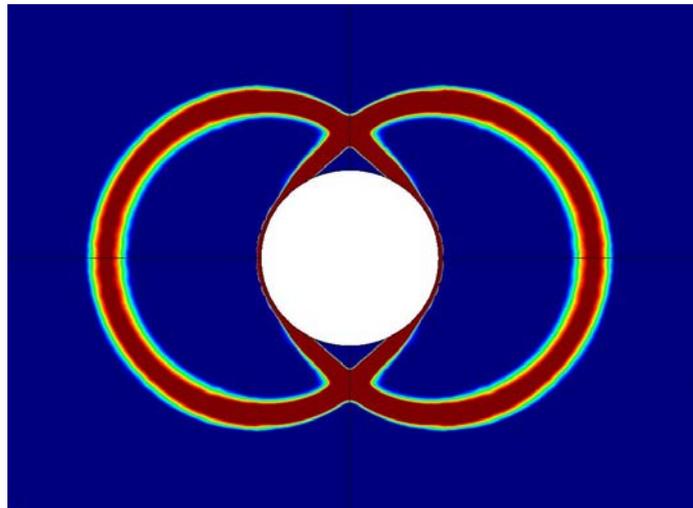


# Elementos Finitos Mixtos Estabilizados para Flujos Viscoplásticos. Formulación y Aplicaciones

E. Moreno  
M. Cervera



# **Elementos Finitos Mixtos Estabilizados para Flujos Viscoplásticos Formulación y Aplicaciones**

E. Moreno  
M. Cervera

Monografía CIMNE N<sup>o</sup>-142, Marzo 2014

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.com](http://www.cimne.com)

First edition: Marzo 2014

**ELEMENTOS FINITOS MIXTOS ESTABILIZADOS PARA FLUJOS VISCOPLÁSTICOS  
FORMULACIÓN Y APLICACIONES**

Monografía CIMNE M142

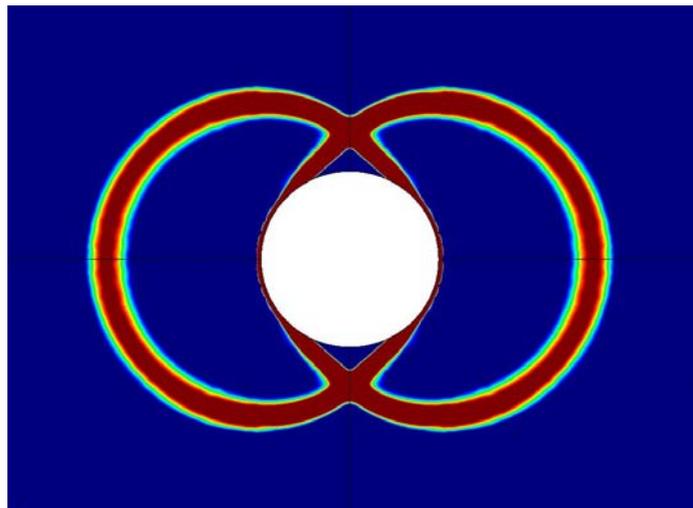
© Los autores

ISBN: 978-84-941686-5-9

Depósito legal: B-4033-2014

# Elementos Finitos Mixtos Estabilizados para Flujos Viscoplásticos

E. Moreno  
M. Cervera



# **Elementos Finitos Mixtos Estabilizados para Flujos Viscoplásticos**

E. Moreno  
M. Cervera

Monografía CIMNE N<sup>o</sup>-142, Marzo 2014

CENTRO INTERNACIONAL DE MÉTODOS NUMÉRICOS EN INGENIERÍA  
Edificio C1, Campus Norte UPC  
Gran Capitán s/n  
08034 Barcelona, España  
[www.cimne.com](http://www.cimne.com)

First edition: Marzo 2014

**ELEMENTOS FINITOS MIXTOS ESTABILIZADOS PARA FLUJOS VISCOPLÁSTICOS**

Monografía CIMNE M142

© Los autores

ISBN: 978-84-941686-5-9

Depósito legal: B-4033-2014

# Agradecimientos

En este momento en que finaliza este trabajo, quisiera agradecer a todas aquellas personas que de una u otra forma han sido mi apoyo durante la realización del mismo.

A mi Tutor y Director Prof. Miguel Cervera, quien siempre confió en que lograr los objetivos de este trabajo era posible. Siempre tenía una respuesta para cada interrogante, una piedra que quitaba del camino; fue motivación de lucha, de trabajo incansable, mantuvo siempre paciencia, confianza y comprensión. Gracias por la dedicación a la revisión y corrección exhaustiva de este trabajo. Mi más profundo agradecimiento.

Al Prof. Ramon Codina, quien siempre se mostró amable, dispuesto a despejar cualquier duda, exponiendo todo detalle, dando todo su saber y experiencia en cada explicación; facilitó el uso del programa Zephyr para el logro de esta investigación. Muchísimas gracias.

Al Dr. Herbert Coppola por su valiosa colaboración al enseñarme el manejo de un programa tan complejo como Zephyr; sin su ayuda el camino hubiese sido mucho más difícil de recorrer, estuvo presto a aclarar cualquier duda sobre su funcionamiento. Te lo agradezco Herbert.

A Rosa Olea, siempre tan eficaz en sus procedimientos, siempre tan amiga, tan amable; de ella nunca recibes un no por respuesta, siempre optimista. Gracias por tu gran ayuda.

Al Prof. Allen Batteman y Dr. Vicente Medina, Departamento de Ingeniería Hidráulica (UPC), por ese compartir y los temas de discusión sobre flujos de detritos, siempre tan de buen humor, gracias.

A la Universidad Politécnica de Cataluña (UPC), al Departamento de Resistencia de Materiales y al Centro Internacional de Métodos Numéricos (CIMNE) por facilitar los espacios, equipos y herramientas necesarias para la realización de esta trabajo.

Al Departamento de Ordenación de Cuenca de la Facultad de Ciencias Forestales y Ambientales de la Universidad de los Andes en Venezuela, quienes me apoyaron en todo momento y confiaron en la finalización de mis estudios de doctorado. Especial agradecimiento les debo al Prof. Gustavo Ramirez, Prof. Raul Vidal, Prof. Jesús Mejías, Prof. Yolanda Molina y Rose Marie Helmeyer.

Al Prof. Pedro Rivero del Departamento de Estructuras, Facultad de Ingeniería de la Universidad de los Andes, por su apoyo al asumir parte de mi carga docente en los inicios de este trabajo. Muchas gracias Pedro.

A todas las autoridades que apoyaron mi solicitud. Especial agradecimiento le debo al Prof. Darío Garay, Decano de la Facultad de Ciencias Forestales y Ambientales.

Al personal de la Oficina de Asuntos Profesorales (DAP) de la Universidad de los Andes, por la atención recibida como profesora en el exterior. Especial agradecimiento le debo al Prof. Rafael Ramirez, al Prof. Pablo Djabayan y al Ing. Miguel Linares.

A la Universidad de los Andes en Venezuela, por el financiamiento de esta investigación y por todo el apoyo prestado para la realización de este trabajo.

A mis amigos, Maritzabel, Ivo, Diego, Mabel y César, que compartieron mi vida en este lapso de tiempo, Maritzabel en el despacho 5 y el resto en el despacho 111 donde convivimos la mayoría del tiempo. Siempre compartiendo el café a media tarde y siempre luchan-

do fuerte, todos hicieron muy agradable mi estancia fuera de mi país. Crearon amistad, fraternidad, me brindaron fortaleza en los momentos difíciles y más alegría en los buenos momentos. Para ellos un fuerte abrazo. También compartí muchas vivencias con Jairo, Mahylin, Andrés, Jeanette, Cuauhtemoc, Manuel y Lorenzo, siempre entre risas. A otros amigos y colegas que contribuyeron a ofrecer un ambiente de estudio desinteresado, de intercambio de saberes, de respuestas a dudas. Ellos son: Joan, Matías, Príncipe, Hector y Enrique. Gracias. El ambiente tan agradable entre compañeros en este Departamento no lo he encontrado en otro lugar.

A Iris y Oswaldo, a José Rafael, mis compatriotas y amigos, que han sido un gran apoyo en toda mi estancia en Barcelona. Gracias por su amistad y calor de familia. A Leandro, a Roberto, Ángela, Juan Carlos, Jaime y sus familias. Un fuerte abrazo.

A Gerardo, compañero de vida inseparable, motivo especial de agradecimiento, para quien renunciar no está en el vocabulario. Fuiste fuerza cuando ya no tenía y luz cuando todo era oscuridad. Gracias por todo tu amor y todo tu apoyo.

A mis hijos, Stephani y Salvador, mis fuentes inagotables de motivación, iluminación en mi vida, presencia en la lejanía, fuertes en la espera. Todo mi amor para ustedes, confío en que este logro les sirva de estímulo. Gracias mis amores.

Al resto de mi familia, mis padres, María y Ricardo, mis hermanos, Erix, Marlene, Ricardo, Gregorio y José Gregorio, mis sobrinos, Daniela, José Alfonso, Miguel, Erix José y Luis Carlos, a Alice y Juancho, a Nuris y Ruben. A tías y primos. Gracias por tanto amor y por apoyarme en todo momento. Gracias a los que con su recuerdo me fortalecen. Gracias a todos.

*Este trabajo se lo dedico a mis hijos, Stephani Carolina y Salvador Ignacio,  
por tanto amor, esfuerzo, esperanza y días de espera durante estos largos diez años.  
Es una etapa que comenzó antes del inicio de este doctorado y que finaliza con el mismo.*

*“El Amor es la fuerza más humilde, pero la más poderosa,  
de que dispone el ser humano.”  
Mahatma Ghandi*



# Resumen

El objetivo de este trabajo es formular y evaluar una metodología para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley mediante el método de los elementos finitos mixtos estabilizados velocidad/presión. Se desarrolla una formulación teórica, se realiza la implementación computacional y se presentan y evalúan soluciones numéricas para estos fluidos viscoplásticos.

Los fluidos viscoplásticos se caracterizan por presentar una tensión de corte mínima, denominada tensión de fluencia. Por encima de esta tensión de corte mínima el fluido comienza a moverse. En caso de no superarse esta tensión de fluencia, el fluido se comporta como un cuerpo rígido o quasi-rígido, con velocidad de deformación nula.

Se presentan inicialmente las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido y dos fluidos incompresibles e inmiscibles considerando superficie libre. Se presenta una revisión de los modelos reológicos Newtonianos y los modelos no-Newtonianos. Se hace una descripción detallada de los modelos viscoplásticos. Se describen los modelos viscoplásticos regularizados de Papanastasiou. Se proponen modelos regularizados de doble viscosidad como alternativa a los comúnmente usados.

Se deducen las soluciones analítica en flujos paralelos para el fluido Newtoniano, el fluido de Bingham, de Herschel-Bulkley, el fluido pseudoplástico y dilatante.

Se desarrolla el modelo discreto, así como la formulación estabilizada con los métodos de subescalas algebraica (*Algebraic subgrid scale*, ASGS), de subescalas ortogonales (*Orthogonal subgrid scale*, OSS) y de subescalas ortogonales con la presión y el termino convectivo desacoplados, *split*-OSS. En el caso del fluido con superficie libre se presenta el método euleriano simplificado, el cual usa el método de superficie de nivel *level set* para resolver el movimiento de esta superficie libre.

Se presenta un estudio de convergencia con los métodos de estabilización OSS y ASGS en los flujos paralelos de Bingham y de Herschel-Bulkley. Los modelos regularizados de doble viscosidad muestran menor error de convergencia que los usados regularmente.

Se presentan las soluciones numéricas desarrolladas en este trabajo para un amplio conjunto de problemas *benchmark*. Pueden dividirse en tres grupos: flujos de Bingham, flujos de Herschel-Bulkley y flujos con superficie libre. Las soluciones obtenidas validan la metodología propuesta en este trabajo de investigación comparándose muy bien con las soluciones analíticas, numéricas, con resultados experimentales y datos de campo.

La metodología propuesta en este trabajo proporciona una herramienta computacional para estudiar flujos viscoplásticos confinados, muy comunes en la industria, y los flujos detríticos viscoplásticos con superficie libre.

*Palabras claves:* Método de los elementos finitos estabilizados, incompresibilidad, método del *level set*, fluidos viscoplásticos, modelo de Bingham, modelo de Herschel-Bulkley, flujos de detritos, rotura de presa.



# Abstract

The objective of this work is to develop and evaluate a methodology for the solution of the Navier-Stokes equations for Bingham Herschel-Bulkley viscoplastic fluids using stabilized mixed velocity/pressure finite elements. The theoretical formulation is developed and implemented in a computer code. Numerical solutions for these viscoplastic flows are presented and assessed.

Viscoplastic fluids are characterized by minimum shear stress called yield stress. Above this yield stress, the fluid is able to flow. Below this yield stress, the fluid behaves as a quasi-rigid body, with zero strain-rate.

First, the Navier-Stokes equations for incompressible fluid and two immiscible fluids considering free surface are presented. A review of the Newtonian and non-Newtonian rheological models is included, with a detailed description of the viscoplastic models. The regularized viscoplastic models due to Papanastasiou are described. Double viscosity regularized models are proposed.

The analytical solutions for parallel flows are deduced for Newtonian, Bingham, and Herschel-Bulkley, pseudoplastic and dilatant fluids.

The discrete model is developed, and the Algebraic SubGrid Scale (ASGS) stabilization method, the Orthogonal Subgrid scale (OSS) method and the split orthogonal subscales method are introduced. For the cases of flows with a free surface, the simplified Eulerian method is employed, with the level set method to solve the motion of the free.

A convergence study is performed to compare the ASGS and OSS stabilization methods in parallel flows with Bingham and Herschel-Bulkley fluids. The double viscosity regularized models show lower convergence error convergence than the regularized models used commonly.

Numerical solutions developed in this work are applied to a broad set of benchmark problems. They can be divided into three groups: Bingham flows, Herschel-Bulkley flows and free surface flows.

The solutions obtained validate the methodology proposed in this research and compare well with the analytical and numerical solutions, experimental and field data.

The methodology proposed in this work provides a computational tool to study confined viscoplastic flows, common in industry, and debris viscoplastic flows with free surface.

*Keywords:* stabilized finite elements, incompressibility, level set method, viscoplastic fluid, Bingham model, Herschel-Bulkley model, debris flow, dam break.



# Tabla de contenido

Agradecimientos .....	i
Resumen .....	v
Abstract.....	vii
Tabla de contenido.....	ix
Tabla de figuras .....	xv
Capítulo 1 .....	1
Preliminares .....	1
1.1.    Introducción .....	1
1.2.    Motivación .....	5
1.3.    Objetivos .....	6
1.3.1.    Objetivo general .....	6
1.3.2.    Objetivos específicos .....	6
1.4.    Aplicaciones y alcances .....	7
1.4.1.    Aplicaciones y alcances científicos esperados .....	7
1.4.2.    Aplicaciones y alcances ingenieriles esperados .....	8
1.5.    Organización .....	8
Capítulo 2 .....	11
Modelo continuo para el problema de flujo: ecuaciones de gobierno	11
2.1.    Introducción .....	11
2.2.    Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos .....	12
2.2.1.    Ecuación de continuidad .....	12
2.2.2.    Ecuación de conservación de <i>momentum</i> .....	12
2.2.3.    Ecuación constitutiva .....	13
2.3.    El problema continuo. Ecuaciones de Navier-Stokes.....	15
2.3.1.    El problema continuo para un flujo confinado .....	15
2.3.2.    El problema continuo para un flujo con superficie libre .....	18
2.4.    Reología de los fluidos Newtonianos y no-Newtonianos. Ecuaciones constitutivas .....	21
2.4.1.    Fluidos Newtonianos.....	21
2.4.2.    Fluidos no-Newtonianos .....	22
2.4.3.    Fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo.....	23
2.4.4.    Fluidos no-Newtonianos sin tensión de fluencia.....	23
2.4.5.    Fluidos no-newtonianos con tensión de fluencia.....	27
2.4.6.    Modelos viscoplásticos regularizados. Fluido de Bingham .....	32
2.4.7.    Modelos viscoplásticos regularizados. Fluido de Herschel-Bulkley .....	36
2.5.    Fluidos no-Newtonianos dependientes del tiempo .....	41
2.6.    Fluidos viscoelásticos.....	42
2.7.    Modelos constitutivos para flujos detríticos.....	43

2.8.	Flujos con solución analítica .....	45
2.8.1.	Introducción .....	45
2.8.2.	Flujo de Couette .....	45
2.8.3.	Flujo de Poiseuille .....	55
2.8.4.	Soluciones analíticas para los flujos con superficie libre .....	58
2.8.5.	Modelo continuo de rotura de presa .....	59
<b>Capítulo 3.....</b>		<b>65</b>
<b>Modelo discreto de elementos finitos para las ecuaciones de Navier-Stokes.....</b>		<b>65</b>
3.1.	Introducción .....	65
3.2.	Ecuaciones de Navier-Stokes en forma fuerte y forma débil .....	65
3.2.1.	Linealización del término convectivo.....	68
3.2.2.	Linealización de la ecuación constitutiva .....	68
3.2.3.	La integración temporal.....	69
3.2.4.	La discretización espacial por elementos finitos. Formulación de Galerkin .....	70
3.3.	Estabilización con subescalas.....	72
3.3.1.	Método SGS .....	73
3.3.2.	Método ASGS .....	76
3.3.3.	Método OSS .....	77
3.3.4.	Método <i>split</i> -OSS .....	78
3.3.5.	Subescala de presión .....	79
3.3.6.	Parámetros de estabilización .....	81
3.3.7.	Formulación matricial del problema.....	81
3.4.	Modelo discreto para flujos con superficie libre .....	84
3.4.1.	Modelo discreto de la función de la superficie de nivel .....	84
3.4.2.	Reinicialización.....	85
3.4.3.	Acoplamiento entre las ecuaciones de flujo y la función de superficie de nivel .....	85
3.4.4.	Integración numérica de los elementos cortados por la interfase .....	86
3.5.	Estudio de convergencia.....	87
3.5.1.	Flujo de Poiseuille .....	87
3.5.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	87
3.5.3.	Mallas de elementos finitos .....	88
3.5.4.	Fluido Newtoniano y de Bingham.....	89
3.5.5.	Modelos regularizados de Bingham .....	91
3.5.6.	Convergencia.....	92
3.5.7.	Fluido dilatante y de Herschel-Bulkley .....	96
3.5.8.	Modelos regularizados de Herschel-Bulkley .....	98
3.5.9.	Convergencia.....	98
3.5.10.	Conclusiones .....	103
<b>Capítulo 4.....</b>		<b>105</b>
<b>Fluidos de Bingham.....</b>		<b>105</b>
4.1.	Introducción .....	105
4.2.	Flujo de Poiseuille .....	107
4.2.1.	Descripción del problema.....	107
4.2.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	107

4.2.3.	Propiedades constitutivas y parámetros de regularización .....	108
4.2.4.	Descripción del problema discreto .....	109
4.2.5.	Dinámica del flujo.....	109
4.2.6.	Comportamiento reológico.....	109
4.2.7.	Conclusiones .....	111
4.3.	Flujo de Couette .....	112
4.3.1.	Descripción del problema .....	112
4.3.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	112
4.3.3.	Descripción del problema discreto .....	113
4.3.4.	Dinámica del flujo.....	113
4.3.5.	Comportamiento reológico.....	113
4.3.6.	Conclusiones .....	116
4.4.	Flujo en una cavidad cuadrada .....	117
4.4.1.	Descripción del problema .....	117
4.4.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	118
4.4.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	118
4.4.4.	Discretización.....	119
4.4.5.	Caso <i>no inercial</i> , $Re \approx 0$ . Malla estructurada.....	120
4.4.6.	Caso <i>no inercial</i> , $Re \approx 0$ . Malla no estructurada .....	124
4.4.7.	Caso <i>inercial</i> , $Re = 100$ .....	132
4.4.8.	Caso <i>inercial</i> , $Re = 1000$ .....	133
4.4.9.	Conclusiones .....	140
4.5.	Flujo en una expansión súbita .....	141
4.5.1.	Descripción del problema .....	141
4.5.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	142
4.5.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	145
4.5.4.	Descripción del problema discreto .....	145
4.5.5.	Caso <i>no inercial</i> , $Re \approx 0$ .....	147
4.5.6.	Caso <i>inercial</i> .....	150
4.5.7.	Conclusiones .....	154
4.6.	Flujo de extrusión.....	155
4.6.1.	Descripción del problema .....	155
4.6.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	157
4.6.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	158
4.6.4.	Descripción del problema discreto .....	159
4.6.5.	Presión de extrusión .....	159
4.6.6.	Dinámica del flujo.....	160
4.6.7.	Comportamiento reológico.....	160
4.6.8.	Conclusiones .....	166
4.7.	Flujo alrededor de un cilindro entre placas paralelas .....	167
4.7.1.	Descripción del problema .....	167
4.7.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	173
4.7.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	175
4.7.4.	Discretización.....	175
4.7.5.	Fluido Newtoniano.....	176
4.7.6.	Fluido viscoplástico de Bingham .....	177
4.7.7.	Coefficiente de arrastre.....	179
4.7.8.	Conclusiones .....	182

Capítulo 5.....	183
Fluidos de Herschel-Bulkley .....	183
5.1.  Introducción .....	183
5.2.  Flujo de Poiseuille .....	185
5.2.1.  Descripción del problema.....	185
5.2.2.  Propiedades constitutivas y parámetro de regularización .....	186
5.2.3.  Dinámica del flujo .....	187
5.2.4.  Comportamiento reológico .....	187
5.2.5.  Zona de fluencia, caso pseudoplástico, $n = 0.5$ .....	188
5.2.6.  Zona de fluencia, caso dilatante, $n = 2$ .....	188
5.2.7.  Conclusiones .....	191
5.3.  Flujo de Couette .....	192
5.3.1.  Descripción del problema.....	192
5.3.2.  Geometría y condiciones de contorno .....	192
5.3.3.  Propiedades constitutivas y parámetro de regularización .....	193
5.3.4.  Discretización .....	193
5.3.5.  Dinámica del flujo .....	193
5.3.6.  Comportamiento reológico .....	194
5.3.7.  Conclusiones .....	196
5.4.  Flujo en una cavidad cuadrada .....	197
5.4.1.  Descripción del problema.....	197
5.4.2.  Geometría y condiciones de contorno .....	198
5.4.3.  Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	198
5.4.4.  Discretización .....	199
5.4.5.  Caso no inercial, $Re \approx 0$ . .....	199
5.4.6.  Fluido de Herschel-Bulkley dilatante, $n = 2$ .....	212
5.4.7.  Caso inercial, $Re = 1000$ . .....	218
5.4.8.  Flujo de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n=0.5$ .....	218
5.4.9.  Conclusiones .....	223
5.5.  Flujo en una expansión súbita .....	224
5.5.1.  Descripción del problema.....	224
5.5.2.  Geometría y condiciones de contorno .....	224
5.5.3.  Propiedades constitutivas y parámetro de regularización .....	227
5.5.4.  Descripción del modelo discreto .....	228
5.5.5.  Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n = 0.5$ .....	229
5.5.6.  Fluido Herschel-Bulkley dilatante, $n = 1.5$ .....	233
5.5.7.  Conclusiones .....	237
5.6.  Flujo alrededor de un cilindro en un medio infinito .....	238
5.6.1.  Descripción del problema.....	238
5.6.2.  Geometría y condiciones de contorno .....	241
5.6.3.  Propiedades constitutivas y parámetro de regularización .....	241
5.6.4.  Discretización .....	242
5.6.5.  Fluido Newtoniano .....	243
5.6.6.  Fluido pseudoplástico.....	244
5.6.7.  Fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley .....	245
5.6.8.  Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico .....	245
5.6.9.  Fluido de Herschel-Bulkley dilatante, $n = 2$ .....	254

5.6.10.	Conclusiones .....	259
5.7.	Flujo alrededor de un cilindro que se desplaza y rota sobre su eje.....	260
5.7.1.	Descripción del problema .....	260
5.7.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	260
5.7.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	262
5.7.4.	Discretización.....	262
5.7.5.	Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n = 0.25$ .....	263
5.7.6.	Zonas de fluencia y no fluencia.....	264
5.7.7.	Fuerzas de arrastre y de sustentación .....	266
5.7.8.	Conclusiones .....	267
Capítulo 6	.....	269
Flujos con superficie libre	.....	269
6.1.	Introducción .....	269
6.2.	Flujo extruido con superficie libre .....	271
6.2.1.	Descripción del problema .....	271
6.2.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	272
6.2.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	273
6.2.4.	Descripción del problema discreto .....	273
6.2.5.	Discretización.....	273
6.2.6.	Fluido Newtoniano.....	274
6.2.7.	Fluido viscoplástico de Bingham .....	275
6.2.8.	Conclusiones .....	280
6.3.	Flujo de agua y aceite debido a la rotura de presa.....	281
6.3.1.	Descripción del problema .....	281
6.3.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	283
6.3.3.	Propiedades constitutivas .....	283
6.3.4.	Discretización.....	284
6.3.5.	Superficie libre y desplazamiento del frente del flujo.....	285
6.3.6.	Conclusiones .....	289
6.4.	Flujo de Bingham debido a la rotura de una balsa minera. Caso real ...	290
6.4.1.	Descripción del problema .....	290
6.4.2.	Geometría y condiciones de contorno .....	291
6.4.3.	Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.....	294
6.4.4.	Discretización.....	294
6.4.5.	Ubicación de la superficie libre y distancia de inundación. Caso 2D ...	296
6.4.6.	Ubicación de la superficie libre y distancia de inundación. Caso 3D ...	299
6.4.7.	Conclusiones .....	304
Capítulo 7	.....	305
Conclusiones, aportaciones y futuras líneas de investigación	.....	305
7.1.	Resumen y conclusiones .....	305
7.2.	Aportaciones de la investigación.....	308
7.3.	Futuras líneas de investigación .....	309
Referencias	.....	311



# Capítulo 1

## Preliminares

### 1.1. Introducción

En este trabajo se estudia la simulación numérica mediante modelos de elementos finitos mixtos velocidad/presión de flujos confinados viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley, así como de flujos viscoplásticos de Bingham con superficie libre.

Los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley son fluidos no-Newtonianos que se caracterizan por presentar una tensión de corte mínima, denominada tensión de fluencia. Por encima de esta tensión de corte mínima el fluido comienza a moverse. En caso de no superar esta tensión de fluencia, el fluido se comporta como un cuerpo rígido o quasi-rígido, con velocidad de deformación nula.

En la industria, los fluidos de Bingham pueden modelizar el comportamiento de las pinturas, de los plásticos, de productos alimenticios como la mayonesa y el ketchup, entre otros. Los fluidos de Herschel-Bulkley incluyen, por ejemplo, el comportamiento de las pastas, algunos geles y los fluidos de perforación.

En el medio ambiente, los fluidos de Bingham pueden modelizar fluidos de lodos y de residuos mineros, entre muchos otros. Los fluidos de Herschel-Bulkley pueden simular algunos materiales granulares.

En la industria y en el medio ambiente el uso de herramientas computacionales tiene un papel destacado y en auge porque éstas permiten modelizar comportamientos complejos de materiales en procesos que son difíciles de describir analíticamente. Además, pueden suponer un ahorro en los costos de ensayos experimentales de los fenómenos de interés.

En la industria, la modelización numérica es muy útil en el diseño y optimización de procesos como el de extrusión (Figura 1.1) y también en el llenado de moldes. Se pueden simular diferentes tipos de flujos, e incluso mejorar las propiedades mecánicas de los productos. También contribuye a prevenir accidentes como consecuencia de falla de equipos, diseños defectuosos o manejo inadecuado de los mismos. De forma creciente, la simulación numérica forma parte del proceso de toma de decisiones en el diseño y operatividad industriales.

En el medio ambiente, la modelización de procesos geomorfológicos como los flujos detríticos puede determinar, con antelación a la ocurrencia del evento, la posible área de inundación; por tanto, puede contribuir a disminuir o prevenir el impacto de estos flujos sobre ésta zona una vez que se produzca el evento. Estos procesos se consideran desastres naturales debido a su carácter repentino y violento. Ejemplo de este tipo de procesos fue la trage-

dia ocurrida en el estado Vargas, Venezuela, en Diciembre del año 1999, como consecuencia de las lluvias torrenciales, y en la que las pérdidas humanas y materiales fueron considerables (Figura 1.2 a)). Este tipo de eventos ha causado cuantiosos daños en países como España, Perú, Japón, Italia, Austria y China, entre otros.

La simulación de flujos de residuos mineros también puede ayudar a tomar medidas de prevención y/o mitigación para proteger el ambiente, las personas y los bienes materiales en el área de inundación, ya que pueden tener el mismo impacto que los procesos geomorfológicos. Ejemplos de desastres debidos a rotura de presas que almacenan residuos mineros son la falla de la presa de residuos yesíferos en Texas, Estados Unidos, en el año 1966, la de Aznalcóllar, España, en el año 1998 (Figura 1.2 b)) y la falla de la presa para residuos de manganeso ocurrido en la ciudad de Mianyang, China, en el año 2011, entre otros. Este tipo de desastres ha ocasionado pérdidas de vidas humanas, afectación de tierras, de cosechas e incluso contaminación de las aguas potables.

De acuerdo con lo mencionado, existe el interés y la preocupación por estudiar el comportamiento de materiales industriales y materiales que forman parte de procesos medio-ambientales, así como el movimiento de los fluidos involucrados en los mismos.

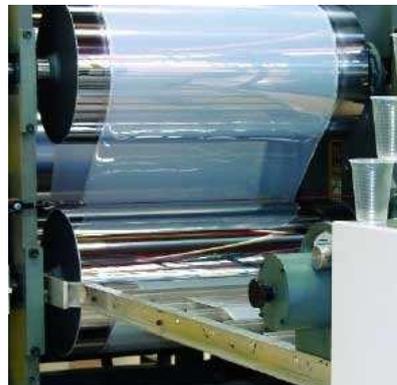
Este trabajo de investigación se centra en los fluidos viscoplásticos, que aparecen en una gran variedad de productos industriales, materiales geomorfológicos y residuos mineros.

En este trabajo se realiza un amplio estudio de flujos viscoplásticos confinados con aplicaciones industriales y se inicia la evaluación de los flujos de detritos con el análisis de un evento real de flujo de desechos mineros.

El movimiento de los fluidos se describe por las ecuaciones de conservación de masa, *momentum* y energía, representado por las ecuaciones de Navier-Stokes. Numerosos ensayos experimentales han demostrado que las ecuaciones de Navier-Stokes bajo condiciones isotérmicas describen exactamente el flujo incompresible de los fluidos. Las ecuaciones de Navier-Stokes requieren de una ecuación constitutiva para caracterizar el tipo de fluido. Esta ecuación define el valor de las tensiones en función de la dinámica del flujo y está asociada con la viscosidad del fluido.



a)



b)

Figura 1.1. a) Proceso de extrusión para perfiles de caucho. b) Extrusión para películas de plástico. Fotos: <http://www.google.es>.



Figura 1.2. a) Flujo de detritos, Vargas, Venezuela 1999, foto: Facultad de Ing. Forestal-Universidad de los Andes. b) Falla de la presa para residuos de metales pesados en Aznalcóllar, España 1998, foto: <http://www.wise-uranium.org>.

Las ecuaciones constitutivas van desde ecuaciones para fluidos simples descritas por la ley de Newton de la viscosidad hasta ecuaciones más complejas para viscosidades no-Newtonianas. Establecer el comportamiento constitutivo de cada uno de los fluidos es el objetivo principal de la reología y, en particular, el comportamiento de los fluidos viscoplásticos.

El modelo que dió inicio al estudio de los materiales viscoplásticos fue el modelo plástico de Bingham (Bingham, 1922), formulado por Eugene C. Bingham para describir el comportamiento de las pinturas. Este modelo se utiliza para describir líquidos con grandes cantidades de partículas suspendidas o suspensiones concentradas. El fluido de Bingham se caracteriza por presentar una tensión de corte mínima, denominada tensión de fluencia. A partir de esta tensión de corte mínima el fluido comienza a moverse con una relación lineal entre el incremento de tensión y las velocidades de deformación. Por debajo de esta tensión de fluencia, el fluido se comporta como un cuerpo rígido, con velocidad de deformación nula.

La característica más importante de los materiales viscoplásticos es la presencia de la tensión de fluencia que hace que la viscosidad de estos materiales sea dependiente de la velocidad de deformación. Bird, Dai y Yarusso publicaron en 1983 una lista de fluidos con tensión de fluencia. Los modelos viscoplásticos comúnmente utilizados son el modelo de Bingham (Bingham, 1922), el modelo de Herschel-Bulkley (Herschel and Bulkley, 1926) y el modelo de Casson (Casson, 1959).

El modelo de Herschel-Bulkley se considera como un modelo generalizado de Bingham. Aunque ha sido menos estudiado que el modelo de Bingham, ha formado parte de los estudios de diferentes problemas resueltos por Papanastasiou (Papanastasiou, 1987), Kelessidis et al. (Kelessidis et al., 2006), Westerberg et al. (Westerberg et al., 2010) y Dall'Onder Dos Santos et al. (Dall'Onder Dos Santos et al., 2011), entre otros.

En el presente trabajo de investigación se trata específicamente con los fluidos viscoplástico de Bingham y de Herschel-Bulkley en condiciones isotérmicas. Ambos fluidos exhiben una fuerte discontinuidad en su comportamiento reológico debido a la existencia de la tensión de fluencia que es difícil de tratar numéricamente. Para solventar este problema, autores como Bercovier y Engelman (Bercovier, 1980), Tanner y Milthorpe (Tanner and Milthorpe, 1983) y Beris et al. (Beris et al., 1985), entre otros, han propuesto diferentes for-

mulaciones regularizadas. Tanner y Milthorpe fueron los primeros que simularon el problema utilizando un modelo de doble viscosidad aplicable a ambos fluidos. Beris y sus colegas centraron sus estudios en el fluido de Bingham, utilizando el criterio de Von Mises (Mises, 1913) en las zonas de no fluencia y el modelo ideal de Bingham en la zona de fluencia. En 1987, Papanastasiou (Papanastasiou, 1987) propuso un modelo regularizado aplicable tanto en las zonas de no fluencia como en las zonas de fluencia para estos dos fluidos.

En este trabajo se proponen nuevos modelos regularizados para el fluido de Bingham y el fluido de Herschel-Bulkley como alternativa a los modelos regularizados comúnmente usados.

Para cualquier comportamiento reológico, encontrar soluciones analíticas para las ecuaciones de Navier-Stokes no resulta sencillo ya que éstas se encuentran entre las más difíciles y estudiadas de la física y de la matemática (Bird et al., 1987). El rápido desarrollo de los métodos numéricos ha permitido acometer de manera efectiva la solución de problemas complejos que, además, tratan con geometrías complicadas.

En el caso de los materiales viscoplásticos el método numérico más utilizado es el método de los elementos finitos (MEF) ((Zienkiewicz et al., 1978), (Mitsoulis and Zisis, 2001), (Abdali and Mitsoulis, 1992), (Papanastasiou, 1987)). Para abordar el problema de flujo incompresible mediante el MEF, se emplea la formulación mixta de velocidad/presión ( $\mathbf{u}/p$ ). La formulación estándar de Galerkin presenta dos fuentes de inestabilidades.

La primera es la presencia del término convectivo en las ecuaciones de gobierno que puede resultar en oscilaciones numéricas en el campo de la velocidad. Tales oscilaciones son mayores cuando el término convectivo domina sobre el término viscoso (Codina and Blasco, 1997), por ejemplo, en problemas con alto número de Reynolds o en flujos con capa límite o zonas de gradientes fuertes como los flujos turbulentos.

La segunda fuente de inestabilidad es la combinación inapropiada de espacios de interpolación para los campos de velocidad y presión. Esta falta de estabilidad produce oscilaciones numéricas en el campo de las presiones. Para que el problema discreto sea estable los espacios de interpolación usados para la velocidad y la presión deben satisfacer la condición inf-sup de compatibilidad o condición de Babuška-Brezzi (Brezzi and Fortin, 1991). La formulación de igual interpolación lineal usada en este trabajo no cumple con la condición Babuška-Brezzi.

En ambos casos el problema necesita estabilizarse para poder probar convergencia a la solución del problema. Los métodos de estabilización más usados en la actualidad están basados en los métodos de subescalas. Hughes fue el pionero en estos métodos de subescalas (*SubGrid scale*, SGS) que permitieron la justificación teórica de esquemas de estabilización propuestas anteriormente (*Streamline-upwind Petrov-Galerkin*, SUPG (Brooks et al., 1982) y *Galerkin-least-square*, GLS (Hughes et al., 1986). Hughes (Hughes et al., 1998) también propuso el método de estabilización de subescalas algebraicas (*Algebraic subgrid scale stabilization method*, ASGS) para una ecuación escalar de difusión-reacción. Codina (Codina, 2000a) amplió esta aproximación algebraica aplicándola a sistemas escalares multidimensionales.

Las primeras formulaciones de estabilización con subescalas fueron diseñadas para resolver el problema de difusión-convección, considerando o no el término de reacción para casos estacionarios primero y, luego, para casos transitorios. Estos métodos han sido aplicados también a las ecuaciones de Stokes y las ecuaciones de Navier-Stokes, entre otras (Codina, 2000).

Posteriormente, Codina (Codina, 2000b) propuso adoptar un espacio de sub-escalas ortogonales al espacio de los elementos finitos, fundamentando así el método de estabiliza-

ción de subescalas ortogonales (*Orthogonal subscale stabilization method*, OSS). El método OSS se ha aplicado al problema de Stokes, al problema de convección-difusión-reacción y a las ecuaciones de Navier-Stokes, entre otros ((Codina, 2000a), (Principe, 2008)). La estabilización OSS ha sido reformulada en una nueva versión del método llamada estabilización *split* OSS (Codina, 2002), computacionalmente más ventajosa. Actualmente se usan en problemas muy variados, tanto de mecánica de fluidos ((Codina, 2000a), (Codina, 2000b), (Codina 2001), (Coppola-Owen and Codina, 2005), (Guash and Codina, 2007), (Badía and Codina, 2009) y (Planas et al., 2011)) como de mecánica de sólidos ((Chiumenti et al., 2002), (Cervera et al., 2003), (Cervera et al., 2004a), (Cervera et al., 2004b), (de Saracibar et al., 2006), (Cervera and Chiumenti, 2009), (Cervera et al., 2010a), (Cervera et al., 2010b), (Cervera et al., 2011), (Cervera et al., 2012) y (Chiumenti et al., 2013)).

En este trabajo se utiliza el método ASGS y el método OSS y una vez verificada la eficacia del método OSS, éste se utilizará como método de estabilización en prácticamente todos los problemas estudiados para flujo confinado. En el flujo con superficie libre 3D se ha utilizado la versión *split*-OSS.

El problema de los fluidos viscoplásticos es tratado totalmente en forma Euleriana utilizando una malla fija. En el caso de los fluidos viscoplásticos con superficie libre se usa un modelo euleriano simplificado (Coppola-Owen, 2009b) que emplea el método de superficie de nivel *level set* para tratar el movimiento de esta superficie libre.

Los modelos viscoplásticos regularizados de Papanastasiou y los modelos propuestos han sido implementados en el código de elementos finitos Zephyr. Este código ha sido desarrollado por el Prof. R. Codina y sus colaboradores en el Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería (CIMNE).

## 1.2. Motivación

La principal motivación de este trabajo de investigación es contar con una herramienta computacional validada para el modelado de fluidos viscoplásticos con fines prácticos en el ámbito de la ingeniería.

En el área de la industria, el procesamiento de muchos fluidos viscoplásticos requiere de estas herramientas computacionales que hagan posible el estudio de su comportamiento. Con este conocimiento, que facilita la toma de decisiones en el área de optimización y seguridad, pueden lograrse diseños de equipos más fiables y procesos más eficientes.

Por otro lado, en el área medioambiental, el desarrollo de programas computacionales que estudie el flujo de detritos es imprescindible. Existen muy pocas herramientas computacionales disponibles. Cuando existe la posibilidad de que un evento de este tipo ocurra, un estudio adecuado de este posible evento permitirá al especialista prevenir o mitigar desastres catastróficos. El profesional del área podrá determinar la posible área afectada y considerar la ejecución de medidas estructurales como la mejor ubicación de las estructuras de control de estos flujos y/o medidas no estructurales como medidas de alerta y evacuación. Las herramientas computacionales permitirán hacer diseños más eficientes y racionales que los disponibles actualmente para estas estructuras de control. En el caso de eventos ocurridos, si se dispone de datos del evento, puede hacerse una evaluación detallada de lo ocurrido. La modelización del evento permitirá determinar con mayor precisión sus características y responder a las interrogantes propias de la ingeniería forense.

El estudio de los flujos viscoplásticos es un área poco tratada hasta ahora, lo que ha motivado la compilación de la información existente para la realización del estado del arte. Otra de las motivaciones es el estudio sistemático de la fiabilidad de los resultados numéri-

cos. Los resultados de este trabajo de investigación se han comparado con soluciones analíticas, numéricas, resultados experimentales y datos de campo. Una última motivación es la evaluación de la dificultad práctica de la modelización de estos problemas, en términos de los recursos numéricos necesarios para una resolución fiable.

### 1.3. Objetivos

La meta principal de este trabajo de investigación es el desarrollo y la validación de una formulación numérica para la simulación de los flujos viscoplásticos en la industria y en procesos medioambientales. Para alcanzar esta meta deben formularse algunos objetivos.

