

ANALISIS MULTICAPA DE COMPOSITES. APLICACION AL ESTUDIO INTERLAMINAR DE TECHOS DE AUTOBUS

ANTONIO MIRAVETE DE MARCO*

ANDRES GARCIA GRACIA**

y

CARLOS VERA ALVAREZ*

RESUMEN

Se expone en este trabajo un estudio teórico-experimental relativo al aspecto multicapa de materiales composites. La campaña de ensayos de laboratorio se ha efectuado en colaboración con Cristalería Española, S.A. En la parte final del artículo, se describe una aplicación a techos de autobús realizados en poliéster reforzado con fibra de vidrio, tema de gran actualidad debido a la reciente aparición del reglamento 36 de homologación de autobuses. Esta aplicación se ha llevado a cabo de forma conjunta con la empresa Hispano Carrocera S.A.

SUMMARY

This paper exposes a theoretical and experimental study relative to the multilayer aspect of the composite materials. The laboratory tests have been made with the gentle collaboration of Cristalería Española, S.A. In the last part of the paper, an application to bus ceilings made of glass fibre-reinforced poliéster is described. This is a subject of actuality due to the recent publication of the 36th normative of buses homologation. This application has been made in collaboration with the firm Hispano Carrocera, S.A.

FORMULACION DEL ANALISIS MULTICAPA

En primer lugar se va a determinar la matriz de constantes elásticas para una lámina de configuración genérica en base a la teoría de composites.

Para obtener las expresiones de comportamiento elástico de este tipo de materiales se requiere la aplicación de dos técnicas en paralelo:

* Dpto. Transportes

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Zaragoza
Pza. San Francisco, s/n, 50009 Zaragoza

** Dpto. Transportes

Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de Madrid
c/. José Gutiérrez Abascal, 6, 28006 Madrid

Recibido Junio 1985

- Una formulación teórica, que en función de una serie de hipótesis, permita generar la matriz de constantes elásticas.
- Una campaña de ensayos de laboratorio que cuantifique los módulos elásticos, coeficientes de Poisson y coeficientes de desalineación del elemento unidimensional.

Exceptuando la configuración de tipo mat, tratada genéricamente como material isotrópo, la composición estructural del composite implica una consideración de ortotropía de forma que la ecuación fundamental del comportamiento elástico¹⁴:

$$\underline{\sigma} = \underline{D} \underline{\epsilon} \quad (1)$$

toma la siguiente forma:

$$\underline{D} = \underline{T} \underline{Q} \underline{R} \underline{T}^{-1} \underline{R}^{-1} \quad (2)$$

donde:

$$\underline{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \alpha & \sin^2 \alpha & 0 & 0 & -2 \sin \alpha \cos \alpha \\ \sin^2 \alpha & \cos^2 \alpha & 0 & 0 & 2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ 0 & 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ \sin \alpha \cos \alpha & -\sin \alpha \cos \alpha & 0 & 0 & \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \end{bmatrix} \quad (4)$$

$$\underline{Q} = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 & 0 & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & Q_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Q_{55} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix} \quad (5)$$

con

$$Q_{11} = \frac{1 - \nu_{23} \nu_{32}}{E_2 E_3 \Delta} - \frac{(\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23})^2}{(1 - \nu_{12} \nu_{21}) E_1 E_2 \Delta} \quad (6)$$

$$Q_{12} = \frac{\nu_{21} + \nu_{31} \nu_{23}}{E_2 E_3 \Delta} - \frac{(\nu_{13} + \nu_{12} \nu_{23}) (\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13})}{(1 - \nu_{12} \nu_{21}) E_1 E_2 \Delta} \quad (7)$$

$$Q_{22} = \frac{1 - \nu_{13} \nu_{31}}{E_1 E_3 \Delta} - \frac{(\nu_{23} + \nu_{21} \nu_{13})^2}{(1 - \nu_{12} \nu_{21}) E_1 E_2 \Delta} \quad (8)$$

$$Q_{44} = G_{23} \quad (9)$$

$$Q_{55} = G_{31} \quad (10)$$

$$Q_{66} = G_{12} \quad (11)$$

$$\Delta = \frac{1 - \nu_{12} \nu_{21} - \nu_{23} \nu_{32} - \nu_{31} \nu_{13} - 2\nu_{21} \nu_{32} \nu_{13}}{E_1 E_2 E_3} \quad (12)$$

$$E_i = f(E_m, E_f, c) \quad i = 1, 2, 3 \quad (13)$$

$$G_{ij} = f(G_m, G_f, c) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (14)$$

$$\nu_{ij} = f(E_m, E_f, \nu_m, \nu_f, c) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad i \neq j \quad (15)$$

Los subíndices m y f indican respectivamente matriz y material unidimensional.

