

# Análisis de sensibilidad en elasticidad mediante el método de los elementos de contorno

Elena Calvo

Departamento de Análisis Económico  
Facultad de Ciencias Económicas y Empresariales  
Universidad de Zaragoza, Gran Vía 2  
50005 Zaragoza, España  
Tel.: 34-976-76 10 00 ext. 4683, Fax: 34-976-76 19 96  
e-mail: ecalvo@posta.unizar.es

Luis Gracia

Departamento de Ingeniería Mecánica  
Centro Politécnico Superior  
Universidad de Zaragoza, María de Luna 3  
50015 Zaragoza, España  
Tel.: 34-976-76 10 00 ext. 5110, Fax: 34-976-76 19 12  
e-mail: lugravi@posta.unizar.es

## Resumen

Se presenta en este artículo una revisión completa del análisis de sensibilidad para los funcionales más habituales en Elasticidad, en base al enfoque continuo del problema, teniendo en cuenta los conceptos de derivada material y problema adjunto. La precisión en el cálculo de las sensibilidades depende en gran medida de la precisión en el cálculo de las tensiones y deformaciones en el contorno, habiéndose, por ello, desarrollado un procedimiento de cálculo para las mismas aprovechando resultados de geometría diferencial de curvas y superficies. Otro aspecto esencial es el tratamiento de la velocidad de diseño, que define el proceso de cambio de forma del sólido elástico. En este artículo se presenta un tratamiento general y sistemático basado en la propia aproximación de elementos de contorno. Finalmente, se incluyen varios ejemplos que permiten contrastar la validez y eficacia de las técnicas desarrolladas.

## SENSITIVITY ANALYSIS IN ELASTICITY USING THE BOUNDARY ELEMENT METHOD

## Summary

This paper deals with sensitivity analysis of the different functionals appearing in optimum shape design in elasticity using BEM. So, first of all, a general review concerning sensitivity analysis of the most usual functionals in elasticity, based on continuum approach, is done. The accuracy in sensitivity analysis depends on the accuracy in strains and stresses evaluation on the boundary. A general procedure for strain calculation based on some results of differential geometry is presented. Another essential aspect in sensitivity analysis is the definition of the design velocity on the boundary, which defines the change in the geometry of the elastic solid. A computational treatment independent of the design variables used is presented, defining nodal values of the design velocity and taking advantage of the boundary element approximation. Finally, several example problems are presented in order to check the feasibility and accuracy of the proposed procedures.

## INTRODUCCIÓN

Tanto el Método de los Elementos Finitos (MEF)<sup>3,4,10</sup> como el Método de los Elementos de Contorno (MEC)<sup>17,1,9,12</sup> han sido ampliamente utilizados a la hora de abordar el problema de optimización de forma en Elasticidad, aunque la mayoría de los autores se inclina por el segundo, por ser más ventajoso en este tipo de problema, tanto en lo referente a la creación del modelo y su adecuación a lo largo del proceso de optimización, como por su mayor precisión en el cálculo de tensiones en el contorno, lo que es decisivo en la evaluación de las sensibilidades<sup>10,2</sup>.

Tradicionalmente, han sido dos los enfoques utilizados a la hora de calcular las sensibilidades de los diferentes funcionales asociados al problema elástico respecto de las variables de diseño elegidas. En el *enfoque discreto*, donde el cálculo de sensibilidades se lleva a cabo por derivación implícita del sistema de ecuaciones discretizado, es preciso resolver un nuevo problema equivalente al original con un vector de cargas modificado, que no presenta características diferenciales respecto del problema original<sup>9</sup>. Evidentemente, obtener las derivadas de la matriz de coeficientes y del vector de términos independientes, respecto de cada variable de diseño en un determinado problema, no es tarea sencilla. Surge así, como alternativa, el *enfoque continuo*, basado en la formulación variacional, que utiliza el concepto de *derivada material*, y junto con la definición de la *velocidad de diseño*, conduce al denominado *problema adjunto*, específico para cada funcional<sup>11</sup>.

En los últimos años, varios autores han utilizado el enfoque continuo junto con el MEC, para abordar el problema de optimización de forma y el consiguiente cálculo de sensibilidades. Así, Meric<sup>14</sup> aborda el problema de optimización de forma en problemas de conducción de calor en 2D, utilizando variables de diseño específicas junto con un tratamiento semianalítico de la velocidad de diseño en el contorno. Tai y Fenner<sup>17</sup> utilizan variables de diseño de tipo geométrico global junto con una definición específica de la velocidad de diseño en cada caso para abordar el problema de optimización de forma en Elasticidad 2D. Erman y Fenner<sup>8</sup> plantean el problema de optimización de forma en Elasticidad 3D a partir de una derivación implícita de las ecuaciones integrales del MEC. Burczynski *et al.*<sup>1</sup> tratan el problema de optimización de forma en elasticidad 3D, utilizando diversos funcionales para definir tanto la función objetivo como las restricciones, planteando problemas adjuntos particulares para cada caso. Finalmente, Kocandrlje y Koska<sup>13</sup> plantean la optimización de forma en Elasticidad 3D, derivando una fórmula analítica para el cálculo de sensibilidad de funcionales dependientes de las tensiones, en base a variables de diseño tratadas como cargas ficticias aplicadas en el contorno del sólido.

No obstante, todas las aplicaciones se plantean bien sobre funcionales concretos o en base a variables de diseño “ad hoc” para cada problema. En el presente artículo se plantea un tratamiento general para cualquiera de los funcionales habituales en Elasticidad, junto con un procedimiento general para el cálculo de deformaciones y tensiones en el contorno y la definición de la velocidad de diseño de manera sistemática como una magnitud nodal, aprovechando la discretización del MEC, independientemente de las variables de diseño utilizadas, tanto para 2D como para 3D.

## ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD EN ELASTICIDAD. ENFOQUE CONTINUO

La verdadera incógnita en el diseño óptimo es la geometría del elemento, de manera que el proceso de diseño será un proceso iterativo, con cambios sucesivos en la geometría hasta conseguir la solución óptima. Se trata de un problema de evolución, donde la nueva geometría se obtiene a partir de la anterior y de las sensibilidades de la misma frente a los distintos parámetros de diseño.