#### 1.3.1. Objetivo general

El principal objetivo de este trabajo es formular y evaluar una metodología para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley mediante el método de los elementos finitos mixtos estabilizados. Se desarrolla una formulación teórica, se realiza la implementación computacional y se presentan y validan soluciones numéricas para estos fluidos viscoplásticos. En el desarrollo del modelo numérico se usan la aproximación variacional multiescala para la estabilización de los elementos finitos. La validación del modelo numérico se realiza mediante una serie de problemas *benchmark* en flujos confinados para casos industriales. En flujos con superficie libre la validación se hace en problemas de rotura de presa.

#### 1.3.2. Objetivos específicos

Los objetivos específicos para alcanzar el objetivo principal son:

- Compilación del estado del arte de los siguientes temas:
  - Estudio de la mecánica del medio continuo para fluidos incompresibles.
  - Conocimiento de las ecuaciones constitutivas que determinan el comportamiento del fluido.
  - Estudio del modelo discreto para el flujo de los fluidos incompresibles viscoplásticos usando los elementos finitos estabilizados.
  - Conocimiento de los métodos de estabilización con subescalas.
  - Selección de los mejores métodos de estabilización, modelos viscoplásticos y estrategias numéricas para el desarrollo del modelo numérico.
  - Aplicaciones industriales y medioambientales de los fluidos viscoplásticos.
- Desarrollo de la formulación del modelo continuo para flujos confinados y con superficie libre.
- Descripción del modelo reológico para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos como los fluidos viscoplásticos, entre otros.
- Proposición de nuevos modelos viscoplásticos regularizados como alternativa a los modelos regularizados usados comúnmente.

- Desarrollo del modelo discreto de elementos finitos estabilizados para el estudio de flujos confinados y flujos con superficie libre incorporando los modelos viscoplásticos.
- Descripción del modelo discreto para la superficie libre usando el método de superficie de nivel *level set*.
- Implementación computacional de los modelos viscoplásticos regularizados de Bingham y de Herschel-Bulkley propuesto por Papanastasiou y los modelos propuestos en este trabajo.
- Implementación necesaria para determinar las zonas de fluencia y no fluencia del fluido, tensiones desviadoras, magnitud de la velocidad de deformación y de las tensiones desviadoras.
- Implementación para obtener las fuerzas de arrastre para los fluidos de Bingham y de Herschel-Bulkley en el problema del flujo alrededor de un cilindro.
- Deducción de las soluciones analíticas para el fluido de Bingham y de Herschel-Bulkley en flujos paralelos. Descripción de las soluciones analíticas para el problema de rotura de presa.
- Validación del modelo numérico propuesto mediante el contraste con ensayos numéricos, experimentales, soluciones analíticas o datos de campo de los flujos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley. En muchos casos y previamente a la validación del programa para los fluidos viscoplásticos se validan para el caso Newtoniano.
- Estudio de convergencia de los métodos de estabilización ASGS y OSS.

## 1.4. Aplicaciones y alcances

### 1.4.1. Aplicaciones y alcances científicos esperados

El principal alcance científico esperado de la investigación en este trabajo es el logro de una metodología eficiente para el estudio de los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley en flujos confinados y con superficie libre.

Otros alcances científicos que se esperan son:

- Selección adecuada de los diferentes métodos, estrategias y ecuaciones constitutivas con el fin de lograr una metodología eficaz en el estudio de los fluidos viscoplásticos.
- Incorporación de los modelos de fluidos viscoplásticos en las ecuaciones de Navier-Stokes. Formulación del modelo discreto de elementos mixtos estabilizados para estos fluidos.
- Propuesta de modelos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley como alternativa a los modelos regularizados utilizados regularmente.
- Soluciones numéricas de un amplio conjunto de problemas *benchmark* que muestren el comportamiento para ambos fluidos. Estas soluciones se mostrarán para flujos confinados y con superficie libre.

### 1.4.2. Aplicaciones y alcances ingenieriles esperados

En el área de ingeniería se espera disponer de una herramienta computacional aplicable a problemas industriales y medioambientales.

En el área industrial, los alcances que se esperan son:

- Ajuste de los modelos viscoplásticos a un amplio número de materiales utilizados en la industria.
- Estudio del comportamiento de los flujos viscoplásticos de Bingham y Herschel-Bulkley en flujos confinados.
- Análisis del flujo en el proceso de extrusión, en reducciones de la cavidad y en el transporte en tuberías, entre otros.

En el área medioambiental, los alcances que se esperan son:

- Predicción de la ruta de desplazamiento de los flujos de detritos y el área de afectación. Con esta información se podría direccionar o controlar el flujo colocando estructuras adecuadas para este fin.
- Optimización del diseño de estructuras para el control de estos flujos al determinar las acciones dinámicas mucho más reales del flujo sobre estas estructuras.
- Establecimiento de políticas de prevención y mitigación, tomando en cuenta las zonas de riesgo dentro de la planificación u ordenación del territorio.
- Reconstrucción de sucesos en ingeniería forense.

## 1.5. Organización

Este trabajo de investigación está dividido en 7 capítulos. Los contenidos de cada capítulo son:

En el **Capítulo 1** se presenta la introducción, los objetivos, las motivaciones y la organización de este trabajo.

En el **Capítulo 2** se establece la formulación en forma fuerte de las ecuaciones de gobierno, se plantean las diferentes ecuaciones constitutivas en una clasificación reológica para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos, se detallan los modelos regularizados de Bingham y de Herschel-Bulkley y se proponen nuevos modelos regularizados para estos fluidos viscoplásticos. Se deducen las soluciones analíticas para el fluido de Bingham y el fluido de Herschel-Bulkley en el flujo de Couette y el de Poiseuille. Se describen las soluciones analíticas para el problema de rotura de presa.

En el **Capítulo 3** se plantea la formulación débil de las ecuaciones de Navier-Stokes y se describe el modelo discreto en los elementos finitos estabilizados. Se incorpora la ecuación constitutiva para el fluido viscoplástico de Bingham y de Herschel-Bulkley. Se describe la estabilización del problema con el método ASGS, el método OSS y el método *split*-OSS. Igualmente, para el fluido con superficie libre se describe el método del *level set* para una formulación euleriana simplificada del fluido. Se realiza un estudio de convergencia para los diferentes modelos viscoplásticos y métodos de estabilización implementados. Se comparan los modelos viscoplásticos de Papanastasiou y los modelos propuestos en este trabajo.

En el **Capítulo 4** se presentan las soluciones numéricas para el fluido de Bingham en flujos paralelos y en los problemas de flujo en una cavidad cuadrada, flujo en una expansión súbita, flujo de extrusión y flujo alrededor de un cilindro entre placas paralelas. Se compara el método de estabilización OSS con el método ASGS. Los resultados obtenidos se comparan con soluciones analíticas, numéricas y experimentales disponibles.

En el **Capítulo 5** se presentan las soluciones numéricas para el fluido de Herschel-Bulkley en flujos paralelos y en los problemas de flujo en una cavidad cuadrada, flujo en una expansión súbita, flujo alrededor de un cilindro en un medio infinito y flujo alrededor de un cilindro que se desplaza y rota sobre su propio eje. Los resultados obtenidos se comparan con soluciones analíticas, numéricas y experimentales disponibles.

En el **Capítulo 6** se muestran las soluciones numéricas para flujos con superficie libre. Se analizan el problema de flujo extruido a la superficie libre, flujos Newtonianos de agua y aceite y flujos de Bingham debido a la rotura de presa. Se estudia un evento real de falla de una presa de residuos mineros modelizado como un flujo de Bingham debido a la rotura de presa en una simulación bidimensional y tridimensional. Los resultados se comparan con soluciones numéricas, datos experimentales y datos de campo.

Finalmente, en el **Capítulo 7** se presentan las conclusiones, las aportaciones y futuras líneas de investigación.



## Capítulo 2

# Modelo continuo para el problema de flujo: ecuaciones de gobierno

### 2.1. Introducción

Los fluidos son sustancias cuya estructura molecular no ofrece resistencia a las fuerzas cortante externas. Por esto, ante la aplicación de estas fuerzas se produce el movimiento del fluido, denominado flujo. Las propiedades más importantes de cualquier fluido son la densidad y la viscosidad. En flujos confinados, las variables a determinar son principalmente las velocidades y la presión; en flujos con superficie libre, hay que determinar, además, la posición de ésta.

Los flujos pueden ser de un medio continuo o de partículas discretas. En el primer caso, se usa la forma euleriana de las ecuaciones de continuidad y de conservación de *momentum*. En el segundo caso, se describe el movimiento de cada partícula en forma lagrangeana. En esta investigación el flujo se describe en forma euleriana.

El modelo continuo que determina el comportamiento dinámico de los flujos incompresibles y, en particular, de los fluidos viscoplásticos, se describe en este capítulo.

Inicialmente, se presentan las ecuaciones de Navier-Stokes para un fluido incompresible y para un fluido con superficie libre con el fin de tratar los problemas de flujos confinados y flujos de detritos. Se adopta el método del *level set* con el propósito de seguir la evolución de la superficie libre en éstos últimos.

Además, se hace una descripción de las diferentes reologías o ecuaciones constitutivas para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos. Se detallan los modelos ideales y regularizados para los fluidos viscoplásticos de Bingham y el fluido de Herschel-Bulkley.

Finalmente, se presentan flujos simples con soluciones analíticas para la posterior validación de las soluciones numéricas.

Una vez descritas en este capítulo las ecuaciones para el modelo continuo en forma fuerte, en el siguiente capítulo se presentarán en forma débil para su posterior discretización por el método de los elementos finitos (FEM).

## 2.2. Ecuaciones fundamentales de la mecánica de fluidos

El comportamiento dinámico e isotérmico de los flujos incompresibles, incluyendo los flujos con superficie libre, debe satisfacer las siguientes ecuaciones fundamentales de la mecánica de los fluidos:

- 1.- La ecuación de conservación de la masa o ecuación de continuidad.
- 2.- La ecuación de conservación de *momentum* por medio de la segunda ley de Newton. Esta ecuación está relacionada con el balance entre las fuerzas externas y las fuerzas internas que actúan en el fluido.
- 3.- La ecuación constitutiva que describe la relación entre las tensiones y la velocidad de deformación en el fluido (modelo reológico).

El modelo continuo puede estar conformado por una fase única o más de una fase. Si se considera un modelo de varias fases se requiere una ecuación constitutiva para cada una de las fases.

### 2.2.1. Ecuación de continuidad

La ecuación de continuidad representa la conservación de la masa. Se obtiene haciendo el balance de la cantidad de masa que entra y la masa que sale en un volumen dado, e implica la conservación de la densidad. En forma euleriana, ésta se expresa como:

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} \quad (2.1)$$

donde  $\rho$  es la densidad de la masa,  $u_i$  es la velocidad del fluido, expresada en función de sus componentes  $i = 1, 2, 3$  en un sistema de coordenadas cartesiano.

Para un flujo incompresible a temperatura constante, la densidad no varía con el tiempo. La ecuación (2.1) se reduce a:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0 \quad (2.2)$$

Ésta ecuación puede escribirse en forma compacta como:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.3)$$

donde  $\nabla(\cdot)$  es el operador divergencia y  $\mathbf{u}$  es el vector velocidad.

### 2.2.2. Ecuación de conservación de *momentum*

La ecuación de conservación de *momentum* se deduce de la segunda Ley de Newton, el Lema de Reynolds y el Teorema de la divergencia. Se puede expresar como:

$$\rho \frac{\partial u_j}{\partial t} + \rho \frac{\partial}{\partial x_i} (u_i u_j) = \rho f_j + \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.4)$$

donde  $u_i, u_j$  son las componentes de la velocidad en la dirección respectiva del eje de coordenadas cartesianas, siendo  $i, j = 1, 2, 3$ ,  $f_j$  son las componentes de la fuerza de volumen,  $\sigma_{ij}$  son las componentes del tensor de tensiones, donde el primer subíndice indica que la componente de la tensión actúa en el plano  $x_i$  y el segundo subíndice indica que está dirigido en la dirección  $x_j$ .

La ecuación (2.4) puede escribirse en forma compacta como:

$$\rho [\partial_i \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (2.5)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector velocidad,  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones y  $\mathbf{f}$  es el vector de las fuerzas externas, que incluyen las fuerzas gravitacionales ( $\rho \mathbf{g}$ ).

### 2.2.3. Ecuación constitutiva

La ecuación constitutiva relaciona las tensiones con la presión y la velocidad de deformación. En el caso de los fluidos, esta relación se denomina también modelo reológico.

El tensor de tensiones  $\boldsymbol{\sigma}$  se descompone en su parte volumétrica y desviadora como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (2.6)$$

donde  $p$  es la presión,  $\mathbf{I}$  es el tensor de identidad de segundo orden y  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de las tensiones desviadoras.

Para un fluido Newtoniano y usando la hipótesis de Stokes, el tensor desviador de tensiones se expresa como:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) + \frac{2}{3}\mu (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \quad (2.7)$$

donde  $\mathbf{u}$  es el vector de velocidades,  $\mu$  es la viscosidad dinámica (constante en caso de fluido Newtoniano),  $\mathbf{I}$  es el tensor de identidad y  $\boldsymbol{\varepsilon}(\cdot)$  es el gradiente simétrico de la velocidad:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u}^t) = \nabla^s \mathbf{u} \quad (2.8)$$

donde  $\nabla \mathbf{u}$  es el gradiente de la velocidad y  $(\nabla \mathbf{u}^t)$  es la transpuesta del mismo. Desarrollando se tiene, en términos de las componentes de la velocidad, el siguiente tensor:

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (2.9)$$

El valor de la magnitud del tensor de la velocidad de deformación,  $\dot{\gamma}$ , se toma como la raíz del segundo invariante del tensor simétrico es:

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) : \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})} \quad (2.10)$$

Utilizando la condición de incompresibilidad dada en la ecuación (2.3), el segundo término del lado derecho de la ecuación (2.7) se anula. Por lo tanto, se puede escribir el tensor desviador como:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.11)$$

La magnitud del tensor desviador o tensión efectiva,  $\tau$ , se toma como la raíz del segundo invariante del tensor de las tensiones desviadoras:

$$\tau = \sqrt{\frac{1}{2} J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} (\boldsymbol{\tau} : \boldsymbol{\tau})} \quad (2.12)$$

De acuerdo a lo anterior, la ecuación (2.6) se puede escribir como:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.13)$$

En la sección 2.4 se presentan diferentes modelos reológicos para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos. Se detallan allí los modelos para fluidos viscoplásticos, objeto de estudio en este trabajo de investigación.

### 2.3. El problema continuo. Ecuaciones de Navier-Stokes

El problema continuo de dinámica de fluidos puede resolverse completamente considerando:

- Las ecuaciones de gobierno descritas anteriormente.
- Las condiciones iniciales.
- Las condiciones de contorno.

En el caso de densidades dependientes de la temperatura deben considerarse además la ecuación de conservación de la energía y la ecuación de estado. Esta ecuación de estado puede ser de la forma  $\rho = \rho(p, T)$ , donde  $p$  es la presión y  $T$  es la temperatura.

En este trabajo no se considera la ecuación de la energía, debido a que se estudiarán sólo casos isotérmicos y flujo incompresible; en consecuencia, la densidad se supone constante.

Las ecuaciones de gobierno y la ecuación constitutiva describen el movimiento de un fluido en un medio continuo y se conocen como las ecuaciones de Navier-Stokes (Tanner, 1992). La formulación original fue propuesta por el ingeniero francés Claude Louis Marie Henry Navier (1785-1836) en 1822, aunque partiendo de una ley de interacción entre partículas, inconsistente desde el punto de vista teórico. En 1845, el físico inglés George Gabriel Stokes (1819-1903) derivó correctamente las mismas ecuaciones por medio de una aproximación basada en la teoría del continuo.

Las ecuaciones de Navier-Stokes, junto con las condiciones iniciales y las condiciones de contornos definen completamente el problema continuo para un fluido Newtoniano incompresible. Son un conjunto de ecuaciones en derivadas parciales no lineales. No existe una solución general para este conjunto de ecuaciones y en muchos casos es necesario el análisis numérico para obtener una solución aproximada.

#### 2.3.1. El problema continuo para un flujo confinado

El problema continuo consiste en resolver las ecuaciones de Navier-Stokes para encontrar una velocidad  $\mathbf{u}$  y una presión  $p$  tales que se cumpla la ecuación de balance de *momentum* (2.5), usando una descripción euleriana para un fluido incompresible moviéndose en un dominio  $\Omega$  acotado con el contorno  $\Gamma = \partial\Omega$  durante un intervalo de tiempo  $[0, T]$ :

$$\rho[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (2.14)$$

donde  $\mathbf{f}$  es el vector de las fuerzas externas, cumpliendo la condición de incompresibilidad del fluido:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.15)$$

en  $\Omega$ ,  $t \in [0, T]$ .

Sustituyendo las ecuaciones (2.6) y (2.11), la ecuación (2.14) se puede escribir:

$$\rho[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \nabla \cdot [2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})] + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.16)$$

A la ecuación (2.16) se le suele llamar la forma de la divergencia. Usando la ecuación (2.8), y para viscosidad  $\mu = cte$ , se tiene:

$$\rho[\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] - \mu \Delta \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f} \quad (2.17)$$

Esta ecuación, donde aparece el Laplaciano de la velocidad,  $\Delta \mathbf{u}$ , es llamada la forma Laplaciana.

A las ecuaciones anteriores deben añadirse condiciones iniciales de la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  en  $\Omega$ ,  $t_0 = 0$  y condiciones de contorno:

Considérese que el contorno del dominio,  $\Gamma = \partial\Omega$ , puede ser dividido en el contorno con condiciones de Dirichlet (velocidad),  $\Gamma_d = \partial\Omega_d$ , el contorno con condiciones de Neumann (tracciones),  $\Gamma_n = \partial\Omega_n$ , y el contorno con condiciones mixtas,  $\Gamma_m = \partial\Omega_m$ , de forma que  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n \cup \Gamma_m$ ,  $[0, T]$  es el intervalo de tiempo de análisis, véase la Figura 2.1.

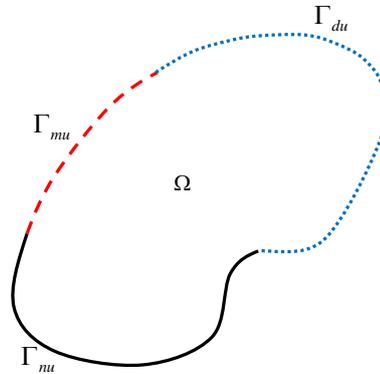


Figura 2.1. Condiciones de contorno para un volumen de fluido.

Estas condiciones se pueden escribir como:

Condiciones de Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_d \times [0, T] \quad (2.18)$$

Condiciones de Neumann:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \text{ en } \Gamma_n \times [0, T] \quad (2.19)$$

Condiciones mixtas:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_1 &= t_1 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_2 &= t_2 \text{ en } \Gamma_m \times [0, T] \end{aligned} \quad (2.20)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al contorno  $\partial\Omega$  y los vectores  $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  (para el caso 3D) son base del espacio tangente a  $\Gamma_m$ . Por simplicidad se tomará en el contorno  $\Gamma_d$  la velocidad  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ,  $t \in [0, T]$ . El vector tracción se define como  $\mathbf{t} = [t_1, t_2]$ , donde  $t_1$  y  $t_2$  son las componentes de la tracción sobre el contorno con condiciones mixtas.

Las condiciones mixtas son apropiadas cuando se requiere, por ejemplo, una ley de pared en el fondo de un canal.

### 2.3.1.1. Ecuación para la ley pared

La velocidad del flujo sobre el fondo de un canal depende de la interacción entre el flujo y la pared. Mientras mayor sea la rugosidad del fondo del canal, más disminuye la velocidad del flujo y aumentan las tracciones en el mismo.

Esta condición puede representarse mediante una condición de contorno mixta llamada ley de pared, en la forma:

$$\mathbf{t} = \rho \frac{U_*^2}{|\mathbf{u}|} \mathbf{u} \quad (2.21)$$

donde  $\rho$  es la densidad y  $U_*$  es la solución de la ecuación no lineal

$$\frac{|\mathbf{u}|}{U_*} = \frac{1}{k} \log \left( \frac{U_* \delta}{\nu} \right) + C \quad (2.22)$$

con  $k = 0.41$  (constante de von Kármán),  $C = 5.5$ ,  $\delta$  es la distancia desde el fondo del canal o pared en el cual se evalúa la velocidad y  $\nu$  es la viscosidad cinemática (Chhabra and Richardson, 2008), definida como la relación entre la viscosidad dinámica,  $\mu$ , y la densidad,

$$\rho \left( \nu = \frac{\mu}{\rho} \right).$$

### 2.3.1.2. Líneas de Corriente en un flujo

Las líneas de corriente son curvas tangentes en cada punto al campo de velocidades. En un flujo estacionario, las líneas de corriente no varían con el tiempo, mientras que en flujo transitorio sí lo hacen.

Las líneas de corriente para un flujo bidimensional con un campo de velocidades  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$  coinciden con las líneas de nivel de la función  $\varphi$ , solución de la ecuación laplaciana:

$$\nabla^2 \varphi(x, y) = \frac{\partial u_x}{\partial x} - \frac{\partial u_y}{\partial y} \quad (2.23)$$

con la condición de contorno  $\varphi = 0$ .

En las soluciones numéricas presentadas en este trabajo, se determinan las líneas de corriente con el fin de visualizar el movimiento del flujo.

### 2.3.2. El problema continuo para un flujo con superficie libre

Los flujos con superficie libre son un caso particular de los flujos de dos fluidos inmiscibles. La superficie libre o interfase ( $\Gamma_{\text{int}}$ ) del fluido de interés está en contacto con el aire, un fluido con densidad y viscosidad mucho menores que la del fluido transportado. La superficie libre se encuentra en movimiento. Estos flujos se presentan con mucha frecuencia en procesos industriales y también en procesos medioambientales. El problema continuo correspondiente puede resolverse usando las ecuaciones de Navier-Stokes.

Básicamente, se usan dos métodos en una descripción totalmente euleriana:

1.- Se resuelve el problema considerando el fluido que se transporta (fluido 1) y el aire (fluido 2) como un problema de dos fluidos inmiscibles. Se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para todo el dominio ( $\Omega$ ), tanto en el dominio del fluido 1 ( $\Omega_1$ ), como en el dominio del fluido 2 ( $\Omega_2$ ), véase la Figura 2.2. En cada punto del dominio se toman las propiedades  $\rho$  y  $\mu$  del fluido correspondiente. Se calculan las tracciones en la línea de interfase.

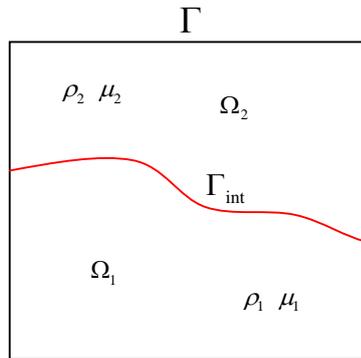


Figura 2.2. Condiciones de contorno para un volumen de fluido dividido por la interfase en el método (1).

2.- Se desprecia el efecto del aire (fluido 2) sobre el fluido de interés (fluido 1), lo que simplifica el problema al desacoplar los dos dominios (Coppola-Owen, 2009b). Entonces:

a) Se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio del fluido 1 ( $\Omega_1$ ), con las propiedades  $\mu = \mu_1$  y  $\rho = \rho_1$ . La condición de contorno natural en la superficie libre ( $\Gamma_{\text{int}}$ ) es tracción nula ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} = 0$ ) en forma débil, véase la Figura 2.3 a).

b) Se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes en el dominio del fluido 2 ( $\Omega_2$ ), con las propiedades  $\mu = \mu_2$  y  $\rho = \rho_2$ . La superficie libre se considera un contorno ( $\Gamma_{\text{int}}$ ) con condiciones de velocidad impuesta ( $\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}}$ ) obtenida de la solución del fluido 1, véase la Figura 2.3 b).

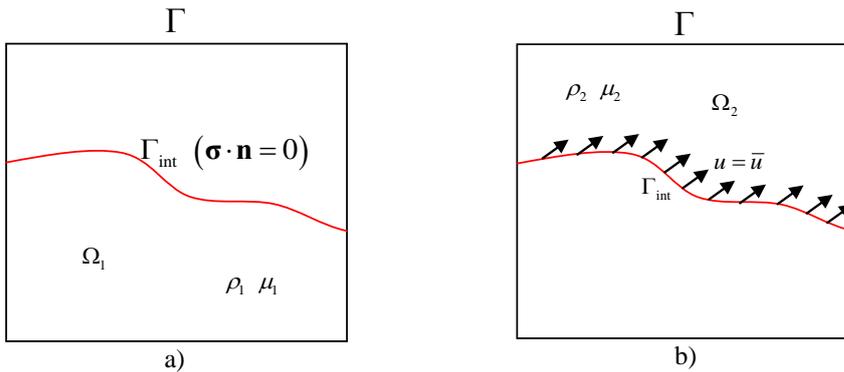


Figura 2.3. Condiciones de contorno para un volumen de fluido dividido por la interfase en el método simplificado (2).

En ambos métodos se conoce la posición inicial de la superficie libre en un tiempo  $t = 0$ , y por tanto, las propiedades del fluido en cada dominio. Luego, el movimiento de la superficie libre y su ubicación se resuelven a partir de las velocidades determinadas en todo el dominio para cualquier instante de tiempo  $t$ ; las propiedades  $\mu_{1,2}$  y  $\rho_{1,2}$  deben ser asignadas a los nuevos dominios  $\Omega_1$  y  $\Omega_2$ . Para determinar esta posición y asignar estas propiedades existen diferentes métodos. Uno de los métodos más conocidos y utilizados para realizar ambas tareas es el método del *level set*.

En este trabajo se adopta el modelo euleriano simplificado junto al método de superficie libre *level set* para resolver el problema del fluido con superficie libre. Este procedimiento posee las siguientes ventajas:

- La solución desacoplada es más eficiente, puesto que cada fluido se resuelve independientemente.
- No hay discontinuidad de la presión en la interfase y, por tanto, no es necesario adoptar procedimientos específicos como funciones de forma especiales.
- La superficie libre se impone como un contorno ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} = 0$ ) en la región del fluido de interés.
- La condición de incompresibilidad puede relajarse en uno de los dominios si éste no es incompresible (por ejemplo, el aire).

### 2.3.2.1. El método de superficie de nivel o *level set*

El método de superficie de nivel (*level set*) usa una función continua del mismo nombre definida sobre todo el dominio ( $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$ ) para determinar los subdominios ocupados por el fluido transportado ( $\Omega_1$ ) y por el aire ( $\Omega_2$ ).

El método consiste en propagar la interfase,  $\Gamma_{\text{int}}(t)$ , fijada por el nivel cero de la función continua  $\psi$ . Esta función puede definirse como una función distancia con signo, es

decir,  $\psi(\mathbf{x}, t) = \pm d$ , donde  $d$  es la distancia perpendicular desde  $\mathbf{x}$  hasta  $\Gamma_{\text{int}}(t=0)$ . Se toma el valor positivo para el fluido y el negativo para el aire.

La evolución de esta función está dada por la ecuación de transporte:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (2.24)$$

Esta ecuación (2.24) es hiperbólica; por tanto, las condiciones de contorno deben especificarse en el contorno de entrada del flujo (*inflow boundary*)  $\Gamma_{\text{int}} := \{x \in \partial\Omega \mid \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} = 0\}$ :

$$\psi = \bar{\psi} \text{ en } \Gamma_{\text{int}} \quad [0, T] \quad (2.25)$$

Esta condición de contorno determina qué fluido entra en cada instante a través de cada parte del contorno de entrada de flujo.

La condición inicial:

$$\psi(\mathbf{x}, 0) = \psi_0(\mathbf{x}) \text{ en } \Omega \quad (2.26)$$

se elige con el propósito de definir la posición inicial de la interfase.

La solución de los problemas de superficie libre se hace en dos pasos, uno en el que se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes para una posición fija de la superficie libre y otro posterior, en el que se resuelve la ecuación (2.24) para el transporte de la superficie libre.

Una vez que se determina la función  $\psi$  (posición de la superficie libre) y se conoce el dominio de cada fluido, se asignan las propiedades mecánicas por medio de la ecuación:

$$\zeta = \zeta_1 + (\zeta_2 - \zeta_1)H(\psi) \quad (2.27)$$

donde  $\zeta$  puede ser la viscosidad  $\mu$  o la densidad  $\rho$ , los subíndices 1 y 2 se refieren a los subdominios correspondientes y  $H(\psi)$  es la función “*Heaviside*”, tal que:

$$H(\psi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \psi \leq 0 \text{ para el aire} \\ 1 & \text{si } \psi > 0 \text{ para el fluido transportado} \end{cases} \quad (2.28)$$

## 2.4. Reología de los fluidos Newtonianos y no-Newtonianos. Ecuaciones constitutivas

Para los flujos reales, la relación entre las tensiones desviadoras y el tensor velocidad de deformación determina el comportamiento del fluido. A ésta relación se le llama modelo constitutivo o modelo reológico. Si esta relación es lineal o no lineal el fluido es Newtoniano o no Newtoniano.

El término reología fue inventado por Eugene C. Bingham y sus colegas del Colegio Lafayette (Easton, PA, USA) en 1929 (Bingham, 1922). Proviene de la raíz griega “*rheo*”, que significa flujo. Evidentemente, el estudio de la reología comenzó mucho antes, en los años 1870 y 1880, a raíz de los estudios en sólidos y en fluidos sobre la teoría de la plasticidad. Bingham definió la reología como la ciencia que estudia la deformación y el flujo de los materiales. Los principales conceptos teóricos están basados en la cinemática, que trata los aspectos geométricos de la deformación y el flujo, las leyes de la conservación, que tratan de las fuerzas, las tensiones e intercambio de energía y las relaciones constitutivas propiamente dichas (Tanner, 2000).

### 2.4.1. Fluidos Newtonianos

En los fluidos Newtonianos, la tensión de corte y la velocidad de deformación están linealmente relacionados por la ley de Newton de la viscosidad. La viscosidad  $\mu$  puede variar por la presión o la temperatura pero no con el tiempo o la velocidad de deformación. Ejemplos de fluidos Newtonianos son el agua, la glicerina, las soluciones acuosas, entre otras.

En un flujo paralelo con velocidad  $u = u_x(y)$  (Figura 2.4), la ley de Newton de la viscosidad se expresa de la siguiente manera:

$$\tau_{yx} = \mu_o \dot{\gamma}_{yx} = \mu_o \frac{du_x}{dy} \quad (2.29)$$

donde  $\tau_{yx}$  es la tensión en la dirección  $x$  (en la dirección del flujo), sobre la superficie perpendicular al eje  $y$ ,  $\dot{\gamma}_{yx}$  es la velocidad de deformación (desviadora) en la dirección del desplazamiento y  $\mu_o$  es la viscosidad dinámica.

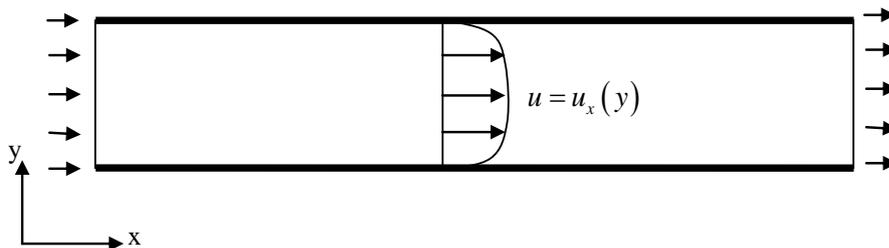


Figura 2.4. Flujo paralelo.

Éste es el caso de flujo más simple, dado que el vector velocidad tiene una sola componente y existe una única componente de la velocidad de deformación. En el caso más general, la ley lineal relaciona la velocidad de deformación con el tensor de las tensiones desviadoras, en la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mu_0 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.30)$$

Cuando no se mantiene la relación lineal entre las tensiones desviadoras y la velocidad de deformaciones, el fluido es no-Newtoniano.

#### 2.4.2. Fluidos no-Newtonianos

Algunos líquidos se comportan de formas diversas y complejas, que no queda descrita apropiadamente por la ley lineal de Newton. Se les denomina fluidos no-Newtonianos. Algunos de los efectos no-Newtonianos observados son:

- Viscosidad dependiente de la velocidad de deformación, disminución o aumento de la viscosidad dependiendo de la tasa de corte.
- Existencia de una tensión de fluencia, a partir de la cual el fluido comienza moverse. Por debajo de esta tensión de fluencia la velocidad de deformación es nula.
- Efectos de las tensiones normales en flujos estacionarios. Uno de ellos es el efecto “Weissenberg” (Weissenberg, 1949), según el cual al aplicarse una velocidad de rotación constante, el fluido se desplaza en la dirección perpendicular al plano de rotación.
- Existencia de fluidos con “memoria” de su historia de deformación. Estos materiales una vez deformados, pueden volver a su forma original, parcial o totalmente, demostrando una combinación de efectos elásticos y viscosos.
- Variación de la viscosidad con la presión. La viscosidad de los líquidos aumenta exponencialmente con la presión. En el caso de los lubricantes a alta presión y los polímeros, esta dependencia ha de tenerse en cuenta.

Existen una gran variedad de fluidos no-Newtonianos, mucho de ellos de interés en la industria química, en la industria alimenticia y en la del petróleo. Ejemplos de fluidos no-Newtonianos son las soluciones de polímeros, suspensiones coloidales, pulpa de papel en agua, la sangre humana, entre otros.

En estos fluidos la tensión de corte no es directamente proporcional a la velocidad de deformación. Esta relación no es lineal o, si lo es, no pasa por el origen. Esto se debe a que en estos fluidos, al deformarse, se producen cambios estructurales internos, muchas veces dependientes del tiempo. Cuando estos cambios estructurales se producen en una escala de tiempo mucho más grande que la respuesta viscoelástica, se pueden ignorar. De acuerdo a esta consideración, muchos materiales pueden ser modelados como fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo.

Los fluidos no-Newtonianos pueden clasificarse en tres grupos:

- Fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo, cuyo modelo reológico es:

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (2.31)$$

- Fluidos no-Newtonianos dependientes del tiempo, cuyo modelo reológico es:

$$\tau = f(\dot{\gamma}, t, \text{historia}) \quad (2.32)$$

donde  $t$  es el tiempo. La *historia* se refiere a la memoria de la secuencia de tensiones aplicadas.

- Fluidos no-Newtonianos viscoelásticos, en los cuales la energía de deformación es parcialmente recuperable, de manera similar a los sólidos elásticos.

Los modelos constitutivos para fluidos no-Newtonianos se presentan en la Tabla 2.1.

### 2.4.3. Fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo

El comportamiento de los fluidos independientes del tiempo depende sólo de la velocidad de deformación, por lo que la tensión puede expresarse como:

$$\tau = f(\dot{\gamma}) \quad (2.33)$$

Algunos de estos fluidos requieren de una tensión de corte mínima para comenzar a moverse o deformarse. A esta tensión mínima se le llama *tensión de fluencia*. A partir de esta consideración, los fluidos no-Newtonianos independientes del tiempo pueden subdividirse en fluidos no-Newtonianos sin tensión de fluencia y con tensión de fluencia.

### 2.4.4. Fluidos no-Newtonianos sin tensión de fluencia

Existen fluidos que no presentan una tensión de fluencia para fluir. Para caracterizar este tipo de fluidos, se usa una relación empírica conocida como *ley potencial*. Esta relación fue originalmente propuesta por Waele (De Waele, 1923) y Ostwald (Ostwald, 1925) y se escribe:

$$\tau = k\dot{\gamma}^n \quad (2.34)$$

donde  $k$  y  $n$  son constantes para un fluido particular. El valor de  $k$  es una medida de la consistencia del fluido; mientras más alto es el valor de  $k$ , el fluido es más “viscoso”. El valor de  $n$  es la medida del grado de comportamiento no-Newtoniano; mientras el valor de  $n$  sea más alejado de la unidad, más pronunciadas serán las propiedades no-Newtonianas del fluido.

Dependiendo del valor de  $n$ , estos fluidos se clasifican en:

- Pseudoplásticos (*shear-thinning*),  $n < 1$ .
- Dilatantes (*shear-thickening*),  $n > 1$ .

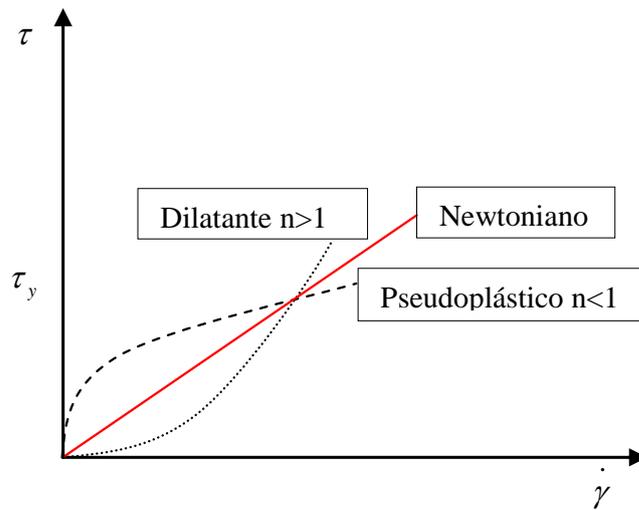


Figura 2.5. Curvas reológicas para fluidos independientes del tiempo sin tensión de fluencia y ley potencial.

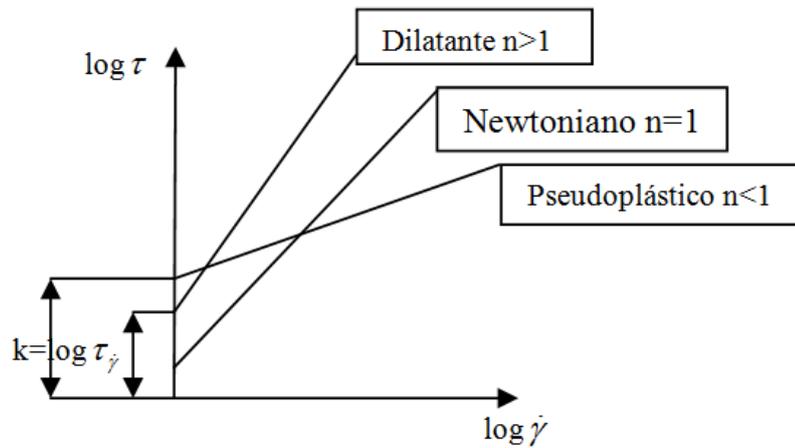


Figura 2.6. Representación logarítmica de la ley potencial.

<b>Newtoniano</b>			
$\boldsymbol{\tau} = 2\mu\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \mu = \mu_0$			
<b>No-Newtoniano</b>			
<b>Independientes del tiempo</b>			
<b>Sin tensión de fluencia</b>		<b>Con tensión de fluencia</b>	
		<b>Plásticos</b>	
		Rígido-plástico	$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_y$
		Bingham ideal	$\boldsymbol{\tau} = 2\left(\mu_0 + \frac{\boldsymbol{\tau}_y}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$
		<b>Viscoplásticos</b>	
		Bilineal (Doble viscosidad)	$\boldsymbol{\tau} = 2\mu_c\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\tau} \leq \boldsymbol{\tau}_y$ $\boldsymbol{\tau} = 2\mu_o\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), \boldsymbol{\tau} > \boldsymbol{\tau}_y$
		Bingham-Papanastasiou	$\boldsymbol{\tau} = 2\left(\mu_o + \frac{\boldsymbol{\tau}_y}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(1 - \exp(-m\dot{\boldsymbol{\gamma}}))\right)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$
		Herschel-Bulkley-Papanastasiou	$\boldsymbol{\tau} = 2\left(\mu_o \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_y}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}(1 - \exp(-m\dot{\boldsymbol{\gamma}}))\right)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$
<b>Pseudoplásticos</b>		<b>Pseudoplásticos</b>	
Ley potencial	$\boldsymbol{\tau} = k\dot{\boldsymbol{\gamma}}^n \quad n < 1$	Herschel-Bulkley ideal	$\boldsymbol{\tau} = 2\left(\mu_o \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_y}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), n < 1$
Prandtl	$\boldsymbol{\tau} = A \sin^{-1}\left(\frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{C}\right)$	Casson	$\boldsymbol{\tau} = \left(\sqrt{\mu_o} + \sqrt{\frac{\boldsymbol{\tau}_y}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}}\right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u})$
Eyring	$\boldsymbol{\tau} = \frac{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}{B} + C \sin\left(\frac{\boldsymbol{\tau}}{A}\right)$		
Powell-Eyring	$\boldsymbol{\tau} = A\dot{\boldsymbol{\gamma}} + B \sinh^{-1}(C\dot{\boldsymbol{\gamma}})$		
Ellis	$\boldsymbol{\tau} = \frac{\mu_o}{1 + \left(\frac{ \boldsymbol{\tau} }{\boldsymbol{\tau}_{1/2}}\right)^{\alpha-1}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}$		
Yasuda	$\boldsymbol{\tau} = \mu_o \left[1 + (\dot{\boldsymbol{\gamma}})^2\right]^{\frac{(n-1)}{2}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}$		
Carreau	$\boldsymbol{\tau} = \mu_o \left[1 + (\dot{\boldsymbol{\gamma}})^{1.3}\right]^{\frac{(n-1)}{1.3}} \dot{\boldsymbol{\gamma}}$		
<b>Dilatantes</b>		<b>Dilatantes</b>	
Ley potencial	$\boldsymbol{\tau} = k\dot{\boldsymbol{\gamma}}^n \quad n > 1$	Herschel-Bulkley ideal	$\boldsymbol{\tau} = 2\left(\mu_o \dot{\boldsymbol{\gamma}}^{n-1} + \frac{\boldsymbol{\tau}_y}{\dot{\boldsymbol{\gamma}}}\right)\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}), n > 1$
<b>Dependientes del tiempo: tixotrópicos o reopéticos</b>			
<b>Viscoelásticos: Maxwell, Oldroyd-B</b>			

Tabla 2.1. Modelos reológicos Newtonianos y no-Newtonianos.