El ángulo α representa el ángulo formado por los ejes locales de la lámina y los ejes principales de ortotropía.

Varias series de ensayos de laboratorio realizadas sobre diferentes matrices y elementos unidimensionales, han consolidado un banco de datos que permite cuantificar los valores de $E_m, E_f, \nu_m, \nu_f, G_m, G_f$.

La determinación del coeficiente de desalineación del material unidimensional, c, se lleva a cabo mediante la experimentación de un número de probetas construidas de forma análoga a la de la pieza que se pretende calcular, ya que la tecnología de fabricación influye de forma decisiva en el comportamiento mecánico de este tipo de materiales.

Con objeto de apreciar la puesta a punto teórico-experimental de la matriz de constantes elásticas de un laminado se representa en la Figura 1, la variación del

módulo elástico longitudinal con respecto al ángulo de aplicación de las cargas para las siguientes condiciones de ensayo:

Tipo de esfuerzo: Tracción

Dimensiones de Probeta según norma UNE 53-280-79

Características de Laminado:

Enfibrado de tipo tejido

Fibra de vidrio utilizada: 2400 Tex tipo E

Resina de poliéster utilizada: ND 0086 con isotalina (3 - 4 %)

Composición: 7 láminas de 520 gr/m².

%Volumen fibra: 40.

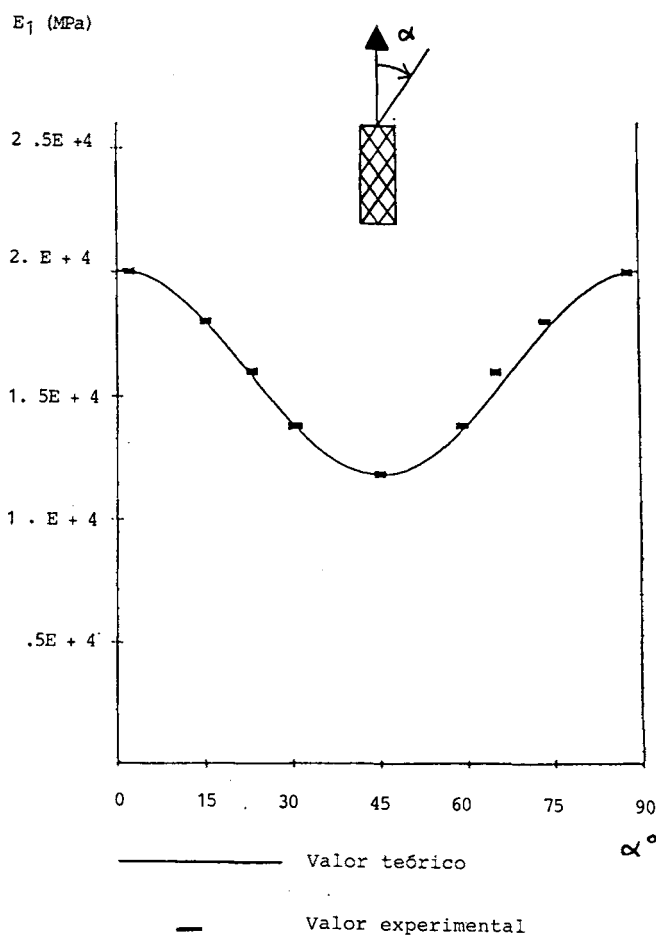


Figura 1. Variación de E_1 en función del ángulo de aplicación de las cargas.

En la Figura 1 se aprecia la precisión obtenida en la comparación de los resultados experimentales con los teóricos, afectados éstos con el correspondiente coeficiente de desalineación de elemento unidimensional⁴.

Con objeto de determinar las tensiones interlaminares de una estructura realizada en material composite, se va a caracterizar un elemento finito superparamétrico volumétrico degenerado, en tres dimensiones (Figura 2)⁵⁻⁷.