El objetivo de diseño se mide habitualmente por medio de un funcional de dominio, en la forma

$$\psi_{\Omega} = \int_{\Omega} f(u_i, \sigma_{ij}) d\Omega \quad (1)$$

donde  $f$  es una función que puede depender tanto de los desplazamientos  $u_i$  como de las tensiones  $\sigma_{ij}$  correspondientes a la solución del problema elástico. Si se aplica el concepto de derivada material al funcional anterior<sup>10</sup>, se tiene

$$\dot{\psi}_{\Omega} = \int_{\Omega} (f_{,u_i} \dot{u}_i + f_{,\sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}) d\Omega - \int_{\Omega} [(u_{i,j} v_j) f_{,u_i} + (\sigma_{ij,k} v_k) f_{,\sigma_{ij}}] d\Omega + \int_{\Gamma} f v_n d\Gamma \quad (2)$$

donde  $f_{,u_i}$ ,  $f_{,\sigma_{ij}}$  son las derivadas parciales de  $f$  respecto a  $u_i$  y  $\sigma_{ij}$ , respectivamente,  $v_j, v_k$  son las componentes del vector velocidad de diseño (cambio en la geometría del sólido elástico),  $v_n$  es la componente normal al contorno de dicha velocidad, y  $\dot{u}_i$ ,  $\dot{\sigma}_{ij}$  son las derivadas materiales de los desplazamientos y tensiones, respectivamente.

Conocida la solución del problema elástico y la velocidad de diseño, es inmediato evaluar las dos últimas integrales. No sucede lo mismo con la primera, ya que sería preciso conocer las derivadas materiales  $\dot{u}_i$  y  $\dot{\sigma}_{ij}$ . Este inconveniente puede soslayarse si se introduce el concepto de *problema adjunto*<sup>10</sup>, que permite obtener la derivada material del funcional en forma explícita, en la forma

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_{\Omega} = & - \int_{\Omega} (\lambda_{i,j} v_j) b_i d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda_i b_i v_n d\Gamma - \int_{\Gamma} (\lambda_{i,j} v_j) t_i d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} [(\lambda_i t_i)_{,j} n_j + H \lambda_i t_i] v_n d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{\lambda} (\epsilon_{ij,k}^{\lambda} v_k) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\epsilon_{ij,k}^{\lambda} v_k) d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^{\lambda} v_n d\Gamma - \int_{\Omega} [(u_{i,j} v_j) f_{,u_i} + (\sigma_{ij,k} v_k) f_{,\sigma_{ij}}] d\Omega + \int_{\Gamma} f v_n d\Gamma \end{aligned} \quad (3)$$

donde  $t_i$  son las tensiones en el contorno,  $b_i$  las fuerzas por unidad de volumen,  $\sigma_{ij}$  las tensiones, correspondientes al problema real;  $\lambda$  es la denominada variable adjunta (campo de desplazamientos del problema adjunto),  $\epsilon_{ij}^{\lambda}$  las deformaciones correspondientes a dicho problema; finalmente,  $H$  es la curvatura del contorno en el punto considerado en 2D, y dos veces la curvatura media en 3D.

Si el objetivo se mide mediante un funcional de contorno, de la forma

$$\psi_{\Gamma} = \int_{\Gamma} f(u_i, \sigma_{ij}) d\Gamma \quad (4)$$

el proceso es similar, llegándose a

$$\dot{\psi}_{\Gamma} = \int_{\Gamma} (f_{,u_i} \dot{u}_i + f_{,\sigma_{ij}} \dot{\sigma}_{ij}) d\Gamma + \int_{\Gamma} f (H v_n + v_{s,s}) d\Gamma \quad (5)$$

donde  $v_{s,s}$  es la derivada tangencial de la componente tangencial de la velocidad de diseño.

Definiendo el problema adjunto correspondiente, se obtiene la expresión que permite

obtener la derivada material del funcional en la forma explícita siguiente

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_\Gamma = & - \int_{\Omega} (\lambda_{i,j} v_j) b_i d\Omega + \int_{\Gamma} \lambda_i b_i v_n d\Gamma - \int_{\Gamma} (\lambda_{i,j} v_j) t_i d\Gamma + \\ & + \int_{\Gamma} [(\lambda_i t_i)_{,j} n_j + H \lambda_i t_i] v_n d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{ij}^\lambda (\epsilon_{ij,k} v_k) d\Omega + \int_{\Omega} \sigma_{ij} (\epsilon_{ij,k}^\lambda v_k) d\Omega - \\ & - \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^\lambda v_n d\Gamma - \int_{\Gamma} (H v_n + v_{s,s}) f d\Gamma \end{aligned} \quad (6)$$

En las expresiones anteriores, correspondientes a la derivada material de cada funcional, es posible transformar todas las integrales de dominio en integrales de contorno, utilizando las identidades variacionales adecuadas<sup>10</sup>.

Como se desprende del resultado anterior, para evaluar la sensibilidad de los funcionales (1) (4), es preciso resolver tanto el problema original como el problema adjunto. La definición de éste último dependerá de la función  $f$  que aparezca en el integrando, pero en cualquier caso, se trata de problemas semejantes con diferentes estados de carga<sup>2</sup>. Ello hace que su resolución mediante métodos numéricos sea muy eficiente desde el punto de vista computacional, ya que el sistema de ecuaciones generado es el mismo en ambos casos, cambiando sólo las condiciones de carga.

Las expresiones generales obtenidas anteriormente pueden particularizarse para los funcionales más comunes en el diseño de elementos mecánicos. Así, el funcional más simple es aquél que mide la cantidad de material del sólido elástico, asociado al volumen del mismo

$$\psi_\Omega = \int_{\Omega} d\Omega \quad (7)$$

En este caso  $f = 1$  y aplicando directamente el resultado obtenido en (3) se tiene

$$\dot{\psi}_\Omega = \int_{\Gamma} v_n d\Gamma \quad (8)$$

y no se precisa definir problema adjunto. La variación de este funcional depende únicamente de la proyección normal al contorno de la velocidad de diseño.

Un tipo de funcional bastante común es aquél que representa alguna medida global, generalmente de carácter energético. Así, se define la flexibilidad de un elemento mecánico como<sup>15</sup>

$$\psi_\Gamma = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} t_i u_i d\Gamma \quad (9)$$

donde  $t_i$  y  $u_i$  son las tensiones y desplazamientos en el contorno, respectivamente. La derivada material de este funcional viene dada por<sup>15</sup>

$$\dot{\psi}_\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^\lambda v_n d\Gamma \quad (10)$$

Se demuestra<sup>6</sup> que para este funcional el problema adjunto y el real coinciden, con lo que la derivada material del mismo se obtiene, finalmente, como

$$\dot{\psi}_\Gamma = \int_{\Gamma} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} v_n d\Gamma \quad (11)$$

Otro funcional característico del problema elástico es el que expresa valores de desplazamientos en puntos determinados del sólido elástico. Este tipo de funcional se define como

$$\psi = u_i(\mathbf{x}_0) \quad (12)$$

y representa el desplazamiento en el punto  $\mathbf{x}_0$ , en la dirección  $i$ . Para facilitar la obtención de la derivada material de dicho funcional, se le dota de carácter integral utilizando la distribución  $\delta$  de Dirac, en la forma

$$\psi = \int_{\Omega} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) u_i(\mathbf{x}) d\Omega = u_i(\mathbf{x}_0) \quad (13)$$