La diferencia entre ambos fluidos puede verse gráficamente en la Figura 2.5.

La relación en la ley potencial es asintóticamente lineal para altas velocidades de deformación. La pendiente asintótica es conocida como la viscosidad a corte infinito. Si se dibuja esta relación en escala logarítmica, se tiene que la relación es aproximadamente lineal para ambos fluidos, Figura 2.6.

En los fluidos no-Newtonianos, se define la viscosidad aparente o, simplemente viscosidad, como el cociente:

$$\mu_a(\dot{\gamma}) = \mu(\dot{\gamma}) = \frac{\tau}{\dot{\gamma}} = \frac{k\dot{\gamma}^n}{\dot{\gamma}} = k\dot{\gamma}^{n-1} \quad (2.35)$$

#### 2.4.4.1. Fluidos pseudoplásticos (*shear-thinning fluids*)

Para fluidos pseudoplásticos el valor de  $n$  es menor a la unidad ( $n < 1$ ) y la viscosidad disminuye cuando la velocidad de deformación aumenta, (Figura 2.5). A escala logarítmica, la relación tensión-velocidad de deformación es asintóticamente lineal, con una pendiente entre 0 y 1, véase la Figura 2.6. La explicación a este fenómeno es que con el aumento de la velocidad de deformación, las moléculas (o estructura interna del fluido) se alinean progresivamente. Este comportamiento es característico de algunos polímeros, soluciones de polímeros y algunas suspensiones.

Otras ecuaciones empíricas para describir comportamientos pseudoplásticos son:

Prandtl (1905):

$$\tau = A \sin^{-1} \left( \frac{\dot{\gamma}}{C} \right) \quad (2.36)$$

Eyring (1936):

$$\tau = \frac{\dot{\gamma}}{B} + C \sin \left( \frac{\tau}{A} \right) \quad (2.37)$$

Powell-Eyring (1944):

$$\tau = A\dot{\gamma} + B \sinh^{-1} (C\dot{\gamma}) \quad (2.38)$$

Ellis (1965):

$$\tau = \frac{\mu_0}{1 + \left( \frac{|\tau|}{\tau_{1/2}} \right)^{\alpha-1}} \dot{\gamma} \quad (2.39)$$

Carreau-Yasuda (1979):

$$\tau = \mu_0 \left[ 1 + (\dot{\gamma})^{1.3} \right]^{\frac{(n-1)}{1.3}} \dot{\gamma} \quad (2.40)$$

En estas ecuaciones  $A, B, C, \mu_0, m, n$ , son constantes características de cada fluido,  $a \sim 1.3$ ,  $\alpha > 1$ ,  $\tau_{1/2}$  es la magnitud de la tensión  $\tau$  cuando la viscosidad es la mitad de la viscosidad a cero cizallamiento (*zero shear viscosity*). Es difícil encontrar una conexión entre la estructura y los valores para la mayoría de estas constantes empíricas (Tanner, 2000).

Estas ecuaciones constitutivas son considerablemente más difíciles de utilizar que la ley potencial en derivaciones analíticas, pero se usan a menudo en aproximaciones numéricas.

#### 2.4.4.2. Fluidos dilatantes (*shear-thickening fluids*)

Los fluidos dilatantes son sistemas dispersos altamente concentrados en los que la viscosidad se incrementa a medida que se incrementa la velocidad de deformación. De ahí proviene la utilización del término “dilatante”. Por eso, su comportamiento se representa por medio de la ley potencial  $n > 1$  (Figura 2.5 y Figura 2.6). Ejemplos de ellos son la goma arábica, la manteca, las arenas movedizas y las suspensiones de almidón. En los procesos industriales los fluidos dilatantes son menos comunes que los pseudoplásticos.

La dilatancia fue descubierta por Osborne Reynolds (Reynolds, 1985), referida a la expansión de un volumen debido a la deformación de corte. En la teoría del medio granular, la dilatancia está relacionada con suspensiones concentradas de sólidos. Reynolds sugirió que para bajas velocidades de deformación la porosidad disminuye y las partículas están más unidas; a altas velocidades de deformación, este empaquetamiento de partículas se rompe, la porosidad aumenta y el material se expande.

#### 2.4.5. Fluidos no-newtonianos con tensión de fluencia

Algunos fluidos muestran una tensión de fluencia,  $\tau_y$ , por debajo de la cual no hay velocidad de deformación y el comportamiento es similar a un sólido.

Algunos autores como Barnes y Walter (Barnes and Walters, 1985) dudan en gran medida que exista este valor de fluencia en materiales blandos; en lugar de esto, creen que el fluido tiene viscosidad variable muy alta para velocidades de deformación muy bajas. Barnes (Barnes, 1992) sólo ha llegado a admitir que pudiera existir una tensión de fluencia en ciertas suspensiones concentradas.

A pesar de estas discrepancias entre autores, existen muchos modelos que consideran la existencia de una tensión de fluencia aparente.

El modelo más sencillo para estos fluidos es el modelo rígido-plástico. En este modelo, el material se comporta como un sólido rígido para valores menores a los valores de tensión de fluencia, mientras que para valores de tensión mayores a la tensión de fluencia se comporta como un plástico perfecto, la viscosidad es nula y las tensiones permanecen constantes para cualquier valor de velocidad de deformación, como puede verse en la Figura 2.7. Este comportamiento puede expresarse como:

$$\begin{aligned} \tau > \tau_y, & \text{ el fluido está en movimiento} \\ \tau \leq \tau_y, & \text{ el fluido está en reposo} \end{aligned} \tag{2.41}$$

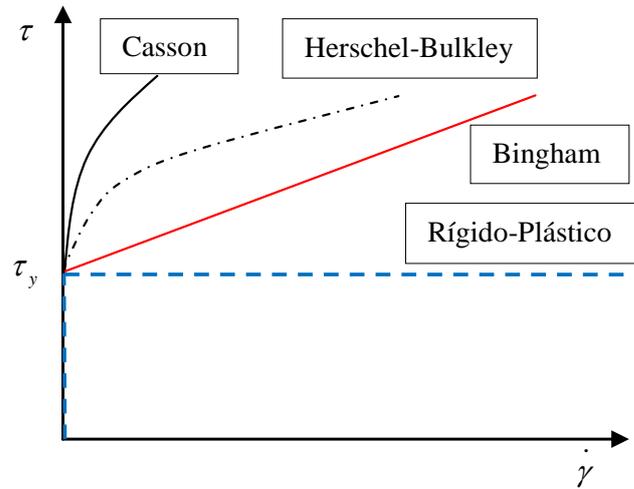


Figura 2.7. Curvas reológicas para diferentes fluidos viscoplásticos independientes del tiempo y con tensión de fluencia.

Otros modelos reológicos muy conocidos y usados para fluidos con tensión de fluencia son el modelo ideal de Bingham (Bingham, 1922), el modelo ideal de Herschel-Bulkley (Herschel and Bulkley, 1926) y el modelo de Casson (Casson, 1959), véase la Figura 2.7.

#### 2.4.5.1. Modelo ideal de Bingham

Eugene C. Bingham describió a las pinturas con este modelo en 1919, publicado en su libro “*Fluidity and Plasticity*” (Bingham, 1922). El modelo fue analizado por Oldroyd (Oldroyd, 1947), Reiner (Reiner, 1958) y Prager (Prager, 1961). Las pinturas, las lechadas, la pasta dental, los lodos, algunos fluidos de perforación y sustancias alimenticias como la margarina, la mayonesa y el ketchup son buenos ejemplos de los plásticos de Bingham (Papanastasiou, 1987).

Los plásticos de Bingham requieren de una tensión de corte mínima,  $\tau_y$ , a partir de la cual comienzan a moverse (Figura 2.7).

En el modelo de Bingham la viscosidad está dada por:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{para } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} = 0 & \text{para } \tau \leq \tau_y \end{cases} \quad (2.42)$$

donde  $\mu_0$  es la viscosidad plástica y la viscosidad aparente  $\mu(\dot{\gamma})$ , disminuye con el incremento en la magnitud de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$ ;  $\tau$  es la magnitud del tensor de tensiones desviadoras.

En consecuencia, el tensor de tensiones desviadoras es:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left( \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad \text{para } \tau > \tau_y$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{para } \tau \leq \tau_y \quad (2.43)$$

Para definir si una partícula del fluido se mueve o no, es decir, si está en fluencia o no, se comprueba si la magnitud del tensor de tensiones desviadoras,  $\tau$ , excede o no el valor de la tensión de fluencia,  $\tau_y$ . Cuando la magnitud del tensor de tensiones del fluido,  $\tau$ , supera la tensión de fluencia, el comportamiento es similar al de un fluido Newtoniano; en caso contrario, el fluido no presenta deformaciones por corte.

#### 2.4.5.2. Magnitudes adimensionales

##### a.- Número de Bingham

Para estudiar flujos de Bingham se define un número adimensional denominado número de Bingham,  $Bn$ . El número de Bingham sugerido por Bird (Bird et al., 1983), se define como:

$$Bn = \frac{\tau_y H}{\mu V} \quad (2.44)$$

donde  $V$  es una velocidad característica del flujo viscoplástico,  $H$  es una longitud característica y  $\mu$  es la viscosidad del fluido de Bingham.

El número de Bingham relaciona la tensión de fluencia,  $\tau_y$ , con la tensión ocasionada por una velocidad de deformación característica  $\left( \dot{\gamma}_0 = \frac{V}{H} \right)$ .

En el caso de un fluido Newtoniano el valor  $Bn$  es nulo,  $Bn = 0$ ; en el límite opuesto, para fluidos en no fluencia (sólido) el número de Bingham puede tener valores muy altos  $Bn \rightarrow \infty$  (Mitsoulis and Zisis, 2001).

##### b.- Tensión adimensional de fluencia

En flujos viscoplásticos es conveniente mostrar los resultados en función de una tensión de fluencia adimensional,  $\tau_y^*$ , definida por Papanastasiou (Papanastasiou, 1987), como:

$$\tau_y^* = \frac{\tau_y H}{\mu V_N} \quad (2.45)$$

donde  $V_N$  es una velocidad característica tomada como la velocidad promedio del líquido Newtoniano de la misma viscosidad del modelo viscoplástico.

### c.- Número de Reynolds

El número de Reynolds,  $Re$ , define si el régimen del flujo es laminar o turbulento. El empleado en este trabajo es el que usan en trabajos previos para flujo Newtoniano, Scott (Scott et al., 1988) y Mitsoulis (Mitsoulis and Huilgol, 2003), entre otros. Para el flujo laminar de Bingham:

$$Re = \rho \frac{V_B H}{\mu} \quad (2.46)$$

donde  $\rho$  es la densidad del fluido,  $V_B$  es la velocidad promedio del flujo,  $H$  es una longitud característica y  $\mu$  es la viscosidad para el fluido de Bingham.

#### 2.4.5.3. Modelo ideal de Herschel-Bulkley

En el modelo plástico de Herschel -Bulkley (Herschel and Bulkley, 1926) se combinan la tensión de fluencia y la ley potencial. El modelo de Herschel-Bulkley puede modelar algunos productos alimenticios, las pastas, las soluciones coloidales (Covey and Stanmore, 1981), los lodos, los fluidos de perforación (Azouz et al., 1993), los metales semisólidos (Ahmed and Alexandrou, 1994), el dulce de leche, el chocolate fundido, el gel de Carbopol, muy utilizado en química y biología experimental.

En el modelo de Herschel-Bulkley la viscosidad aparente está dada por:

$$\begin{aligned} \mu(\dot{\gamma}) &= k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{para } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{para } \tau \leq \tau_y \end{aligned} \quad (2.47)$$

Al igual que para el modelo de Bingham, el modelo de Herschel-Bulkley requieren de una tensión de corte mínima,  $\tau_y$ , para que el material fluya. Para niveles de tensión por encima de la tensión de fluencia, el material fluye con una relación no lineal tensión-velocidad de deformación como un fluido pseudoplástico ( $n < 1$ ) o dilatante ( $n > 1$ ) determinado por el exponente de la ley de potencia.

El tensor desviador resulta:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2 \left( k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{para } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{para } \tau \leq \tau_y \end{aligned} \quad (2.48)$$

Si  $n=1$  se tiene el fluido de Bingham como caso particular (Prager, 1961) y el índice de consistencia es igual a la viscosidad plástica del material  $k = \mu_0$ . Si la tensión de fluencia es nula ( $\tau_y = 0$ ) se recupera la ley potencial, véase la ecuación (2.35).

#### 2.4.5.4. Magnitudes adimensionales

##### a.- Número generalizado de Bingham

Para materiales que obedecen el modelo de Herschel-Bulkley se define el número generalizado de Bingham,  $Bn^*$  o número de Oldroyd (Oldroyd, 1947),  $Od$ , como:

$$Bn^* = Od = \frac{\tau_y}{k \left(\frac{V}{H}\right)^n} = \frac{\tau_y}{k} \left(\frac{H}{V}\right)^n \quad (2.49)$$

donde  $\tau_y$  es la tensión de fluencia,  $H$  es una longitud característica,  $k$  es el índice de consistencia y  $n$  es el índice potencial. La velocidad  $V$  es una velocidad característica.

##### b.- Número de Reynolds

El número de Reynolds usado en flujos de Herschel-Bulkley viene dado por la ley potencial ((Panda and Chhabra, 2010), (Sivakumar et al., 2006)):

$$Re = \rho \frac{VH}{k \left(\frac{V}{H}\right)^{n-1}} = \rho \frac{V^2}{k} \left(\frac{H}{V}\right)^n \quad (2.50)$$

#### 2.4.5.5. Modelo de Casson

El modelo de Casson se usa para modelar el *yogurt* y ciertos materiales biológicos como la sangre. En este modelo la viscosidad aparente es:

$$\begin{aligned} \sqrt{\mu(\dot{\gamma})} &= \left( \sqrt{\mu_o} + \sqrt{\frac{\tau_y}{\dot{\gamma}}} \right) & \text{para } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{para } \tau \leq \tau_y \end{aligned} \quad (2.51)$$

El modelo reológico se expresa a través del tensor de tensiones desviadoras como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= 2 \left( \sqrt{\mu_o} + \sqrt{\frac{\tau_y}{\dot{\gamma}}} \right)^2 \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{para } \tau > \tau_y \\ \dot{\gamma} &= 0 & \text{para } \tau \leq \tau_y \end{aligned} \quad (2.52)$$

Para tensiones superiores a la tensión de fluencia, la viscosidad en el modelo de Casson es no lineal como el modelo de Herschel-Bulkley y las tensiones son mayores que las tensiones en el modelo de Bingham y en el modelo de Herschel-Bulkley, véase la Figura 2.7.

### 2.4.6. Modelos viscoplásticos regularizados. Fluido de Bingham

Los modelos reológicos con tensión de fluencia presentan dos problemas:

- Estos modelos ideales presentan singularidad para la viscosidad cuando la velocidad de deformación es nula.
- Además, en algunos casos, no está acotada la función de la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero  $\left( \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu \rightarrow \infty \right)$ .

Estos problemas no constituyen una limitación en soluciones analíticas para problemas simples, pero sí constituyen un serio inconveniente de cara a la solución numérica ((Bird et al., 1987), (Papanastasiou, 1987), (Perić and Slijepčević, 2001)).

Para evitar estas dificultades y lograr una conveniente formulación computacional, se han propuestos diferentes modelos regularizados.

Los modelos viscoplásticos regularizados de cara a las aplicaciones computacionales probablemente se iniciaron en el año 1972 con la tesis de Fortin (Fortin, 1972). Continuaron con el trabajo de Zienkiewicz y Gogbole (Zienkiewicz and Godbole, 1975). Los modelos más populares por su simplicidad algebraica fueron los modelos de Bercovier y Engelman (Bercovier and Engelman, 1980). Un modelo que también ha sido muy utilizado es el modelo de doble viscosidad, inicialmente propuesto por Tanner y Milhofer (Tanner and Milthorpe, 1983).

Uno de los últimos modelos más usados en nuestros días es el modelo de Papanastasiou (Papanastasiou, 1987). Souza Mendes y Dutra (SMD) (Souza and Dutra, 2004) han propuesto recientemente una modificación del modelo de Papanastasiou.

En lo que sigue, se presentan las formulaciones para el modelo de Bercovier y Engelman y el modelo de doble viscosidad original. Luego, para el fluido de Bingham y el fluido de Herschel-Bulkley se presentan el modelo de Papanastasiou, el modelo Souza Mendes y Dutra y un análisis de los límites de la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero. De acuerdo con este análisis se propone una modificación del modelo bilineal o de doble viscosidad para el modelo de Bingham y un modelo con viscosidad lineal en la zona de no fluencia para el modelo de Herschel-Bulkley.

#### 2.4.6.1. El modelo de Bercovier y Engelman

El modelo de Bercovier y Engelman (Bercovier and Engelman, 1980) fue el primer intento de solventar la singularidad para el modelo de Bingham de una manera muy simple por medio de la regularización:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma} + e} \quad \text{para } \tau \geq \tau_y$$

$$\dot{\gamma} = 0 \quad \text{para } \tau < \tau_y$$
(2.53)

donde  $e$  es una velocidad de deformación muy pequeña, por ejemplo,  $e = 10^{-3} \text{ s}^{-1}$ , que actúa como parámetro de regularización. Con este modelo, sus autores, resolvieron numéricamente el problema de cavidad 2D, pero no mostraron las zonas de fluencia y no fluencia de acuerdo

con el criterio de tensión de fluencia  $\tau = \tau_y$ ; en cambio, presentaron contornos definidos por  $\dot{\gamma} = e$ . Obtuvieron muy buenos resultados para el flujo de Poiseuille.

Posteriormente, Beris et al. (Beris et al., 1985) usaron el modelo de Bercovier y Engelman, teniendo en cuenta la ecuación para la zona rígida ( $\dot{\gamma} < e$ ). Con este nuevo modelo resolvieron el problema de una esfera cayendo en un medio infinito. En este estudio encontraron las zonas de fluencia y no fluencia y un importante criterio de cese del movimiento de las esferas.

#### 2.4.6.2. Modelo de Tanner y Milthorpe

El modelo introducido originalmente por Tanner y Milthorpe (Tanner and Milthorpe, 1983) es un modelo con doble viscosidad lineal que regulariza el fluido de Bingham.

Este modelo de doble viscosidad sustituye el comportamiento rígido del modelo ideal para valores de tensiones por debajo de la tensión de fluencia por una dependencia lineal entre la tensión y la velocidad de deformación. El modelo para el fluido de Bingham es:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{para } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \\ \mu_r & \text{para } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad (2.54)$$

donde  $\mu_r$  es la viscosidad crítica y  $\dot{\gamma}_c$  es la velocidad de deformación crítica. Para esta velocidad de deformación crítica la tensión es:

$$\mu_r \dot{\gamma}_c = \mu_0 \dot{\gamma}_c + \tau_y \quad (2.55)$$

Por tanto, la velocidad de deformación crítica es:

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\tau_y}{\mu_r - \mu_0} \quad (2.56)$$

El valor de  $\mu_r$  debe ser grande para aproximar el modelo ideal. Una buena aproximación recomendada por Beverly y Tanner es tomar  $300 \leq \frac{\mu_r}{\mu_0} \leq 1000$ .

El inconveniente de este modelo es que para la viscosidad crítica se tiene una tensión crítica  $\tau_c$  algo mayor que la tensión de fluencia, como se muestra en la Figura 2.8. Esta tensión crítica es:

$$\tau_c = \tau_y \frac{\mu_r}{\mu_r - \mu_0} > \tau_y \quad (2.57)$$

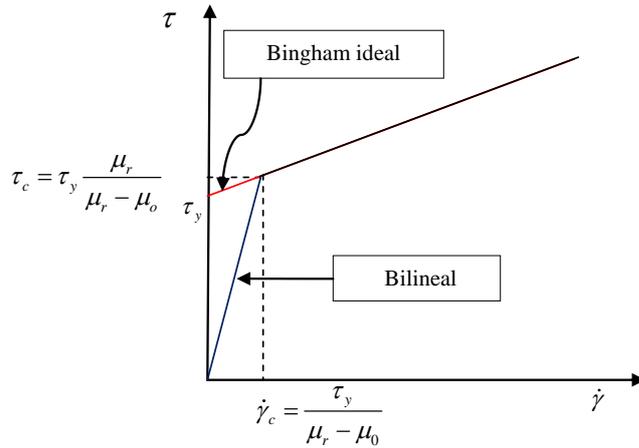


Figura 2.8. Curvas reológicas. Modelo bilineal.

### 2.4.6.3. Modelo de Papanastasiou

Uno de los intentos por solventar la limitación debida a la singularidad de la viscosidad para  $\dot{\gamma} \rightarrow 0$  se debe a Papanastasiou (Papanastasiou, 1987), que propuso una regularización exponencial para el término de la tensión de fluencia del modelo de Bingham. La misma idea se ha usado posteriormente con el modelo de Herschel-Bulkley.

El modelo de Papanastasiou es uno de los modelos más usados en la resolución de problemas para fluidos viscoplásticos en cálculos numéricos para los fluidos de Bingham y de Herschel-Bulkley, debido a su facilidad de implementación ((Mitsoulis and Zisis, 2001), (Frey et al., 2010), (Perić and Slijepčević, 2001), entre otros).

La ventaja que presenta el modelo es que describe con una sola ecuación tanto las zonas de fluencia como las de no fluencia, mediante una función suavizada de la viscosidad que depende de la velocidad de deformación y de un parámetro de regularización ( $m$ ), modificando la viscosidad aparente  $\mu(\dot{\gamma})$  del modelo ideal de la manera:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \mu_o + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \quad (2.58)$$

En la Figura 2.9 se puede apreciar la influencia del parámetro de regularización  $m$ .

El tensor de las tensiones desviadoras es:

$$\boldsymbol{\tau} = 2 \left( \mu_o + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \right) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) \quad (2.59)$$

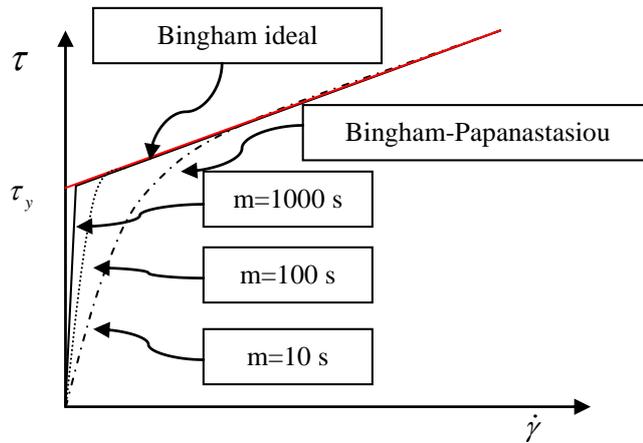


Figura 2.9. Modelo regularizado de Papanastasiou para el fluido de Bingham con diferentes valores del parámetro de regularización,  $m$ .

La viscosidad en la ecuación (2.58) está acotada cuando el gradiente de la velocidad de deformación tiende a cero. Desarrollando en serie de Taylor y despreciando los términos de más de segundo orden, se tiene que:

$$\mu_{\max} = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu(\dot{\gamma}) = \mu_0 + m\tau_y \quad (2.60)$$

Para valores muy altos del parámetro de regularización,  $m$ , éste valor límite de la viscosidad puede causar problemas numéricos. En este caso es aconsejable definir un valor de truncamiento  $\mu_t < \mu_{\max}$  para velocidades de deformación muy bajas  $\dot{\gamma} < \dot{\gamma}_t$ , tal como se muestra en la Figura 2.10.

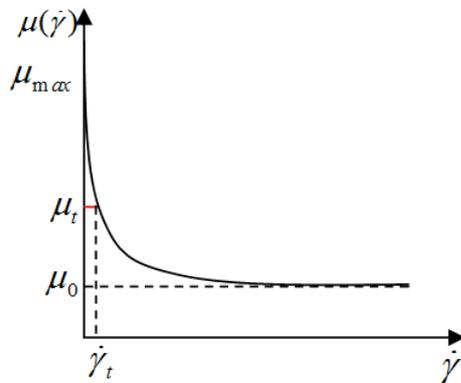


Figura 2.10. Variación de la viscosidad con la velocidad de deformación en los modelos de Papanastasiou y SMD.

#### 2.4.6.4. Modelo de Souza Mendes y Dutra (SMD)

El modelo regularizado SMD de Souza Mendes y Dutra (Souza and Dutra, 2004) es similar al modelo de Papanastasiou pero la regularización exponencial afecta a todos los términos de la viscosidad:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \left( \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \left( 1 - \exp\left(-\frac{\eta_0}{\tau_y} \dot{\gamma}\right) \right) \quad (2.61)$$

Además, el parámetro de regularización se sustituye por un parámetro reológico que depende de la viscosidad del fluido a cero cizallamiento  $\eta_0$  y la tensión de fluencia  $\tau_y$ ,  $m = \eta_0 / \tau_y$ .

El límite para la viscosidad cuando la velocidad de deformación es cero es:

$$\mu_{\max} = \lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu(\dot{\gamma}) = m\tau_y \quad (2.62)$$

#### 2.4.7. Modelos viscoplásticos regularizados. Fluido de Herschel-Bulkley

Para el fluido de Herschel-Bulkley se proponen modelos regularizados análogos a los del fluido de Bingham.

##### 2.4.7.1. Modelo de Tanner y Milthorpe

El modelo de Tanner y Milthorpe (Tanner and Milthorpe, 1983) para el fluido de Herschel-Bulkley es:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{para } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \\ \mu_r & \text{para } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad (2.63)$$

donde  $\mu_r$  es la viscosidad crítica y  $\dot{\gamma}_c$  es la velocidad de deformación crítica. La velocidad de deformación crítica se obtiene resolviendo la siguiente ecuación no lineal implícita:

$$\mu_r \dot{\gamma}_c = k\dot{\gamma}_c^n + \tau_y \quad (2.64)$$

##### 2.4.7.2. Modelo de Papanastasiou

La regularización propuesta por Papanastasiou (Figura 2.11) es también aplicable al modelo de Herschel-Bulkley. La viscosidad aparente queda definida como:

$$\mu(\dot{\gamma}) = k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \quad (2.65)$$

La influencia del parámetro  $m$  en el fluido de Herschel-Bulkley-Papanastasiou puede verse en la Figura 2.11.

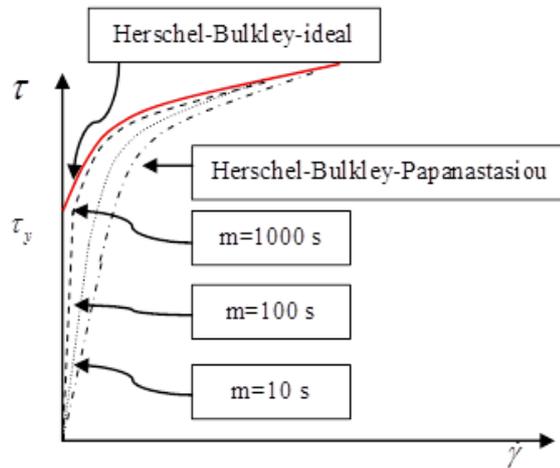


Figura 2.11. Modelo regularizado de Papanastasiou para el fluido de Herschel-Bulkley con diferentes valores del parámetro de regularización  $m$ .

Al igual que para el modelo de Bingham, el modelo de Herschel-Bulkley requiere en la implementación numérica un valor de truncamiento  $\mu_t$ .

El valor límite de la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero varía de acuerdo con el valor  $n$ . El límite para cada término de la ecuación (2.65) y el límite resultante para la viscosidad se muestran en la Tabla 2.2. Se observa que para fluidos pseudoplásticos ( $n < 1$ ) la viscosidad no está acotada. En estos casos es imprescindible la aplicación del procedimiento de truncamiento.

Exponente	Términos de la viscosidad		Viscosidad
$n$	$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} k \dot{\gamma}^{n-1}$	$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m\dot{\gamma})]$	$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \mu(\dot{\gamma})$
Si $n > 1$	0	$m\tau_y$	$m\tau_y$
Si $n = 1$	$k = \mu$	$m\tau_y$	$\mu + m\tau_y$
Si $n < 1$	$\infty$	$m\tau_y$	$\infty$

Tabla 2.2. Modelo regularizado de Papanastasiou. Valores límites para la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero.

### 2.4.7.3. Modelo SMD

El modelo SMD (Souza-Mendez-Dutra) regulariza el modelo ideal de Herschel-Bulkley en la forma:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \left( k \dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) (1 - \exp(-m\dot{\gamma})) \quad (2.66)$$

con  $m = \eta_0 / \tau_y$ .

El valor de la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero se muestra en la Tabla 2.3. La viscosidad está acotada para cualquier valor de  $n$ , lo cual es una ventaja en la implementación numérica.

Exponente	Términos de la viscosidad		Viscosidad
	$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} k \dot{\gamma}^{n-1} [1 - \exp(-m\dot{\gamma})]$	$\lim_{\dot{\gamma} \rightarrow 0} \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} [1 - \exp(-m\dot{\gamma})]$	
Si $n > 1$	0	$m\tau_y$	$m\tau_y$
Si $n = 1$	0	$m\tau_y$	$m\tau_y$
Si $n < 1$	0	$m\tau_y$	$m\tau_y$

Tabla 2.3. Modelo regularizado SMD. Valores límites para la viscosidad cuando la velocidad de deformación tiende a cero.

Este modelo ha sido utilizado en simulaciones numéricas para cavidad con el fluido de Herschel-Bulkley (Dall'Onder Dos Santos et al., 2011), en problemas de expansión-contracción axisimétrica y en una contracción plana.

#### 2.4.7.4. Modelos viscoplásticos regularizados propuestos

Se proponen a continuación sendos modelos viscoplásticos regularizados para los fluidos de Bingham y de Herschel-Bulkley.

Ambos son modelos de doble viscosidad, basados en los modelos descritos anteriormente.

#### 2.4.7.5. Modelo regularizado de Bingham de doble viscosidad (DV)

Este modelo es idéntico al modelo bilineal, pero la viscosidad crítica,  $\mu_c$ , se toma igual al valor límite regularizado de Papanastasiou y SMD correspondiente a  $\dot{\gamma} = 0$ , esto es,  $\mu_c = m\tau_y$ , en función del parámetro de regularización  $m$ , Figura 2.12. Por tanto:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} \mu_0 + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{para } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \\ m\tau_y & \text{para } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad (2.67)$$

En este caso, el valor de la velocidad de deformación crítica es:

$$\dot{\gamma}_c = \frac{\tau_y}{m\tau_y - \mu_0} \quad (2.68)$$

En la Figura 2.13 se compara el modelo bilineal propuesto con los modelos de Papanastasiou y SMD para  $m = 10$  s,  $100$  s con tensión de fluencia  $\tau_y = 10$  Pa y  $\mu_0 = 0.2$  Pa.s.

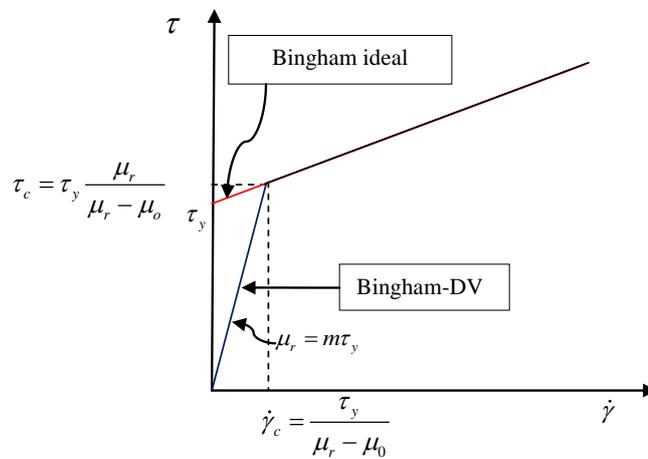


Figura 2.12. Modelo ideal de Bingham y modelo regularizado Bingham-DV.

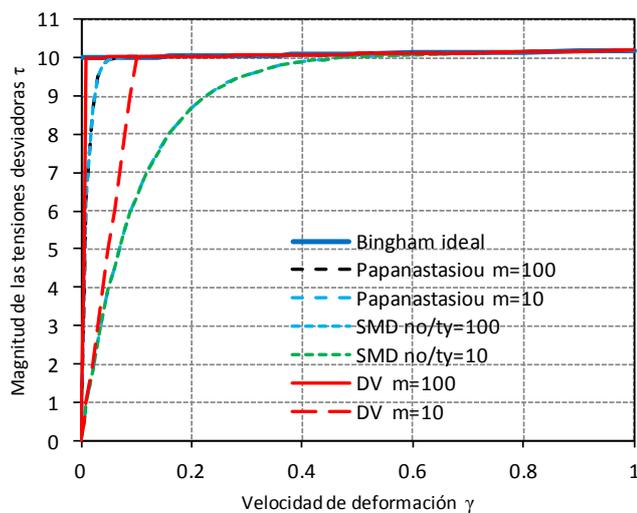


Figura 2.13. Comparación entre el modelo bilineal propuesto para el fluido de Bingham (DV) con el modelo regularizado de Papanastasiou y el modelo SMD para  $m=10, 100$  s.

### 2.4.7.6. Modelo regularizado de Herschel-Bulkley de doble viscosidad

De forma análoga, se propone un modelo regularizado de doble viscosidad para el fluido de Herschel-Bulkley, en el que la viscosidad crítica se toma como el valor límite de la viscosidad del modelo de Papanastasiou y SMD,  $\mu_r = m\tau_y$ , en función del parámetro de regularización  $m$ , Figura 2.14. Esto es:

$$\mu(\dot{\gamma}) = \begin{cases} k\dot{\gamma}^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} & \text{para } \dot{\gamma} > \dot{\gamma}_c \\ m\tau_y & \text{para } \dot{\gamma} \leq \dot{\gamma}_c \end{cases} \quad (2.69)$$

El valor crítico de la velocidad de deformación cuando  $n \neq 1$  ha de determinarse de forma iterativa imponiendo continuidad en las tensiones de corte (para  $\dot{\gamma} = \dot{\gamma}_c$ ):

$$m\tau_y\dot{\gamma}_c = k\dot{\gamma}_c^n + \tau_y \quad (2.70)$$

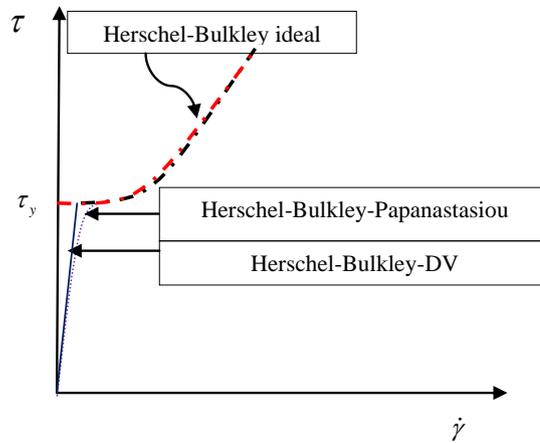


Figura 2.14. Modelo ideal de Herschel-Bulkley y modelos regularizados de Herschel-Bulkley-Papanastasiou y Herschel-Bulkley-DV,  $n > 1$ .

## 2.5. Fluidos no-Newtonianos dependientes del tiempo

Se incluyen en esta categoría los fluidos cuyo comportamiento, además de depender de la relación tensión de corte y de la velocidad de deformación, depende de su *historia* cinemática (*historia* de deformación del fluido) y del tiempo para el cual el fluido ha estado sujeto a corte.

En estos fluidos la viscosidad aparente depende del tiempo, dando lugar a lazos de histéresis en ciclos de carga alternada.

Los fluidos dependientes del tiempo son llamados fluidos tixotrópicos o reopéticos, según el tipo de comportamiento que presentan, Figura 2.15.

En los fluidos reopéticos la tensión tangencial aumenta con el tiempo de aplicación de la velocidad de deformación y la viscosidad aparente disminuye con la misma. Estos fluidos forman su estructura con la aplicación de una velocidad de deformación constante y se rompe cuando deja de aplicarse esta velocidad de deformación. Ejemplo de ellos son las suspensiones coloidales, pentóxido de vanadium a moderadas velocidades de deformación, lechadas de carbón y agua, residuos de la industria del aluminio, pasta de cemento o petróleo ((Tanner, 1988), (Chhabra and Richardson, 2008)).

En los fluidos tixotrópicos la tensión tangencial disminuye con el tiempo de aplicación de la velocidad de deformación y la viscosidad aparente aumenta con esta velocidad de deformación. La tixotropía está asociada con la formación de la estructura en reposo y ésta se rompe cuando se le aplica una velocidad de deformación. Las suspensiones concentradas, emulsiones, soluciones de proteínas, productos alimenticios son ejemplos de este tipo de fluidos (Barnes, 1997).

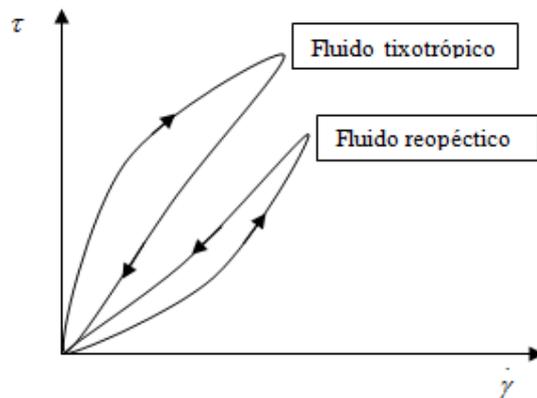


Figura 2.15. Curvas reológicas para fluidos dependientes del tiempo.

## 2.6. Fluidos viscoelásticos

Los fluidos viscoelásticos muestran características mixtas tanto de fluido ideal (purementemente viscoso o plástico) como de sólido elástico (muestran recuperación elástica parcial después de la deformación) (Chhabra and Richardson, 2008).

Por un lado, el comportamiento elástico está dado por:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = G \boldsymbol{\gamma}(t_0, t) \quad (2.71)$$

donde  $G$  es el módulo de elasticidad. La tensión en el tiempo  $t$  es proporcional a la deformación de corte  $\boldsymbol{\gamma}(t_0, t)$  acumulada entre el tiempo inicial  $t_0$  y el tiempo  $t$ .

Por otro lado, el comportamiento viscoso de un fluido Newtoniano es:

$$\boldsymbol{\tau}(t) = \mu \dot{\boldsymbol{\gamma}}(t) \quad (2.72)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad. La tensión en el tiempo  $t$  es proporcional a la velocidad de deformación en el tiempo  $t$ .

En pequeños desplazamientos la tensión (2.71) es dominante, mientras que para grandes desplazamientos lo es la tensión (2.72).

Si consideramos el modelo viscoelástico de Maxwell, el material se describe mediante la suma de las componentes elástica y viscosa de la tensión, resultando:

$$\frac{1}{G} \dot{\boldsymbol{\tau}} + \frac{1}{\mu} \boldsymbol{\tau} = \dot{\boldsymbol{\gamma}} \quad (2.73)$$

que es una ecuación diferencial que puede integrarse en el tiempo para obtener la tensión.

En el estado estacionario, la ecuación se simplifica a un fluido Newtoniano con viscosidad  $\mu$ . Para cambios bruscos en tensiones, la derivada temporal domina el lado izquierdo de la ecuación y la respuesta aproxima la de un sólido con modulo de elasticidad  $G$ . Esta es la ecuación más simple para representar un fluido viscoelástico (Tanner, 2000).

En la Figura 2.16 se muestra la evolución de la tensión para un material viscoelástico bajo deformación constante. Se observa que el comportamiento es intermedio entre el de un sólido elástico y un fluido Newtoniano.

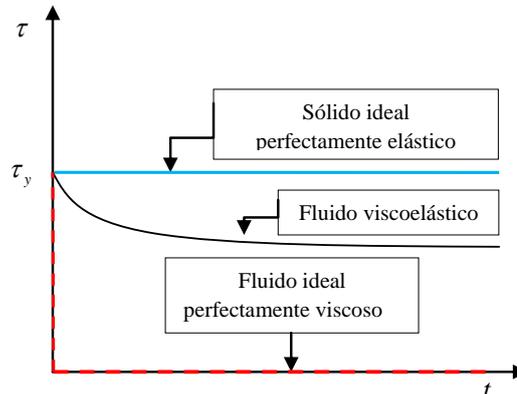


Figura 2.16. Evolución de la tensión para deformación constante en materiales viscoelásticos.

## 2.7. Modelos constitutivos para flujos detríticos

El comportamiento de los flujos de detritos varía en función de la cantidad de sedimento que está presente en la mezcla de material.

En relación con el comportamiento reológico del flujo, Pierson y Costa (Pierson and Costa, 1987) elaboraron un cuadro comparativo (Figura 2.17) para los distintos procesos dominantes (inercial, viscoso o friccional) con una terminología ampliamente utilizada en la práctica. Este cuadro ubica los flujos abarcando un amplio rango, desde flujos de agua de comportamiento líquido y de tipo Newtoniano, hasta la categoría de flujos no-Newtonianos (detrítico). Las características de los flujos no-Newtonianos varían desde flujos puramente viscosos hasta flujos puramente inerciales. Entre estos extremos existe una interacción entre ambos tipos de flujo.