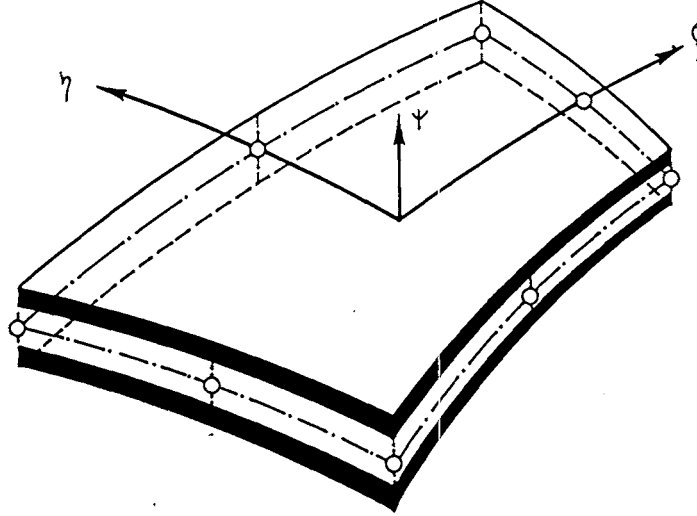


Figura 2. Representación de un elemento finito laminado.

Las coordenadas cartesianas de un punto genérico del laminado están relacionadas con las coordenadas curvilíneas de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = N_i(\xi, \eta) \frac{(1 + \Psi)}{2} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{\text{sup}} + N_i(\xi, \eta) \frac{(1 - \Psi)}{2} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{\text{inf}} \quad (16)$$

Donde $N_i(\xi, \eta)$ es una función de forma que toma el valor unidad en el nodo i y cero en los demás.

Para obtener la forma de la matriz $\mathbf{N}$ es preciso definir los siguiente vectores unitarios:

$$\mathbf{V}_{3i} = \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{\text{sup}} - \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \\ z_i \end{bmatrix}_{\text{inf}} \quad (17)$$

$$\mathbf{V}_{1i} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \times \mathbf{V}_{3i} \quad (18)$$

$$\mathbf{V}_{2i} = \mathbf{V}_{1i} \times \mathbf{V}_{3i} \quad (19)$$

Así,

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_i & 0 & 0 & 0 & N_i \Psi \frac{t_i}{2} (-V_{2ix}) \\ 0 & N_i & 0 & N_i \Psi \frac{t_i}{2} V_{1iy} & N_i \Psi \frac{t_i}{2} (-V_{2iy}) \\ 0 & 0 & N_i & N_i \Psi \frac{t_i}{2} V_{1iz} & N_i \Psi \frac{t_i}{2} (-V_{2iz}) \end{bmatrix} \quad i=1,4 \quad (20)$$

El operador diferencial (L) definido por:

$$\underline{\epsilon} = \mathbf{L} \mathbf{u} \quad (21)$$

toma la siguiente expresión:

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Por medio de la igualdad

$$\mathbf{B} = \mathbf{L} \mathbf{N} \quad (23)$$

y por la definición de la matriz $\mathbf{D}$ expresada en [2] puede plantearse la expresión de la matriz de rigidez:

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{B})^T \mathbf{D} \mathbf{B} dv = \quad (24)$$

$$= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\mathbf{B})^T \mathbf{D} \mathbf{B} J d\xi d\eta d\psi \quad (25)$$

El jacobiano de la transformación se obtiene por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J} = & \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{x_{1\text{sup}} + x_{1\text{inf}}}{2} & \frac{y_{1\text{sup}} + y_{1\text{inf}}}{2} & \frac{z_{1\text{sup}} + z_{1\text{inf}}}{2} \\ \frac{x_{2\text{sup}} + x_{2\text{inf}}}{2} & \frac{y_{2\text{sup}} + y_{2\text{inf}}}{2} & \frac{z_{2\text{sup}} + z_{2\text{inf}}}{2} \\ \frac{x_{3\text{sup}} + x_{3\text{inf}}}{2} & \frac{y_{3\text{sup}} + y_{3\text{inf}}}{2} & \frac{z_{3\text{sup}} + z_{3\text{inf}}}{2} \end{bmatrix} + \\
& \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \frac{\partial N_3}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \frac{\partial N_3}{\partial \eta} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \psi \left(\frac{x_{1\text{sup}} - x_{1\text{inf}}}{2} \right) & \psi \left(\frac{y_{1\text{sup}} - y_{1\text{inf}}}{2} \right) & \psi \left(\frac{z_{1\text{sup}} - z_{1\text{inf}}}{2} \right) \\ \psi \left(\frac{x_{2\text{sup}} - x_{2\text{inf}}}{2} \right) & \psi \left(\frac{y_{2\text{sup}} - y_{2\text{inf}}}{2} \right) & \psi \left(\frac{z_{2\text{sup}} - z_{2\text{inf}}}{2} \right) \\ \psi \left(\frac{x_{3\text{sup}} - x_{3\text{inf}}}{2} \right) & \psi \left(\frac{y_{3\text{sup}} - y_{3\text{inf}}}{2} \right) & \psi \left(\frac{z_{3\text{sup}} - z_{3\text{inf}}}{2} \right) \end{bmatrix} + \\
& + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \frac{x_{1\text{sup}} - x_{1\text{inf}}}{2} & \frac{y_{1\text{sup}} - y_{1\text{inf}}}{2} & \frac{z_{1\text{sup}} - z_{1\text{inf}}}{2} \\ \frac{x_{2\text{sup}} - x_{2\text{inf}}}{2} & \frac{y_{2\text{sup}} - y_{2\text{inf}}}{2} & \frac{z_{2\text{sup}} - z_{2\text{inf}}}{2} \\ \frac{x_{3\text{sup}} - x_{3\text{inf}}}{2} & \frac{y_{3\text{sup}} - y_{3\text{inf}}}{2} & \frac{z_{3\text{sup}} - z_{3\text{inf}}}{2} \end{bmatrix} \quad (26)
\end{aligned}$$