La derivada material de este funcional, una vez transformadas las integrales de dominio en integrales de contorno, resulta<sup>18</sup>

$$\dot{\psi} = \int_{\Gamma} [(\lambda_{i,j} v_j) t_i + \dot{t}_i \lambda_i + b_i \lambda_i v_n] d\Gamma + \int_{\Gamma} [t_i \lambda_i (H v_n + v_{s,s}) - \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^{\lambda} v_n] d\Gamma + u_{i,j} v_j \quad (14)$$

El último término aparece sólo si el punto en el que se evalúa el desplazamiento se mueve como consecuencia del cambio de diseño. El problema adjunto necesario para obtener la derivada material de este funcional se define sobre la geometría del problema real en la forma<sup>18</sup>

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= 0 & \text{en } \Gamma_0 \\ t_i^{\lambda} &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i & \text{en } \mathbf{x}_0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

donde  $\Gamma_0$  es la zona del contorno en la que  $u_i = 0$  en el problema real y  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)_i$  representa una carga puntual de valor unidad en el punto  $\mathbf{x}_0$ , en la dirección  $i$ .

Otro tipo de funcionales son los relacionados con valores de tensiones, con la forma general

$$\psi_{\Gamma_m} = \frac{1}{\Delta_m} \int_{\Gamma_m} f(\sigma) d\Gamma_m \quad (16)$$

donde  $\sigma$  es una tensión de comparación,  $\Gamma_m$  representa el contorno móvil (zona del contorno que se modifica a lo largo del proceso de optimización) y  $\Delta_m$  corresponde a la longitud de dicho contorno en problemas 2D y a la superficie de dicho contorno en problemas 3D.

Teniendo en cuenta la discretización en elementos de contorno, el funcional anterior puede aproximarse como

$$\psi_{\Gamma_m} \approx \sum_{i=1}^{Nem} \frac{1}{\Delta_i} \int_{\Gamma_i} f(\sigma) d\Gamma_i \quad (17)$$

donde  $Nem$  es el número de elementos en el contorno móvil.

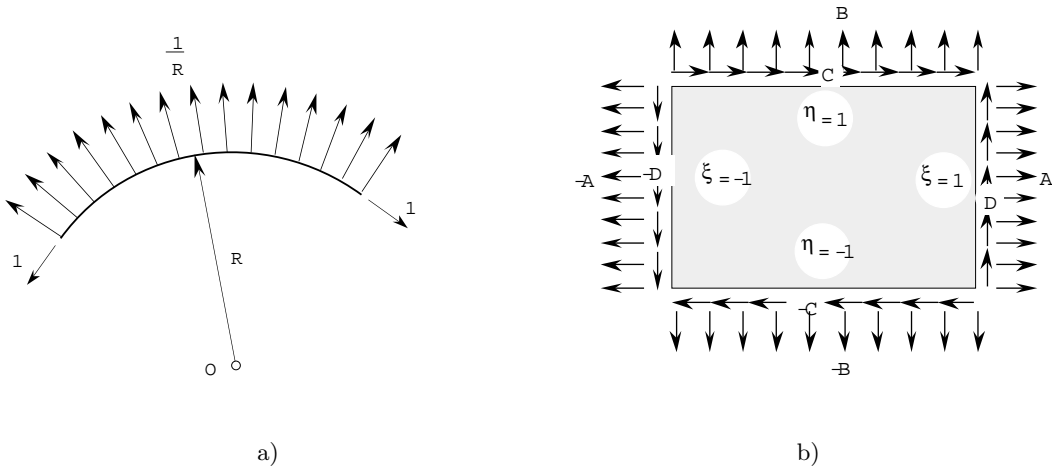
En problemas bidimensionales (tensión plana), tomando como tensión de comparación la tensión de von Mises, para contornos descargados, elementos lineales y suponiendo que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  es constante en cada elemento; la derivada material del funcional anterior puede evaluarse como<sup>2</sup>

$$\dot{\psi}_{\Gamma_m} = -E \sum_{i=1}^{Nem} \frac{1}{L_i} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_i \int_{\Gamma_i} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^{\lambda} v_n d\Gamma_i \quad (18)$$

donde  $E$  es el módulo de elasticidad del material y  $L_i$  la longitud de cada elemento del contorno móvil, si se define el problema adjunto sobre la geometría de problema original en la forma (Figura 1a)

$$\left. \begin{aligned} \lambda_i &= 0 && \text{en } \Gamma_0 \\ t_i^\lambda &= \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_2)_t && \text{en } \Gamma_{e2} \\ t_i^\lambda &= -\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_1)_t && \text{en } \Gamma_{e1} \\ t_i^\lambda &= \left(\frac{1}{R}\right)_n && \text{en } \Gamma_e \end{aligned} \right\} \quad (19)$$

donde  $\Gamma_0$  es la zona del contorno donde  $u_i = 0$  en el problema real,  $\Gamma_{e2}$ ,  $\Gamma_{e1}$  son los extremos final e inicial del elemento, respectivamente,  $R$  el radio de curvatura de cada punto del elemento del contorno móvil,  $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i)_t$  es una carga puntual de valor unidad en la dirección de la tangente y  $\left(\frac{1}{R}\right)_n$  es una carga normal al elemento.



**Figura 1.** Problemas adjuntos: a) 2D; b) 3D

En problemas 3D, considerando nuevamente como tensión de comparación la tensión de von Mises, para contornos descargados, elementos planos y suponiendo de nuevo que  $\frac{\partial f}{\partial \sigma}$  es constante en cada elemento, la derivada material del funcional (17) puede evaluarse como<sup>2</sup>

$$\dot{\psi}_{\Gamma_m} = -\frac{E}{1-\nu^2} \sum_{i=1}^{Nem} \frac{1}{A_i} \left( \frac{\partial f}{\partial \sigma} \right)_i \int_{\Gamma_i} \sigma_{ij} \epsilon_{ij}^\lambda v_n d\Gamma_i \quad (20)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $A_i$  el área de cada elemento del contorno móvil, las tensiones corresponden al problema real y las deformaciones al problema adjunto, definido como (Figura 1b)

$$\left. \begin{array}{ll} \lambda = 0 & \text{en } \Gamma_1 \\ t_\xi = A & \text{en } \Gamma_e(\xi = 1) \\ t_\xi = -A & \text{en } \Gamma_e(\xi = -1) \\ t_\eta = B & \text{en } \Gamma_e(\eta = 1) \\ t_\eta = -B & \text{en } \Gamma_e(\eta = -1) \\ t_\xi = C & \text{en } \Gamma_e(\eta = 1) \\ t_\xi = -C & \text{en } \Gamma_e(\eta = -1) \\ t_\eta = D & \text{en } \Gamma_e(\xi = 1) \\ t_\eta = -D & \text{en } \Gamma_e(\xi = -1) \end{array} \right\} \quad (21)$$

donde  $\Gamma_0$  es la zona del contorno en la que  $u_i = 0$  en el problema real y

$$\begin{aligned} A &= \frac{\sigma_{\xi\xi}(2-\nu) + \sigma_{\eta\eta}(2\nu-1)}{2\sigma} A_\eta \\ B &= \frac{\sigma_{\eta\eta}(2-\nu) + \sigma_{\xi\xi}(2\nu-1)}{2\sigma} A_\xi \\ C &= \frac{3\sigma_{\xi\eta}(1-\nu)}{2\sigma} A_\xi \\ D &= \frac{3\sigma_{\eta\xi}(1-\nu)}{2\sigma} A_\eta \end{aligned} \quad (22)$$

Para la definición de  $A_\xi$ ,  $A_\eta$  véase (24).