Para describir el comportamiento de los flujos detríticos, existen diferentes modelos reológicos para representar tanto modelos continuos como modelos de partículas discretas (Takahashi, 2007).

El modelo plástico de Bingham fue utilizado por primera vez por Yano y Daido (Yano and Daido, 1965) y por Johnson (Johnson, 1970) para estudiar los flujos de detritos. Desde entonces, los modelos viscoplásticos han sido ampliamente utilizados por su relativa sencillez, el modelo plástico de Bingham para materiales finos y el modelo viscoplástico de Herschel-Bulkley para flujos de materiales con mezclas de arcilla y grava.

Existen otros modelos para flujos de detritos, entre los cuales los más conocidos son el modelo de Bagnold (Bagnold, 1954) para régimen inercial, el modelo de Coulomb para régimen macro-viscoso, el modelo de Voellmy (Voellmy, 1955) para flujos granulares y el modelo modificado de Johnson (Johnson, 1970). El modelo de Bagnold es muy usado para flujos granulares.

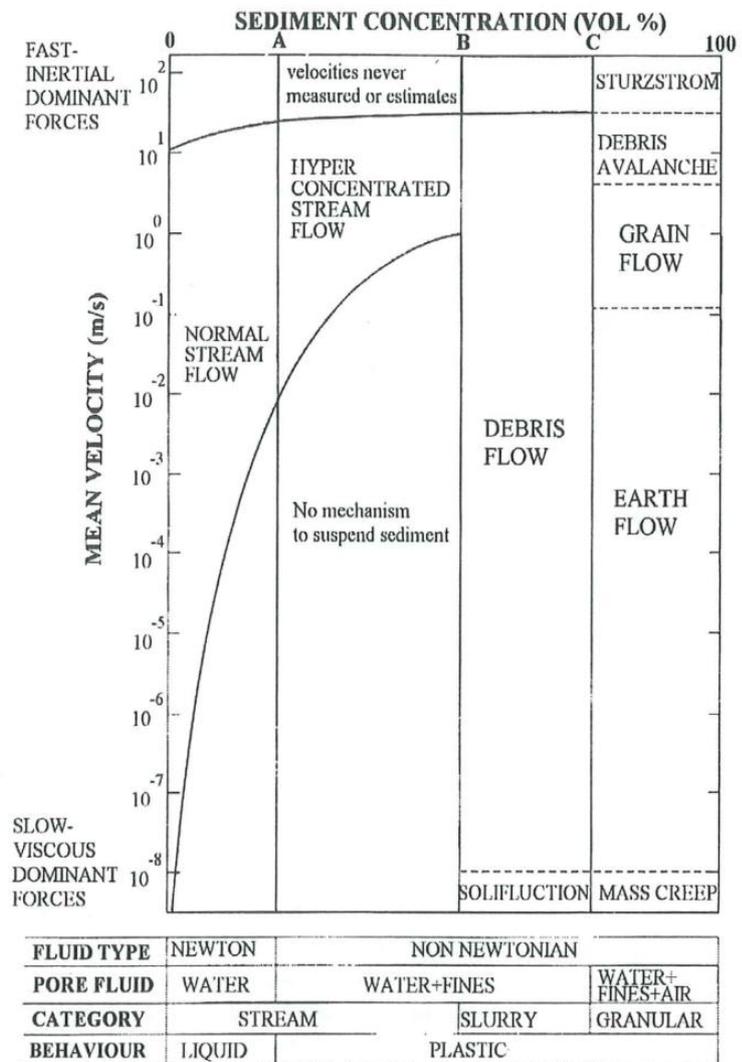


Figura 2.17. Clasificación reológica dada por Pierson y Costa con la terminología (en inglés) que se utiliza frecuentemente en la práctica, (Pierson and Costa, 1987).

## 2.8. Flujos con solución analítica

### 2.8.1. Introducción

En este apartado se plantea primero la solución analítica para flujos simples como el flujo estacionario de Couette y el flujo de Poiseuille. Para determinar la solución analítica de flujos simples para el fluido de Bingham y el fluido de Herschel-Bulkley, se procede de forma análoga que para los fluidos Newtonianos, con la complejidad adicional de la no linealidad de la viscosidad. La solución analítica para el flujo de Poiseuille se obtiene a partir de una simplificación de la solución analítica para el flujo de Couette; así mismo, el fluido de Herschel-Bulkley se simplifica al fluido de Bingham. Para la obtención de la solución analítica se consideran los desarrollos realizados por Bird et al. (Bird et al., 1987) y siguiendo a Kelessidis et al. (Kelessidis et al., 2006).

Posteriormente, se presentan soluciones analíticas para determinar la superficie libre en fluidos Newtonianos, pudiéndose utilizar algunas de estas ecuaciones en fluidos no-Newtonianos. En la presente investigación, uno de los problemas analizado es la onda resultante de la rotura instantánea de presas. Existen pocos desarrollos teóricos en esta materia y el conocimiento que se tienen de la onda que se desplaza sobre superficies rugosas es muy rudimentario. Las soluciones analíticas que se presentan para el problema de rotura de presa utilizan las ecuaciones de Saint-Venant y el método de las características. Estos desarrollos teóricos incluyen el estudio de flujos en canales horizontales y en pendiente, considerando fricción del flujo con el fondo de este canal. Se describen las soluciones para un fluido ideal y un fluido real.

### 2.8.2. Flujo de Couette

El flujo de Couette es el flujo estacionario que ocurre entre dos placas paralelas e infinitas. La placa superior se mueve a una velocidad constante, mientras que la otra permanece fija. Además, el fluido está sujeto a un gradiente de presión que ocasiona que el movimiento ocurra en la misma dirección del movimiento de la placa.

El nombre de este flujo se debe a Maurice Alfred Couette, profesor de física francés de finales del siglo XIX, que hizo la descripción del mismo en su tesis doctoral "*Estudio de la Fricción en Líquidos*" en 1890 (Bird et al., 1983).

#### 2.8.2.1. Solución analítica para el fluido de Herschel-Bulkley

El problema se considera bidimensional, por lo que trabaja en el plano  $xy$  (Figura 2.18).

El flujo es paralelo, con velocidad  $\mathbf{u} = (u_x, u_y)$ , con  $u_x = u(y)$  e  $u_y = 0$ .

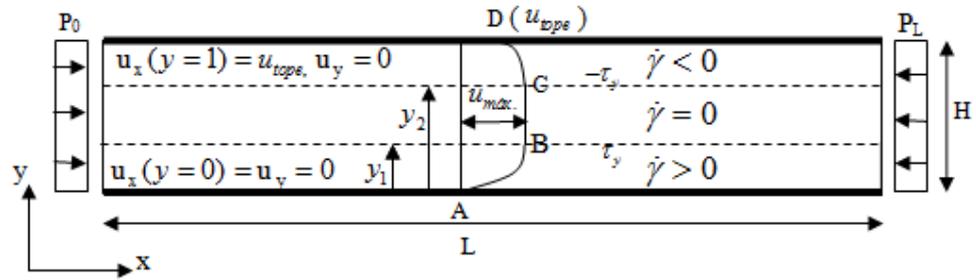


Figura 2.18. **Flujo de Couette.** Geometría y condiciones de contorno.

Para este flujo estacionario, paralelo y sin fuerzas de volumen, la ecuación de conservación de *momentum* se reduce a:

$$\frac{d\tau_{xy}}{dy} = \frac{dp}{dx} \quad (2.74)$$

con

$$\frac{dp}{dx} = -\Delta P = -\frac{P_0 - P_L}{L} \quad (2.75)$$

La ecuación (2.74) se integra para dar:

$$\tau_{xy} = -\Delta P y + c \quad (2.76)$$

donde  $c$  es una constante de integración.

Dado que el gradiente de presión es constante y negativo  $P_0 > P_L$ , la distribución de tensiones de corte es lineal y de pendiente negativa, tal como se muestra en la Figura 2.19.

Esta distribución de tensiones divide el ancho del dominio en tres zonas, delimitadas por las ordenadas  $y_1$  y  $y_2$ :

- Zona I,  $0 \leq y \leq y_1$ , con  $\tau_{xy} > \tau_y > 0$ ,  $\dot{\gamma} > 0$ .
- Zona II,  $y_1 \leq y \leq y_2$ , con  $\tau_{xy} = \tau_y$ ,  $\dot{\gamma} = 0$ .
- Zona III,  $y_2 \leq y \leq H$ , con  $\tau_{xy} < -\tau_y < 0$ ,  $\dot{\gamma} < 0$ .

Dado que

$$\tau_{xy} = \mu(\dot{\gamma})\dot{\gamma} = \mu(\dot{\gamma})\frac{du}{dy} \quad (2.77)$$

los signos de  $\tau_{xy}$  y de  $\dot{\gamma} = \frac{du}{dy}$  se corresponden.

La correspondiente distribución de velocidad de deformación se muestra en Figura 2.20.

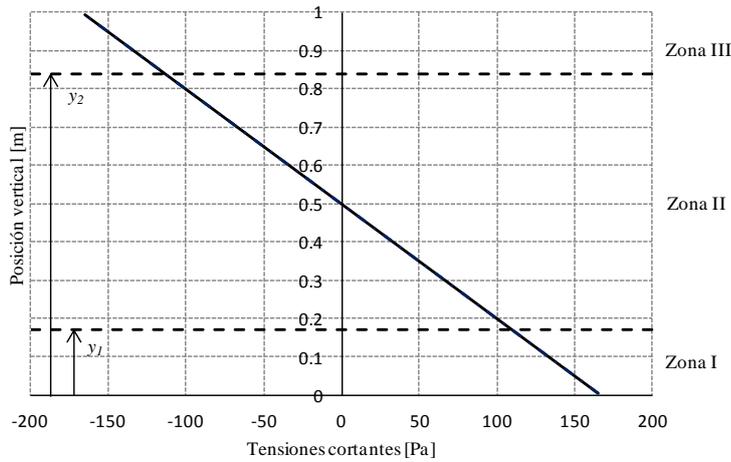


Figura 2.19. Flujo de Couette, fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico,  $n = 0.5$ . Distribución de la tensión de cortante,  $k = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

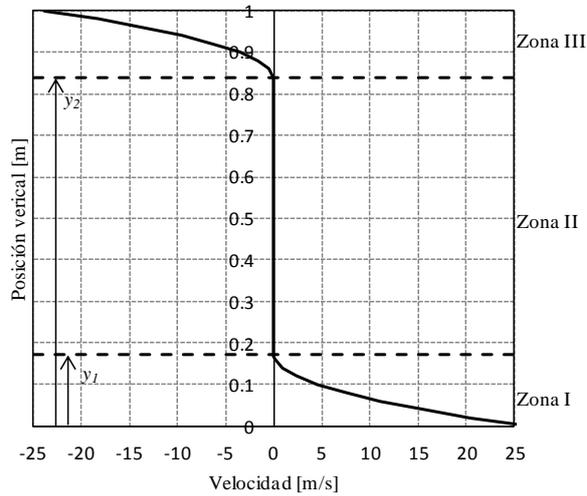


Figura 2.20. Flujo de Couette, fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico,  $n = 0.5$ . Distribución de la velocidad de deformación,  $k = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

Para resolver el problema hay que considerar la ec. (2.76) en las 3 zonas, junto con las condiciones de contorno:

- La velocidad en la placa inferior es nula  $u_x(y = 0) = 0$ .
- La placa superior se mueve con una velocidad uniforme dada,  $u_x(y = H) = u_{\text{tope}}$ .

Además, existe continuidad  $C^0$  y  $C^1$  en la velocidad en las ordenadas  $y_1$  y  $y_2$ .

**Zona I**,  $\dot{\gamma} > 0$ ,  $0 \leq y \leq y_1$

Particularizando la ec. (2.76) para  $y = y_1$ , se tiene:

$$\tau_{xy}(y = y_1) = \tau_y = -\Delta P y_1 + c \quad (2.78)$$

Por tanto:

$$c = \tau_y + \Delta P y_1 \quad (2.79)$$

luego,  $\tau_{xy}$  en esta zona:

$$\tau_{xy} = \tau_y + \Delta P(y_1 - y) \quad (2.80)$$

Sustituyendo la viscosidad del modelo de Herschel-Bulkley, se tiene:

$$\tau_{xy} = \left( k(\dot{\gamma})^{n-1} + \frac{\tau_y}{\dot{\gamma}} \right) \frac{du}{dy} = k(\dot{\gamma})^n + \tau_y \quad (2.81)$$

Igualando la ecuación (2.80) con la ecuación (2.81) se obtiene:

$$\frac{du}{dy} = \left[ \frac{\Delta P}{k} (y_1 - y) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2.82)$$

Integrando, la velocidad es:

$$u(y) = Q (y_1 - y)^{\frac{n+1}{n}} + c_1 \quad (2.83)$$

donde  $c_1$  es la constante de integración válida en esta zona. Se ha llamado:

$$Q = \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \quad (2.84)$$

Imponiendo la condición de contorno  $u(y=0) = u = 0$ , entonces:

$$c_1 = Q (y_1)^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.85)$$

con lo que la velocidad en la zona I es:

$$u(y) = Q \left[ (y_1 - y)^{\frac{n+1}{n}} + (y_1)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad 0 \leq y \leq y_1 \quad (2.86)$$

La velocidad máxima de la zona se da en  $y = y_1$ , ordenada que se obtiene más adelante, y vale:

$$u_{max} = u(y = y_1) = Q (y_1)^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.87)$$

**Zona II,**  $\dot{\gamma} = 0$ ,  $y_1 \leq y \leq y_2$

En esta región la velocidad de deformación es nula, la velocidad es constante e igual a la velocidad máxima:

$$u = u_{m\acute{a}x}, \quad y_1 \leq y \leq y_2 \quad (2.88)$$

**Zona III,**  $\dot{\gamma} < 0$ ,  $y_2 \leq y \leq H$  :

Particularizando la ec. (2.76) para  $y = y_2$ , se tiene:

$$\tau_{xy}(y = y_2) = -\tau_y = -\Delta P y_2 + c \quad (2.89)$$

Por tanto,  $c$  es:

$$c = -\tau_y + \Delta P y_2 \quad (2.90)$$

En esta región la tensión cortante es:

$$\tau_{xy} = -(k\dot{\gamma}^n + \tau_y) \quad (2.91)$$

Igualando la (2.76) y la ec. (2.91) y sustituyendo a  $c$  de la ec. (2.90) queda:

$$\frac{du}{dy} = \left[ \frac{\Delta P}{k} (y - y_2) \right]^{\frac{1}{n}} \quad (2.92)$$

Integrando, la velocidad es:

$$u(y) = -Q (y_2 - y)^{\frac{n+1}{n}} + c_3 \quad (2.93)$$

donde  $c_3$  es una constante de integración en la zona III.

Imponiendo la condición de contorno,  $u(y = H) = u_{tope}$ , se tiene:

$$c_3 = u_{tope} + Q \left[ (H - y_2) \right]^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.94)$$

y la velocidad en la zona III es:

$$u(y) = u_{tope} - Q \left[ (y - y_2)^{\frac{n+1}{n}} - (H - y_2)^{\frac{n+1}{n}} \right], \quad y_2 \leq y \leq H \quad (2.95)$$

La velocidad máxima se da en  $y = y_2$ , ordenada que se determina más adelante, y vale:

$$u(y = y_2) = u_{max} = u_{tope} - Q (H - y_2)^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.96)$$

Recopilando las expresiones (2.86), (2.90) y (2.98), la distribución de velocidades para un flujo de Couette con fluido de Herschel-Bulkley es:

$$u_x(y) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ (y-y_1)^{\frac{n+1}{n}} + (y_1)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{para } 0 \leq y \leq y_1 \\ \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} (y_1)^{\frac{n+1}{n}} & \text{para } y_1 \leq y \leq y_2 \\ u_{tope} + \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ (y-y_2)^{\frac{n+1}{n}} - (H-y_2)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{para } y_2 \leq y \leq H \end{cases} \quad (2.97)$$

Faltan por determinar las ordenadas  $y_1$  y  $y_2$  de las superficies de fluencia. Igualando (2.79) y (2.89), se tiene que

$$y_2 - y_1 = \frac{2\tau_y}{\Delta P}, \quad y_2 = y_1 + \frac{2\tau_y}{\Delta P} \quad (2.98)$$

La ordenada  $y_1$  se encuentra igualando la velocidad en  $y = y_1$  e  $y = y_2$ :

$$Q(y_1)^{\frac{n+1}{n}} = u_{tope} + Q \left( \frac{2\tau_y}{\Delta P} + y_1 - H \right)^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.99)$$

En general, está ecuación debe resolverse iterativamente. Una vez que se obtiene  $y_1$ , puede obtenerse la ordenada  $y_2$  de la ec. (2.98).

La distribución analítica para la solución dada en la ec. (2.97) en la sección del canal con  $u_{tope} = 0.2 \text{ m/s}$ ,  $\tau_y = 100 \text{ Pa}$  y  $n = 0.5$  se muestra en la Figura 2.21. Las superficies de fluencia se encuentran en  $y_1 = 0.1707 \text{ m}$  y  $y_2 = 0.8373 \text{ m}$ .

Con  $\tau_y = 0$  se tiene la solución analítica de la ley de potencia para un fluido pseudoplástico ( $n < 1$ ) o dilatante ( $n > 1$ ). De la ec. (2.98), se tiene que  $y_1 = y_2$ . Por tanto, la solución es:

$$u_x(y) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ (y-y_1)^{\frac{n+1}{n}} + (y_1)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{para } 0 \leq y \leq y_1 \\ u_{tope} + \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ (y-y_1)^{\frac{n+1}{n}} - (H-y_1)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{para } y_1 \leq y \leq H \end{cases} \quad (2.100)$$

La ordenada  $y_1$  se encuentra al resolver iterativamente

$$Q(y_1)^{\frac{n+1}{n}} = u_{tope} + Q(y_1 - H)^{\frac{n+1}{n}} \quad (2.101)$$

La distribución analítica para un fluido pseudoplástico ( $\tau_y = 0$ ) con  $u_{tope} = 0.2 \text{ m/s}$  y  $n = 0.5$  se muestra en la Figura 2.22. La zona II no existe,  $y_1 = y_2 = 0.5004 \text{ m}$ , todo el fluido se encuentra en movimiento con velocidades mucho más altas que las encontradas para el fluido de Herschel-Bulkley.

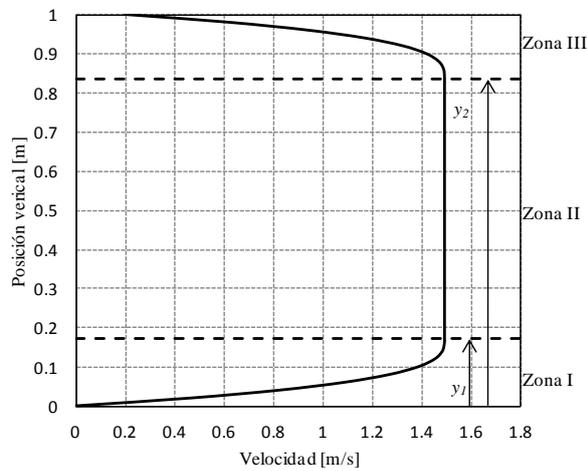


Figura 2.21. Flujo de Couette, fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico,  $n=0.5$ . Distribución de la velocidad,  $k = 10 \text{ Pa.s}$ .

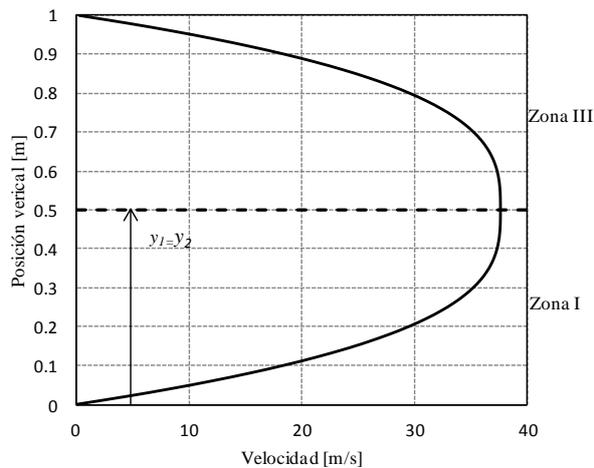


Figura 2.22. Flujo de Couette, fluido pseudoplástico,  $n=0.5$ . Distribución de la velocidad,  $k = 10 \text{ Pa.s}$ .

### 2.8.2.2. Solución analítica para el fluido de Bingham

Para el fluido de Bingham se procede de manera similar que para el caso anterior haciendo  $n = 1$  y  $k = \mu$ . Las consideraciones generales son idénticas, y la única diferencia es que en este caso la velocidad de deformación a través de la sección varía linealmente en las zonas I y II, como se muestra en la Figura 2.23.

La solución para el fluido de Bingham se obtiene haciendo  $n=1$  en la solución (2.97),  $Q = \Delta P / 2k$ , para dar:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{\Delta P}{2k} \left[ (y_1 - y)^2 - (y_1)^2 \right] & \text{para } 0 \leq y < y_1 \\ -\frac{\Delta P}{2k} (y_1)^2 & \text{para } y_1 \leq y \leq y_2 \\ u_{\text{tope}} + \frac{\Delta P}{2k} \left[ (y - y_2)^2 - (H - y_2)^2 \right] & \text{para } y_2 \leq y \leq H \end{cases} \quad (2.102)$$

La ordenada  $y_1$  se encuentra resolviendo la ec. (2.99) de 2º grado:

$$Q (y_1)^2 = u_{\text{tope}} + Q \left( \frac{2\tau_y}{-\Delta P} + y_1 - H \right)^2 \quad (2.103)$$

y la ordenada  $y_2$  se obtiene de la ec. (2.98).

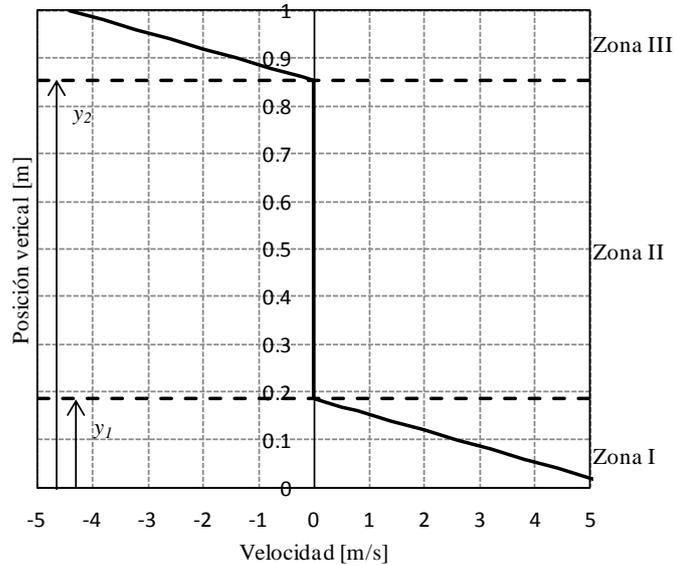


Figura 2.23. Flujo de Couette, fluido de Bingham. Distribución de la velocidad de deformación,  $\mu = 10 \text{ Pa.s}$ .

La distribución analítica de la velocidad para la solución dada en la ec. (2.102) con  $u_{tope} = 0.2 \text{ m/s}$  se muestra en la Figura 2.24. Las superficies de fluencia se encuentran en  $y_1 = 0.1867 \text{ m}$ ,  $y_2 = 0.8533 \text{ m}$ .

Para  $\tau_y = 0$ , se obtiene la solución para fluido Newtoniano ( $y_1 = y_2$ ):

$$u(y) = \begin{cases} \frac{\Delta P}{2k} [(y_1 - y)^2 - (y_1)^2] & \text{para } 0 \leq y \leq y_1 \\ u_{tope} + \frac{\Delta P}{2k} [(y - y_1)^2 - (H - y_1)^2] & \text{para } y_1 \leq y \leq H \end{cases} \quad (2.104)$$

La ordenada  $y_1$  se obtiene resolviendo la ecuación de segundo grado:

$$Q (y_1)^2 = u_{tope} + Q (y_1 - H)^2 \quad (2.105)$$

La distribución analítica para la solución dada en la ec. (2.104) con  $u_{tope} = 0.2 \text{ m/s}$  se muestra en la Figura 2.25. La superficie de fluencia se encuentra en  $y_1 = 0.5066 \text{ m}$ .

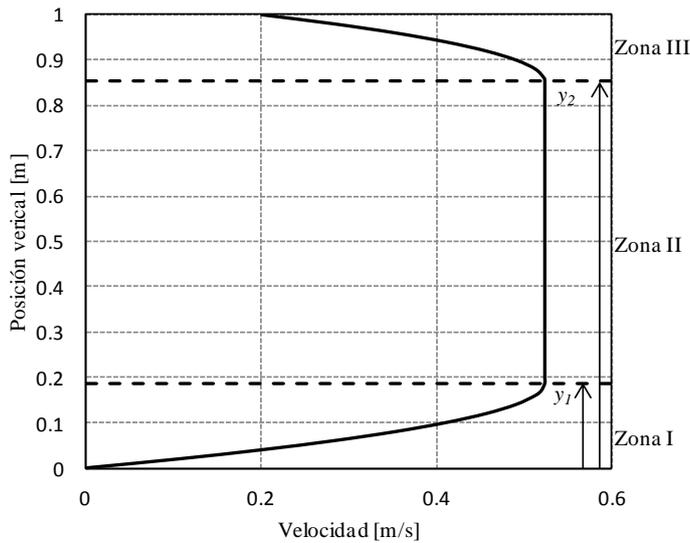


Figura 2.24. Flujo de Couette, fluido de Bingham. Distribución de la velocidad,  $\mu = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .

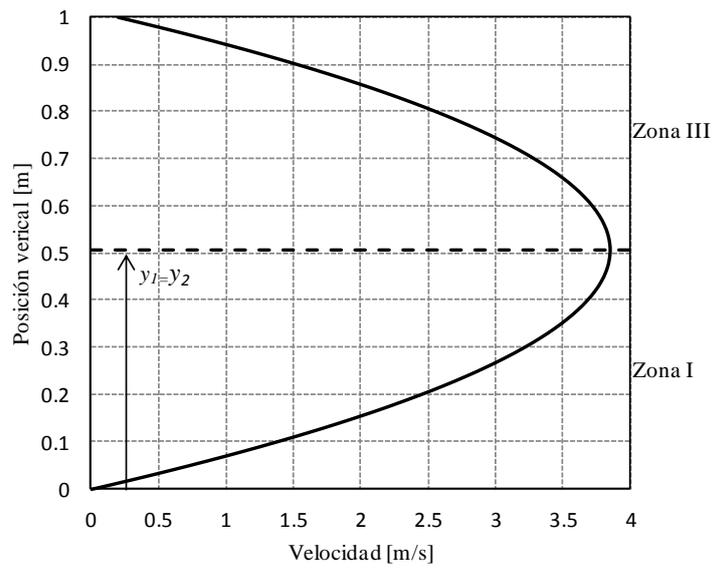


Figura 2.25. *Flujo de Couette, fluido Newtoniano. Distribución de la velocidad,  $\mu = 10 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ .*

### 2.8.3. Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille es un flujo estacionario que se desarrolla entre placas paralelas e infinitas, que se encuentran fijas. Su nombre se debe a Jean Louis Marie Poiseuille, quien en 1838 estudió experimentalmente el flujo laminar incompresible a través de un tubo; en 1840 y 1846 lo describió matemáticamente.

#### 2.8.3.1. Solución analítica para el fluido de Herschel-Bulkley

La solución analítica para el flujo de Poiseuille se obtiene a partir de la solución del flujo de Couette, imponiendo la velocidad en la placa superior nula ( $u_{\text{tope}} = u(y = H) = 0$ ), como se muestra en la Figura 2.26.

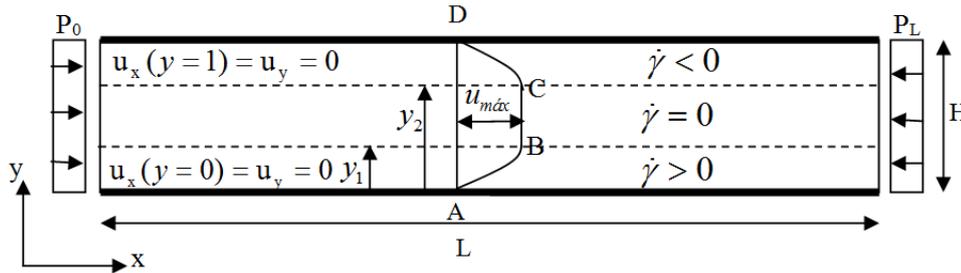


Figura 2.26. **Flujo de Poiseuille.** Geometría y condiciones de contorno.

La distribución de velocidades es:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ (y - y_1)^{\frac{n+1}{n}} + (y_1)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{para } 0 \leq y \leq y_1 \\ \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} (y_1)^{\frac{n+1}{n}} & \text{para } y_1 \leq y \leq y_2 \\ \frac{n}{n+1} \left( \frac{\Delta P}{k} \right)^{\frac{1}{n}} \left[ (y - y_2)^{\frac{n+1}{n}} - (H - y_2)^{\frac{n+1}{n}} \right] & \text{para } y_2 \leq y \leq H \end{cases} \quad (2.106)$$

Las superficies de fluencia se encuentran en las ordenadas  $y_1$  y  $y_2$ .

De las ecs. (2.98) y (2.99):

$$y_1 + y_2 = H, \quad y_2 = y_1 + \frac{2\tau_y}{\Delta P} \quad (2.107)$$

La distribución analítica para la solución dada en la ec. (2.106) se muestra en la Figura 2.27. Las superficies de fluencia se encuentran en  $y_1 = 0.1867$  m y  $y_2 = 0.8533$  m.

Para  $\tau_y = 0$ , es un fluido pseudoplástico o dilatante, es la misma solución de la ec. (2.106) con  $y_1 = y_2 = H/2 = 0.5$  m.

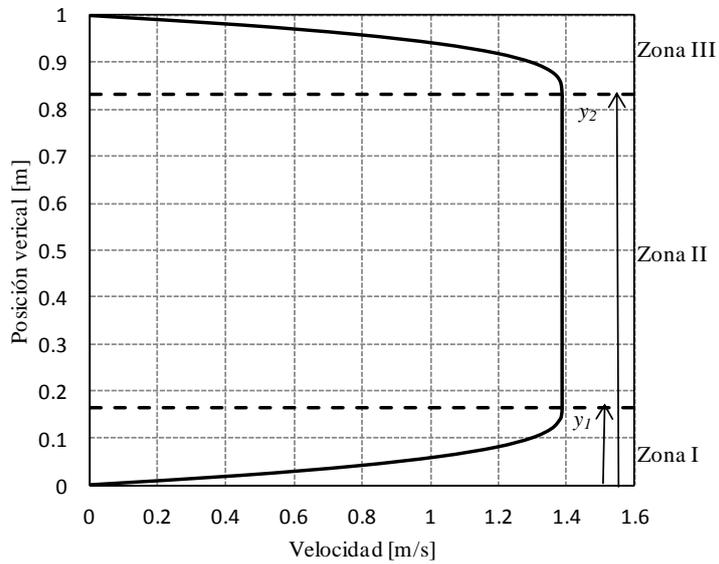


Figura 2.27. Flujo de Poiseuille, fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico,  $n=0.5$ . Distribución de la velocidad,  $k=10$  Pa.s.

### 2.8.3.2. Solución analítica para el fluido de Bingham

En el flujo de Poiseuille la distribución de velocidades para el fluido de Bingham se obtiene haciendo  $n = 1$  en la solución para el fluido de Herschel-Bulkley:

$$u(y) = \begin{cases} \frac{\Delta P}{2k} [(y_1 - y)^2 - (y_1)^2] & \text{para } 0 \leq y < y_1 \\ -\frac{\Delta P}{2k} (y_1)^2 & \text{para } y_1 \leq y \leq y_2 \\ \frac{\Delta P}{2k} [(y - y_2)^2 - (H - y_2)^2] & \text{para } y_2 \leq y \leq H \end{cases} \quad (2.108)$$

Las superficies de fluencia se encuentran en  $y_1$  y  $y_2$ :

$$y_1 = \frac{2\tau_y}{\Delta P} - \frac{H}{2}, \quad y_2 = \frac{2\tau_y}{\Delta P} + \frac{H}{2} \quad (2.109)$$

La distribución analítica para la solución dada en la ec. (2.108) se muestra en la Figura 2.28.

Para  $\tau_y = 0$ ,  $k = \mu$ , se obtiene la solución para fluido Newtoniano ( $y_1 = y_2 = H/2 = 0.5$  m):

$$u(y) = \left\{ \frac{\Delta P}{2\mu} \left[ \left( \frac{H}{2} - y \right)^2 - \left( \frac{H}{2} \right)^2 \right] \right. \text{ para } 0 \leq y \leq H \quad (2.110)$$

La distribución analítica para la solución dada en la ec. (2.110) se muestra en la Figura 2.29.

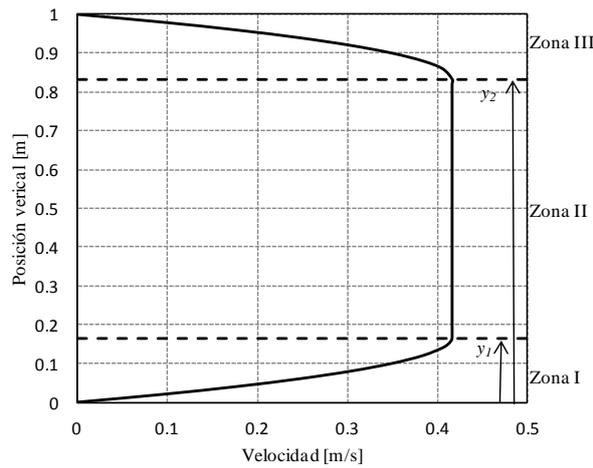


Figura 2.28. *Flujo de Poiseuille, fluido de Bingham. Distribución de la velocidad,  $\mu = 10$  Pa.s.*

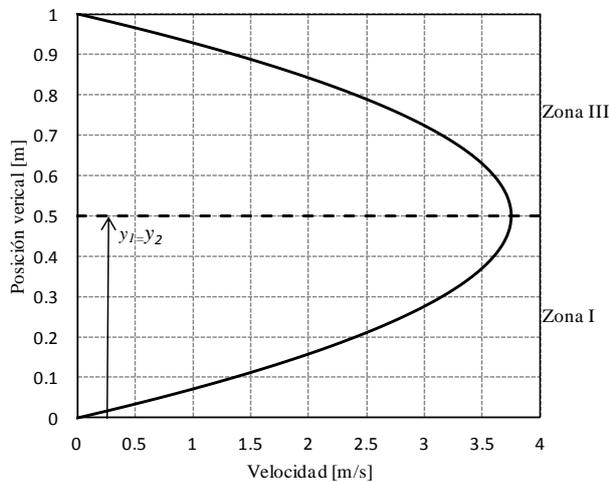


Figura 2.29. *Flujo de Poiseuille, fluido Newtoniano. Distribución de la velocidad,  $\mu = 10$  Pa.s.*

#### 2.8.4. Soluciones analíticas para los flujos con superficie libre

Los flujos con superficie libre pueden desarrollarse en canales abiertos y sobre la superficie terrestre. Pueden tener comportamiento Newtoniano, pero en la mayoría de los casos presentan comportamiento no-Newtoniano. Pueden tener carácter laminar o turbulento. Normalmente, en los flujos detríticos viscosos predomina el flujo laminar por encima del turbulento.

Uno de los problemas clásicos de flujo con superficie libre es el problema de la rotura de presa. El objetivo principal en este problema es estudiar el comportamiento del frente del flujo o el frente de la onda, determinado por la superficie libre.

El problema de rotura de presa puede estudiarse considerando el canal seco, como se muestra en la Figura 2.30 a), o el canal mojado, el cual presenta una lámina de agua aguas abajo de la presa, Figura 2.30 b). El canal puede ser de lecho horizontal o presentar una cierta pendiente, como se muestra en las Figura 2.30 y Figura 2.31. Se estudiarán aquí sólo los casos de canal seco horizontal y de canal seco inclinado.

Las soluciones analíticas para determinar el perfil de la superficie libre y la velocidad del frente de flujo se derivan de la aplicación del método de las características y las ecuaciones de aguas poco profundas (*shallow waters*) o de Saint-Venant.

La solución al problema de rotura instantánea de presas fue propuesta inicialmente por Barré de Saint-Venant en 1871 para un depósito de agua semi-infinito, una profundidad de agua inicial aguas abajo de la presa, fluido ideal y canal horizontal (Figura 2.30 b). Esta solución es también válida para un canal seco aguas abajo (Figura 2.30 a).

Ritter (Ritter, 1892) resolvió completamente el perfil de la onda o de la superficie libre por medio del método de las características, considerando fluido ideal (sin viscosidad) y la fricción en el fondo nula.

Stoker (Stoker, 1957) planteó una solución similar a la solución de Ritter en su libro clásico “*Water wave*” que fue generalizada luego por Mangeney (Mangeney et al., 2000). Esta solución considera la fricción en la base del canal sobre el cual se desplaza el flujo.

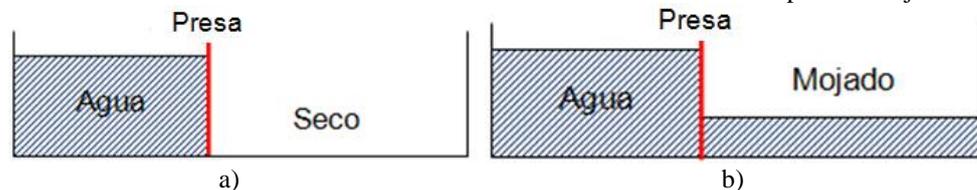


Figura 2.30. Esquema general para el problema de rotura de presa, con canal horizontal. a) Canal seco aguas abajo de la presa. b) Canal mojado aguas abajo de la presa.

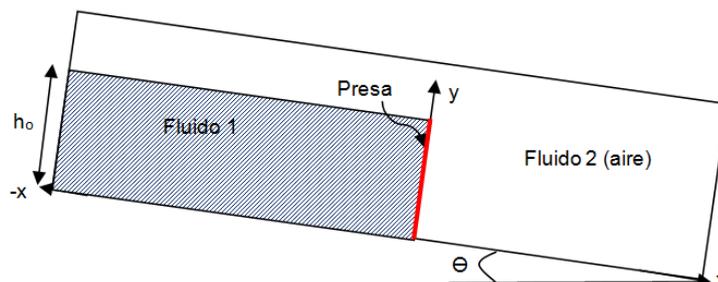


Figura 2.31. Esquema general para el problema de rotura de presa. Canal seco inclinado.

La solución generalizada de Mangeney utiliza una ley de fricción basada en la ley de Coulomb para avalanchas de detritos, nieve o deslizamientos. En inundaciones considera que no debe tenerse en cuenta la fricción. En esta solución, para un canal horizontal con ángulo de fricción interna del material nulo, se obtiene la solución de Ritter para un fluido ideal.

Tanto las observaciones experimentales como las de los datos del prototipo realizado para evaluar la rotura de la presa Malpasset (Faure and Nahas, 1961) han demostrado que el frente de flujo debido a la rotura instantánea de la presa se propaga de manera mucho más lenta que las predicciones para un fluido ideal y que el frente tiene forma redondeada. Por tanto, la solución de Ritter no es válida para predecir las propiedades del flujo en esta zona.

En estas observaciones el flujo se corresponde con la solución de Ritter desde la zona de inicio de la onda aguas arriba hasta la zona que se considera dominada por la resistencia al desplazamiento del flujo o zona de frente de ola (“*wave tip region*”), véase la Figura 2.34.

Bajo estas consideraciones, (Chanson, 2005a) plantea un modelo de onda difusivo para un canal horizontal con fricción en la base y velocidad inicial nula. Considera que la resistencia del flujo en esta zona es dominante y los términos de aceleración e inerciales son despreciables.

### 2.8.5. Modelo continuo de rotura de presa

La onda originada por la liberación repentina de la masa de un fluido en un canal puede representarse mediante las ecuaciones básicas para un flujo dinámico en un canal abierto. Las velocidades y la altura del agua cambian con el tiempo y para aplicaciones unidimensionales las ecuaciones de continuidad y de conservación de *momentum* (integradas en la altura) resultan en las ecuaciones de Saint-Venant. Estas ecuaciones se plantean bajo las hipótesis:

- El flujo es unidimensional.
- La curvatura de las líneas de flujo es pequeña y la presión se considera hidrostática.
- La resistencia del flujo para una velocidad y profundidad determinada es la misma que la de un flujo uniforme y constante.
- La densidad es constante.

Con estas hipótesis, el flujo puede caracterizarse por su velocidad  $V$  y la altura  $h$  (Chanson, 2004b). Las ecuaciones correspondientes son un sistema de dos ecuaciones diferenciales:

La ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{A}{B} \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{V}{B} \left( \frac{\partial A}{\partial x} \right)_{h=\text{constante}} = 0 \quad (2.111)$$

La ecuación de conservación de *momentum*:

$$\frac{\partial V}{\partial t} + V \frac{\partial V}{\partial x} + g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_f - S_o) = 0 \quad (2.112)$$

donde:

$t$  : tiempo,

$x$  : coordenada en la dirección del flujo,

$A$  : área de la sección transversal del canal,

$B$  : ancho de la superficie libre,

$S_0 = \text{sen}\theta$ : pendiente del canal positiva ( $>0$ ) y,

$S_f$  : gradiente hidráulico o pérdida de carga por unidad de longitud, definido por

$$S_f = \frac{f}{2} \frac{V^2}{(gD_H)}$$

donde  $D_H$  es el diámetro hidráulico del canal y  $f$  es el factor de fricción de Darcy, que es una función no lineal de la rugosidad relativa y del número de Reynolds.

