centésimas de segundo y el subrayado el número de iteraciones internas necesarias para detener la iteración en cada paso. El error es el número sin subrayar que aparece sin paréntesis en las tablas. En ambos casos se observa que al dividir h y k simultáneamente por dos el error se divide aproximadamente por cuatro, de acuerdo con el estudio efectuado en las secciones 3 y 5. El tiempo de C.P.U. empleado por el esquema box es mayor que el requerido por el método Crank-Nicolson debido al mayor número de iteraciones necesarias para alcanzar la tolerancia, unido a la mayor dificultad que presenta la resolución de los sistemas ($43b$) frente a los ($40b$). De hecho, en cada paso el esquema box emplea casi tres veces más tiempo que el esquema Crank-Nicolson para obtener la misma precisión.

En la tabla III se presentan los resultados obtenidos con el método Leap-Frog. En este caso los parámetros k y h se hacen variar sujetos a la relación $0 < k < h$ para que el esquema sea estable. Al igual que en las tablas I y II, el error global de

k \ h	0.2	0.1	0.05
0.4	0.7199E-02 (1327) 6	0.1819E-01 (2560) 6	0.2166E-01 (5146) 6
0.2	0.1493E-01 (1766) 4	0.1829E-02 (3629) 4	0.4686E-02 (7052) 4
0.1	0.1910E-01 (2813) 3	0.3691E-02 (5496) 3	0.4809E-03 (10990) 3
0.05	0.2021E-01 (5501) 3	0.4673E-02 (10925) 3	0.9737E-03 (21947) 3
0.025	0.2049E-01 (7962) 2	0.4980E-02 (15598) 2	0.1099E-02 (31053) 2

Tabla I.

este esquema presenta claramente un comportamiento $O(k^2 + h^2)$ cuando se refina la red con $\frac{k}{h}$ = constante. Comparando con la tabla I se observa que el esquema Leap-Frog es más eficiente que el esquema Crank-Nicolson, debido a que los mayores pasos de tiempo que puede tomar el método implícito no compensan el trabajo requerido para resolver las ecuaciones no lineales. Sin embargo cuando el método explícito se ha empleado en cálculos con T grande se han presentado fenómenos de inestabilidad no lineal típicos de los esquemas Leap-Frog[16,18,20,22]. Esto hace que para problemas en los que sea necesario la integración de intervalos de tiempo grandes (por ejemplo en el estudio de interacciones entre ondas) el esquema Crank-Nicolson sea más ventajoso.

Agradecimiento

Este trabajo es parte del Proyecto PB-86-0313 subvencionado por "Fondo Nacional para el Desarrollo de la Investigación Científica y Técnica".

REFERENCIAS

1. A. Alvarez y B. Carreras, "Interactions dynamics for the solitary waves of a nonlinear Dirac Model", *Phys. Lett. A*, Vol. **86**, pp. 327-332, (1981).
2. A. Alvarez, B.Y. Kuo y L. Vázquez, "The numerical study of a nonlinear one-dimensional Dirac equation", *Appl. Math. Comput.*, Vol. **13**, pp. 1-15, (1983).
3. C. de Boor, *"A practical guide to splines"*, Springer, New York, (1978).

k \ h	0.2	0.1	0.05
0.4	0.3475E-01 (3266) 7	0.2571E-01 (6555) 7	0.2352E-01 (13214) 7
0.2	0.1878E-01 (4688) 5	0.8986E-02 (9257) 5	0.6634E-02 (18831) 5
0.1	0.1480E-01 (2813) 4	0.4739E-02 (5496) 4	0.2264E-02 (10990) 4
0.05	0.1382E-01 (15078) 4	0.3716E-02 (29577) 4	0.1173E-02 (59449) 4
0.025	0.1357E-01 (22508) 3	0.3454E-02 (44593) 3	0.9154E-02 (89180) 3

Tabla II.

k \ h	0.2	0.1	0.05
0.1	0.2342E-01 (399)		
0.05	0.2120E-01 (802)	0.5770E-02 (1635)	
0.025	0:2073E-01 (1618)	0.5224E-02 (2262)	0.1442E-02 (6588)
0.0125	0.2062E-01 (3260)	0.5107E-02 (6582)	0.1306E-02 (13122)

Tabla III.