## DEFORMACIONES Y TENSIONES EN EL CONTORNO

La precisión en la evaluación de las sensibilidades de los diferentes funcionales a partir de las expresiones (14), (18), (20) y (11) dependerá, en gran medida, de la precisión en el cálculo de las deformaciones y tensiones en el contorno, tanto para el problema real como para el problema adjunto, por lo que se requerirá un cálculo de éstas lo más preciso posible.

Una primera posibilidad consiste en utilizar la identidad de Somigliana para el cálculo de tensiones, haciendo el límite cuando el punto en el que se calcula la tensión se aproxima al contorno. Sin embargo, este procedimiento requiere la evaluación de integrales hipersingulares<sup>5</sup>, lo que no resulta una tarea fácil, teniendo en cuenta las exigencias de precisión requeridas.

Un procedimiento alternativo consiste en considerar el contorno como una superficie definida mediante su parametrización y utilizar los resultados de la *teoría de superficies* para evaluar las deformaciones y, a partir de ellas, las tensiones en cada punto. Teniendo en cuenta de nuevo la discretización en elementos de contorno, se considera cada elemento como un trozo de superficie cuya parametrización viene dada por la aproximación geométrica que lo define

$$\mathbf{r}(\xi, \eta) = (x, y, z)^T \quad (23)$$

de forma que a cada punto se le asocia un triedro local de vectores unitarios

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_\xi &= \frac{\mathbf{r}_{,\xi}}{A_\xi} \\ \mathbf{t}_\eta &= \frac{\mathbf{r}_{,\eta}}{A_\eta} \\ \mathbf{n} &= \mathbf{t}_\xi \times \mathbf{t}_\eta = \frac{\mathbf{r}_{,\xi} \times \mathbf{r}_{,\eta}}{A_n} \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

donde  $A_\xi = \|\mathbf{r}_{,\xi}\|$ ,  $A_\eta = \|\mathbf{r}_{,\eta}\|$  y  $A_n = \|\mathbf{r}_{,\xi} \times \mathbf{r}_{,\eta}\|$ .

Las deformaciones en el elemento se definen como<sup>7</sup>

$$\epsilon_{\xi\eta} = \frac{1}{2A_\xi A_\eta} (\mathbf{r}_{,\xi} \mathbf{u}_{,\eta} + \mathbf{r}_{,\eta} \mathbf{u}_{,\xi}) \quad (25)$$

donde los desplazamientos  $\mathbf{u}$  están referidos al sistema local definido por (24). Es preciso, por tanto, calcular las derivadas del vector de desplazamientos en coordenadas locales respecto a cada uno de los parámetros que definen la superficie. Es inmediato expresar dichos desplazamientos en el sistema local anteriormente definido, realizando el cambio

$$\mathbf{u}_L = \mathbf{T} \mathbf{u}_G \quad (26)$$

siendo  $\mathbf{T}$  la matriz de cambio, que obviamente depende del punto y viene dada por

$$\mathbf{T} = (\mathbf{t}_\xi, \mathbf{t}_\eta, \mathbf{n})^T \quad (27)$$

y los subíndices  $L$  y  $G$  denotan coordenadas locales y globales, respectivamente.

Prescindiendo del subíndice  $L$  para los desplazamientos referidos al sistema local, de (26) se tiene

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}_{,\xi} &= (\mathbf{T} \mathbf{u}_G)_{,\xi} = \mathbf{T}_{,\xi} \mathbf{u}_G + \mathbf{T} \mathbf{u}_{G,\xi} \\ \mathbf{u}_{,\eta} &= (\mathbf{T} \mathbf{u}_G)_{,\eta} = \mathbf{T}_{,\eta} \mathbf{u}_G + \mathbf{T} \mathbf{u}_{G,\eta} \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

donde es inmediato calcular  $\mathbf{u}_{G,\xi}$  y  $\mathbf{u}_{G,\eta}$  a partir de la aproximación en el elemento, y las derivadas de los términos de la matriz de cambio  $\mathbf{t}_{\xi,\xi}$ ,  $\mathbf{t}_{\eta,\xi}$ ,  $\mathbf{t}_{\xi,\eta}$ ,  $\mathbf{t}_{\eta,\eta}$  adoptan la forma

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{t}_{\xi,\xi} &= \frac{1}{A_\xi} \mathbf{r}_{,\xi\xi} - \frac{\mathbf{r}_{,\xi} \mathbf{r}_{,\xi\xi}}{A_\xi^3} \mathbf{r}_{,\xi} \\ \mathbf{t}_{\eta,\xi} &= \frac{1}{A_\eta} \mathbf{r}_{,\eta\xi} - \frac{\mathbf{r}_{,\eta} \mathbf{r}_{,\xi\eta}}{A_\eta^3} \mathbf{r}_{,\eta} \\ \mathbf{t}_{\xi,\eta} &= \frac{1}{A_\xi} \mathbf{r}_{,\xi\eta} - \frac{\mathbf{r}_{,\xi} \mathbf{r}_{,\xi\eta}}{A_\xi^3} \mathbf{r}_{,\xi} \\ \mathbf{t}_{\eta,\eta} &= \frac{1}{A_\eta} \mathbf{r}_{,\eta\eta} - \frac{\mathbf{r}_{,\eta} \mathbf{r}_{,\eta\eta}}{A_\eta^3} \mathbf{r}_{,\eta} \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

$$\mathbf{n}_{,\xi} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{n} \mathbf{r}_{,\xi\xi}}{A_\xi} \\ -\frac{\mathbf{n} \mathbf{r}_{,\xi\eta}}{A_\eta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{n}_{,\eta} = \begin{pmatrix} -\frac{\mathbf{n} \mathbf{r}_{,\xi\eta}}{A_\xi} \\ -\frac{\mathbf{n} \mathbf{r}_{,\eta\eta}}{A_\eta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (30)$$

con lo que, finalmente, puede utilizarse (25) para obtener las deformaciones.