### 2.8.5.1. Solución de Ritter sin fricción en el fondo

Considerando fluido ideal y la fricción con el fondo nula ( $S_f = S_o = 0$ ), Ritter obtuvo la solución analítica en forma adimensional para un canal horizontal (Figura 2.32):

Altura adimensional:

$$\frac{h}{h_0} = \frac{1}{9} \left( 2 - \frac{x}{t\sqrt{gh_0}} \right)^2 \quad \text{para} \quad -1 \leq \frac{x}{t\sqrt{gh_0}} \leq 2 \quad (2.113)$$

Velocidad adimensional:

$$\frac{V}{\sqrt{gh_0}} = \frac{2}{3} \left( 1 + \frac{x}{t\sqrt{gh_0}} \right) \quad \text{para} \quad -1 \leq \frac{x}{t\sqrt{gh_0}} \leq 2 \quad (2.114)$$

donde  $h_0$  es la altura inicial del flujo.

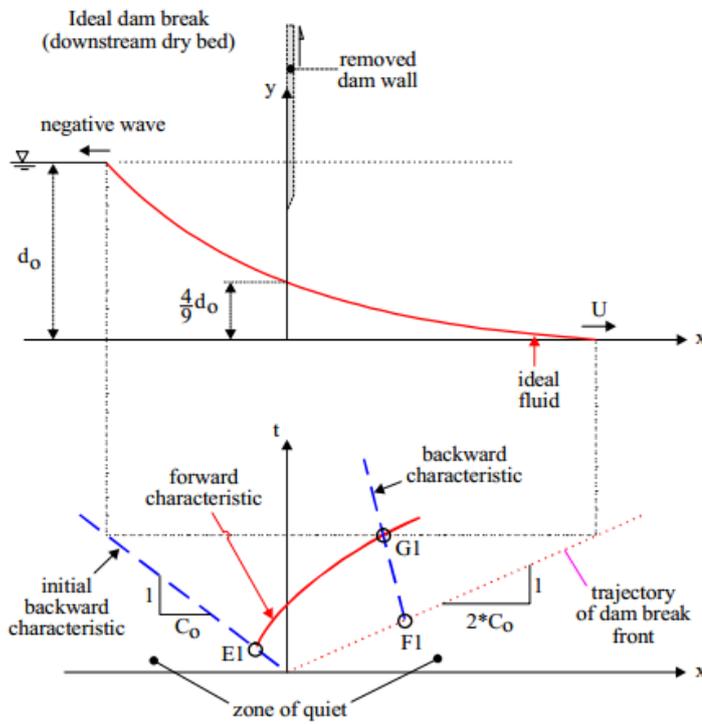


Figura 2.32. Solución de Ritter. Onda debida a la rotura instantánea de presa en un canal seco aguas abajo con velocidad inicial nula (Chanson, 2005a).

### 2.8.5.2. Solución generalizada de Mangeney con fricción en el fondo

A partir de las condiciones iniciales:

$$h(x,0) = \begin{cases} h_0, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases} \quad (2.115)$$

$$u(x,0) \equiv 0, \quad \forall x \in R$$

la solución generalizada de Mangeney determina perfiles en cualquier tiempo  $t$  dado, tras la liberación instantánea del fluido:

$$h(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 2C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \\ \frac{1}{9g \cos \theta} \left(-\frac{x}{t} + 2C_0 - \frac{1}{2}mt\right)^2 & \text{para } 2C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \leq x \leq -C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \\ h_0 & \text{para } x \geq -C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \end{cases} \quad (2.116)$$

y la velocidad en cualquier punto  $x$  y tiempo  $t$  dados:

$$u(x,t) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 2C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \\ \frac{2}{3} \left( -\frac{x}{t} + C_0 - mt \right) & \text{para } 2C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \leq x \leq -C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \\ 0 & \text{para } x > -C_0t - \frac{1}{2}mt^2 \end{cases} \quad (2.117)$$

La solución vale para  $m$  (negativa):

$$m = g(\cos \theta \tan \phi - \text{sen } \theta) \quad (2.118)$$

donde:

$\theta$  : pendiente del canal,

$\phi$  : ángulo de fricción en el fondo del canal.

y

$$C_0 := \sqrt{gh_0} \quad (2.119)$$

$C_0$  : velocidad de la onda debido a la acción de la gravedad en la región no perturbada.

La posición del frente, como puede verse en la Figura 2.33, está dada por la característica saliente de la región del fluido:

$$x_f(t) = 2C_0t \quad (2.120)$$

Una vez que el fluido comienza a desplazarse, se produce una ola hacia atrás, cuyo extremo se ubica en el punto:

$$x_r(t) = -C_0t \quad (2.121)$$

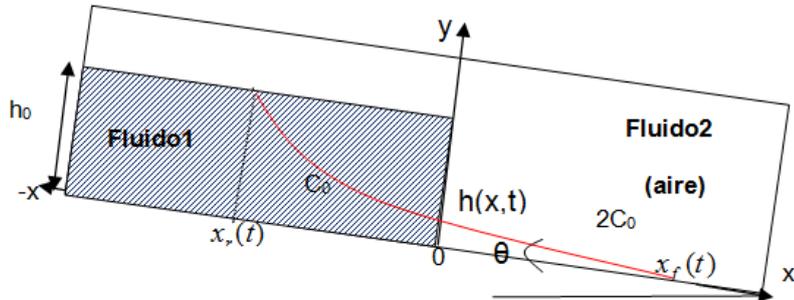


Figura 2.33. Esquema general para la solución analítica de Mangeney.

### 2.8.5.3. Solución de Chanson con fricción en el fondo

Esta solución está basada en la ecuación dinámica de onda, reducida a una ecuación de onda difusiva:

$$\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{f U}{8 C} + S_o = 0 \quad (2.122)$$

donde  $U$  es la velocidad del frente del flujo,  $C$  es la celeridad del frente de la onda,  $C := \sqrt{gh}$ ,  $S_o$  es la pendiente del fondo del canal y  $f$  es el coeficiente de fricción entre el flujo y el fondo del canal.

La transición entre el flujo ideal y la zona dominada por la resistencia al flujo se localiza en el punto  $x = x_1$  donde la profundidad es  $h_1$  y la velocidad es  $V_1$  y el punto donde finaliza la curvatura de la superficie libre se denomina  $x_s$  (Figura 2.34). Puede verse que la diferencia respecto al fluido ideal de Ritter es el frente de la onda entre  $x_1$  y  $x_s$ .

La superficie libre viene dada en términos adimensionales por:

$$\frac{h}{h_o} = \begin{cases} 1 & \text{para } \frac{x}{h_o} \leq -\sqrt{\frac{g}{h_o}} t \\ \frac{1}{9} \left( 2 - \frac{x}{t\sqrt{gh_o}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right)^2 & \text{para } -\sqrt{\frac{g}{h_o}} t \leq \frac{x}{h_o} \leq \left( \frac{3}{2} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} - 1 - \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right) \sqrt{\frac{g}{h_o}} t \\ \frac{\sqrt{\frac{f}{4} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} \frac{x_s - x}{h_o}}}{\sqrt{\frac{f}{4} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} \frac{x_s - x}{h_o}}} & \text{para } \left( \frac{3}{2} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} - 1 - \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right) \sqrt{\frac{g}{h_o}} t \leq \frac{x}{h_o} \leq \frac{x_s}{h_o} \\ 0 & \text{para } \frac{x}{h_o} > \frac{x_s}{h_o} \end{cases} \quad (2.123)$$

La solución exacta de  $U$  en la ecuación de continuidad es:

$$\frac{8}{3f} \frac{\left( 1 - \frac{1}{2} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right)^3}{\frac{U}{\sqrt{gh_o}}} = \sqrt{\frac{g}{h_o}} t \quad (2.124)$$

Y la localización adimensional de los puntos  $x_s$  y  $x_1$  es:

$$\frac{x_s}{h_o} = \left( \frac{3}{2} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} - 1 - \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right) \sqrt{\frac{g}{h_o}} t + \frac{4}{f} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} \left( 1 - \frac{1}{2} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right)^4 \quad (2.125)$$

$$\frac{x_1}{\sqrt{gh_o} t} = \left( \frac{3}{2} \frac{U}{\sqrt{gh_o}} - 1 - \sqrt{\frac{g}{h_o}} S_o t \right) \quad (2.126)$$

Esta formulación es válida en los instantes iniciales después de la rotura instantánea de la presa.

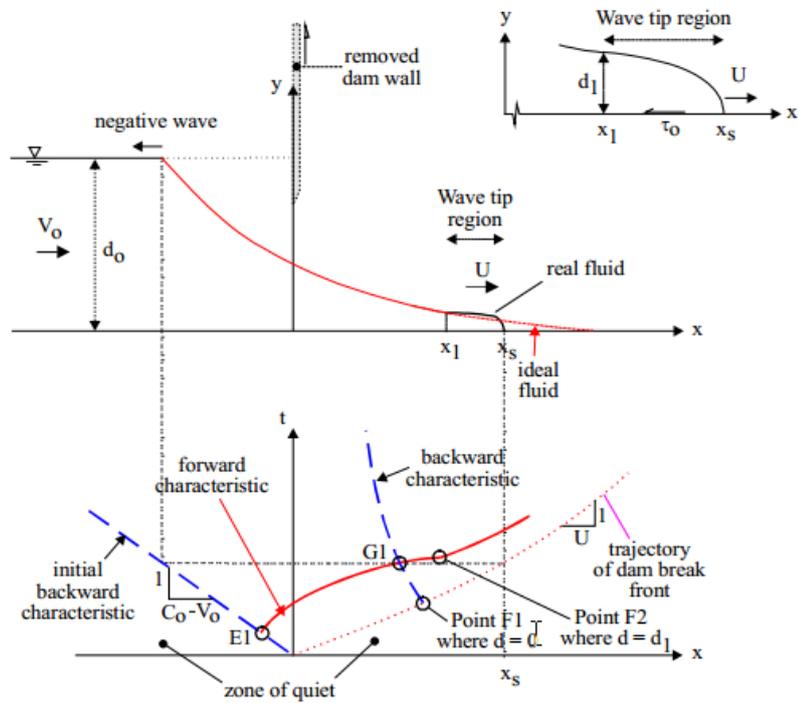


Figura 2.34. Onda debida a la rotura instantánea de la presa en un canal seco aguas abajo con velocidad inicial nula y con fricción en el fondo del canal (Chanson, 2005a).

## Capítulo 3

# Modelo discreto de elementos finitos para las ecuaciones de Navier-Stokes

### 3.1. Introducción

En este capítulo se describe el modelo discreto de elementos finitos (EF) para las ecuaciones de Navier-Stokes, correspondiente al modelo continuo que se describe en el capítulo 2. Este modelo discreto se utilizará para la simulación de los flujos confinados y con superficie libre y con reología viscoplástica de Bingham y Herschel-Bulkley.

En todos los casos se usa una malla fija para el estudio de estos flujos. En los flujos con superficie libre es necesario capturar en esta malla la superficie libre. Para ello, se adopta en este trabajo el modelo euleriano (Coppola, 2009a). Este modelo resuelve las ecuaciones de Navier-Stokes para los elementos llenos de líquido, incluyendo los elementos cortados por la superficie libre, y el aire como un problema desacoplado.

Los elementos usados, con interpolación lineal tanto para la velocidad como para la presión, así como la inclusión del término convectivo, comportan problemas de estabilidad. Para solventar estos problemas se ha usado la estabilización de subescalas algebraica (*Algebraic subgrid scale*, ASGS), la estabilización de subescalas ortogonales (*Orthogonal subgrid scale*, OSS) y la estabilización con subescalas ortogonales desacopladas (*Split-OSS*).

Las ecuaciones constitutivas para fluidos viscoplásticos investigadas en este trabajo son los modelos regularizados de Bingham y el de Herschel-Bulkley. Se presentan en este capítulo los detalles necesarios para su implementación en el modelo discreto de elementos finitos.

### 3.2. Ecuaciones de Navier-Stokes en forma fuerte y forma débil

Las ecuaciones de Navier-Stokes, planteadas inicialmente para fluidos Newtonianos, pueden usarse conjuntamente con los modelos reológicos viscoplásticos de Bingham y Herschel-Bulkley.

El modelo continuo (en forma fuerte), definido en el Capítulo 2, se resume a continuación.

Considérese  $\Omega$ , un dominio abierto y acotado dimensional de  $\mathbb{R}^d$ , donde  $d = 2$  ó  $3$  es el número de dimensiones del espacio,  $\Gamma = \partial\Omega$  es su contorno, que puede ser dividido en

el contorno con condiciones de Dirichlet (velocidad impuesta)  $\Gamma_d = \partial\Omega_d$ , el contorno con condiciones de Neumann (tracciones impuestas)  $\Gamma_n = \partial\Omega_n$  y el contorno con condiciones mixtas  $\Gamma_m = \partial\Omega_m$  de forma que  $\Gamma = \Gamma_d \cup \Gamma_n \cup \Gamma_m$ ,  $[0, T]$  es el intervalo de tiempo de análisis.

El problema de Navier-Stokes consiste en encontrar una velocidad  $\mathbf{u}$  y una presión  $p$  tal que:

$$\rho(\partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) - \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{f} \quad (3.1)$$

con

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3.2)$$

y

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.3)$$

en  $\Omega$ ,  $t \in [0, T]$ , donde  $\boldsymbol{\sigma}$  es el tensor de tensiones,  $\boldsymbol{\tau}$  es el tensor de tensiones desviadoras,  $\mathbf{f}$  es el vector de fuerzas de volumen y  $\rho$  es la densidad del fluido.

A esas ecuaciones deben añadirse condiciones iniciales de la forma  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_0$  en  $\Omega$ ,  $t_0 = 0$  y condiciones de contorno:

Condiciones de Dirichlet:

$$\mathbf{u} = \bar{\mathbf{u}} \text{ en } \Gamma_d \times [0, T] \quad (3.4)$$

Condiciones de Neumann:

$$\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{t} \text{ en } \Gamma_n \times [0, T] \quad (3.5)$$

Condiciones mixtas:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} &= 0 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_1 &= t_1 \\ \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{g}_2 &= t_2 \text{ en } \Gamma_m \times [0, T] \end{aligned} \quad (3.6)$$

donde  $\mathbf{n}$  es el vector unitario normal al contorno  $\partial\Omega$  y los vectores  $\mathbf{g}_1$  y  $\mathbf{g}_2$  (para el caso 3D) son base del espacio tangente a  $\Gamma_m$ . Por simplicidad se tomará en el contorno  $\Gamma_d$  la velocidad  $\bar{\mathbf{u}} = 0$ ,  $t \in [0, T]$ . El vector tracción es  $\mathbf{t} = [t_1, t_2]$ , donde  $t_1$  y  $t_2$  son las componentes de la tracción sobre el contorno con condiciones mixtas.

Las ecuaciones constitutivas para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos son de la forma:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{cases} 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{Newtoniano} \\ 2\mu(\dot{\gamma}) \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) & \text{No-Newtoniano} \end{cases} \quad (3.7)$$

donde  $\mu$  es la viscosidad dinámica para los fluidos Newtonianos y para los fluidos no-Newtonianos se considera la dependencia de la viscosidad con la velocidad de deformación,  $\mu(\dot{\gamma})$  (capítulo 2, sección 2.4.2).

La solución del problema discreto por el método de los elementos finitos está basada en la forma débil (también llamada formulación variacional) de las ecuaciones de Navier-Stokes. Se describe a continuación esta forma débil del problema continuo.

Sean  $\mathbf{V} = \mathbf{H}^1(\Omega)$  y  $Q = L^2(\Omega)$  los espacios de los campos de velocidad y presión en el problema continuo. Se usa la notación habitual, según la cual  $\mathbf{H}^1(\Omega)$  es el espacio de Hilbert de las funciones vectoriales cuyas componentes y derivadas primeras son de cuadrado integrable en  $\Omega$  en el intervalo de tiempo  $[0, T]$  y  $L^2(\Omega)$  es el espacio de funciones de cuadrado integrable en el mismo dominio.  $\mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y  $L_0^2(\Omega)$  son los subespacios correspondientes de funciones cuyo valor se anula en el contorno  $\partial\Omega$ .

La forma débil del problema continuo se obtiene multiplicando cada término de la ecuación de conservación de *momentum* (3.1) por una función de *test*  $\mathbf{v} \in \mathbf{H}_0^1(\Omega)$  y la ecuación de continuidad (3.3) por una función de *test*  $q \in Q$ :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.8)$$

Sustituyendo  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$  queda:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega \\ \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Integrando por partes el término correspondiente al tensor de tensiones se tiene:

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \boldsymbol{\tau} : \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.10)$$

donde  $\boldsymbol{\tau} = 2\mu \boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}) = 2\mu \nabla^s \mathbf{u}$  y  $\nabla^s(\cdot)$  es el gradiente simétrico del campo respectivo. Por tanto,

$$\int_{\Omega} (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} 2\mu \nabla^s \mathbf{u} : \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.11)$$

y

$$\int_{\Omega} \nabla p \cdot \mathbf{v} \, d\Omega = \int_{\Gamma} p \mathbf{n} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma - \int_{\Omega} p \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\Omega \quad (3.12)$$

Las tracciones a aplicar en el contorno son las dadas por las condiciones de Neumann y las condiciones mixtas.

Por tanto, el problema de la forma débil consiste en encontrar  $[\mathbf{u}, p] \in \mathbf{V}_0 \times Q$ ,  $\mathbf{V}_0 \subset \mathbf{H}_0^1(\Omega)$ ,  $Q \subset L^2(\Omega)$ , tal que:

$$\int_{\Omega} \rho \partial_t \mathbf{u} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho [\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} 2\mu \nabla^s \mathbf{u} : \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p \nabla \cdot \mathbf{v} \, d\Omega =$$

$$\int_{\Omega} \rho \mathbf{f} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_n} \mathbf{t} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_m} (t_1 \mathbf{g}_1 + t_2 \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \quad (3.13)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u} \, d\Omega = 0 \quad (3.14)$$

para todo  $[\mathbf{v}, q] \in \mathbf{V}_0 \times Q$  y que satisfacen de forma débil las condiciones iniciales.

La estrategia de discretización adoptada en este trabajo consiste en dos pasos. El primero es discretizar las ecuaciones en el tiempo usando un esquema de integración de diferencias finitas y luego, la aproximación de elementos finitos se desarrolla en el espacio. Este procedimiento desacopla errores que vienen de la discretización temporal y espacial. Es de destacar que la estrategia más común es al revés, primero se discretiza en el espacio y luego en el tiempo.

Tal como se ha indicado en la sección 2.3.2, en el caso de dos fluidos se resuelve cada fluido en su propio dominio. Las propiedades mecánicas a adoptar en cada punto son determinadas por la función *level set*.

### 3.2.1. Linealización del término convectivo

El segundo término de la ecuación (3.13) es el término convectivo. Este término es no lineal y, por tanto, es necesaria la linealización del mismo.

Para la linealización del término convectivo, se plantea un método iterativo con la aproximación:

$$[(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u}]^{i+1} \approx (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^{i+1} + \beta (\mathbf{u}^{i+1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^i - \beta (\mathbf{u}^i \cdot \nabla) \mathbf{u}^i \quad (3.15)$$

donde  $i$  es el contador de iteración y  $\beta$  puede ser 0 ó 1.

Los métodos de linealización más conocidos son el método de Picard (método secante) y el método de Newton-Raphson (método tangente). El método de Picard converge linealmente y es muy robusto, mientras que el método de Newton-Raphson tiene convergencia cuadrática si la iteración inicial está cerca de la solución. En la ec. (3.15),  $\beta = 0$  es la linealización de Picard y  $\beta = 1$  es la linealización de Newton-Raphson.

En este trabajo se utiliza siempre el método de Picard por su robustez.

### 3.2.2. Linealización de la ecuación constitutiva

La ecuación (3.13) puede extenderse para fluidos no-Newtonianos, en particular para los modelos viscoplástico de Bingham y de Herschel-Bulkley, sustituyendo  $\mu = \mu(\dot{\gamma})$  de los modelos dados en la sección 2.4.5.

Los métodos de linealización de la ecuación constitutiva son los mismos descritos para el término convectivo.

Para el método de Picard la tensión tangencial se linealiza

$$\boldsymbol{\tau}^i \approx 2\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{i-1})\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) \quad (3.16)$$

Para el método de Newton-Raphson la linealización es:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau}^i &\approx \boldsymbol{\tau}^{i-1} + \Delta\boldsymbol{\tau}^i \\ &= \boldsymbol{\tau}^{i-1} + 2\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{i-1})\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) + 2\Delta\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^i)\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) \\ &= \boldsymbol{\tau}^{i-1} + 2\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{i-1})\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) + 2\left[\left[\frac{\partial\mu}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right]^{i-1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)\right]\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1}) \\ &= \boldsymbol{\tau}^{i-1} + \left[2\mu(\dot{\boldsymbol{\gamma}}^{i-1}) + 2\left[\frac{\partial\mu}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}}\right]^{i-1} : \Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^{i-1})\right]\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i) \end{aligned} \quad (3.17)$$

que es una expresión lineal en el incremento  $\Delta\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{u}^i)$  que, a su vez, es lineal con  $\mathbf{u}^i$ .

### 3.2.3. La integración temporal

La presencia de una derivada temporal en la ec. (3.13) precisa de un algoritmo de integración en el tiempo.

La discretización temporal puede hacerse por diferencias finitas usando la regla trapezoidal generalizada. Éste es el método de diferencias finitas más simple y de un solo paso. Incluye como caso particular el método de diferenciación hacia atrás de Euler *Backward differentiation formula* (BDF1), entre otras posibilidades.

Se considera una partición uniforme del intervalo de tiempo de análisis  $[0, T]$  con tamaño de paso de tiempo  $\delta t$  y se denota por  $f^n$  la aproximación de la función  $f$  dependiente del tiempo, con  $n$  como el paso de tiempo en el cual se calcula la solución, en el tiempo  $t^n = n\delta t$ . Los valores más usados de  $\theta$  son:  $\theta = 0.5$  para el método de Crank-Nicolson y  $\theta = 1$  para el método de diferenciación hacia atrás de Euler.

Se tiene entonces que

$$\begin{aligned} f^{n+\theta} &= \theta f^{n+1} + (1-\theta)f^n \\ \delta t f^n &= \frac{1}{\theta\delta t}(f^{n+\theta} - f^n) \end{aligned} \quad (3.18)$$

Usando la linealización de Picard para el término convectivo, se denota por  $f^{n,i}$  a la iteración  $i$  para la incógnita  $f$  en  $n$ .

La regla trapezoidal de la forma variacional en las ecuaciones (3.13) y (3.14) consiste en, dada  $\mathbf{u}^n$ , encontrar  $\mathbf{u}^{n+\theta} \in \mathbf{V}$  y  $p^{n+\theta} \in Q$  como la solución del problema:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho^{n+\theta} \frac{\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n}{\theta \delta t} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho^{n+\theta} \left[ (\mathbf{u}^{n+\theta, i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+\theta, i} \right] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \\
& \int_{\Omega} 2\mu(\dot{\gamma})^{n+\theta, i-1} \nabla^s \mathbf{u}^{n+\theta, i} : \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p^{n+\theta, i} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+\theta} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}^{n+\theta} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_n} (t_1^{n+\theta} \mathbf{g}_1 + t_2^{n+\theta} \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \\
& \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+\theta, i} \, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.19}$$

para todo  $[\mathbf{v}, q] \in \mathbf{V}_0 \times Q$ .

El término  $\mathbf{f}^{n+\theta}$  es la fuerza en el tiempo intermedio  $n+\theta$  del intervalo  $[t^n, t^{n+\theta}]$ . El mismo significado tienen  $\mathbf{t}^{n+\theta}$ ,  $t_1^{n+\theta}$  y  $t_2^{n+\theta}$ .

La velocidad y presión  $\mathbf{u}^{n+1}$  y  $p^{n+1}$  a partir de  $\mathbf{u}^{n+\theta}$  y  $p^{n+\theta}$  se calculan como:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}^{n+1} &= \frac{1}{\theta} (\mathbf{u}^{n+\theta} - \mathbf{u}^n) + \mathbf{u}^n \\
p^{n+1} &= \frac{1}{\theta} (p^{n+\theta} - p^n) + p^n
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Para  $\theta=1$  y dada  $\mathbf{u}^n$ , el problema discretizado en el tiempo consiste en encontrar a  $\mathbf{u}^{n+1} \in \mathbf{V}$  y  $p^{n+1} \in Q$  tal que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \rho^{n+1} \frac{\mathbf{u}^{n+1} - \mathbf{u}^n}{\delta t} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho^{n+1} \left[ (\mathbf{u}^{n+1, i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}^{n+1, i} \right] \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \\
& \int_{\Omega} 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1, i-1} \nabla^s \mathbf{u}^{n+1, i} : \nabla^s \mathbf{v} \, d\Omega - \int_{\Omega} p^{n+1} (\nabla \cdot \mathbf{v}) \, d\Omega = \\
& \int_{\Omega} \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\Omega + \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}^{n+1} \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma + \int_{\Gamma_n} (t_1^{n+1} \mathbf{g}_1 + t_2^{n+1} \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v} \, d\Gamma \\
& \int_{\Omega} q \nabla \cdot \mathbf{u}^{n+1, i} \, d\Omega = 0
\end{aligned} \tag{3.21}$$

para todo  $(\mathbf{v}, q) \in \mathbf{V}_0 \times Q$ .

### 3.2.4. La discretización espacial por elementos finitos. Formulación de Galerkin

Para la discretización espacial mediante el método de elementos finitos es necesario construir sub-espacios discretos  $\mathbf{V}_h \subset \mathbf{V}$ , y  $Q_h \subset Q$  que aproximen los espacios continuos.

Sean  $\mathbf{V}_h$  y  $Q_h$  los espacios de elementos finitos para interpolar las funciones vectoriales (velocidad) y escalares (presión), respectivamente, y sea  $\Omega$  una partición de elementos finitos  $\Omega = \bigcup \Omega^e$ ,  $e = 1, \dots, n_{ele.}$ , donde  $n_{ele.}$  es el número de elementos.

En este trabajo se utilizará igual interpolación tanto para la velocidad como para la presión, interpolación P1-P1 (campos continuos, lineales a trozos para elementos triangulares en 2D y tetrahédricos en 3D) e interpolación bilineal Q1-Q1 (campos continuos, bilineales a trozos, para cuadriláteros en 2D y hexahedros en 3D).

En la formulación estándar de Galerkin se toman las funciones de *test* iguales a las funciones de forma, así que  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$  y  $q_h \in Q_h$ .

El problema monolítico asociado con las ecuaciones de Navier-Stokes, discretizado en el tiempo usando un esquema BDF Euler, linealizando el término convectivo y la ecuación constitutiva por medio del método de Picard se reduce a lo siguiente:

Dada una velocidad  $\mathbf{u}_h^n$  en el tiempo  $t^n$  y los valores de las incógnitas en la iteración  $i-1$  en el tiempo  $t^{n+1}$ , encontrar  $\mathbf{u}_h^{n+1,i} \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h^{n+1,i} \in Q_h$ , tales que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \rho^{n+1,i} \frac{\mathbf{u}_h^{n+1,i} - \mathbf{u}_h^n}{\delta t} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \rho^{n+1} (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1,i} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \\ \int_{\Omega} 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i-1} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} p^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega = \\ \int_{\Omega} \mathbf{t}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + \int_{\Gamma_n} \mathbf{t}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \, d\Gamma + \int_{\Gamma_n} (t_1^{n+1} \mathbf{g}_1 + t_2^{n+1} \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{v}_h \, d\Gamma \\ \int_{\Omega} q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i} \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.22)$$

para  $i=1, 2, \dots$ , hasta la convergencia, o sea, hasta que se cumpla  $\mathbf{u}_h^{n+1,i} \approx \mathbf{u}_h^{n+1,i-1}$  y  $p_h^{n+1,i} \approx p_h^{n+1,i-1}$ , en la norma deseada.

### 3.3. Estabilización con subescalas

El cálculo con elementos finitos de flujos incompresibles con la formulación estándar de Galerkin presenta dos fuentes de inestabilidades.

La primera es la presencia del término convectivo en las ecuaciones de gobierno que puede resultar en oscilaciones numéricas en el campo de la velocidad. Tales oscilaciones son mayores cuando el término convectivo domina sobre el término viscoso (Codina and Blasco, 1997), por ejemplo, en problemas con alto número de Reynolds o en flujos con capa límite o zonas de gradientes fuertes como los flujos turbulentos.

La segunda fuente de inestabilidad es la combinación inapropiada de espacios de interpolación para los campos de velocidad y presión. Esta falta de estabilidad produce oscilaciones numéricas en el campo de las presiones. Para que el problema discreto sea estable los espacios de interpolación usados para la velocidad y la presión deben satisfacer la condición inf-sup de compatibilidad o condición de Babuška-Brezzi (Brezzi and Fortin, 1991), que se expresa como:

$$\inf_{q_h \in Q_h} \sup_{\mathbf{v}_h \in V_h} \frac{(q_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h)}{\|q_h\| \| \mathbf{v}_h \|_1} \geq \beta > 0 \quad (3.23)$$

para una constante  $\beta$  independiente de  $h$ .  $\|\cdot\|$  es la norma en  $L^2(\Omega)$  y  $\|\cdot\|_1$  es la norma en  $\mathbf{H}^1(\Omega)$ . La formulación de igual interpolación lineal usada en este trabajo no cumple con la condición Babuška-Brezzi.

En ambos casos el problema necesita estabilizarse para poder probar convergencia a la solución del problema.

Los métodos de estabilización más usados en la actualidad están basados en los métodos de subescalas. Hughes fue el pionero en estos métodos de subescalas (*SubGrid scale*, SGS) que permitieron la justificación teórica de esquemas de estabilización propuestas anteriormente (*Streamline-upwind Petrov-Galerkin*, SUPG Brooks (Brooks et al., 1982) y *Galerkin-least-square*, GLS (Hughes et al., 1986).

Las primeras formulaciones de estabilización con subescala fueron diseñadas para resolver el problema de difusión-convección, considerando o no el término de reacción para casos estacionarios primero y, luego, para casos transitorios. Estos métodos han sido aplicado también a las ecuaciones de Stokes y las ecuaciones de Navier-Stokes, entre otras (Codina, 2000a). Actualmente se usan en problemas muy variados, tanto de mecánica de fluidos ((Codina, 2000a), (Codina, 2000b), (Codina 2001), (Coppola-Owen and Codina, 2005), (Guash and Codina, 2007), (Badía and Codina, 2009) y (Planas et al., 2011)) como de mecánica de sólidos ((Chiumenti et al., 2002), (Cervera et al., 2003), (Cervera et al., 2004a), (Cervera et al., 2004b), (de Saracibar et al., 2006), (Cervera and Chiumenti, 2009), (Cervera et al., 2010a), (Cervera et al., 2010b), (Cervera et al., 2011), (Cervera et al., 2012) y (Chiumenti et al., 2013)).

Los métodos de subescalas (o multiescala) están basados en descomponer la solución, por ejemplo, la velocidad  $\mathbf{u}$ , en dos componentes  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}$ ; una componente  $\mathbf{u}_h$ , resuelta en la escala de la malla de elementos finitos considerada y una subescala  $\bar{\mathbf{u}}$ , que no puede ser capturada por la partición de elementos finitos y que se resuelve analíticamente. La aproximación particular usada para la escala submalla define el modelo numérico.

La componente  $\bar{\mathbf{u}}$  representa el error  $\mathbf{u} - \mathbf{u}_h$  de la componente de la escala gruesa. La solución  $\bar{\mathbf{u}}$  en la escala fina se obtiene a partir del residuo de la solución en la escala gruesa. La utilización de la función de Green es una buena opción para la solución en la escala fina. Sin embargo, la subescala obtenida a partir de estas funciones de Green pertenece a un subespacio dimensional infinito, que no es local. Para evitar este problema, se localiza la solución de esta escala fina en el interior de cada elemento finito y se supone  $\bar{\mathbf{u}} = 0$  en el contorno de los elementos. Para resolver el problema en el interior de cada elemento, Hughes (Hughes et al., 1998) aproximó las funciones Green por medio de funciones burbuja (*bubble functions*) en el método de estabilización de subescalas algebraicas (*Algebraic subgrid scale stabilization method*, ASGS) para una ecuación escalar de difusión-reacción. Codina (Codina, 2000a) amplió esta aproximación algebraica aplicándola a sistemas escalares multidimensionales.

Posteriormente, Codina (Codina, 2000b) propuso adoptar un espacio de subescalas ortogonales al espacio de los elementos finitos, fundamentando así el método de estabilización de subescalas ortogonales (*Orthogonal subscale stabilization method*, OSS). El método OSS se ha aplicado al problema de Stokes, al problema de convección-difusión-reacción y a las ecuaciones de Navier-Stokes, entre otros ((Principe, 2008), (Codina, 2000a)).

La estabilización OSS ha sido reformulada en una nueva versión del método llamada estabilización *split*-OSS (Codina, 2002), computacionalmente más ventajosa.

En este trabajo se utilizarán el método ASGS y el método OSS y una vez verificada la eficacia del método OSS, éste se utilizará como método de estabilización en prácticamente todos los problemas estudiados para flujo confinado. En el flujo con superficie libre 3D se ha utilizado la versión *split*-OSS.

### 3.3.1. Método SGS

En lo que sigue se aproxima  $\mathbf{u} \approx \mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}$  y  $p \approx p_h$ , lo cual implica que la velocidad es aproximada por su componente en elementos finitos y por un término adicional de subescala (*SubGrid scale*, SGS).

Se reemplaza  $\mathbf{u}$  del problema continuo por  $\mathbf{u} = \mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}$  y  $p = p_h$ , para el problema discreto en espacio y continuo en tiempo, de forma que:

$$\int_{\Omega} [\rho(\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}) + \rho((\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}) + 2\mu(\dot{\gamma})(\nabla^s(\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla^s \mathbf{v}) - (p_h \nabla \cdot \mathbf{v}) - \rho(\mathbf{f} \cdot \mathbf{v})] d\Omega = 0 \quad (3.24)$$

$$\int_{\Omega} q \nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) d\Omega = 0 \quad (3.25)$$

para todo  $[\mathbf{v}, q] \in \mathbf{V} \times Q$ .

En lo anterior se considera que la viscosidad  $\mu = \mu(\dot{\gamma})$  no depende de la subescala  $\bar{\mathbf{u}}$ . Asimismo, se desprecia  $\partial_t \bar{\mathbf{u}}$ , aunque existe la posibilidad de considerar esta derivada temporal, en el método denominado de subescalas dinámicas (Codina, 2000a).

Haciendo  $\mathbf{v} = \mathbf{v}_h + \bar{\mathbf{v}}$  y  $q = q_h + \bar{q}$  las ecuaciones (3.24) y (3.25) pueden separarse en dos sistemas, uno para cada escala; el primero para todo  $[\mathbf{v}_h, q_h] \in \mathbf{V}_h \times Q_h$  y el segundo para todo  $[\bar{\mathbf{v}}, \bar{q}] \in \bar{\mathbf{V}} \times \bar{Q}$ .

El primer sistema de ecuaciones es:

$$\int_{\Omega} [\rho (\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) + \rho ((\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}})) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla^s (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h) - (p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h) - \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h)] d\Omega = 0 \quad (3.26)$$

para todo  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ , y

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) d\Omega = 0 \quad (3.27)$$

para todo  $q_h \in Q_h$ . El segundo sistema es:

$$\int_{\Omega} [\rho (\partial_t (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \rho (((\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}})) \cdot \bar{\mathbf{v}}) + 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla^s (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{v}}) - (p_h \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \rho (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}})] d\Omega = 0 \quad (3.28)$$

para todo  $\bar{\mathbf{v}} \in \bar{\mathbf{V}}$ , y

$$\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) d\Omega = 0 \quad (3.29)$$

para todo  $\bar{q} \in \bar{Q}$ .

Reagrupando las ecuaciones de incompresibilidad (3.27) y (3.29), se tiene:

$$\int_{\Omega} [\rho (\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) + \rho (((\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}})) \cdot \mathbf{v}_h) + 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla^s (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h) - (p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h) - \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h)] d\Omega = 0 \quad (3.30)$$

para todo  $\mathbf{v}_h \in \mathbf{V}_h$ ,

$$\int_{\Omega} [\rho (\partial_t (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \rho (((\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}})) \cdot \bar{\mathbf{v}}) + 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla^s (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}) \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{v}}) - (p_h \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}}) - \rho (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}})] d\Omega = 0 \quad (3.31)$$

para todo  $\bar{\mathbf{v}} \in \bar{\mathbf{V}}$ , y

$$\int_{\Omega} [(q_h \nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}})) + (\bar{q} \nabla \cdot (\mathbf{u}_h + \bar{\mathbf{u}}))] d\Omega = 0 \quad (3.32)$$

para todo  $q_h \in Q_h$ ,  $\bar{q} \in \bar{Q}$ .

En la ecuación de conservación de *momentum* (3.30) los términos que involucran a  $\bar{\mathbf{u}}$  se integran por partes y, denotando por  $\mathbf{n}$  el vector normal exterior al dominio de integración, se tiene que

$$\int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{v}_h \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{n} \bar{\mathbf{u}}) \mathbf{v}_h \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \bar{\mathbf{u}} \cdot \mathbf{v}_h) \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (3.33)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \bar{\mathbf{u}} \nabla \mathbf{v}_h \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \bar{\mathbf{u}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \mathbf{v}_h \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (3.34)$$

Lo mismo se hace en la ec. (3.31), con las integrales que involucran a  $\mathbf{u}_h$  y a  $p_h$ :

$$\int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \mathbf{u}_h (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_h) \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{u}_h \, d\Omega - \int_{\Omega} (\nabla \mathbf{u}_h \cdot \bar{\mathbf{v}}) \mathbf{u}_h \, d\Omega \quad (3.35)$$

$$\int_{\Omega} \nabla \mathbf{u}_h \nabla \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} (\mathbf{n} \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \mathbf{u}_h \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \quad (3.36)$$

$$\int_{\Omega} p_h \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} p_h \bar{\mathbf{v}} \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla p_h \bar{\mathbf{v}} \, d\Omega \quad (3.37)$$

Integrando dentro de cada elemento en la ec. (3.32), para los términos que involucran a  $\bar{\mathbf{u}}$  se tiene

$$\int_{\Omega} q_h \nabla \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} q_h (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla q_h \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (3.38)$$

$$\int_{\Omega} \bar{q} \nabla \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega = \int_{\Gamma} \bar{q} (\mathbf{n} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \, d\Gamma - \int_{\Omega} \nabla \bar{q} \bar{\mathbf{u}} \, d\Omega \quad (3.39)$$

Por tanto, la ec. (3.30) del primer sistema queda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\rho (\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) + \rho ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h) + 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla^s \mathbf{u}_h \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h) - (p_h, \nabla \cdot \mathbf{v}_h) - \\ \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h)] \, d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} [(\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \cdot \bar{\mathbf{u}}) - ((2\mu(\dot{\gamma}) \nabla \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h) \cdot \bar{\mathbf{u}})] \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.40)$$

Las funciones  $\bar{\mathbf{u}}$  y  $\bar{\mathbf{v}}$  se anulan en el contorno de los elementos y  $\nabla \bar{\mathbf{u}} = 0$  en el dominio. La ec. (3.40) puede reorganizarse como

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} [\rho (\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \mathbf{v}_h) + \rho ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \cdot \mathbf{v}_h) + 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla^s \mathbf{u}_h \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h) - (p_h \nabla \cdot \mathbf{v}_h) - \\ \rho (\mathbf{f} \cdot \mathbf{v}_h)] \, d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} (\bar{\mathbf{u}} \cdot (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma}) \nabla \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h)) \, d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.41)$$

Ahora es necesario aproximar  $\bar{\mathbf{u}}$  usando la ecuación (3.31) y sustituirla en las ecuaciones (3.30) y (3.32).

El segundo sistema con la ec. (3.31) y  $q = 0$ , separando los términos de la subescala respecto a la escala grande, queda

$$\sum_e \int_{\Omega^e} [\rho ((\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{v}}) - 2\mu(\dot{\gamma}) ((\nabla \cdot \nabla^s \bar{\mathbf{u}}) \cdot \bar{\mathbf{v}})] d\Omega = \int_{\Omega} [-\rho (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \rho (\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \rho ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \cdot \bar{\mathbf{v}}) - (2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h) \cdot \bar{\mathbf{v}}) + (\nabla p_h \cdot \bar{\mathbf{v}})] d\Omega \quad (3.42)$$

donde se observa que los términos de la subescala (función de  $\bar{\mathbf{u}}$ ) pueden determinarse a partir de los términos de la escala grande; puede reescribirse

$$(\mathbf{R}_h, \bar{\mathbf{v}}) = \int_{\Omega} [-\rho (\mathbf{f} \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \rho (\partial_t \mathbf{u}_h \cdot \bar{\mathbf{v}}) + \rho ((\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) \cdot \bar{\mathbf{v}}) - (2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h) \cdot \bar{\mathbf{v}}) + (\nabla p_h \cdot \bar{\mathbf{v}})] d\Omega \quad (3.43)$$

donde  $\mathbf{R}_h$  es el residuo de la ecuación de momento en la escala grande, o sea

$$\mathbf{R}_h = \int_{\Omega} [-\rho \mathbf{f} + \rho (\partial_t \mathbf{u}_h) + \rho (\mathbf{u}_h \cdot \nabla \mathbf{u}_h) - 2\mu(\dot{\gamma}) (\nabla \cdot \nabla^s \mathbf{u}_h) + \nabla p_h] d\Omega \quad (3.44)$$

Por otro lado, la ecuación de la incompresibilidad (3.32), despreciando la subescala  $\bar{q}$ , queda

$$\int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h] d\Omega - \sum_e \int_{\Omega^e} [\bar{\mathbf{u}} \cdot \nabla q_h] d\Omega = 0 \quad (3.45)$$

La subescala de velocidad,  $\bar{\mathbf{u}}$ , se aproxima de distinta forma en cada método de estabilización.