Realizando el cambio:

$$\psi = -1 + \frac{1}{t} (-h_k (1 - \psi_k) + 2 \sum_{j=1}^k h_j) \quad (27)$$

$$d\psi = \frac{h_k}{t} d\psi_k \quad (28)$$

$$\mathbf{K} = \sum_{k=1}^n \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (\mathbf{B})^T \mathbf{D} \mathbf{B} \mathbf{J} \frac{h_k}{t} d\xi d\eta d\psi_k \quad (29)$$

t : espesor lateral

h_k : espesor de la capa k

Las tensiones interlaminares son obtenidas por:

$$g_k = D_k B a \quad (30)$$

APLICACION AL ESTUDIO DE TECHOS DE AUTOBUS.

El recientemente aparecido Reglamento 36 de homologación de autobuses, especifica claramente la prueba de simulación de vuelco a la que deben ser sometidos los techos de autobús. Varias han sido las causas de realización de techos de autobús en composite: Reducción de cargas muertas, disminución de altura del centro de inercia del vehículo, así como la posibilidad de optimización del material en base a la disposición del elemento unidimensional.

Las teorías anteriormente expuestas se han aplicado al caso de un autobús realizado sobre estructura metálica con techo construido en laminado de PRFV de la siguiente composición:

1 capa de mat interna de 90 gr/m² y 7% de volumen de fibra de vidrio.

5 capas de tejido 0/90°, 520 gr/m² y 40% de volumen de fibra de vidrio

Espesor total : 3 mm

Se han representado las distribuciones de tensiones normales y de cortadura interlaminar en los enfibrados de mat y tejido.

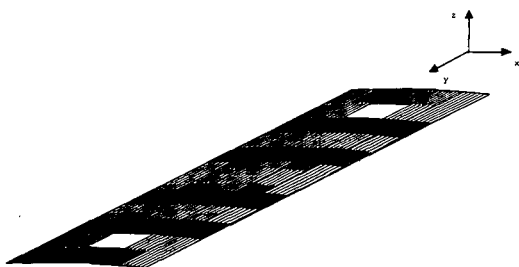


Figura 3. Distribución de tensiones σ_x en lámina de mat.



Figura 4. Distribución de tensiones σ_x en lámina de tejido.



Figura 5. Distribución de tensiones σ_x en lámina de mat.



Figura 6. Distribución de tensiones σ_x en lámina de tejido.

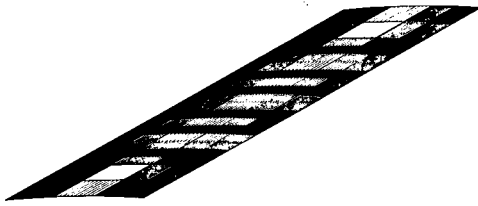


Figura 7. Distribución de tensiones σ_{xy} en lámina de mat.



Figura 8. Distribución de tensiones σ_{xy} en lámina de tejido.

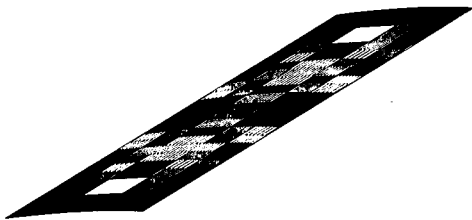


Figura 9. Distribución de tensiones σ_{xz} en lámina de mat.

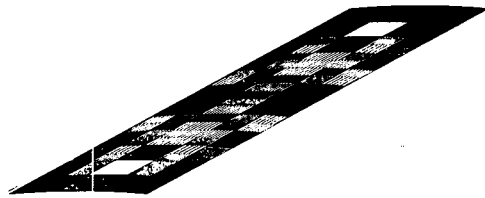


Figura 10. Distribución de tensiones σ_{xz} en lámina de tejido.