Una vez obtenidas las deformaciones, las tensiones se obtienen mediante las ecuaciones de comportamiento, en la forma

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{\xi\xi} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\xi\xi} + \nu\epsilon_{\eta\eta}) + \frac{\nu}{1-\nu}t_n \\ \sigma_{\eta\eta} &= \frac{E}{1-\nu^2}(\epsilon_{\eta\eta} + \nu\epsilon_{\xi\xi}) + \frac{\nu}{1-\nu}t_n \\ \sigma_{\xi\eta} &= \sigma_{\eta\xi} = G\gamma_{\xi\eta} = G(\epsilon_{\xi\eta} + \epsilon_{\eta\xi}) \end{aligned} \right\} \quad (31)$$

donde  $t_n$  es la tensión normal al contorno.

En 2D es inmediato obtener la deformación a lo largo del contorno particularizando las fórmulas anteriores, obteniéndose

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{A_\xi}u_{\xi,\xi} + \frac{1}{R_\xi}u_n \quad (32)$$

con  $R_\xi$  el radio de curvatura a lo largo del elemento.

En este caso, la parametrización de la curva viene dada por

$$\mathbf{r}(\xi) = (x, y)^T \quad (33)$$

siendo el sistema local en cada punto el definido por  $(\mathbf{t}, \mathbf{n})^T$ , con

$$\mathbf{t} = \frac{\mathbf{r}_{,\xi}}{A_\xi} = \begin{Bmatrix} t_x \\ t_y \end{Bmatrix} \quad \mathbf{n} = \begin{Bmatrix} -t_y \\ t_x \end{Bmatrix} \quad (34)$$

Los desplazamientos referidos al sistema local son

$$\left. \begin{aligned} u_\xi &= \mathbf{t}\mathbf{u}_G \\ u_n &= \mathbf{n}\mathbf{u}_G \end{aligned} \right\} \quad (35)$$

de forma que

$$u_{\xi,\xi} = (\mathbf{t}\mathbf{u}_G)_{,\xi} = \mathbf{t}_{,\xi}\mathbf{u}_G + \mathbf{t}\mathbf{u}_{G,\xi} \quad (36)$$

siendo

$$\mathbf{t}_{,\xi} = \frac{1}{A_\xi}\mathbf{r}_{,\xi\xi} - \frac{\mathbf{r}_{,\xi}\mathbf{r}_{,\xi\xi}}{A_\xi^3}\mathbf{r}_{,\xi} \quad (37)$$

Para elementos lineales, que son los más utilizados, el cálculo se simplifica, teniendo en cuenta que

$$\left. \begin{aligned} R_\xi &\rightarrow \infty \\ \mathbf{t}_{,\xi} &= \mathbf{0} \end{aligned} \right\} \quad (38)$$

con lo que

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{A_\xi}\mathbf{t}\mathbf{u}_{G,\xi} \quad (39)$$

que finalmente se puede expresar como<sup>16</sup>

$$\epsilon_\xi = \frac{1}{L_e^2} [(x_2 - x_1)(u_x^2 - u_x^1) + (y_2 - y_1)(u_y^2 - u_y^1)] \quad (40)$$

donde  $u_j^i$  es el desplazamiento en la dirección  $j$  en el extremo  $i$ ;  $x_i, y_i$  son las coordenadas de los extremos del elemento y  $L_e$  la longitud de dicho elemento.

La tensión en un plano perpendicular al contorno, para un problema de deformación plana, viene dada por

$$\sigma_\xi = \frac{E}{1 - \nu^2} \epsilon_\xi + \frac{\nu}{1 - \nu} t_n \quad (41)$$

y para tensión plana por

$$\sigma_\xi = E \epsilon_\xi + \nu t_n \quad (42)$$

## TRATAMIENTO COMPUTACIONAL DE LA VELOCIDAD DE DISEÑO

El último factor que interviene en la evaluación de las sensibilidades de los diferentes funcionales es la velocidad de diseño o velocidad del cambio de forma, definida sobre el contorno del sólido elástico.

La idea básica en el tratamiento de dicha velocidad consiste en aprovechar la sistemática del propio MEC para caracterizar la velocidad de cualquier punto. Para ello, se aprovecha el concepto de aproximación y se define la velocidad en el elemento  $e$  en función de los valores nodales  $v_i^e$  en el elemento en la forma

$$\mathbf{v}^e = \sum_{i=1}^{Nne} \mathbf{v}_i^e \varphi_i \quad (43)$$

donde  $\varphi_i$  son las funciones de aproximación del elemento.

Así, en 2D, si las coordenadas de un nodo  $j$  varían a lo largo del proceso de optimización (siendo o no variables de diseño explícitas), y se define la velocidad como (Figura 2a)

$$\mathbf{v}_j = (v_x, v_y)^T \quad (44)$$

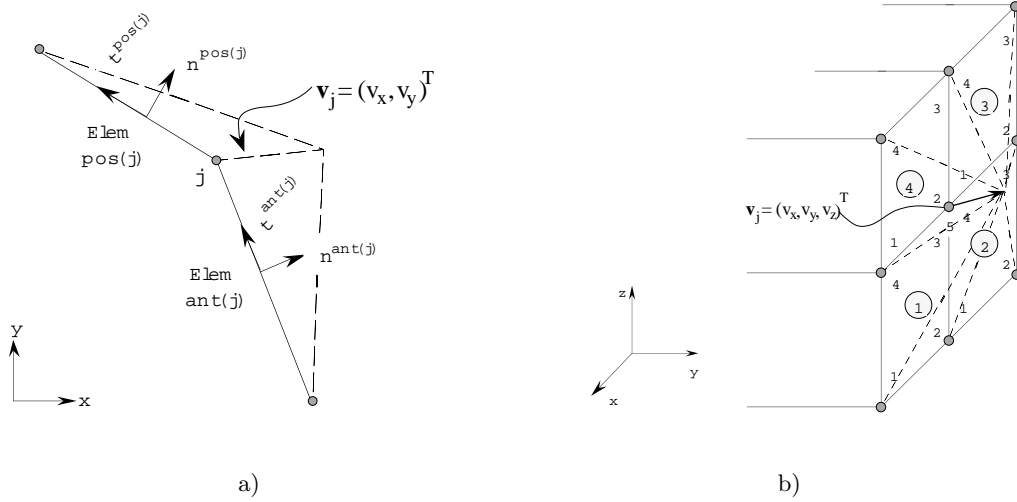
se tiene

$$\mathbf{v}^{ant(j)} = \mathbf{v}_j \varphi_2^{ant(j)} \quad \mathbf{v}^{pos(j)} = \mathbf{v}_j \varphi_1^{pos(j)} \quad (45)$$

La velocidad normal al contorno se obtiene entonces proyectando sobre la normal de cada elemento, con lo que

$$\left. \begin{aligned} v_n^{ant(j)} &= \mathbf{v}^{ant(j)} \mathbf{n}^{ant(j)} = \mathbf{v}_j \mathbf{n}^{ant(j)} \varphi_2^{ant(j)} \\ v_n^{pos(j)} &= \mathbf{v}^{pos(j)} \mathbf{n}^{pos(j)} = \mathbf{v}_j \mathbf{n}^{pos(j)} \varphi_1^{pos(j)} \end{aligned} \right\} \quad (46)$$

De igual forma, se obtiene la proyección normal sobre la tangente. De este modo, basta llevar el control de los elementos adyacentes a cada nodo del contorno móvil para definir de manera sistemática la velocidad de diseño en cualquier punto en función de cada variable de diseño.