En el método de las subescalas algebraicas (ASGS),  $\bar{\mathbf{u}}$  se toma proporcional al residuo  $\mathbf{R}_h$

$$\bar{\mathbf{u}} = -\tau_1 \mathbf{R}_h \quad (3.46)$$

donde  $\tau_1$  es un parámetro numérico.

En el método de las subescalas ortogonales (OSS) la subescala  $\bar{\mathbf{u}}$  se toma proporcional a la proyección ortogonal de dicho residuo  $\mathbf{R}_h$  :

$$\bar{\mathbf{u}} = -\tau_1 P_h^\perp \mathbf{R}_h = -\tau_1 (\mathbf{R}_h - P_h \mathbf{R}_h) \quad (3.47)$$

donde  $P_h$  es la proyección sobre el espacio de los elementos finitos y  $P_h^\perp = \mathbf{I} - P_h$  es la proyección ortogonal.

Comparando ambos métodos se observa que la diferencia radica en sustituir el término  $\mathbf{R}_h$  de la versión ASGS por  $P_h^\perp \mathbf{R}_h$  en la versión OSS.

### 3.3.2. Método ASGS

De acuerdo con la formulación anterior, el problema discreto con linealización de Picard, integración temporal BDF1 y estabilización ASGS consiste en:

Hallar  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  y  $p_h^{n+1}$  tales que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h - \right. \\ \left. p_h^{n+1,i} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\ \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \left( \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h) \cdot \mathbf{R}_h^{n+1} \right) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot \mathbf{R}_h^{n+1} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.48)$$

Los términos con segundas derivadas de las funciones de elementos finitos son cero para elementos lineales. La forma final, sustituyendo  $\mathbf{R}_h^{n+1}$ , queda

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h - \right. \\ \left. p_h^{n+1,i} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\ \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \left( \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot \left( -\rho \mathbf{f}^{n+1,i} + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) + \nabla p_h^{n+1} \right) \right) d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot \left( -\rho \mathbf{f}^{n+1,i} + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) + \nabla p_h^{n+1} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.49)$$

### 3.3.3. Método OSS

El problema discretizado con linealización de Picard, integración temporal BDF1 y estabilización OSS es:

Hallar  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  y  $p_h^{n+1}$  tales que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h - \right. \\ \left. p_h^{n+1,i} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\ \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \left( \rho \mathbf{u}_h^{n+1,i} \cdot \nabla \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla \cdot \nabla^s \mathbf{v}_h \right) \cdot P_h^{\perp} \mathbf{R}_h^{n+1} d\Omega = 0 \\ \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot P_h^{\perp} \mathbf{R}_h^{n+1} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

Sustituyendo  $\mathbf{R}_h^{n+1}$ , queda

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\ & \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \left( \rho \mathbf{u}_h^{n+1,i} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \right) \cdot P_h^\perp \left( -\rho \mathbf{f}^{n+1,i} + \rho \left( \mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i} \right) + \nabla p_h^{n+1} \right) d\Omega = 0 \\ & \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot P_h^\perp \left( -\rho \mathbf{f}^{n+1,i} + \rho \left( \mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i} \right) + \nabla p_h^{n+1} \right) d\Omega = 0 \quad (3.51) \end{aligned}$$

En el caso de considerar distintas densidades, como por ejemplo en problemas con interfase entre fluidos inmiscibles, el residuo en puntos de integración de lados opuestos a la interfase varía fuertemente y en proporción a la densidad. En tales casos, puede adoptarse una proyección modificada (Coppola-Owen, 2009b):

$$P_{h\rho}(\mathbf{R}_h^{n+1}) = \rho P_h \left( \frac{\mathbf{R}_h^{n+1}}{\rho} \right) \quad (3.52)$$

Sustituyendo esta proyección modificada, la formulación final para el método OSS queda:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \rho \left( \mathbf{u}_h^{n+1,i} \cdot \nabla \mathbf{v}_h \right) \cdot \\ & \left[ (\rho \mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}) - \rho P_h \left( \mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i} + \frac{\nabla p_h^{n+1}}{\rho} - \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\rho} \right) \right] d\Omega = 0 \\ & \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot \left[ (\rho \mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}) - \right. \\ & \qquad \qquad \qquad \left. \rho P_h \left( \mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i} + \frac{\nabla p_h^{n+1}}{\rho} - \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\rho} \right) \right] d\Omega = 0 \quad (3.53) \end{aligned}$$

### 3.3.4. Método *split*-OSS

EL método *split*-OSS ((Codina, 2000a), (Codina et al., 2009a)) separa la proyección del término convectivo y de la presión en dos proyecciones, lo que permite una convergencia a la solución más rápida que en los métodos ASGS y OSS. Esto lo hace ventajoso para la resolución de problemas en 3D. Éste método resulta en

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla^s \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\
& \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot [(\rho \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}) - \rho P_h (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})] d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot [\nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}] - \rho P_h \left( \frac{\nabla p_h^{n+1}}{\rho} - \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\rho} \right) d\Omega = 0 \quad (3.54)
\end{aligned}$$

### 3.3.5. Subescala de presión

En algunas situaciones la introducción de la subescala para la presión,  $\bar{p}$ , resulta ventajosa porque ayuda a cumplir la condición de incompresibilidad que puede ser excesivamente relajada cuando se introduce sólo la subescala de velocidad. Con argumentos análogos a los de las secciones anteriores, la subescala de presión debe ser proporcional al residuo de la ecuación de continuidad en la escala de los elementos finitos (para ASGS) o a su proyección ortogonal (para OSS):

$$\bar{p}^{n+1} = -\tau_2 \left[ (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) - \xi p_h (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}) \right] \quad (3.55)$$

con  $\xi = 1$  en el caso de OSS y cero para ASGS. Esta subescala se agrega a la ecuación de conservación de *momentum*.

De acuerdo con lo anterior, la forma monolítica de la divergencia de las ecuaciones de Navier-Stokes usando linealización de Picard y discretización en tiempo con BDF1 y estabilización con el método ASGS es:

Dada una velocidad  $\mathbf{u}_h^n$  en el tiempo  $t^n$  y los valores de las incógnitas en la iteración  $i-1$ , en el tiempo  $t^{n+1}$  encontrar  $\mathbf{u}_h^{n+1,i} \in \mathbf{V}_h$  y  $p_h^{n+1,i} \in Q_h$ , tales que:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1,i} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1,i} : \nabla^s \mathbf{v}_h - \right. \\
& \qquad \qquad \qquad \left. p_h^{n+1,i} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\
& \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 (\rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h)) \cdot \left( -\rho \mathbf{f}^{n+1,i} + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) + \nabla p_h^{n+1,i} \right) d\Omega + \\
& \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_2^{n+1,i-1} (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i-1}) d\Omega = 0
\end{aligned}$$

$$\int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i}] d\Omega + \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_1^{n+1,i} \nabla q_h \cdot [\rho (\mathbf{u}_h^{n+1,i-1} \cdot \nabla) \mathbf{u}_h^{n+1,i} + \nabla p_h^{n+1,i} - \mathbf{f}] d\Omega = 0 \quad (3.56)$$

Para el método OSS, queda:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla^s \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h - \right. \\
& \quad \left. p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot \\
& \quad [(\rho \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}) - \rho P_h (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \frac{\nabla p_h^{n+1}}{\rho} - \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\rho})] d\Omega + \\
& \quad \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_2^{n+1,i-1} (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i-1}) \, d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}] \, d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot [(\rho \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1} + \nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}) - \\
& \quad \rho P_h ((\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}) + \frac{\nabla p_h^{n+1}}{\rho} - \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\rho})] \, d\Omega = 0 \tag{3.57}
\end{aligned}$$

Y para la versión *split*-OSS resulta:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \left[ \frac{\rho}{\delta t} (\mathbf{u}_h^{n+1} - \mathbf{u}_h^n) \cdot \mathbf{v}_h \, d\Omega + 2\mu(\dot{\gamma})^{n+1,i} \nabla^s \mathbf{u}_h^{n+1} : \nabla^s \mathbf{v}_h + \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1,i}) \cdot \mathbf{v}_h - \right. \\
& \quad \left. p_h^{n+1} \nabla \cdot \mathbf{v}_h - \mathbf{f}^{n+1} \cdot \mathbf{v}_h \right] d\Omega + \\
& \quad \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \rho (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{v}_h) \cdot [(\rho \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}) - \rho P_h (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})] \, d\Omega + \\
& \quad \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau_2^{n+1,i-1} (\nabla \cdot \mathbf{v}_h) (\nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1,i-1}) \, d\Omega = 0 \\
& \int_{\Omega} [q_h \nabla \cdot \mathbf{u}_h^{n+1}] \, d\Omega + \sum_e \int_{\Omega^e} \tau_1 \nabla q_h \cdot [(\nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}) - \rho P_h (\frac{\nabla p_h^{n+1}}{\rho} - \frac{\mathbf{f}^{n+1}}{\rho})] \, d\Omega = 0 \tag{3.58}
\end{aligned}$$

Para las iteraciones  $i=1,2,\dots$  hasta la convergencia, es decir, hasta que  $u_h^{n+1,i-1} \approx u_h^{n+1,i}$  y  $p_h^{n+1,i} \approx p_h^{n+1,i-1}$  en la norma elegida.

### 3.3.6. Parámetros de estabilización

Los parámetros  $\tau_1$  y  $\tau_2$  de las ec. (3.46), (3.47) y (3.55) se eligen con el fin de obtener esquemas numéricos estables y velocidades de convergencia óptimas (ver (Codina, 2000c)). Estos parámetros se calculan para cada elemento  $\Omega_e$ . Para  $\tau_1$  se toma:

$$\tau_1 = \left[ c_1 \frac{\mu}{(h)^2} + c_2 \frac{\rho |\mathbf{u}^e|}{h} \right]^{-1} \quad (3.59)$$

donde  $h$  es la longitud del elemento  $e$  y  $|\mathbf{u}^e|$  es la norma de la velocidad en el elemento  $e$ ,  $c_1$  y  $c_2$  son coeficientes a elegir,  $\mu$  y  $\rho$  son la viscosidad dinámica y densidad del fluido, respectivamente.

Para  $\tau_2$  se toma:

$$\tau_2 = \left( \frac{h}{\tau_1} \right)^2 \quad (3.60)$$

Se recomiendan los valores de  $c_1 = 4$  y  $c_2 = 2$  (Codina, 2000).

### 3.3.7. Formulación matricial del problema

Se presenta a continuación la versión matricial para el método *split* OSS, algo más compleja que los métodos ASGS y OSS. Se utiliza linealización de Picard y discretización en tiempo BDF1.

Las proyecciones  $P_h(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1})$  y  $P_h\left(\frac{1}{\rho} \nabla p_h^{n+1}\right)$  se tratan con un ciclo iterativo al igual que para la linealización del término convectivo. Se definen

$$\mathbf{y}_h^{n+1} = P_h(\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}) \quad (3.61)$$

y

$$\mathbf{z}_h^{n+1} = P_h\left(\frac{1}{\rho}(\nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1})\right) \quad (3.62)$$

En lo que sigue se usa la notación compacta  $(a, b) = \int_{\Omega} a \cdot b \, d\Omega$ . En esta notación, las proyecciones de las ecs. (3.61) y (3.62) son la solución de:

$$(\mathbf{y}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^*) = (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \mathbf{u}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^*) \quad (3.63)$$

$$(\mathbf{z}_h^{n+1}, \mathbf{v}_h^*) = \left( \frac{1}{\rho} (\nabla p_h^{n+1} - \mathbf{f}^{n+1}), \mathbf{v}_h^* \right) \quad (3.64)$$

para todo  $\mathbf{v}_h^* \in \mathbf{V}_h^*$ , donde  $\mathbf{v}_h^*$  es el espacio  $\mathbf{V}_h$  ampliado con los vectores de funciones continuas asociados a los nodos del contorno.

El sistema algebraico resultante es

$$\begin{aligned} \mathbf{M} \frac{1}{\delta t} \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{K}(\mathbf{U}^{n+1}) \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{G} \mathbf{P}^{n+1} + \mathbf{S}_u(\tau_1; \mathbf{U}^{n+1}) \mathbf{U}^{n+1} \\ - \mathbf{S}_y(\tau_1; \mathbf{U}^{n+1}) \mathbf{Y}^{n+1} + \mathbf{S}_d(\tau_2) \mathbf{U}^{n+1} = \mathbf{F}^{n+1} \end{aligned} \quad (3.65)$$

$$\mathbf{D} \mathbf{U}^{n+1} + \mathbf{S}_p(\tau_1) \mathbf{P}^{n+1} - \mathbf{S}_z(\tau_1) \mathbf{Z}^{n+1} = 0 \quad (3.66)$$

$$\mathbf{M}_\pi \mathbf{Y}^{n+1} - \mathbf{C}(\mathbf{U}^{n+1}) \mathbf{U}^{n+1} = 0 \quad (3.67)$$

$$\mathbf{M}_\pi \mathbf{Z}^{n+1} - \mathbf{G}_\pi \mathbf{P}^{n+1} = 0 \quad (3.68)$$

donde  $\mathbf{U}$ ,  $\mathbf{P}$ ,  $\mathbf{Y}$  y  $\mathbf{Z}$  son los vectores de las incógnitas nodales para la velocidad  $\mathbf{u}$ , la presión  $p$  y las proyecciones  $\mathbf{y}$  y  $\mathbf{z}$ , respectivamente.  $\mathbf{F}$  es el vector de fuerzas nodales.

La ec. (3.65) corresponde a la ec. (3.57). La ec. (3.66) corresponde a la ec. (3.58). Las ecuaciones (3.67) y (3.68) son las proyecciones de los residuos de la ecuación de conservación de *momentum* y la ecuación de incompresibilidad, respectivamente.

Si se denotan los índices nodales  $a$ ,  $b$ , los índices espaciales con  $i$ ,  $j$ , la función de forma de los nodos  $a$  por  $N^a$  y la función de forma de los nodos  $b$  por  $N^b$ , entonces las matrices de las ecuaciones anteriores son:

$$\mathbf{M}_{ij}^{ab} = (N^a, \rho N^b) \delta_{ij}$$

$$\mathbf{M}_{\pi ij}^{ab} = (N^a, N^b) \delta_{ij}$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{U}^{n+1})_{ij}^{ab} = (N^a, \rho \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla N^b) \delta_{ij} + (\nabla N^a, 2\mu \nabla^s N^b) \delta_{ij}$$

$$\mathbf{G}_i^{ab} = (N^a, \partial_i N^b)$$

$$\mathbf{G}_{\pi i}^{ab} = (N^a, \partial_i N^b / \rho)$$

$$\mathbf{S}_u(\tau_1; \mathbf{U}^{n+1})_{ij}^{ab} = (\tau_1 \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla N^a, \rho \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla N^b) \delta_{ij}$$

$$\mathbf{S}_y(\tau_1; \mathbf{U}^{n+1})_{ij}^{ab} = (\tau_1 \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla N^a, \rho N^b) \delta_{ij}$$

$$\mathbf{S}_d(\tau_2)_{ij}^{ab} = (\tau_2 \nabla \cdot N^a, \nabla \cdot N^b)$$

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_j^{ab} &= (N^a, \partial_j N^b) \\
\mathbf{S}_p(\tau_1)^{ab} &= (\tau_1 \nabla N^a, \nabla N^b) \\
\mathbf{S}_z(\tau_1)_j^{ab} &= (\tau_1 \partial_j N^a, \rho N^b) \\
\mathbf{C}(\mathbf{U}^{n+1})_{ij}^{ab} &= (N^a, \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla N^b) \delta_{ij} \\
\mathbf{F}_i^a &= (N^a, \mathbf{f}_i)
\end{aligned} \tag{3.69}$$

donde  $\delta_{ij}$  es la delta de Kronecker.

### 3.4. Modelo discreto para flujos con superficie libre

El modelo continuo para resolver los flujos con superficie libre se ha descrito en el Capítulo 2. Ubica la interfase por medio de la función de la superficie de nivel (*level set*).

#### 3.4.1. Modelo discreto de la función de la superficie de nivel

La evolución de la superficie libre está dada por la función escalar suave  $\psi(\mathbf{x}, t)$  sobre el dominio  $\Omega$  mediante la ecuación de transporte de la variable escalar  $\psi$  (véase la sección 2.3.2):

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \psi = 0 \quad (3.70)$$

Sea  $X = L^2(\Omega)$  el espacio del campo de la variable  $\psi$  en el problema continuo.  $L^2(\Omega)$  es el espacio de funciones de cuadrado integrable en  $\Omega$  en el intervalo de tiempo  $[0, T]$ .  $L_0^2(\Omega)$  son los subespacios correspondientes de funciones cuyo valor se anula en el contorno  $\partial\Omega$ .

La forma débil de la ec. (3.70) se obtiene multiplicando cada término de la ecuación por un elemento arbitrario  $x \in X$ . El problema consiste en encontrar un  $\psi \in L^2(X)$  tal que

$$\int_{\Omega} \partial_t \psi x \, d\Omega + \int_{\Omega} [\mathbf{u} \cdot \nabla \psi] x \, d\Omega \quad (3.71)$$

para todo  $x \in X$ .

La discretización temporal se hace mediante el esquema de integración en el tiempo de Euler (BDF1).

Para la discretización espacial mediante el método de EF es necesario construir subespacios discretos  $X_h \subset X$  que aproximen el espacio continuo.

Sea  $X_h$  el espacio de elementos finitos para interpolar la función escalar  $\psi$  y sea  $\Omega$  una partición de elementos finitos  $\Omega = \bigcup \Omega^e$ ,  $e = 1, \dots, n_{ele.}$ , donde  $n_{ele.}$  es el número de elementos.

Al ser un problema de convección pura, precisa de estabilización. El problema discreto en espacio y tiempo, estabilizado con el método ASGS resulta como:

Dada una velocidad  $\mathbf{u}_h^{n+1}$  en un tiempo  $t^{n+1}$  y una función  $\psi_h^n \in X_h$  en un tiempo  $t^n$ , encontrar  $\psi_h^{n+1} \in X_h$  resolviendo:

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \frac{1}{\delta t} \psi_h^{n+1} x_h \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \psi_h^{n+1} x_h \, d\Omega + \\ & \sum_{e=1}^{n_{el}} \int_{\Omega^e} \tau^{n+1} (\mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla x_h) \left( \frac{1}{\delta t} \psi_h^{n+1} + \mathbf{u}_h^{n+1} \cdot \nabla \psi_h^{n+1} \right) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (3.72)$$

Al igual que en las secciones anteriores, el parámetro de estabilización  $\tau$  se elige con el fin de obtener un esquema numérico estable con velocidad de convergencia óptima. Se calcula dentro de cada dominio del elemento  $\Omega^e$  como:

$$\tau = \frac{h}{2|\mathbf{u}^e|} \quad (3.73)$$

donde  $h$  es la longitud del elemento en la dirección del flujo y  $|\mathbf{u}^e|$  es la norma de la velocidad en el elemento  $e$ .

### 3.4.2. Reinicialización

Para la solución numérica de la función de superficie de nivel es preferible que ésta no presente grandes gradientes. Como la función sólo debe cumplir el requisito de ser nula en la interfase, se utiliza una función distancia signada ( $|\nabla\psi|=1$ ). Bajo la evolución de la ecuación de transporte, la función  $\psi$  no permanecería siempre como una función de distancia signada. Por tanto, esta función debe reinicializarse para que sea en todo momento una función de distancia signada. Existen diferentes formas de hacerlo. En este trabajo se redefine  $\psi$  en cada nodo de la malla de acuerdo con la expresión:

$$\psi = \text{sgn}(\psi^0)d \quad (3.74)$$

donde  $\psi^0$  representa el valor calculado de  $\psi$ ,  $d$  es la distancia desde el nodo al frente (interfase) y  $\text{sgn}(\cdot)$  es el signo del valor encerrado en el paréntesis. La distancia se calcula como la distancia perpendicular desde cada nodo  $i$  a la interfase  $p$ , que es la distancia mínima  $d_i = \min_p \{d_i, p\}$ , como se muestra en la Figura 3.1. Sólo se reinicia esta función en cinco capas de nodos a cada lado de la interfase.

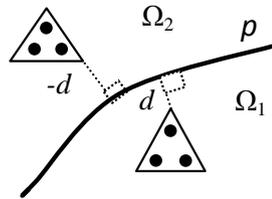


Figura 3.1. Distancia desde cada nodo del elemento a la interfase para dos elementos ubicados en lados opuestos de la misma.

### 3.4.3. Acoplamiento entre las ecuaciones de flujo y la función de superficie de nivel

Las ecuaciones de Navier-Stokes y la ecuación de transporte de la interfase están acopladas. Las propiedades del fluido necesarias para calcular la velocidad  $\mathbf{u}$  y la presión  $p$  de-

penden de la función de transporte de la interfase  $\psi_h$ . La función  $\psi$  se transporta utilizando la velocidad  $\mathbf{u}$ . La aproximación usada para desacoplarlas es utilizar la velocidad  $\mathbf{u}_h^n$  del paso anterior para la convección de la superficie libre (ec.(3.70)). Esto introduce una restricción en el paso de tiempo, de tal manera que el frente no avance más de una capa de elementos a la vez.

#### 3.4.4. Integración numérica de los elementos cortados por la interfase

Para imponer la condición de superficie libre ( $\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{t} = \mathbf{0}$ ) exactamente donde se sitúa la interfase por la función *level set* se utiliza una regla de integración modificada en los elementos cortados por la interfase. De esta manera se integra exactamente cada fase de fluido.

La regla de integración modificada se obtiene dividiendo en subelementos el elemento cortado de manera tal que la interfase coincida exactamente con una cara de dos subelementos. En esta cara se impone exactamente la condición de interfase. La división del elemento cortado se representa en la Figura 3.2. La integración en cada subelemento se hace con la misma regla de integración que el elemento original.

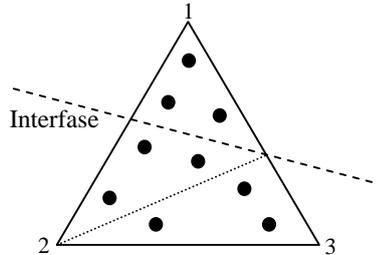


Figura 3.2. Regla de integración modificada para un elemento cortado por la interfase.

### 3.5. Estudio de convergencia

El presente estudio de convergencia evalúa los méritos relativos de los métodos de estabilización ASGS y OSS aplicados al problema de flujos viscoplásticos en condiciones isotérmicas. Ambos métodos permiten utilizar igual orden de interpolación tanto para la velocidad como para la presión. En particular, se utilizarán elementos finitos cuadriláteros con interpolación bilineal Q1Q1.

El análisis se realiza para un flujo paralelo de Poiseuille 2D con un número de Reynolds casi nulo ( $Re \approx 0$ ), problema para el cual se dispone de solución analítica para la mayoría de los casos estudiados.

En el estudio se incluyen el fluido Newtoniano, el fluido dilatante y los fluidos viscoplásticos. Los modelos constitutivos viscoplásticos a estudiar son los modelos regularizados de Papanastasiou y los modelos de doble viscosidad tanto para el fluido de Bingham como para el fluido de Herschel-Bulkley.

El objetivo del estudio de convergencia es evaluar la evolución del error con el refinamiento de malla para ambos métodos de estabilización para cada uno de los fluidos mencionados anteriormente y mostrar las principales diferencias entre ambos para cada caso.

El sistema algebraico de ecuaciones no-lineales se resuelve por medio del método iterativo de Picard, en un esquema discreto monolítico asociado a las ecuaciones de Navier-Stokes.

En las próximas secciones, se presenta el problema a resolver, la metodología utilizada y los modelos regularizados empleados. Luego, se evalúa la convergencia numérica de los métodos de estabilización ASGS y OSS.

#### 3.5.1. Flujo de Poiseuille

El flujo de Poiseuille ocurre entre dos placas paralelas infinitas, consideradas estacionarias, separadas una cierta distancia  $H$  (Figura 3.3). El flujo se produce como consecuencia de la aplicación de un gradiente constante de presión, que da lugar a una distribución de velocidades, velocidades de deformación y tensiones a través del ancho del dominio. El flujo es paralelo, con  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , y la solución es unidimensional  $\mathbf{u} = (u(y), 0)$ .

#### 3.5.2. Geometría y condiciones de contorno

Al ser un problema estacionario, no se precisa establecer condiciones iniciales.

Las condiciones de contorno son (ver Figura 3.3):

- En las placas superior e inferior  $\mathbf{u} = (u_x, u_y) = (0, 0)$ .
- En los contornos de entrada (izquierda) y salida (derecha)  $P_o = 1800 Pa$  y  $P_L = 0 Pa$ .

El gradiente de presión es:

$$\frac{dp}{dx} = -\Delta P = -\left(\frac{P_o - P_L}{L}\right) = -300 Pa/m \quad (3.75)$$

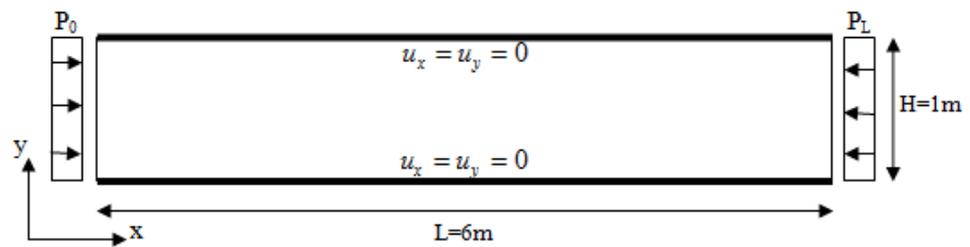


Figura 3.3. Geometría y condiciones de contorno.

### 3.5.3. Mallas de elementos finitos

Se utilizan mallas estructuradas como la mostrada en la Figura 3.4.

El criterio de refinamiento es dividir sistemáticamente la dimensión vertical del elemento  $h$  para lo cual, se parte de una malla gruesa (M1) hasta llegar a una malla fina (M5). En la Tabla 3.1 se muestra el tamaño del elemento ( $h$ ), el número de nodos y elementos para cada malla.

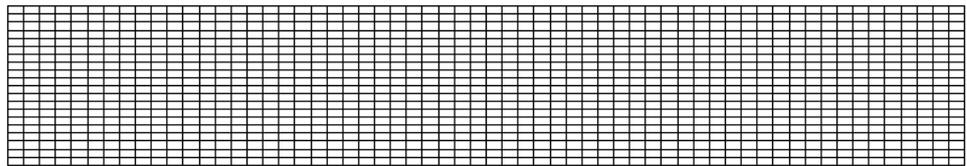


Figura 3.4. Malla estructurada M2.

Malla	$h(m)$	Número de nodos	Número de elementos
M1	0.1	671	600
M2	0.05	1281	1200
M3	0.025	2501	2400
M4	0.0125	4941	4800
M5	0.00625	9821	9600

Tabla 3.1. Tamaño, número de nodos y elementos para las diferentes mallas estructuradas.

### 3.5.3.1. Medida del error

La velocidad de convergencia en la velocidad, la velocidad de deformación, la viscosidad y la tensión cortante se determina para cada uno de los modelos constitutivos y para los métodos de estabilización ASGS y OSS. Para ello, se calcula en la norma discreta  $L^2$  del error,  $E$ , para cada variable. El error para la velocidad  $U$  se define como:

$$E = \frac{\left[ \sum_{a=1}^{n_{\text{nodos}}} (U^a - u^a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}}{\left[ \sum_{a=1}^{n_{\text{nodos}}} (u^a)^2 \right]^{\frac{1}{2}}} \quad (3.76)$$

donde  $n_{\text{nodos}}$  es el número de nodos ubicados en la sección central del canal,  $a$  es el nodo considerado donde se determina el error;  $U^a$  es el valor de la solución de referencia (analítica o numérica) de la velocidad en el nodo  $a$  y  $u^a$  es el valor obtenido numéricamente para la malla en cuestión.

Para la velocidad de deformación, la viscosidad y la tensión, se calcula la norma discreta  $L^2$  del error en los puntos medios de los lados de la sección central.

La velocidad de convergencia asintótica que puede esperarse para la velocidad en elementos bilineales  $Q1Q1$  es de 2. Para la velocidad de deformación, la viscosidad y la tensión la velocidad de convergencia asintótica esperada es de 1.

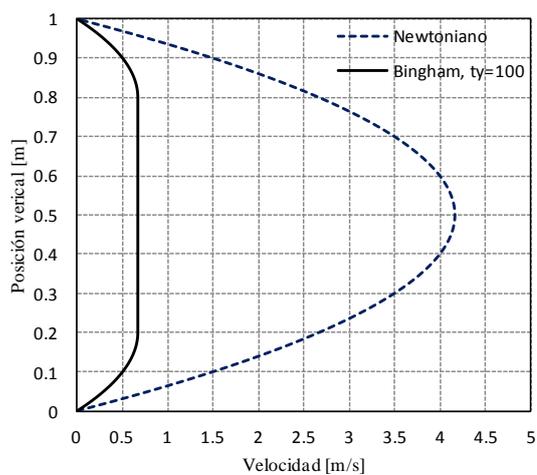
### 3.5.4. Fluido Newtoniano y de Bingham

Para el estudio de convergencia en el fluido Newtoniano y de Bingham las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización son los de la Tabla 3.2.

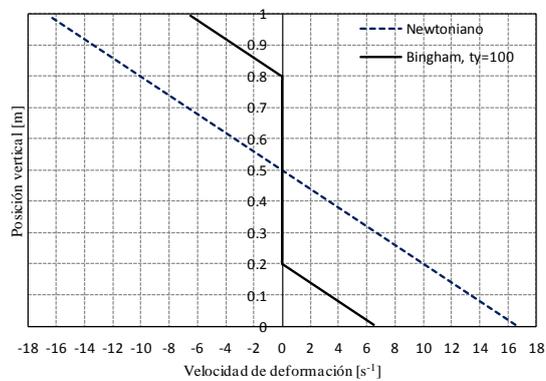
En las Figura 3.5 a), b) y c) se dibujan las correspondientes soluciones analíticas para el flujo de Poiseuille en velocidades, velocidad de deformación y tensión de cortante (sección 2.8.3.2).

<b>Propiedades constitutivas</b>		
Modelo	Newtoniano	Bingham
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	10	10
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	-	100
<b>Regularización</b>		
Parámetro de regularización $m$ [s]	-	1000

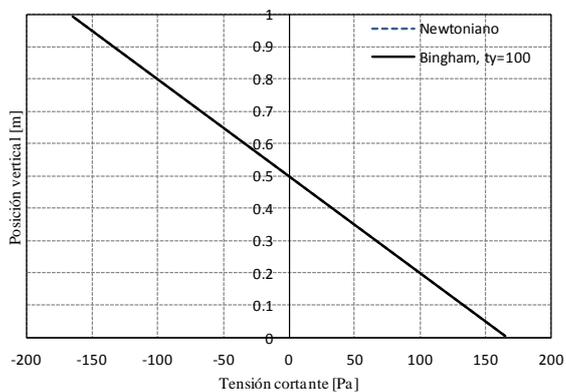
Tabla 3.2. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.



a)



b)



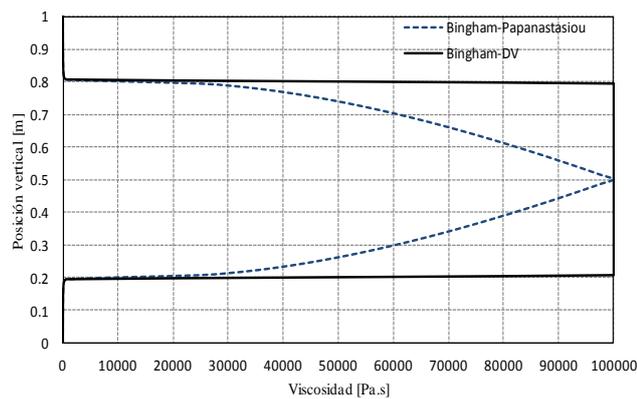
c)

Figura 3.5. **Flujo de Poiseuille**. Variación de a) Velocidad. b) Velocidad de deformación. c) Tensión de cortante para un fluido Newtoniano y de Bingham ideal.

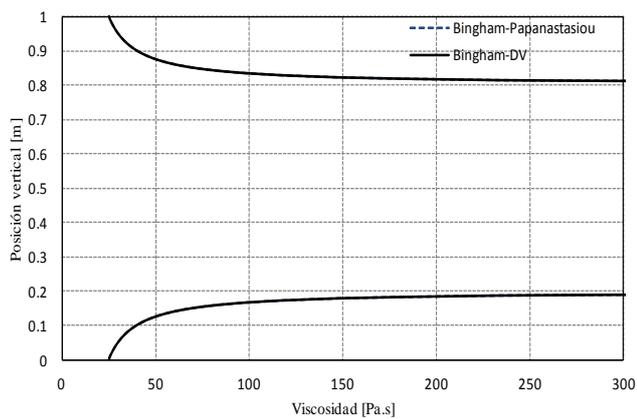
### 3.5.5. Modelos regularizados de Bingham

Los modelos regularizados viscoplásticos de Bingham usados son el modelo de Bingham-Papanastasiou y el de Bingham-DV (ec. (2.58) y ec. (2.67), respectivamente).

En la Figura 3.6 a) se muestra la viscosidad para ambos modelos. Las diferencias entre ellos se presentan cerca de la superficie de fluencia y en la zona de no fluencia, como se muestra en la Figura 3.6 b). En esta zona de no fluencia, el modelo Bingham-Papanastasiou muestra viscosidad variable, mientras que Bingham-DV la viscosidad es constante, véase la Figura 3.6 a).



a)



b)

Figura 3.6. **Flujo de Poiseuille.** Distribuciones de viscosidad para el modelo regularizado de Papanastasiou y Bingham-DV. a) Vista completa. b) Vista ampliada de las gráficas hasta un valor de viscosidad igual a 300 Pa.s.

### 3.5.6. Convergencia

#### 3.5.6.1. Modelo Newtoniano

La solución obtenida con el método OSS es nodalmente exacta, y su error es nulo. El error que se muestra en la Figura 3.7 a) es el error de redondeo.

En la Figura 3.7 a) puede verse que el error en el método ASGS presenta la pendiente esperada (2). Similar comportamiento ocurre para la velocidad de deformación en la Figura 3.7 b).

El método OSS aproxima mejor el gradiente de presión en los contornos del dominio que el método ASGS (Codina and Blasco, 1997). En este caso, esta mejora produce la solución exacta para la velocidad en los nodos.

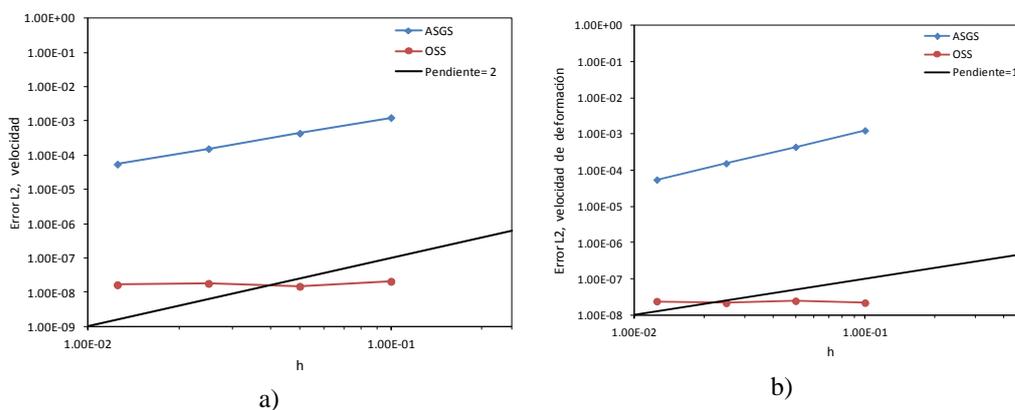


Figura 3.7. **Fluido Newtoniano.** Error discreto  $L^2$  para a) Velocidad. b) Velocidad de deformación.

#### 3.5.6.2. Modelos regularizados de Papanastasiou y bilineal

En la Figura 3.8 a) se muestra que la convergencia de la velocidad para el modelo regularizado de Bingham-Papanastasiou con el método OSS muestra menor error que para el método ASGS aproximadamente en un orden de magnitud. Ambos métodos se ajustan a la pendiente asintótica esperada (2). Los resultados del método ASGS son similares a los obtenidos en el flujo Newtoniano, mientras que el método OSS no da resultados nodales exactos.

La velocidad de deformación (Figura 3.8 b)) presenta similar comportamiento, con la pendiente esperada en ambos métodos.

Para el modelo bilineal, Figura 3.9 a), se recuperan los resultados del modelo Newtoniano: valores nodales exactos de la velocidad para el método OSS y convergencia óptima para el método ASGS (Figura 3.8 b)).

En la Figura 3.10 se muestran los resultados correspondientes a la convergencia en el cálculo de la viscosidad y de las tensiones de cortante, para el modelo regularizado de Papanastasiou, y en la Figura 3.11, para el regularizado bilineal.

Ambos resultados prácticamente se superponen, demostrando que en todos los casos la velocidad de convergencia es la esperada (pendiente 1), pero que el error cometido es notablemente mayor que en las magnitudes anteriores.

No se observan prácticamente diferencias entre los errores de los métodos OSS y ASGS. Para el modelo de Bingham, este error está asociado al cambio de viscosidad en la superficie de fluencia. Este hecho se pone de manifiesto claramente en la Figura 3.12, donde se ha recalculado el error excluyendo los elementos en los que se sitúan las superficies de fluencia. En este caso, el modelo regularizado bilineal recupera el comportamiento observado en el caso Newtoniano, con el método OSS proporcionando resultados nodalmente exactos, y el error del método ASGS reduciéndose notablemente. Por el contrario, para la regularización de Papanastasiou, los resultados para ambos métodos siguen siendo prácticamente idénticos, debido a que la viscosidad es variable en todo el dominio.

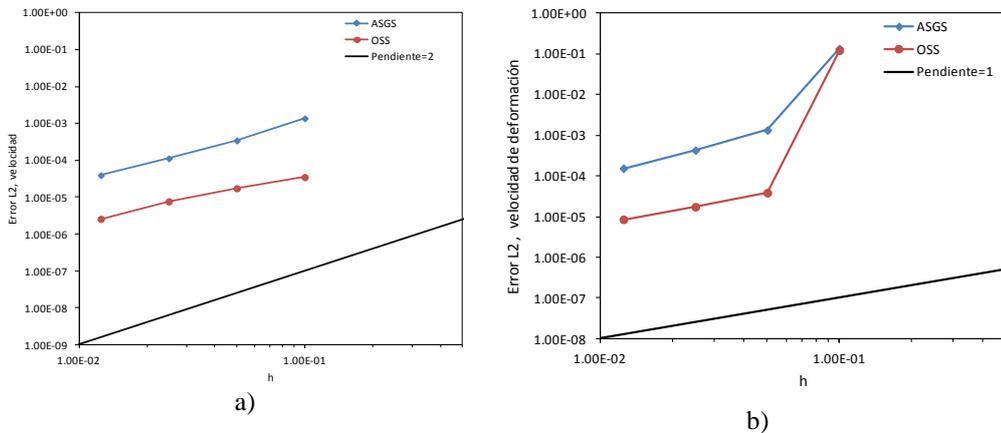


Figura 3.8. Fluido de Bingham, regularización de Papanastasiou. Error discreto en  $L^2$  para a) Velocidad. b) Velocidad de deformación.

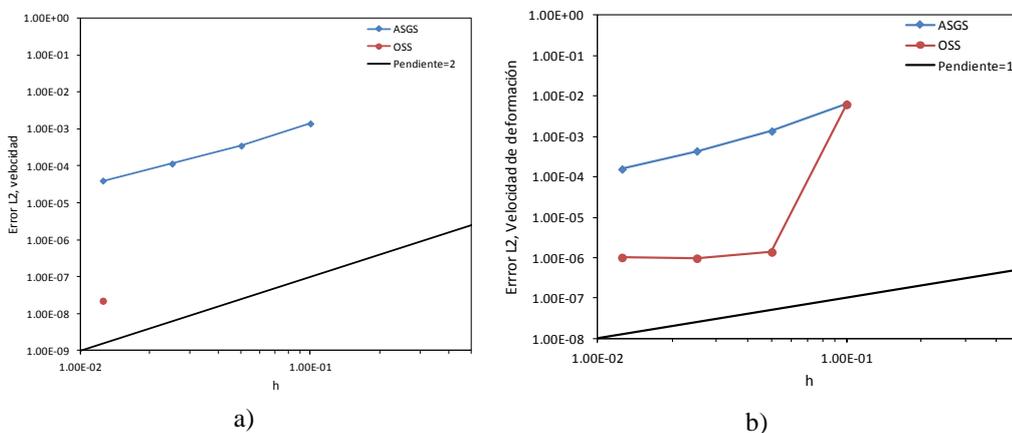


Figura 3.9. Fluido de Bingham, regularización bilineal. Error discreto  $L^2$  para a) Velocidad. b) Velocidad de deformación.