4. J. de Frutos, "Solución numérica de ecuaciones de Dirac no lineales", *Tesis Doctoral*, Universidad de Valladolid, Valladolid, (1987).

5. J. de Frutos, J.M. Sanz Serna, "Split-Step spectral schemes for nonlinear Dirac Sistems", a publicarse en *J. Comput. Phys.*
6. J. de Frutos, J.M. Sanz-Serna, "h-dependent thresholds avoid the need for a priori bounds in nonlinear convergence proofs", aparecerá en *Computational Mathematics III, proceedings of the Third International Conference on Numerical Analysis and its Applications*, Benin City, Nigeria (S. O. Fatunla ed.), Boole Press, Dublin, Enero 1988.
7. B. Y. Guo, "On stability of discretizations", *Sci. Sinica*, Vol **25**, pp. 702-715, (1982).
8. H.B. Keller, "Approximation methods for nonlinear problems with applications to two-point boundary value problems", *Math. Comput.*, Vol. **29**, pp. 464-474, (1975).
9. H.B. Keller y A. B. White Jr., "Difference methods for boundary value problems in ordinary differential equations", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **12**, pp. 791-802, (1975).
10. J.C. López-Marcos, "Estabilidad de discretizaciones no lineales", *Tesis Doctoral*, Universidad de Valladolid, Valladolid, (1985).
11. J.C. López-Marcos y J. M. Sanz-Serna, "A definition of stability for nonlinear problems", *Numerical treatment of differential equations, proceedings of the Fourth Seminar Held in Halle*, Teubner-texte, pp. 216-226, Leipzig, (1988).
12. J.C. López-Marcos y J.M. Sanz-Serna, "Stability and convergence in numerical analysis III: Linear investigation of nonlinear stability", *IMA J. Numer. Anal.*, Vol. **8**, pp. 71-84, (1988).
13. R.D. Richtmyer y K.W. Morton, *"Difference methods for Initial-value problems"*, John Wiley and Sons, New York, (1967).
14. J.M. Sanz-Serna, "Methods for the numerical solution of the nonlinear Schröedinger equation", *Math. Comput.*, Vol. **43**, pp. 21-37, (1984).
15. J.M. Sanz-Serna, "Stability and convergence in numerical analysis I: Linear problems, a simple, comprehensive account", *Nonlinear differential equations*, (J. K. Hale y P. Martinez-Amores eds.), pp. 64-113, Pitman, Boston, (1985).
16. J.M. Sanz-Serna, "Studies in numerical nonlinear instability I, Why do leap-frog schemes go unestables", *SIAM J. Sci. Stat. Comput.*, Vol. **6**, pp. 923-938, (1985).
17. J.M. Sanz-Serna y C. Palencia "A general equivalence theorem in the theory of discretization methods", *Math. Comput.*, Vol. **45**, pp. 143-152, (1985).
18. J.M. Sanz-Serna y F. Vadillo "Nonlinear instability, the dynamic approach", *"Numerical Analysis"*, (D.F. Griffiths, G.A. Watson eds.), Pitman Research Notes in Mathematics 140, Longman Scientific and Technical, pp. 187-199, London, (1986).
19. J.M. Sanz-Serna, J. C. Verwer, "Conservative and nonconservative schemes for the Nonlinear Schrödinger equation", *IMA J. Numer. Anal.*, Vol. **6**, pp. 25-42, (1985).
20. J.M. Sanz-Serna, F. Vadillo, "Studies in numerical instability III: Augmented hamiltonian systems", *SIAM J. Appl. Math.*, Vol. **47**, pp. 92-108, (1987).
21. H.J. Setter, *"Analysis of discretization methods for ordinary differential equations"*, Springer, Berlin-Heidelberg, (1973).
22. F. Vadillo y J.M. Sanz-Serna, "Studies in numerical nonlinear instability II, a New look at $u_t + uu_x = 0$", *J. Comput. Phys.*, Vol. **66**, pp. 225-238, (1986).
23. J.A.C. Weideman y B.M. Hebst, "Split-step methods for the solution of the nonlinear Schrödinger equation", *SIAM J. Numer. Anal.*, Vol. **26**, pp. 485-507, (1986).
24. G. B. Whitham, *"Linear and nonlinear waves"*, Wiley-Interscience, New York, (1974).