**Figura 2.** Velocidad de diseño: a) 2D; b) 3D

En 3D, la idea es la misma en cuanto a sistemática, complicándose algo la gestión de la información, dado que un nodo puede tener un número cualquiera de elementos adyacentes, en lugar de los dos de 2D. Así, de acuerdo con la Figura 2b, si se define la velocidad del nodo  $j$  como  $\mathbf{v}_j = (v_x, v_y, v_z)^T$ , se tiene

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{v}^1 &= \mathbf{v}_j \varphi_3 \\ \mathbf{v}^2 &= \mathbf{v}_j \varphi_4 \\ \mathbf{v}^3 &= \mathbf{v}_j \varphi_1 \\ \mathbf{v}^4 &= \mathbf{v}_j \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (47)$$

La velocidad normal se obtiene de nuevo proyectando sobre la normal de cada elemento, de manera que

$$\left. \begin{aligned} v_n^1 &= \mathbf{v}^1 \mathbf{n}^1 = \mathbf{v}_j \mathbf{n}^1 \varphi_3 \\ v_n^2 &= \mathbf{v}^2 \mathbf{n}^2 = \mathbf{v}_j \mathbf{n}^2 \varphi_4 \\ v_n^3 &= \mathbf{v}^3 \mathbf{n}^3 = \mathbf{v}_j \mathbf{n}^3 \varphi_1 \\ v_n^4 &= \mathbf{v}^4 \mathbf{n}^4 = \mathbf{v}_j \mathbf{n}^4 \varphi_2 \end{aligned} \right\} \quad (48)$$

y del mismo modo se proyecta sobre el plano tangente al elemento. En definitiva, el tratamiento de la velocidad de diseño en el contorno se resume en lo siguiente:

1. Se definen los vectores de velocidad básicos para cada nodo y para cada coordenada.
2. Se detectan los elementos adyacentes a cada nodo, en el que alguna de sus coordenadas varíe a lo largo del proceso de optimización.
3. Se define la aproximación sobre cada elemento para cada variable de diseño.
4. Se obtiene la velocidad normal proyectando la velocidad aproximada sobre la normal en cada punto.

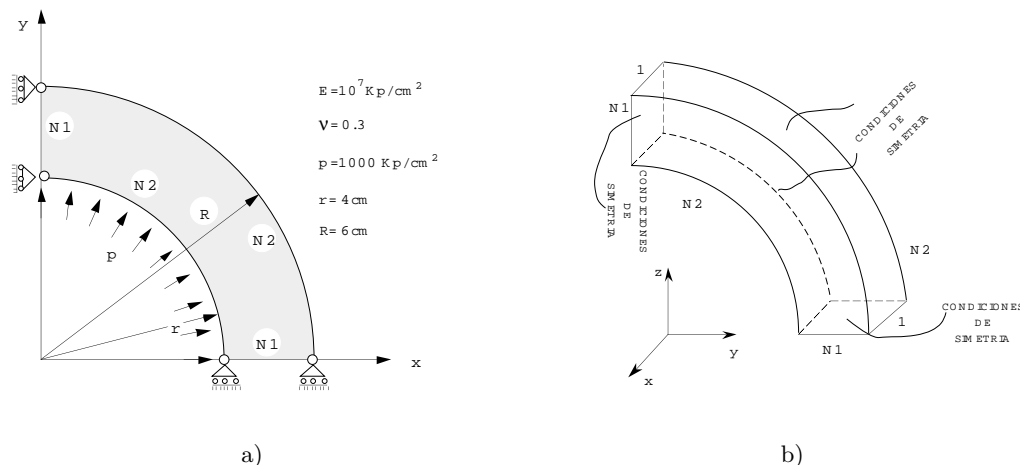
Si se utilizan variables de diseño de tipo geométrico global (parámetros que definen curvas o superficies), basta relacionar las variaciones de dichas variables con las variaciones en las coordenadas de los nodos afectados por dicha variación.

## RESULTADOS

Se presentan a continuación dos ejemplos de cálculo de sensibilidades que permiten verificar la bondad del procedimiento presentado.

El primero de ellos corresponde a un cilindro de pared gruesa sometido a presión interior, con solución analítica conocida. El segundo es un ejemplo ya clásico en la bibliografía de optimización de forma<sup>10,11,12</sup> y corresponde al cambio de sección (fillet) en un elemento sometido a tracción.

### Ejemplo 1: Cilindro de pared gruesa sometido a presión interior (Figura 3)



**Figura 3.** Cilindro sometido a presión interior: a) 2D; b) 3D

Para verificar el análisis de sensibilidad, se plantea la obtención de la variación del desplazamiento  $u_r$  en el contorno interior ( $\rho = r$ ), cuando se modifica el valor del radio exterior del cilindro.

A partir de la solución analítica del problema, se tiene

$$\left( \frac{\partial u_r}{\partial R} \right)_{\rho=r} = -0,000149760$$

En este caso, el problema de análisis de sensibilidad se plantea a partir de una velocidad normal uniforme en el contorno exterior y una carga radial unitaria en el contorno interior, que admite dos posibilidades: presión uniformemente distribuida (*problema adjunto 1*) o cargas nodales (*problema adjunto 2*).

En el primer caso, la solución del problema adjunto es, evidentemente, la del problema real dividida por el valor de la presión, mientras que en el segundo es necesario resolver el problema adjunto correspondiente.

Al tratarse de la sensibilidad de un funcional de desplazamiento, ésta es proporcional a la velocidad normal al contorno, tal como se expresa en (14) si se particulariza al caso de fuerzas por unidad de volumen nulas,  $b_i = 0$ , y contorno móvil descargado,  $t_i = 0$ . Por ello, el valor de la velocidad puede fijarse arbitrariamente, ya que para la obtención de la derivada del funcional correspondiente es necesario dividir por dicho valor<sup>11</sup>.

En la Tabla II se recogen los resultados obtenidos para las diferentes discretizaciones presentadas en la Tabla I, correspondientes a un modelo 2D. En ella puede apreciarse la bondad de los resultados obtenidos, estando el error relativo en torno al 1 %, salvo en la malla 4c, que evidentemente es una malla excesivamente pobre.