Figura 11. Distribución de tensiones σ_{yz} en lámina de mat.



Figura 12. Distribución de tensiones σ_{yz} en lámina de tejido.

Las zonas de coloración más intensa representa mayor tensión.

Tensión normal transversal σ_x

Valores máximos:

33 MPa (configuración de tejido)

10 MPa (configuración de mat)

Se concentran los valores máximos en las zonas próximas a pilaretes de ventana si bien en las capas de tejido aparecen puntos de concentración de tensión en la parte central del autobús así como en el contorno de bótolas.

Tensión normal longitudinal σ_y

Valores máximos:

2.5 MPa (configuración de tejido)

2.2 MPa (configuración de mat)

Las bandas de máxima tensión, tanto en las láminas de mat como de tejido están en dirección transversal al vehículo y en los puntos de anclaje de techo al resto de la estructura.

Tensión de cortadura τ_{xy}

Valores máximos:

3.8 MPa (configuración de tejido)

3.8 MPa (configuración de mat)

Existen líneas de máxima tensión en zonas próximas a los puntos de unión con pilaretes de ventana orientadas en dirección de marcada tendencia transversal.

Es la tensión de cortadura interlaminar de mayor magnitud. Esta afirmación está plenamente de acuerdo con la aplicación de la teoría clásica de tensiones interlaminares⁸⁻¹².

Tensiones de cortadura τ_{xz} y τ_{yz}

Los valores máximos coinciden en 0.66 MPa.

Son así pues, de importancia secundaria. En algún caso se aprecia cierta aleatoriedad en la distribución, hecho que se entiende, aplicando las teorías de tensiones interlaminares y observando al mismo tiempo la baja magnitud de éstas.

CONCLUSIONES

Se aprecia en el capítulo de tensiones normales, una preponderancia de las tensiones transversales, sobre todo en puntos próximos a pilaretes de ventana.

Las tensiones de cortadura interlaminares más importantes son las denominadas τ_{xy} dispuestas en bandas de corte transversal.

Las tensiones τ_{xz} y τ_{yz} se deben considerar en el cálculo si bien la magnitud es casi seis veces menor que τ_{xy} , observándose un alto grado de aleatoriedad en alguna de sus distribuciones.

BIBLIOGRAFIA

1. R.M. Jones. *Mechanics of composite Materials*. Mc Graw-Hill, New York, (1975).
2. A. Miravete, N. Murillo, C. Vera y J.A. López. Diseño y cálculo de piezas en materiales plásticos para automóviles. *I Congreso de Ingeniería Mecánica*, Madrid, (1982).
3. A. Miravete, y C. Vera, Micromecánica de laminados de poliéster reforzado con fibra de vidrio y criterios de rotura. *III Congreso de Ingeniería Mecánica*, Gijón (1984).

4. A. Miravete. Análisis del comportamiento resistente de laminados de PRFV y su aplicación a los medios de transporte. *Tesis Doctoral*, Zaragoza, Junio, (1984).
5. S.C. Panda y R. Natajaran. Finite element analysis of laminated composite plates. *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. **14**, pp. 69-79 (1979).
6. R.L. Spilker. An invariant eight-node hybrid-stress for thin and thick multilayer laminated plates. *International Journal for numerical methods in engineering*, Vol. **20**, pp. 573-782 (1984).
7. O.C. Zienkiewicz. *El método de los elementos finitos*. Editorial Reverté, Barcelona, España, (1979).
8. T. Nishioka y S.N. Atluri. Assumed Stress Finite Element Analysis of Through-Cracks in Angle-ply Laminates. *AIAA Journal*, Vol. **18**, pp. 1125-1151, (1980).
9. P. Chi Chou y J. Carleone. Transverse Shear in Laminated Plate Theories. *AIAA Journal*, Vol. **11**, pp. 1333-1336, (1973).
10. C.E.S. Veng, E.E. Underwood y T.L. Liu. Shear Modulus of new Sandwich Cores Made of Superplastic Sheet. *AIAA Journal*, Vol. **18**, pp. 721-725, (1980).
11. J.H. Starnes Jr. y R.T. Haftka. Preliminary Design of Composite Wings for Buecling, Strength and Displacement Constraints. *J. Aircraft*, Vol. **16**, pp. 564-570, (1979).
12. R.B. Pipes y N.J. Pagano. Interlaminar Stresses in Composite Laminates-An Approximate Elasticity Solution. *Journal of Applied Mechanics*, pp. 668-672, Sep. (1974).