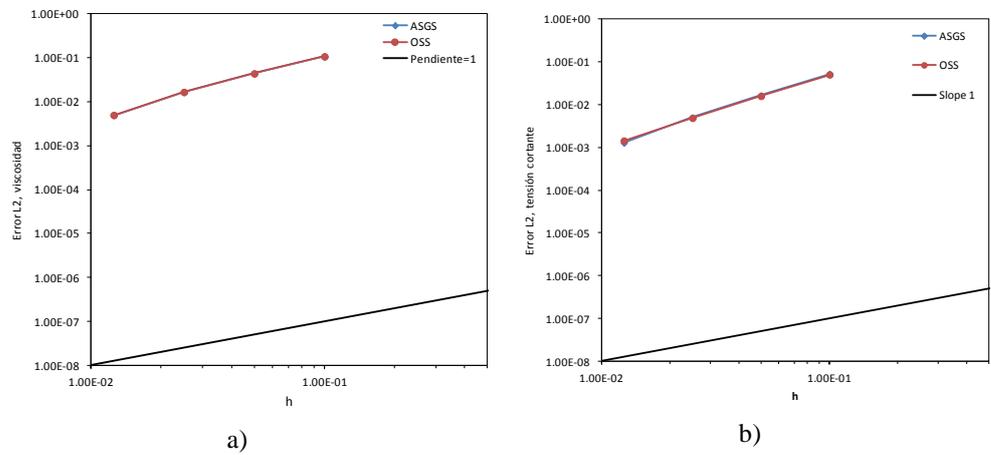


Figura 3.10. Fluido de Bingham, regularización de Papanastasiou. Error discreto  $L^2$  para a) Viscosidad. b) Tensión de cortante.

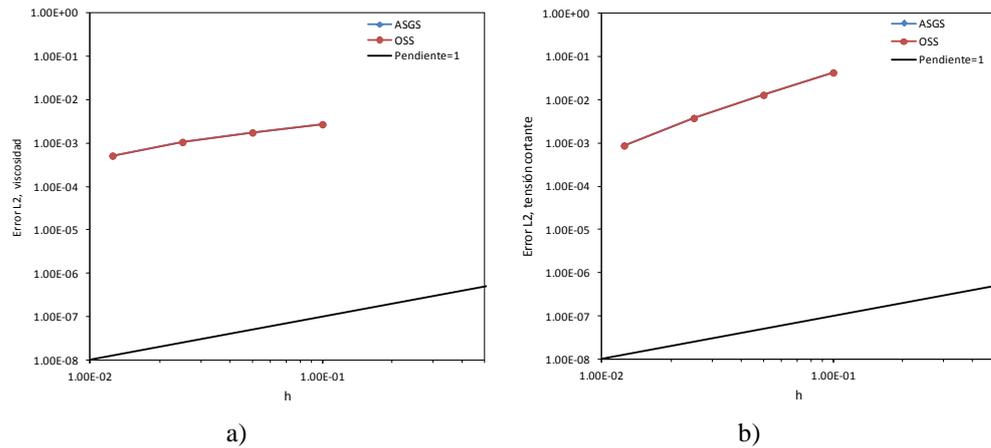


Figura 3.11. Fluido de Bingham, regularización bilineal. Error discreto en  $L^2$  para a) Viscosidad. b) Tensión de cortante.

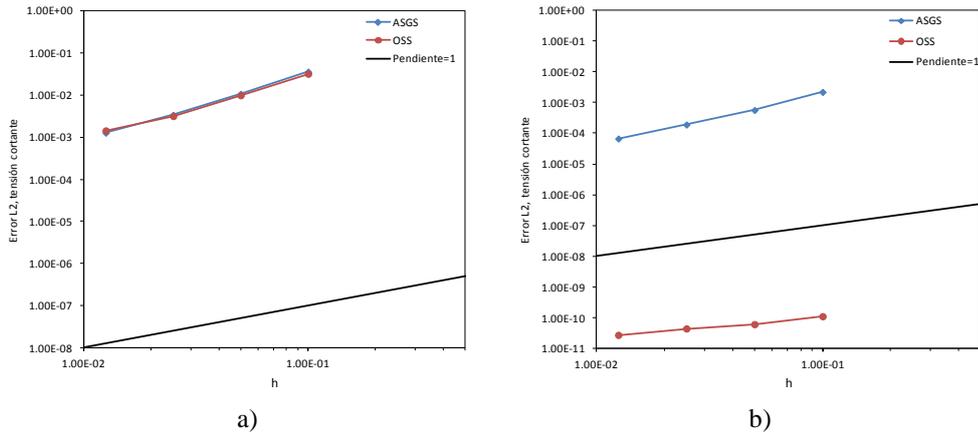


Figura 3.12. **Fluido de Bingham.** Error discreto  $L^2$  para la tensión de cortante. a) Modelo regularizado de Papanastasiou. b) Modelo regularizado bilineal.

Finalmente, se ha estudiado la convergencia en la velocidad para varios valores del parámetro de regularización  $m$ , comparando los modelos regularizados con el modelo ideal. Se ha utilizado la regularización de Papanastasiou y la bilineal y la estabilización OSS.

En la Figura 3.13 puede verse que la velocidad de convergencia es de orden 1 en ambos casos, siendo menor el error en el modelo regularizado bilineal que para la regularización exponencial.

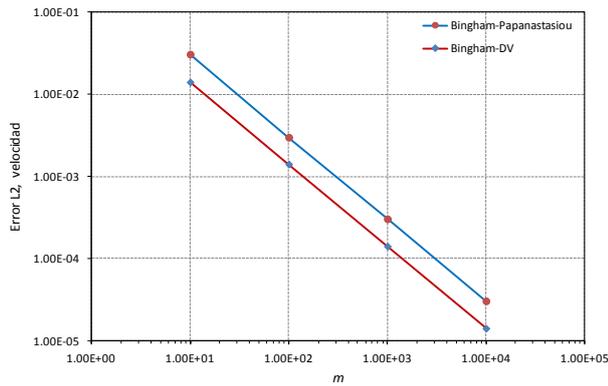


Figura 3.13. **Fluido de Bingham.** Error discreto  $L^2$  en la velocidad para diferentes valores del parámetro  $m$ , método OSS. Modelo Bingham-Papanastasiou y Modelo Bingham-DV.

### 3.5.7. Fluido dilatante y de Herschel-Bulkley

En la Tabla 3.3 se muestran las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización usados para el estudio de convergencia en el fluido dilatante y los modelos regularizados de Herschel-Bulkley dilatante.

En las Figura 3.14 a), b) y c) se muestran las correspondientes soluciones analíticas en velocidad, velocidad de deformación, y tensión de cortante (sección 2.8.3.1).

<b>Propiedades constitutivas</b>		
Modelo	Dilatante	Herschel-Bulkley dilatante
Viscosidad $k$ [Pa.s]	10	10
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	-	100
Índice de potencia $n$	1.5	1.5
<b>Regularización</b>		
Parámetro de regularización $m$ [s]	-	1000

Tabla 3.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

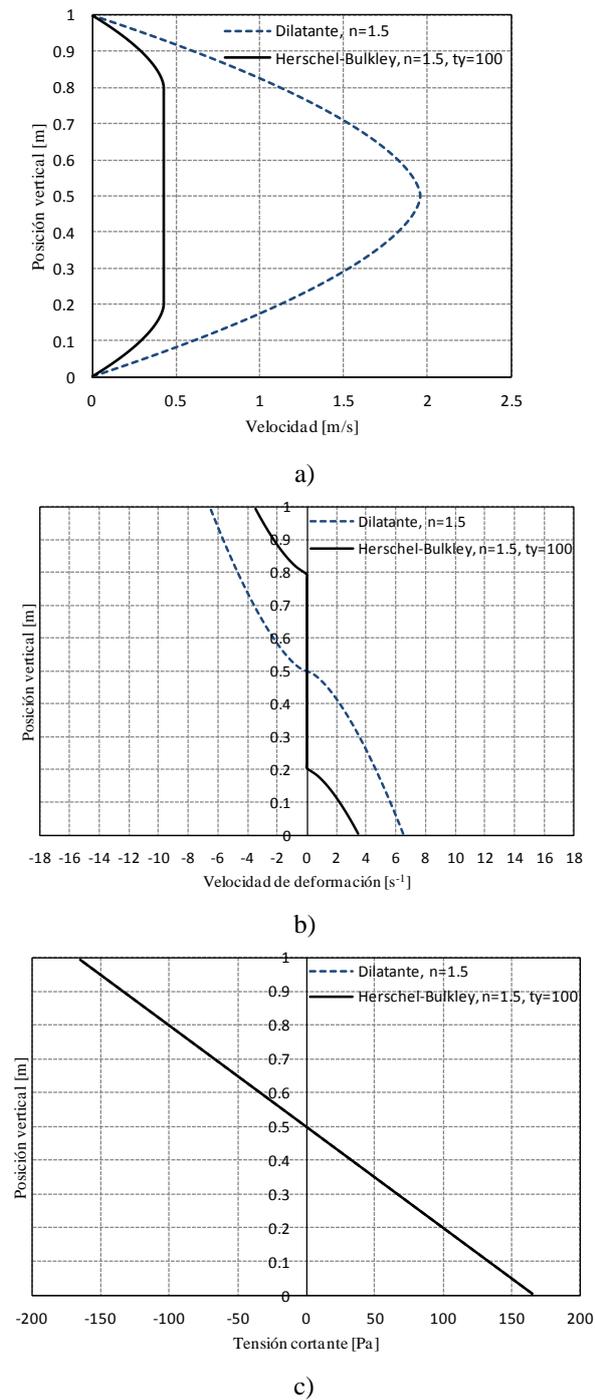


Figura 3.14. **Flujo de Poiseuille.** Variación de a) Velocidad. b) Velocidad de deformación. c) Tensión de cortante para un fluido dilatante y de Herschel-Bulkley ideal.

### 3.5.8. Modelos regularizados de Herschel-Bulkley

Los modelos regularizados viscoplásticos de Herschel-Bulkley usados son el modelo de Herschel-Bulkley-Papanastasiou y el de Herschel-Bulkley-DV (ec. (2.65) y ec. (2.69), respectivamente).

En las Figura 3.15 a) y b) se muestra la viscosidad para ambos modelos. Ambos modelos son prácticamente idénticos en la zona de flujo, dado el alto valor,  $m = 1000 s$ , del parámetro de regularización. En la zona rígida la viscosidad es variable en el modelo Herschel-Bulkley-Papanastasiou y constante para el modelo Herschel-Bulkley-DV.

### 3.5.9. Convergencia

#### 3.5.9.1. Modelo dilatante

En Figura 3.16 se muestra la convergencia de cada una de las variables características para el modelo dilatante.

En todos los casos las velocidades de convergencia son las esperadas: convergencia cuadrática en velocidades y lineal en las otras variables en ambos métodos. La explicación de este hecho es que el error producido por una interpolación de bajo orden en un problema de viscosidad variable en todo el dominio es mayor que la diferencia introducida por el método de estabilización empleado.

#### 3.5.9.2. Modelos regularizados de Papanastasiou y DV

La Figura 3.17 muestra la convergencia obtenida para el modelo de Herschel-Bulkley regularizado de Papanastasiou. Los resultados son análogos a los del fluido dilatante, aunque en este caso el método ASGS no consigue la convergencia cuadrática esperada en velocidades. El método OSS sí lo hace.

Los resultados casi superpuestos en los resultados de la viscosidad y la tensión cortante son achacables al error de interpolación de la viscosidad variable en todo el dominio.

Finalmente, la Figura 3.18 muestra la convergencia para el modelo de Herschel-Bulkley regularizado con DV. Los resultados son muy similares a los de las Figura 3.16 y Figura 3.17, debido también a la viscosidad variable en casi todo el dominio.

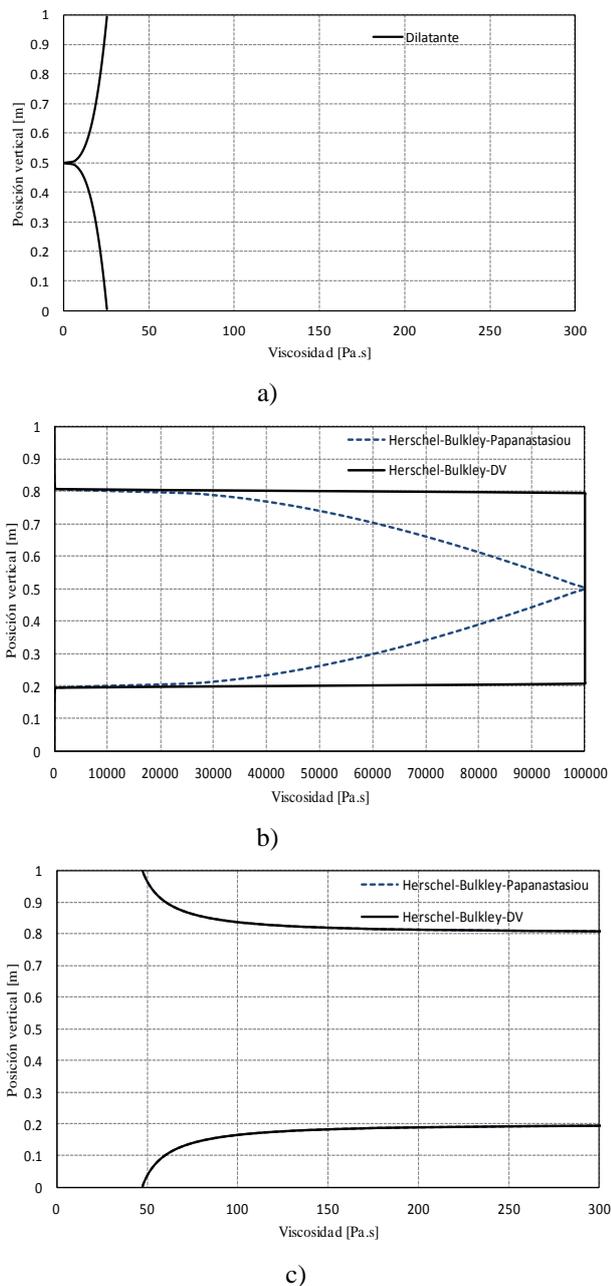


Figura 3.15. **Flujo de Poiseuille** Distribución de viscosidad para a) Modelo dilatante b) Modelos de Herschel-Bulkley-Papanastasiou y Herschel-Bulkley-DV con viscosidad constante en la zona de no fluencia. Vista completa. c) Vista ampliada de las gráficas hasta un valor de viscosidad igual a 300 Pa.s.

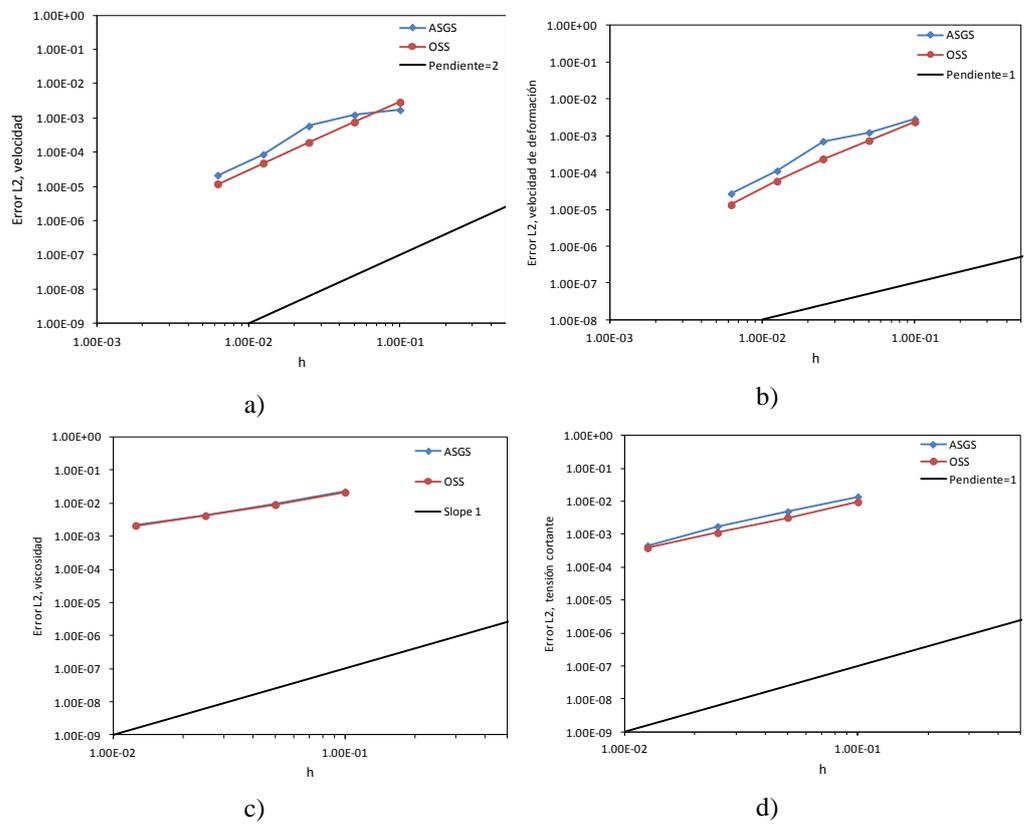


Figura 3.16. *Fluido dilatante,  $n=1.5$ . Error discreto  $L^2$  para a) Velocidad. b) Velocidad de deformación, c) Viscosidad. d) Tensión de cortante.*

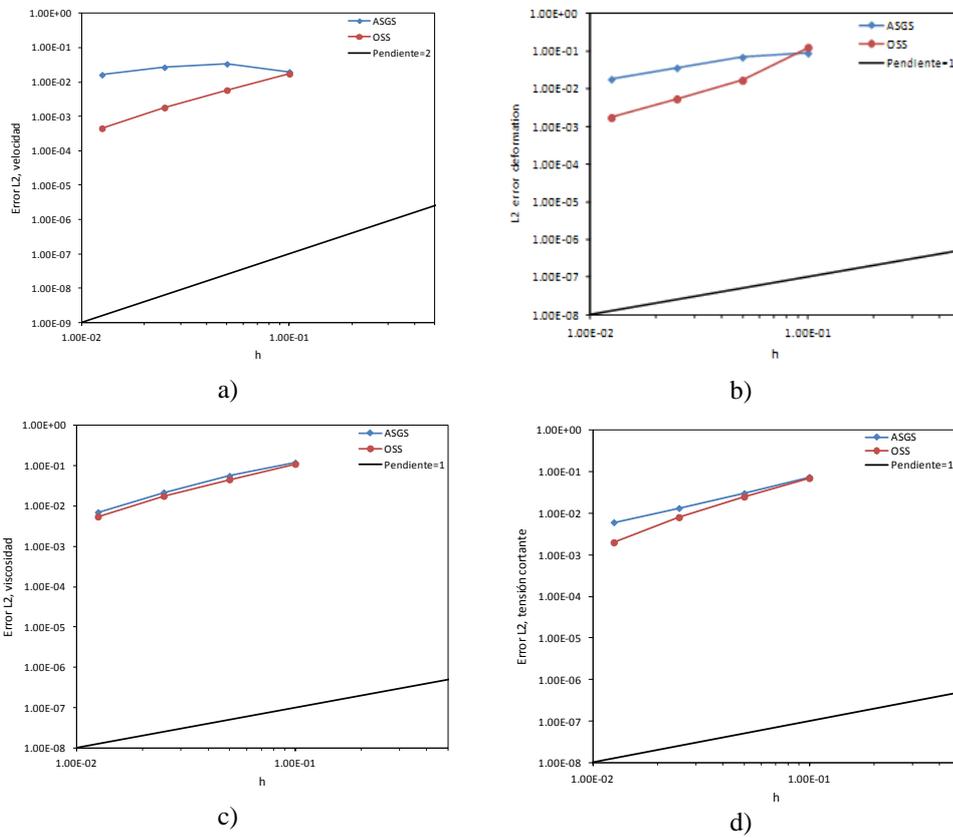


Figura 3.17. *Fluido de Herschel-Bulkley dilatante, regularización de Papanastasiou,  $n=1.5$ . Error discreto  $L^2$  para a) Velocidad. b) Velocidad de deformación. c) Viscosidad. d) Tensión de cortante.*

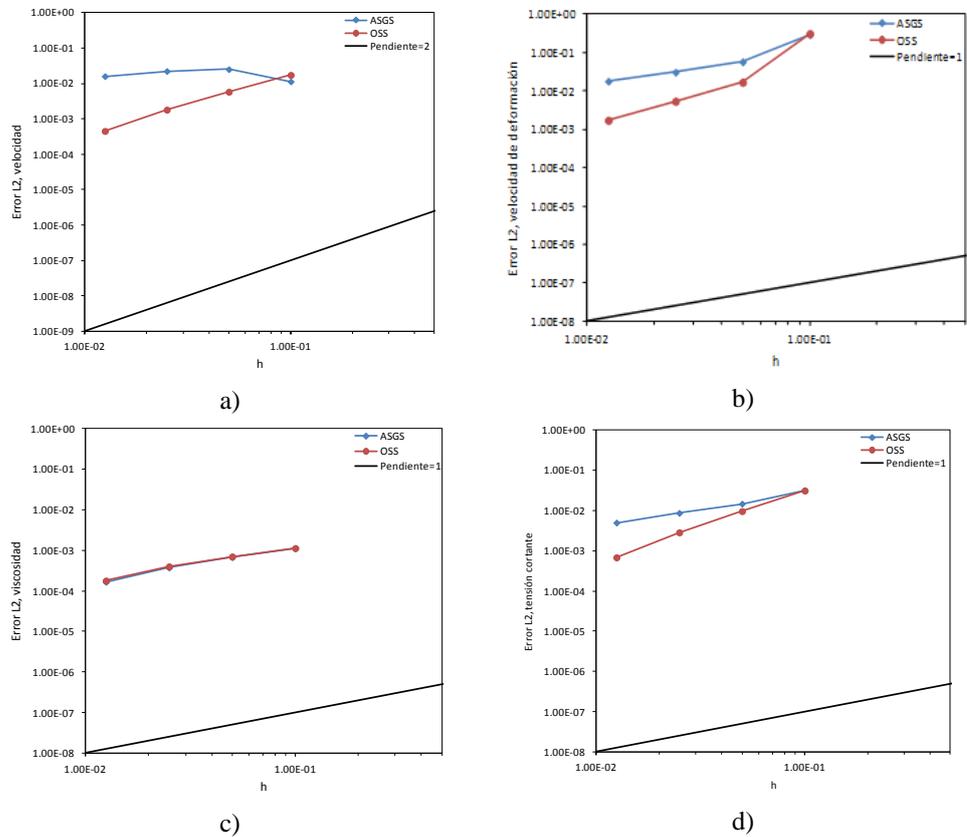


Figura 3.18. *Fluido de Herschel-Bulkley dilatante, regularización doble viscosidad,  $n=1.5$ . Error discreto en  $L^2$  para a) Velocidad. b) Velocidad de deformación. c) Viscosidad. d) Tensión de cortante.*

### 3.5.10. Conclusiones

Se ha estudiado el comportamiento relativo de los métodos de estabilización ASGS y OSS mediante un estudio de convergencia de las variables velocidad, velocidad de deformación, viscosidad y tensión de cortante en la resolución de un problema de flujo paralelo de Poiseuille con los modelos Newtoniano y dilatante, los modelos Bingham-Papanastasiou, Herschel-Bulkley-Papanastasiou, Bingham-DV y Herschel-Bulkley-DV.

Este estudio muestra que para el método ASGS el error para cada una de las variables es el esperado para todos los casos, salvo para el Herschel-Bulkley regularizado, en el que no alcanza la velocidad de convergencia esperada. El método OSS alcanza siempre la convergencia esperada, mostrando superconvergencia y valores nodales exactos para los modelos Newtoniano y el regularizado Bingham-DV. De forma sistemática, el método OSS muestra menor error que el método ASGS.

El error es menor para los modelos con regularización de viscosidad constante que para los respectivos modelos regularizados de Papanastasiou.

La convergencia con respecto al parámetro de regularización es lineal con ambos métodos, con menor error para el OSS.



# Capítulo 4

## Fluidos de Bingham

### 4.1. Introducción

Los materiales viscoplásticos se encuentran presentes en la industria, en el medio ambiente y en diversidad de procesos. Esto motiva el interés en modelarlos apropiadamente desde que Eugene Bingham (Bingham, 1922) los definió reológicamente por primera vez en 1919, cuando estudiaba las pinturas.

Estos materiales se caracterizan porque muestran una tensión de corte mínima para que se pongan en movimiento. La presencia de zonas que se desplazan como cuerpos rígidos con velocidad constante y otras que se mueven a diferentes velocidades es notoria en ensayos experimentales (Jay et al., 2001). Encontrar la ubicación de las zonas de fluencia y no fluencia para un problema específico es el objetivo principal de numerosas investigaciones relacionadas con estos fluidos viscoplásticos con tensión de fluencia. La configuración de estas zonas determina en gran medida el comportamiento del flujo. El problema de determinar esta configuración de forma analítica es un problema abierto en mecánica de fluidos. Esto se debe, por un lado, a las dificultades propias de los modelos ideales y, por otro, a la diversidad de formulaciones regularizadas existentes.

En este capítulo se trata la modelización numérica de flujos viscoplásticos con fluidos de Bingham. Se presentan seis soluciones numéricas que aplican los conceptos y estrategias desarrolladas en los capítulos 2 y 3. Con esta serie de soluciones numéricas, la mayoría problemas *benchmark*, se valida el modelo numérico desarrollado en el capítulo 3. Las soluciones numéricas se comparan con soluciones analíticas y resultados experimentales y numéricos de otros autores.

Los problemas analizados son:

- Flujo de Poiseuille,
- Flujo de Couette,
- Flujo en una cavidad cuadrada,
- Flujo en una expansión súbita,
- Flujo de extrusión y,
- Flujo alrededor de un cilindro entre placas paralelas.

Para todos los problemas se tiene que, en el problema continuo:

- Las ecuaciones de gobierno que definen el modelo matemático son las ecuaciones de Navier-Stokes para flujo incompresible e isotérmico, ecs. (2.15) y (2.17), en condiciones tanto no inerciales (ecuaciones de Stokes o *creeping flow*) como inerciales en algunos casos.
- Se usa el modelo regularizado Bingham-Papanastasiou (Papanastasiou, 1987) para la viscosidad, ec. (2.58). Se usa un valor mínimo de velocidad de deformación con el fin de evitar la singularidad numérica que presenta este modelo.
- La condición de fluencia y no fluencia para la determinación de las zonas rígidas o sólidas y las zonas en las que el fluido fluye es el del modelo ideal: si  $\tau > \tau_y$ , el fluido está en fluencia y, caso contrario, no.
- Las líneas de corriente del flujo se determinan resolviendo la ecuación (2.23).

En el problema discreto:

- Se usa una formulación mixta ( $\mathbf{u}/p$ ) de elementos finitos de acuerdo con la metodología presentada en el capítulo 3. Esto es:
  - Elementos finitos triangulares con interpolación lineal tanto para la velocidad como para la presión (P1-P1) o elementos cuadriláteros (Q1-Q1) con interpolación bilineal para la velocidad y la presión.
  - Estabilización con el método OSS (ec. (3.53)). En algunos casos, la solución numérica usando el método OSS se compara con la solución numérica usando el método ASGS (ec. (3.49)) con la finalidad de mostrar los beneficios del método OSS.
  - Linealización de Picard.
  - La convergencia en cada paso se alcanza cuando la relación entre la norma iterativa y la norma incremental de las velocidades es menor que  $1e-04$ .
  - Discretización temporal BDF1.
- Los flujos considerados en este capítulo son flujos estacionarios desarrollados en una malla fija. El fluido se supone inicialmente en reposo.
- Se considera que se ha alcanzado el estado estacionario cuando la variación de la norma de velocidad entre pasos sucesivos de tiempo es menor de  $1e-04$ .

Las implementaciones del modelo viscoplástico regularizado Bingham-Papanastasiou y las simulaciones respectivas se realizaron en el programa de elementos finitos Zephyr desarrollado por el Prof. Codina y sus colaboradores en el Centro Internacional de los Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE). El pre-proceso y el post-proceso de los problemas a estudiar ha sido realizado con GiD (Geometría y Data), desarrollado también en el CIMNE.

## 4.2. Flujo de Poiseuille

### 4.2.1. Descripción del problema

El flujo de Poiseuille es un flujo estacionario que se desarrolla entre placas paralelas infinitas. Este problema se ha resuelto en el capítulo 3, estudio de convergencia con malla estructurada y elementos bilineales Q1Q1 (ver sección 3.6). El objetivo principal de esta sección es mostrar el comportamiento del fluido de Bingham en un flujo simple, paralelo y con solución analítica (ver sección 2.8.3, ecuaciones (2.108)). Para ello, se estudia la variación del flujo en función del gradiente de presión.

Se presentan las distribuciones de velocidad y velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$ , de viscosidad y de zonas de fluencia y no fluencia.

### 4.2.2. Geometría y condiciones de contorno

La geometría y las condiciones de contorno se muestran en la Figura 4.1. Las condiciones impuestas de velocidad son de no deslizamiento en ambas placas. El movimiento del fluido ocurre debido al gradiente de presión fijo aplicado en el canal. La presión tiene valor nulo ( $P_L = 0$ ) en el lado derecho del canal (salida del flujo). En el lado izquierdo del canal (entrada del flujo) se imponen distintos valores de presión para producir los gradientes de presión de la Tabla 4.1.

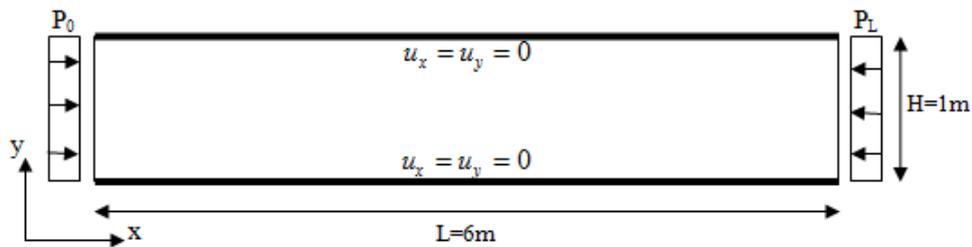


Figura 4.1. Geometría y condiciones de contorno.

$P_0$ (Pa)	$-\Delta P = -\frac{P_0 - P_L}{L}$ (Pa/m)
1500	-250.00
1600	-266.67
1700	-283.33
1800	-300.00
1900	-316.67
2000	-333.33

Tabla 4.1. Valores del gradiente de presión para distintas presiones  $P_0$ .

### 4.2.3. Propiedades constitutivas y parámetros de regularización

Las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización del fluido de Bingham usadas en la simulación numérica se dan en la Tabla 4.2.

Con el parámetro de regularización empleado, la relación entre la velocidad de deformación y la tensión es la que se muestra en la Figura 4.2, prácticamente indistinguible del modelo ideal de Bingham.

<b>Propiedades constitutivas</b>	
Modelo del fluido	Bingham
Viscosidad $\mu$ [pa.s]	10
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	100
<b>Regularización</b>	
Exponente de crecimiento de tensión $m$ [s]	1000

Tabla 4.2. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

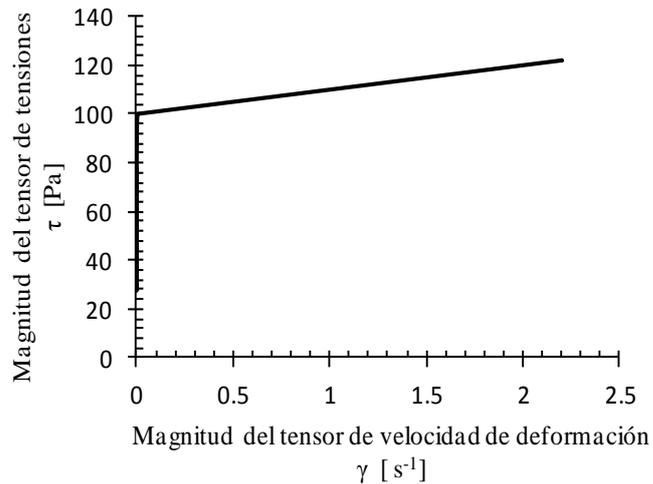


Figura 4.2. Flujo de Poiseuille. Distribución de la tensión respecto a la velocidad de deformación.

#### 4.2.4. Descripción del problema discreto

Se usa una malla no estructurada de elementos triangulares P1P1. El número de nodos y de elementos se muestra en la Tabla 4.3. Se ha utilizado un tamaño máximo de elemento  $h_{max} = 0.1\text{m}$ .

La malla es más fina cerca de las placas donde la velocidad es nula con el fin de captar adecuadamente el gradiente de velocidad, véase la Figura 4.3. El resto del dominio se malla con los elementos de tamaño uniforme.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
M ( $h_{max} = 0.1\text{m}$ )	8897	16496

Tabla 4.3. Número de nodos y elementos para la malla no estructurada M.

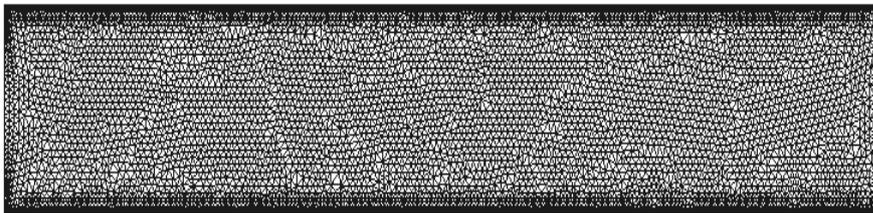


Figura 4.3. Malla no estructurada de elementos triangulares.

#### 4.2.5. Dinámica del flujo

Los resultados para las respectivas variaciones se muestran en la sección central. A esta distancia del contorno de entrada el flujo está completamente desarrollado.

Los resultados de la Figura 4.4 muestran la distribución de la componente horizontal de la velocidad,  $u_x$ , para diferentes gradientes de presión. Los resultados se correlacionan muy bien con la solución analítica. Para los gradientes  $\Delta P = -250\text{ Pa/m}$  y  $\Delta P = -266,67\text{ Pa/m}$  la solución numérica prácticamente se superpone a la solución analítica.

#### 4.2.6. Comportamiento reológico

La Figura 4.5 muestra la distribución de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$  (en valor absoluto) para el gradiente de presión  $\Delta P = -250\text{ Pa/m}$ . La velocidad de deformación prácticamente es nula en las zonas de no fluencia y variable en el resto de la sección, zona de fluencia.

Las zonas de fluencia y no fluencia se relacionan con la distribución de la velocidad (Figura 4.6) y la viscosidad (Figura 4.7) en el dominio para el mismo gradiente de presión. Las zonas de no fluencia coincide con la zona de velocidad constante ( $u_{max} = 0.1292\text{ m/s}$ ) y las zonas de no fluencia coinciden con valores de viscosidad que tienden al límite cuando el gradiente de deformación tiende a un valor nulo.

En la Figura 4.8 se muestra la configuración de la zona de no fluencia (blanca),  $\tau \leq \tau_y$ , y las zonas de fluencia (colores),  $\tau > \tau_y$ .

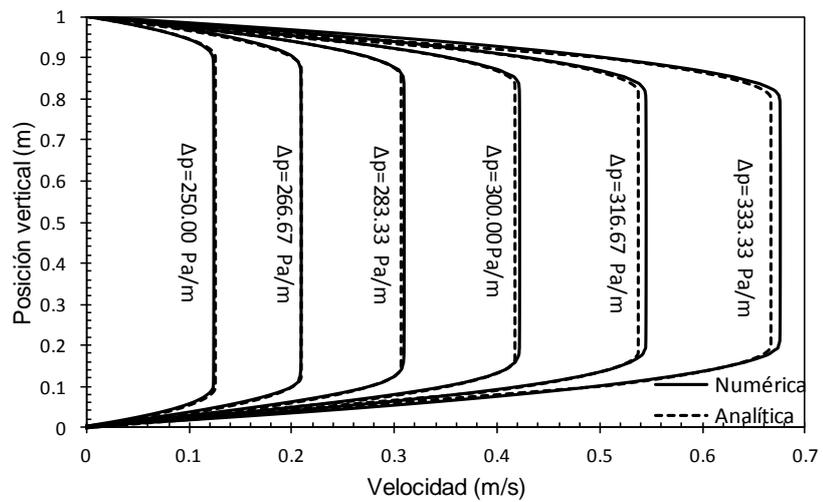


Figura 4.4. **Flujo de Poiseuille.** Variación de la velocidad para diferentes gradientes de presión. Comparación entre la solución analítica y la numérica.

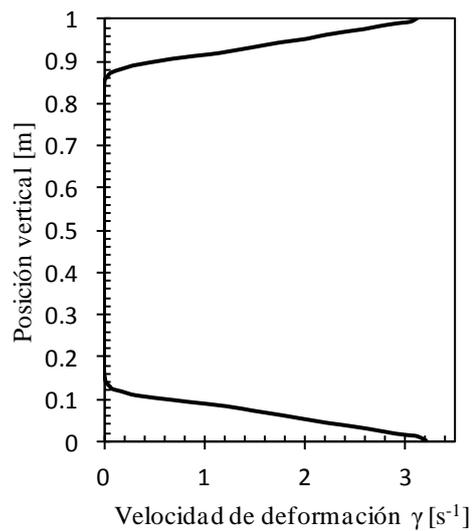


Figura 4.5. **Flujo de Poiseuille.** Variación de la velocidad de deformación a través de la sección central para  $\Delta P = -250$  Pa/m.



Figura 4.6. *Flujo de Poiseuille*. Distribución de la velocidad para  $\Delta P = -250 \text{ Pa/m}$ .

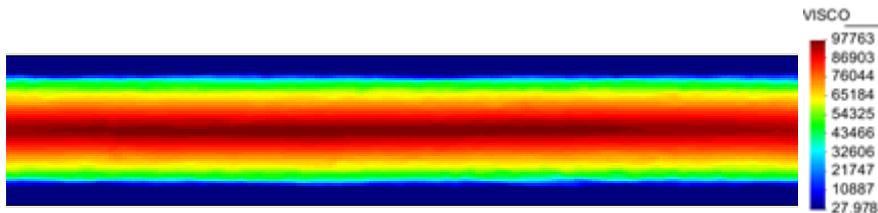


Figura 4.7. *Flujo de Poiseuille*. Distribución de la viscosidad para  $\Delta P = -250 \text{ Pa/m}$ .

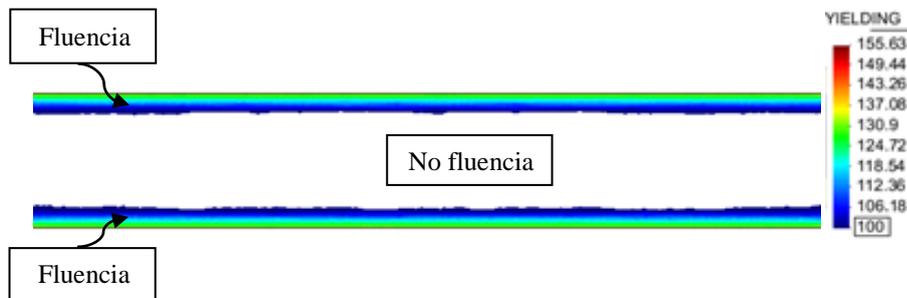


Figura 4.8. *Flujo de Poiseuille*. Distribución de la zona de fluencia y no fluencia para  $\Delta P = -250 \text{ Pa/m}$ .

#### 4.2.7. Conclusiones

En esta sección se estudia el flujo paralelo de Poiseuille con el fluido de Bingham regularizado; el parámetro de regularización de  $m = 1000 \text{ s}$  aproxima de manera excelente el modelo ideal.

Se han obtenido con buena definición las zonas de fluencia y no fluencia, fácilmente observables en la distribución de velocidad y velocidad de deformación. Una malla estructurada (ver sección 3.5.1 del capítulo 3) resulta más adecuada para este tipo de flujo paralelo.

Se ha podido observar que la velocidad disminuye con el aumento del valor de la tensión de fluencia, así mismo, aumentan las zonas de no fluencia.

La variación de las diferentes variables calculada numéricamente se ajusta muy bien a la solución analítica para los gradientes de presión usados.

### 4.3. Flujo de Couette

#### 4.3.1. Descripción del problema

El flujo de Couette es un flujo paralelo que ocurre entre dos placas paralelas e infinitas; una de ellas se encuentra fija y la otra en movimiento estacionario. Es una variación del flujo de Poiseuille, tiene solución analítica para fluidos viscoplásticos (sección 2.8.2.2, ec. (2.102)), lo cual es de mucha utilidad en la validación de desarrollos numéricos.

En este estudio se usarán dos valores distintos de velocidad en el tope del canal y varios gradientes de presión. Se determina la variación de la velocidad para diferentes valores de la tensión de fluencia. La variación de la velocidad se compara con la solución analítica. Se realiza una comparación entre el método de estabilización ASGS y OSS para el máximo gradiente de presión usado.

#### 4.3.2. Geometría y condiciones de contorno

El flujo se desarrolla debido a un gradiente de presión impuesto. La geometría y las condiciones de contorno se representan en la Figura 4.9.