Igualmente, se ha evaluado la sensibilidad mediante modelos 3D. En la Tabla III se recogen los resultados obtenidos en este caso. Como puede observarse, la precisión en el cálculo de la sensibilidad es equivalente a la obtenida mediante los modelos 2D para discretizaciones equivalentes. Evidentemente, los valores obtenidos con un sólo elemento en la coordenada radial son bastante peores que los obtenidos con una discretización más fina en dicha coordenada. En efecto, basta poner dos elementos en la coordenada radial para obtener un error relativo del orden del 1 %

Caso	Coord. radial		Coord. circun.	
	N1	Tipo	N2	Tipo
8l	4	lineales	8	lineales
12l	4	lineales	12	lineales
16l	4	lineales	16	lineales
24l	4	lineales	24	lineales
4c	4	lineales	4	cuadráticos
6c	4	lineales	6	cuadráticos
8c	4	lineales	8	cuadráticos
12c	4	lineales	12	cuadráticos

**Tabla I.** Discretizaciones (cilindro 2D)

Caso	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial R}\right)_{\rho=r}$ *	Error (%)	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial R}\right)_{\rho=r}$ **	Error (%)
8l	-0,000148348	0,943	-0,00014785	1,279
12l	-0,000148288	0,983	-0,00014794	1,216
16l	-0,000148269	0,995	-0,00014798	1,189
24l	-0,000148237	1,017	-0,00014804	1,146
4c	-0,000152946	2,128	-0,00015356	2,536
6c	-0,000148958	0,535	-0,0001495	0,175
8c	-0,000148385	0,919	-0,00014899	0,516
12c	-0,000148194	1,045	-0,00014858	0,790
Teórico	-0,000149760			

\* Problema adjunto 1

\*\* Problema adjunto 2

**Tabla II.** Resultados de sensibilidades 2D

Discretización	$\left(\frac{\partial u_r}{\partial R}\right)_{\rho=r}$ *	Error (%)
$8 \times 1$	-0,00013232	11,645
$8 \times 4$	-0,00014808	1,122
$12 \times 2$	-0,00014787	1,262
$16 \times 1$	-0,00014362	4,100
Teórico	-0,00014976	

\* Problema adjunto 1

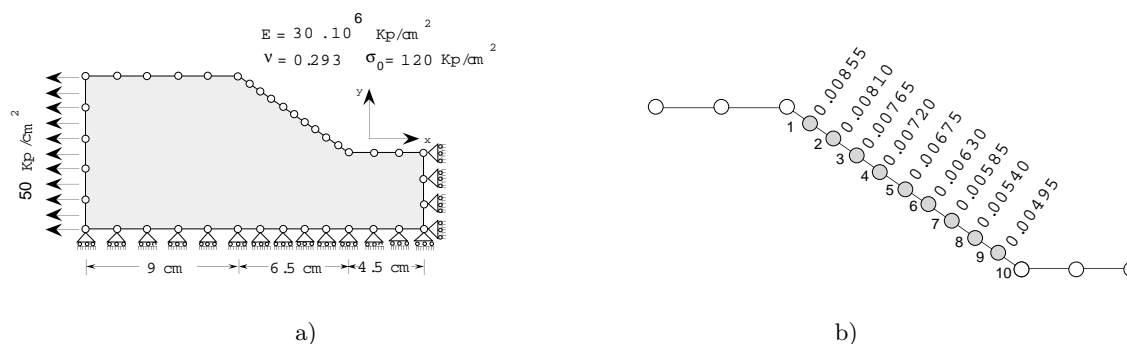
**Tabla III.** Resultados de sensibilidades 3D

## Ejemplo 2: Cambio de sección una placa sometida a tracción (Figura 4a)

En la referencia<sup>10</sup> se plantea el análisis de sensibilidad del funcional

$$\psi = \frac{1}{L_m} \int_{\Gamma_m} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) d\Gamma_m \approx \sum_{i=1}^{Nem} \frac{1}{L_i} \int_{\Gamma_i} \left( \frac{\sigma}{\sigma_0} - 1 \right) d\Gamma \quad (49)$$

donde el valor de la tensión de comparación  $\sigma$  corresponde a la tensión de von Mises,  $\sigma_0$  es la tensión de referencia y  $\Gamma_m$  representa el contorno móvil mediante diferentes discretizaciones de elementos finitos, utilizando distintos tipos de elementos.



**Figura 4.** Cambio de sección en una placa sometida a tracción: a) Modelo; b) Perturbación en la geometría

Para obtener el valor de referencia en la variación del funcional en cada elemento del contorno móvil, se ha resuelto el mismo problema con una perturbación en la geometría como la mostrada en la Figura 4b, que corresponde a una variación de un 0,1 % en la coordenada  $y$  de cada uno de los nodos del contorno móvil.

En la Tabla IV se recogen los valores obtenidos para el funcional en cuestión para cada uno de los elementos del contorno móvil, tanto para la geometría original como para la perturbada.

Elemento	Geometría original	Geometría perturbada	Diferencia
1	-0,948945050	-0,949063000	-0,000117950
2	-0,834009833	-0,836119583	-0,002109750
3	-0,771846250	-0,773297167	-0,001450917
4	-0,716279083	-0,717591500	-0,001312417
5	-0,661279833	-0,662552333	-0,001272500
6	-0,603389667	-0,604697250	-0,001307583
7	-0,536371083	-0,537822167	-0,001451084
8	-0,450726250	-0,452513750	-0,001787500
9	-0,334010250	-0,338974583	-0,004964333
10	0,192694167	0,188277500	-0,004416667

**Tabla IV.** Valores del funcional en cada elemento

La sensibilidad del funcional para cada elemento se ha obtenido para una definición de velocidades de diseño equivalente a la perturbación de la Figura 4b. En la Tabla V se presentan los resultados obtenidos, así como su proporción frente a los valores de referencia. Como puede verse en dicha tabla, la precisión obtenida en el cálculo de las sensibilidades es similar al mejor de los casos presentados en la referencia<sup>10</sup>, incluso para la discretización utilizada (39 nodos, 39 elementos), correspondientes al mismo tamaño de elementos en el contorno que los elementos finitos adyacentes al mismo en la referencia<sup>10</sup>, pero con un número bastante menor de elementos.

Elemento	$\dot{\Psi}_e$	$\Delta \Psi_e$	$100 \frac{\dot{\Psi}_e}{\Delta \Psi_e}$
1	-0,000134310	-0,000117950	113,87
2	-0,002228612	-0,002109750	105,63
3	-0,001520812	-0,001450917	104,82
4	-0,001364500	-0,001312417	103,97
5	-0,001308033	-0,001272500	102,79
6	-0,001337831	-0,001307583	102,32
7	-0,001475402	-0,001451084	101,68
8	-0,001811487	-0,001787500	101,34
9	-0,005044753	-0,004964333	101,62
10	-0,004698002	-0,004416667	106,37

**Tabla V.** Comparación de resultados

El mismo ejemplo se ha resuelto mediante un modelo 3D, con elementos cuadriláteros con aproximación lineal, utilizando una malla equivalente a la del modelo 2D, con un elemento en la dirección perpendicular. Los resultados obtenidos son similares a los presentados para el modelo 2D en la Tabla V, en lo que se refiere a la precisión obtenida<sup>2</sup>.

## CONCLUSIONES

Se ha presentado en este artículo una revisión completa de la formulación, a partir de los conceptos de derivada material y problema adjunto, del análisis de sensibilidad en los funcionales más habituales en Elasticidad. Para todos ellos se ha incluido tanto la expresión que permite evaluar la sensibilidad, como el problema adjunto correspondiente. En el caso de elasticidad 3D y para los funcionales dependientes de las tensiones se ha obtenido un problema adjunto unificado, que bajo ciertas condiciones<sup>2</sup> puede utilizarse en la mayoría de las aplicaciones prácticas, suponiendo un gran avance frente a las técnicas utilizadas hasta la fecha, que precisaban de varios problemas adjuntos diferentes para la obtención de una misma sensibilidad<sup>1</sup>.

Se ha presentado una forma sistemática de calcular las deformaciones y tensiones en el contorno a partir de la teoría de superficies, considerando la aproximación geométrica del elemento como una parametrización del contorno. El procedimiento presentado es completamente sistemático y general, pudiendo utilizarse con cualquier tipo de elemento y aproximación, aunque obviamente conduce a fórmulas más simples en el caso de elementos lineales, que son los más utilizados habitualmente. De hecho, la misma técnica puede utilizarse también en conjunción con el MEF, sin más que considerar las caras de cada elemento correspondientes al contorno.

Se ha desarrollado una generalización y sistematización en la definición de la velocidad de diseño en el contorno (cambio de forma), aprovechando la formulación del MEC, utilizando

las propias funciones de aproximación del elemento. Ello permite tratar de una forma totalmente sistemática el problema de optimización, independientemente de las variables de diseño utilizadas. Así, si se utilizan como variables de diseño las coordenadas nodales, la definición de la velocidad de diseño es inmediata; si por el contrario, se utilizan variables de diseño de tipo global (parámetros que definen curvas o superficies), basta con establecer la relación entre la variación del parámetro correspondiente y la variación de las coordenadas de los nodos afectados por el cambio, de forma que se pueden definir, a partir de la variación de la propia variable de diseño, las velocidades nodales correspondientes, aplicando a continuación el procedimiento presentado en este artículo.

Se han presentado varios ejemplos que permiten contrastar la validez del trabajo desarrollado. Tanto la comparación con resultados analíticos, como la comparación con resultados obtenidos por otros autores mediante diferentes procedimientos, permiten garantizar la fiabilidad de las técnicas desarrolladas, que proporcionan resultados suficientemente precisos, aun con mallas bastante menos exigentes que las utilizadas en diferentes referencias bibliográficas.

## REFERENCIAS

- 1 T. Burczynski, J.H. Kane y C. Balakrishna, "Shape design sensitivity analysis via material derivative adjoint variable technique for 3D and 2D curved boundary element", *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. **38**, pp. 2839–2866, (1995).
- 2 E. Calvo, "Análisis de sensibilidad en elasticidad mediante el método de los elementos de contorno. Aplicación a la optimización de forma", Tesis doctoral, Universidad de Zaragoza, (1997).
- 3 K.K. Choi, "Shape design sensitivity analysis of displacement and stress constraints", *J. Struc. Mechanics*, Vol. **13**, 1, pp. 27–41, (1985).
- 4 Y. Chun y E. Haug, "Two dimensional shape optimal design", *Int. J. Num. Meth. Engng*, Vol. **13**, 5, pp. 311–336, (1978).
- 5 T.A. Cruse, W. Suwito, "On the somigliana stress identity in elasticity", *Computational Mechanics*, Vol. **11**, pp. 1–10, (1993).
- 6 K. Doms y Z. Mroz, "Variational approach by means of adjoint systems to structural optimization and sensitivity analysis-II Structural shape variation", *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **20**, 6, pp. 527–552, (1984).
- 7 M. Dikmen, "*Theory of Thin Elastic Shells*", Pitman Advanced Publishing Programa, (1982).
- 8 Z. Erman y R.T. Fenner, "Three dimensional design optimization using the boundary integral equation method", *Journal Strain Analys.*, Vol. **31**, 4, pp. 289–298, (1996).
- 9 L. Gracia y M. Doblaré, "Shape optimization by using BEM", *Proc. Xth. International Conference in BEM*, pp. 491–514, (1988).
- 10 E.J. Haug, K.K. Choi y V. Komkov, "*Design sensitivity analysis of structural systems*", Academic Press, New York, (1986).
- 11 E.J. Haug y K.K. Choi, "Material derivative methods for shape design sensitivity analysis", "*The optimum shape automated structural design*", Plenum Press, New York, J.A. Bennett y M.E. Botkin (Eds.), pp. 29–55, (1986).



- 12 J.H. Kane, "Shape optimization utilizing a boundary formulation", *Proc. 2nd Boundary Element Technology Conference*, J.J. Connor y C.A. Brebbia (Eds.), MIT, Massachusetts, pp. 781–803, (1986).
- 13 P. Kocandrlle y P. Koska, "Three dimensional shape optimization approach based on natural design variables and the boundary element method", *J. Strain Analys.*, Vol. **31**, 5, pp. 377–387, (1996).
- 14 R.A. Meric, "Differential and integral sensitivity formulations and shape optimization by BEM", *Engng. Anal. Boundary Elements*, Vol. **15**, pp. 181–188, (1995).
- 15 C.A. Mota, H.C. Rodrigues y K.K. Choi, "Shape optimal structural design using boundary elements and minimum compliance techniques", *ASME Journal of Mechanisms, Transmissions and Automation in Design*, Vol. **106**, pp. 518–523, (1984).
- 16 F. Paris, "El método de los elementos de contorno en la teoría del potencial y la elasticidad", Tesis doctoral, Universidad Politécnica de Madrid, (1979).
- 17 K. Tai y R.T. Fenner, "Optimum shape desing and positioning of features using the boundary integral equation method", *Int. J. Num. Meth. Engng.* , Vol. **39**, pp. 1985–2003, (1996).
- 18 Z. Zhao, "Shape design sensitivity analysis and optimization using the boundary element method", Tesis doctoral, Computational Mechanics Institute, Wessex Institute of Technology, Southampton, (1992).