Las condiciones impuestas de velocidad son de no deslizamiento en la placa inferior y deslizamiento uniforme en la superior. Se imponen condiciones de presión en los contornos de entrada (izquierda) y salida (derecha). La presión tiene valor nulo en la pared del lado derecho ( $P_L = 0$ ). En el lado izquierdo, la presión  $P_0$ , adopta distintos valores para producir los gradientes de presión de la Tabla 4.4.

Las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización son los utilizados para el flujo de Poiseuille (Tabla 4.2). Con el parámetro de regularización empleado, la relación entre la velocidad de deformación y la tensión es la que se muestra en la Figura 4.2, prácticamente indistinguible del modelo ideal de Bingham.

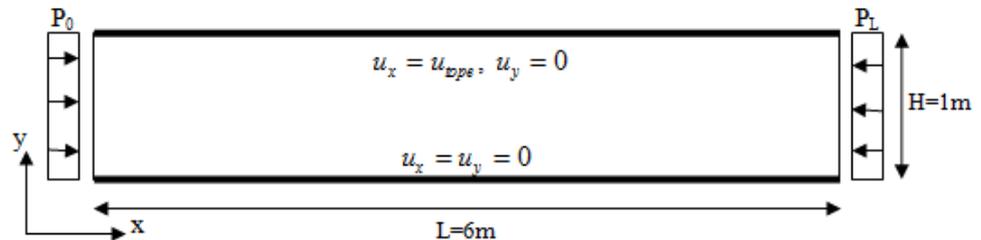


Figura 4.9. Geometría y condiciones de contorno.

$P_o (Pa)$	$-\Delta P = -\frac{P_o - P_L}{L} (Pa/m)$
1500	-250.00
1600	-266.67
1700	-283.33
1800	-300.00
1900	-316.67
2000	-333.33

Tabla 4.4. Valores del gradiente de presión para distintas presiones  $P_o$ .

### 4.3.3. Descripción del problema discreto

La discretización y los elementos utilizados son los mismos que para el flujo de Poiseuille, ver Figura 4.3.

### 4.3.4. Dinámica del flujo

Se estudia el flujo para dos velocidades distintas impuestas en el tope usando diferentes gradientes de presión y para diferentes números de Bingham.

En la Figura 4.10, para la velocidad impuesta  $u_{tope} = 0.3 \text{ m/s}$ , se muestra la variación de la velocidad para varios gradientes de presión. La variación de la velocidad se ajusta muy bien a la solución analítica. Para el gradiente de presión nulo, el perfil de velocidades es lineal, la velocidad de deformación es constante a través de la sección, el comportamiento es de fluido Newtoniano.

En la Figura 4.11 se muestra la variación de la velocidad que corresponde a  $u_{tope} = 0.01 \text{ m/s}$  y los gradientes de presión de la Tabla 4.4.

Como ocurre con el flujo de Poiseuille, las soluciones numéricas y analíticas se superponen para los gradientes de presión más bajos. El error numérico se hace más evidente para los gradientes de presión más elevados. Los resultados obtenidos son similares a los de Perić y Slijepčević (Perić and Slijepčević, 2001) y de Larese de Tetto (Larese de Tetto, 2012).

### 4.3.5. Comportamiento reológico

En la Figura 4.12 se muestra la variación de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$  (en valor absoluto) en la sección central para  $u_{tope} = 0.01 \text{ m/s}$  y  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ . La velocidad de deformación es prácticamente nula en la zona de no fluencia, de acuerdo con el modelo regularizado.

Las zonas de fluencia y no fluencia se relacionan con la distribución de la velocidad (Figura 4.13) y la viscosidad (Figura 4.14) en el dominio para el mismo gradiente de presión. Las zonas de no fluencia coinciden con la zona de viscosidad constante ( $u_{max} = 0.2139 \text{ m/s}$ ) y las zonas de no fluencia coinciden con valores de viscosidad que tienden al límite cuando el gradiente de deformación tiende a un valor nulo.

En la Figura 4.15 se muestra la configuración de la zona de no fluencia (blanca),  $\tau \leq \tau_y$ , y las zonas de fluencia (colores),  $\tau > \tau_y$ .

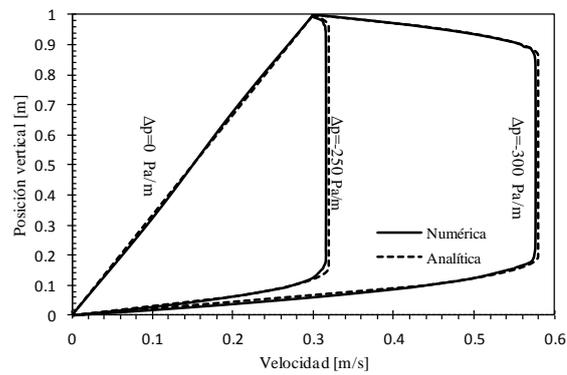


Figura 4.10. **Flujo de Couette.** Variación de la velocidad para diferentes gradientes de presión. Comparación entre la solución analítica y la numérica,  $u_{\text{tope}} = 0.3 \text{ m/s}$ .

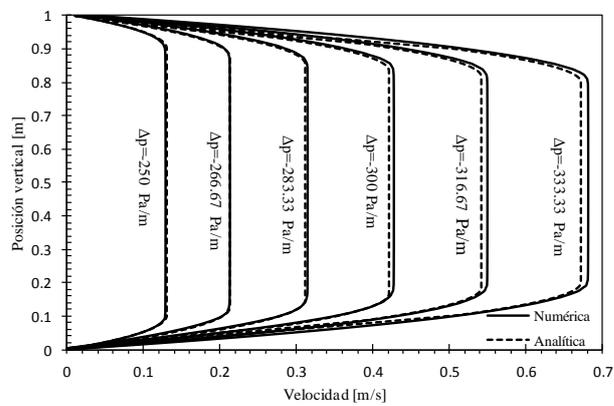


Figura 4.11. **Flujo de Couette.** Variación de la velocidad para diferentes gradientes de presión. Comparación de la solución analítica y numérica,  $u_{\text{tope}} = 0.01 \text{ m/s}$ .

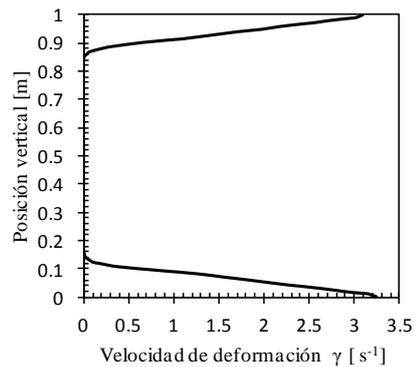


Figura 4.12. **Flujo de Couette.** Variación de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$ .



Figura 4.13. *Flujo de Couette*. Distribución de la velocidad para  $\Delta P = -266.67$  Pa/m.

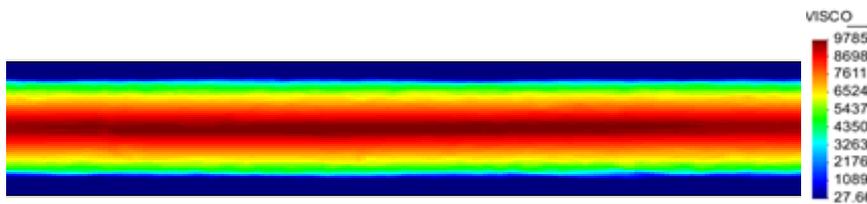


Figura 4.14. *Flujo de Couette*. Distribución de la viscosidad para  $\Delta P = -266.67$  Pa/m.

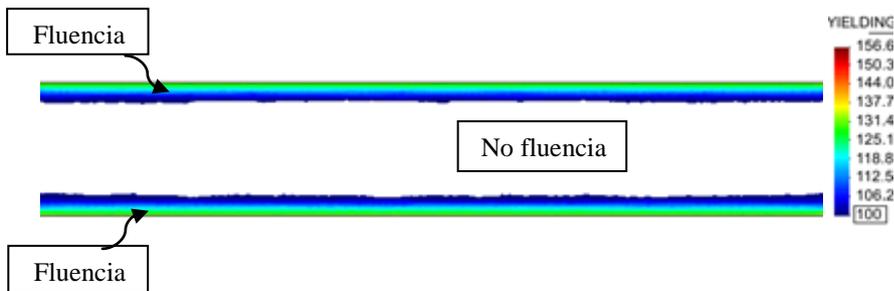


Figura 4.15. *Flujo de Couette*. Zona de fluencia y no fluencia para  $\Delta P = -266.67$  Pa/m.

#### 4.3.5.1. Influencia de la tensión de fluencia en el flujo

En la Figura 4.16 se muestra la variación de la velocidad en la sección central para el gradiente de presión  $\Delta P = -266.67$  Pa/m y diferentes valores de la tensión de fluencia,  $\tau_y$ . A medida que aumenta el valor de  $\tau_y$ , la velocidad media disminuye, el perfil parabólico de la velocidad (fluido Newtoniano) va cambiando, y se hace más grande la zona de no fluencia con velocidad constante. Para  $\tau_y = 1000$  Pa, todo el fluido se mueve prácticamente a velocidad constante, desplazándose como un cuerpo rígido a lo largo del canal.

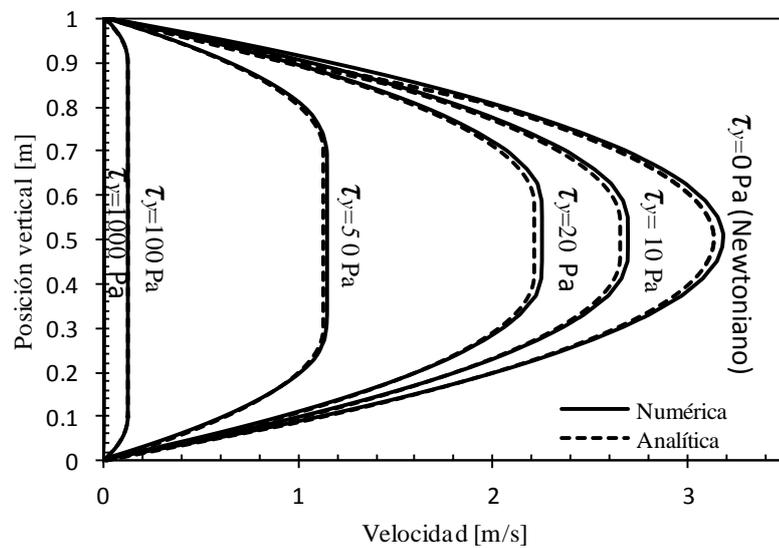


Figura 4.16. **Flujo de Couette.** Variación de la velocidad para diferentes valores de  $\tau_y$ . Comparación entre la solución numérica y analítica.  $\Delta P = -266.67$  Pa/m.

#### 4.3.6. Conclusiones

En esta sección se estudia el flujo paralelo de Couette con fluido de Bingham regularizado; el parámetro de regularización  $m = 1000$  s aproxima satisfactoriamente el modelo ideal. En las zonas de no fluencia la velocidad es constante y la velocidad de deformación prácticamente nula. En las zonas de fluencia la velocidad y la velocidad de deformación son variables.

El flujo se ve muy influenciado por la variación de la tensión de fluencia; a mayor valor de ésta se amplían las zonas de fluido con comportamiento quasi-rígido.

Las distribuciones de las diferentes variables obtenidas numéricamente se ajustan muy bien a las soluciones analíticas para el gradiente de presión usado, así como para diferentes valores de la tensión de fluencia.

## 4.4. Flujo en una cavidad cuadrada

### 4.4.1. Descripción del problema

Se presenta a continuación la simulación numérica del problema del flujo en una cavidad bidimensional cuadrada, con velocidad aplicada en el tope (*lid-driven cavity problem*). El problema de la cavidad ha sido ampliamente usado para validar esquemas numéricos para fluidos Newtonianos (Grillet et al., 1999) y no-Newtonianos ((Bercovier and Engelman, 1980), (Botella and Peyret, 1998), (Mitsoulis and Zisis, 2001), (Vola et al., 2003), (Larese de Tetto, 2012). Estos autores usan una formulación en velocidad y presión ( $\mathbf{u}$ ,  $p$ ) a excepción de Becovier. Becovier usa una formulación irreducible, sólo en velocidades, impone la condición de incompresibilidad con un penalizador y usa integración reducida. Grillet usa elementos finitos con interpolación bicuadrática Q2 para la velocidad y bilineal Q1 para la presión. Botella utiliza un modelo no regularizado y un esquema espectral que regulariza las ecuaciones de Navier-Stokes con el método de colocación. Mitsoulis estudia este problema usando una interpolación Q2Q1 y el modelo regularizado de Papanastasiou. Vola utiliza un modelo regularizado con elementos de bajo orden con interpolación lineal para la velocidad y la presión estabilizados con el término de perturbación Brezzi-Pitkäranta (Brezzi and Pitkäranta, 1984). Larese De Tetto usa un modelo regularizado y el método de estabilización ASGS.

El problema de la cavidad cuadrada tiene importancia en muchos procesos industriales, como por ejemplo en flujos con recirculación en áreas cerradas que van desde rotación pura cerca del centro de la zona de recirculación hasta una fuerte ampliación de la misma cerca del tope (Grillet et al., 1999).

En el presente trabajo se comparan los métodos de estabilización ASGS y OSS para fluido Newtoniano y el modelo viscoplástico de Bingham. Esta comparación se realiza para las líneas de corriente en el caso Newtoniano. En el caso no-Newtoniano se comparan las líneas de corriente y las zonas de fluencia y no fluencia. Se usan tanto mallas estructuradas como no estructuradas con distinto grado de refinamiento.

Cada caso se estudia para diferentes valores del número de Bingham,  $Bn$ , definido en este problema como:

$$Bn = \frac{\tau_y H}{\mu V} \quad (4.1)$$

donde  $\tau_y$  es la tensión de fluencia,  $V = 1 \text{ m/s}$  es la velocidad en el tope de la cavidad,  $H = 1 \text{ m}$  es el ancho de la cavidad, y  $\mu = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$  es la viscosidad del fluido (Tabla 4.5).

El flujo en la cavidad está sujeto a rotación o recirculación. Por tanto, se analiza la intensidad de los vórtices y la ubicación del centro (ojo) del vórtice para un amplio rango de números de Bingham,  $Bn$ .

La cavidad cuadrada también es objeto de estudio en el caso inercial para diferentes números de Reynolds. Se analizan las líneas de corriente, las zonas de fluencia y no fluencia, la variación de las velocidades en el caso Newtoniano y no-Newtoniano para diferentes valores de  $Bn$ .

Se comparan los diferentes resultados con los obtenidos por varios autores.

#### 4.4.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 4.17 se muestra la geometría y las condiciones de contorno del problema. Éstas son de no deslizamiento en todas las paredes excepto en la tapa donde se impone una velocidad horizontal uniforme,  $u_{\text{tope}} = 1 \text{ m/s}$ . Para determinar el campo de presiones, se impone presión nula en el punto medio de la pared de la base.

En las esquinas superiores se impone velocidad nula. Esta condición se conoce como condición de rampa (*ramp condition*). En flujos Newtonianos esta condición produce una singularidad en tensiones y es de esperar que en flujos no-Newtonianos la singularidad sea aún más severa (Grillet et al., 1999).

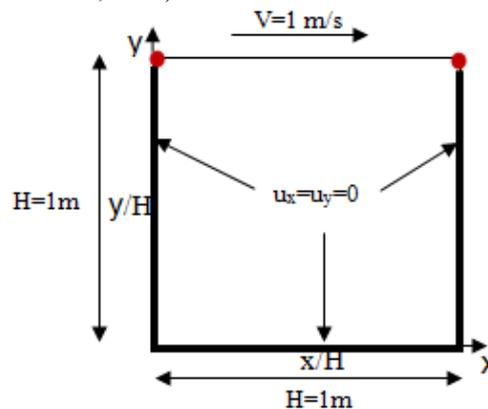


Figura 4.17. Geometría y condiciones de contorno.

#### 4.4.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

Las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización del fluido de Bingham usadas en la simulación numérica se presentan en la Tabla 4.5. Dado que,  $V = 1 \text{ m/s}$ ,  $H = 1 \text{ m}$  y  $\mu = 1 \text{ Pa}\cdot\text{s}$ , el número de Bingham ( $Bn$ ) coincide con la tensión de fluencia,  $Bn = \tau_y$ . Se estudia el flujo para diferentes valores de  $Bn = \tau_y$ , según la Tabla 4.5.

El valor del parámetro de regularización  $m = 1000 \text{ s}$  aproxima mucho el modelo regularizado al modelo ideal.

Propiedades constitutivas	
Modelo del fluido	Bingham
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	0,1,10,100,1000
Regularización	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 4.5. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

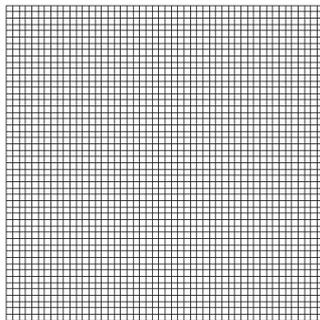
#### 4.4.4. Discretización

En el caso de mallas estructuradas, se utilizaron elementos cuadriláteros Q1Q1 y para mallas no estructuradas elementos triangulares P1P1. Las mallas usadas se detallan en la Tabla 4.6. La Figura 4.18 muestra las mallas estructuradas M1 y M2. En la Figura 4.19 pueden verse las mallas no estructuradas M3 y M4.

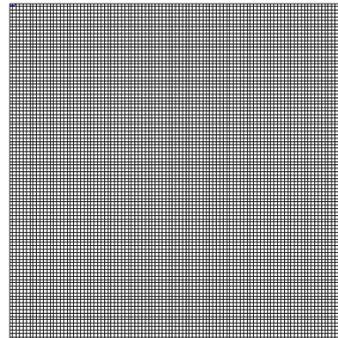
Obsérvese que el número de nodos de las mallas M1 y M3 y M2 y M4 es muy similar, por lo que pueden compararse los resultados correspondientes.

<b>Estructurada</b>	<b>Número de nodos</b>	<b>Número de elementos</b>
M1: Malla1 (50*50)	2601	2500
M2: Malla2 (100*100)	10201	10000
<b>No estructurada</b>		
M3: Malla (50*50)	2605	5008
M4: Malla4 (100*100))	10205	20020

Tabla 4.6. Número de nodos y elementos para mallas estructuradas y no estructuradas usadas en la simulación numérica.

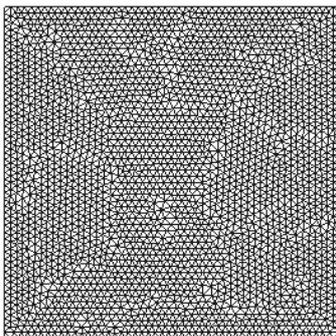


a) M1

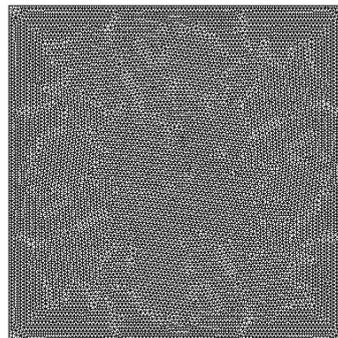


a) M2

Figura 4.18. Mallas estructuradas.



a) M3



b)M4

Figura 4.19. Mallas no estructuradas.

#### 4.4.5. Caso no inercial, $Re \approx 0$ . Malla estructurada

Se estudia el problema para número de Reynolds casi nulo (flujo de Stokes, *creeping flow*) en mallas estructuradas. Se comparan los resultados obtenidos usando los métodos de estabilización ASGS y OSS.

##### 4.4.5.1. Fluido Newtoniano

En la Figura 4.20 se muestran las líneas de corriente calculadas en la malla estructurada M1 con 50 elementos en cada dirección. Para esta malla los resultados obtenidos con el método OSS muestran líneas suaves y cerradas mientras que con el método ASGS las líneas de corriente presentan pequeñas distorsiones cerca de las esquinas singulares.

En la Figura 4.21 se muestran las líneas de corriente calculadas en la malla M2, con 100 elementos en cada dirección. En esta malla, muy fina, las líneas de corrientes son muy similares para ambos métodos de estabilización. Los resultados concuerdan muy bien con los resultados obtenidos por Grillet.

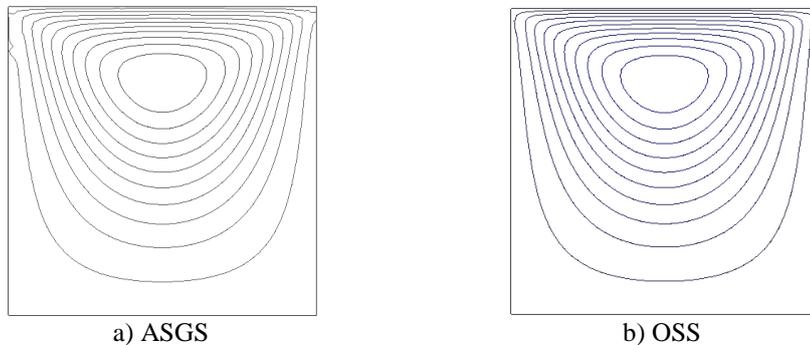


Figura 4.20. **Flujo en una cavidad.** Líneas de corriente para la malla estructurada M1.

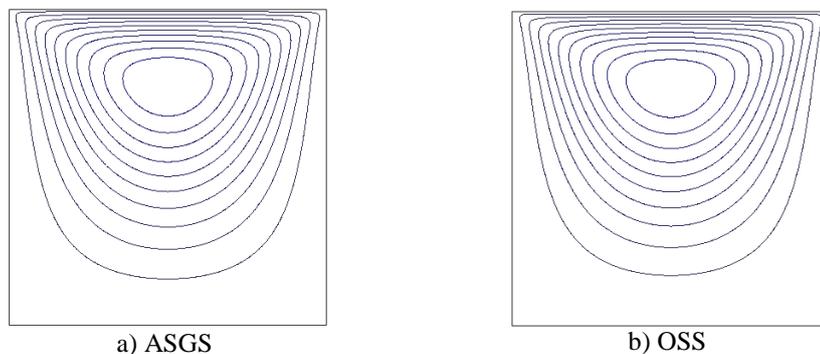


Figura 4.21. **Flujo en una cavidad.** Líneas de corriente para la malla estructurada M2.

#### 4.4.5.2. Fluido viscoplástico de Bingham

En las Figura 4.22 y Figura 4.23 se analizan los efectos de la tensión de fluencia en los resultados obtenidos en las mallas M1 y M2, respectivamente.

La extensión de las zonas de no fluencia (zonas oscuras) se incrementa a medida que aumenta el número de Bingham (1-1000 Pa); éstas a su vez se van extendiendo hacia el tope de la cavidad.

En la malla M1, Figura 4.22, las zonas de no fluencia calculadas con ambos métodos presentan diferencias a partir de  $Bn \geq 100$ .

En la malla M2, Figura 4.23, las zonas de no fluencia logran una mejor definición con ambos métodos, con muy pequeñas diferencias para el caso  $Bn = 1000$ .

Esto demuestra que ambos métodos son convergentes a la misma solución.

En la Figura 4.22 puede verse que en el fluido viscoplástico de Bingham la distorsión en las líneas de corriente cerca del contorno superior aumentan usando el método ASGS a medida que aumentan los respectivos números de Bingham,  $Bn$ . Las oscilaciones se reducen en la solución de la malla M2.

Los resultados obtenidos para las zonas de no fluencia han logrado una mejor definición en sus contornos que los obtenidos por Bercovier y Mitsoulis. El tamaño y la forma de las zonas de no fluencia se corresponde mucho más con los obtenidos por Mitsoulis.

Para la malla M2, Figura 4.23, las líneas de corriente que se obtienen en el método OSS están mejor definidas que las obtenidas con el método ASGS.

Las líneas de corriente atraviesan las zonas de no fluencia donde según el modelo ideal, el fluido permanece en reposo. Esto ocurre por la regularización utilizada: En el modelo regularizado, la velocidad es pequeña, pero no nula, por debajo de la tensión de fluencia.

Este comportamiento coincide con los presentados por Bercovier y Engelman (Bercovier and Engelman, 1980), Mitsoulis y Zisi (Mitsoulis and Zisis, 2001) y Vola et al. (Vola et al., 2003).

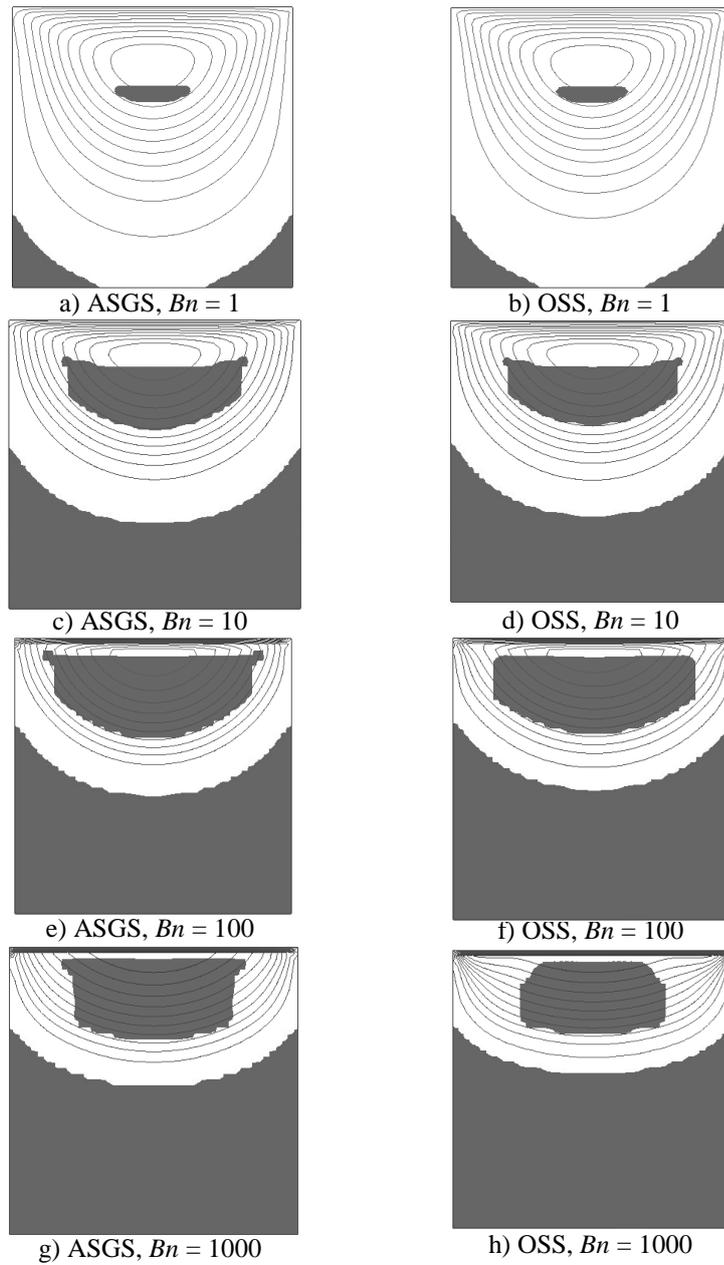


Figura 4.22. Flujo en una cavidad,  $Re \approx 0$ , ASGS, OSS. Líneas de corriente, zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras) para diferentes números de Bingham. Malla estructurada M1.

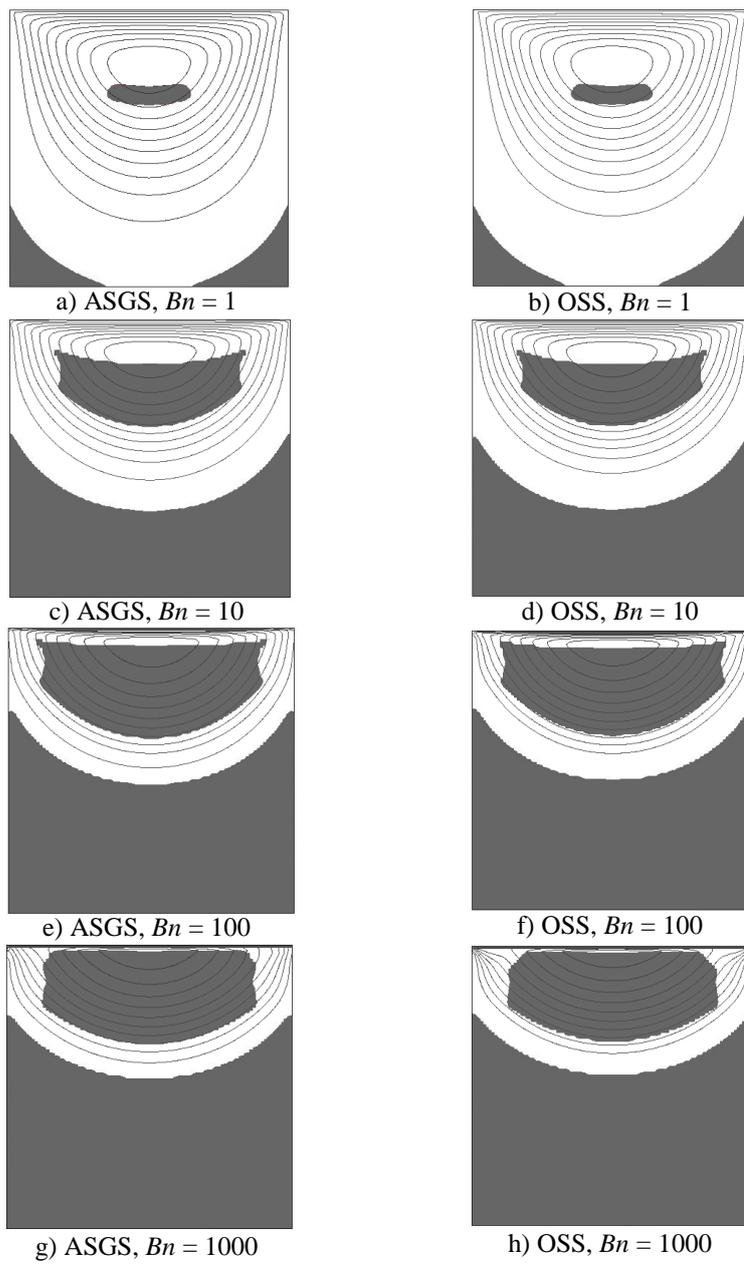


Figura 4.23. *Flujo en una cavidad,  $Re \approx 0$ , ASGS, OSS. Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras) para diferentes números de Bingham. Malla estructurada M2.*

#### 4.4.6. Caso no inercial, $Re \approx 0$ . Malla no estructurada

Se estudia el problema de la cavidad para número de Reynolds casi nulo (flujo de Stokes, *creeping flow*) en mallas no estructuradas. Los resultados obtenidos se comparan usando los métodos de estabilización ASGS y OSS.

##### 4.4.6.1. Fluido Newtoniano

###### *Líneas de corriente*

En las Figura 4.24 y Figura 4.25 se comparan las líneas de corriente obtenidas con los métodos ASGS y OSS en las mallas no estructuradas M3 y M4, respectivamente. Los resultados de las mallas M3 y M4 pueden compararse con los obtenidos en las mallas estructuradas M1 y M2 en las Figura 4.20 y Figura 4.21, respectivamente, ya que tienen aproximadamente el mismo número de nodos (Tabla 4.6).

En la malla M3, Figura 4.24, ambos métodos presentan cierta distorsión en las líneas de corriente cerca de las esquinas singulares, más acentuada para el método ASGS.

En la malla M4, Figura 4.25, la definición de las líneas de corriente mejora respecto al resultado en la malla M3. Los resultados de ambos métodos son casi indistinguibles en esta malla. También son indistinguibles de los obtenidos con la malla estructurada M2 (Figura 4.21).

###### *Velocidades*

En la Figura 4.26, malla M4, se muestran los resultados de la variación de la velocidad horizontal,  $u_x$ , en la sección vertical central  $x = H/2$  de la cavidad; estos resultados se comparan con los resultados experimentales obtenidos por Pakdel et al. (Pakdel et al., 1997) mediante velocímetros Doppler (LDV) y los obtenidos por medio de la imagen digital de la partícula (DPIV). También se comparan con los resultados numéricos de Grillet et al. (Grillet et al., 1999). El acuerdo obtenido es excelente. La correspondiente componente vertical de la velocidad,  $u_y$ , en la sección vertical central  $x = H/2$  de la cavidad, se muestra en la Figura 4.31.

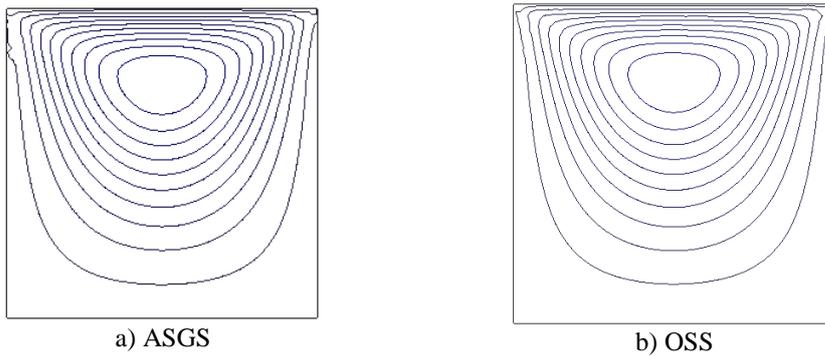


Figura 4.24. Flujo en una cavidad. Líneas de corriente en la malla M3.

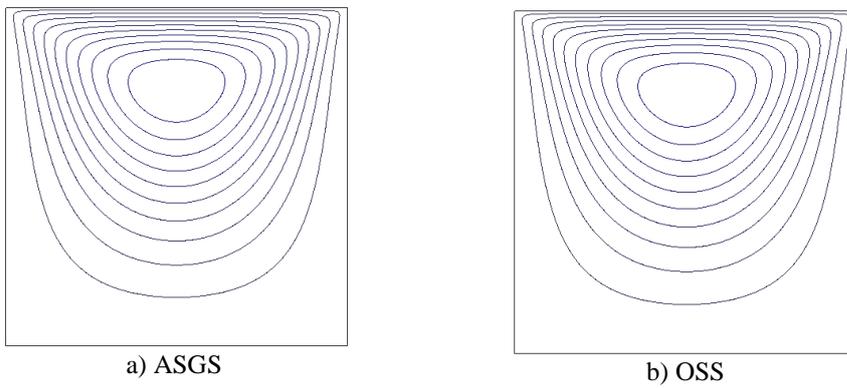


Figura 4.25. Flujo en una cavidad. Líneas de corriente en la malla M4.

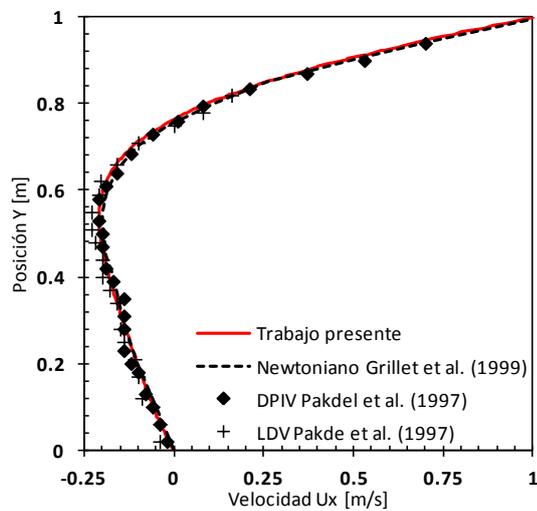


Figura 4.26. Flujo en una cavidad. Distribución de la velocidad horizontal a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$ . Comparación del presente trabajo con datos experimentales y numéricos.

#### 4.4.6.2. Fluido viscoplástico de Bingham

Para la Malla M3, Figura 4.27, se muestran las zonas de fluencia y no fluencia. Las zonas de no fluencia presentan algo de asimetría como consecuencia de la falta de simetría en la malla. Las diferencias obtenidas en estas zonas con los dos métodos de estabilización son más visibles para mayores números de Bingham. En la Figura 4.28, para la malla M4, las zonas de no fluencia son mucho más simétricas para ambos métodos y mucho más parecidas entre sí.

Los resultados obtenidos con la malla M4 (no estructurada) son muy similares a los obtenidos con la malla M2 (estructurada), lo que demuestra la convergencia del método empleado.

Las Figura 4.27 y Figura 4.28 también muestran las líneas de corriente calculadas en las mallas M3 y M4. En la malla M3 se calculan líneas de corriente algo irregulares, con peor definición para el método ASGS que para el OSS y peor a medida que aumenta el número de Bingham. En la malla M4 las líneas de corriente calculadas con ambos métodos de estabilización son más parecidas entre sí, siendo las diferencias sólo perceptibles para altos números de Bingham.

##### 4.4.6.2.1. Dinámica del flujo

###### *Presiones*

En la Figura 4.29 se muestra la distribución de presión obtenida a lo largo del tope de la cavidad con los dos métodos de estabilización para los diferentes números de Bingham. Se observa que la singularidad de presión en las esquinas se hace más intensa al aumentar el número de Bingham. El rápido aumento de la presión produce oscilaciones espúreas en la velocidad de los puntos singulares que son amortiguados por el método de estabilización. Se observa que, para todos los casos, el método OSS produce valores más elevados de las puntas de presión, con menores oscilaciones en la velocidad.

###### *Velocidades*

Los resultados para la componente horizontal de la velocidad,  $u_x$ , a lo largo de la sección vertical situada en  $x = H/2$  de la cavidad, mostrados en la Figura 4.30, son muy similares a los obtenidos por Vola (Vola et al., 2003). Los valores pequeños, casi nulos, de la velocidad coinciden con las zonas de no fluencia inferior y central. Estas zonas coinciden con el segundo y tercer cambios de pendiente más fuertes desde la pared inferior en la distribución de velocidad correspondiente a cada valor del número de Bingham. Estos cambios se producen de manera muy suave.

En la Figura 4.31 se comparan los resultados para la componente vertical de la velocidad,  $u_y$ , a lo largo de la sección horizontal ubicada en  $y = H/2$ , para flujo Newtoniano y de Bingham. A medida que aumenta  $\tau_y$ , la velocidad va disminuyendo hasta alcanzar valores muy pequeños, casi nulos para  $Bn = 1000$ . La distribución de la velocidad para  $u_y$  se mantiene antisimétrica para flujos viscoplásticos de Bingham.

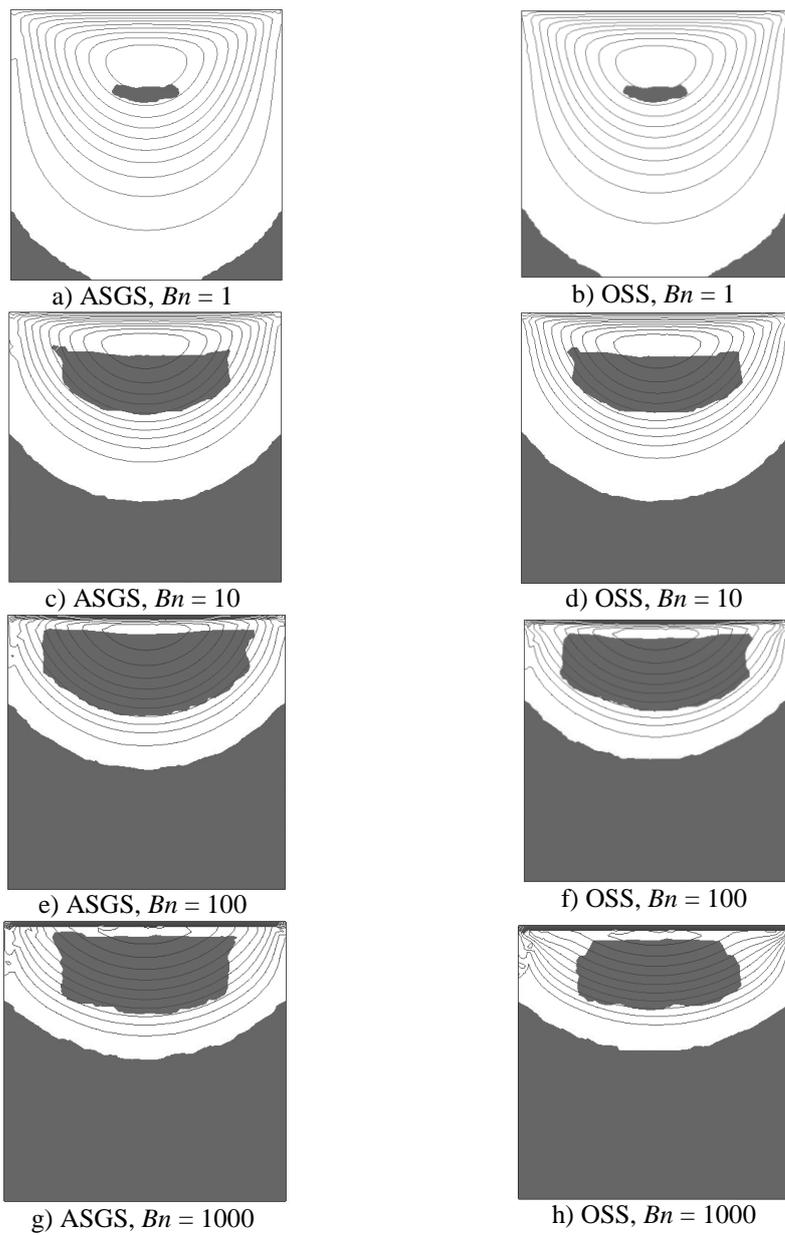


Figura 4.27. Flujo en una cavidad,  $Re \approx 0$ , ASGS, OSS. Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras) para diferentes números de Bingham con el método ASGS y el método OSS. Malla no estructurada M3.

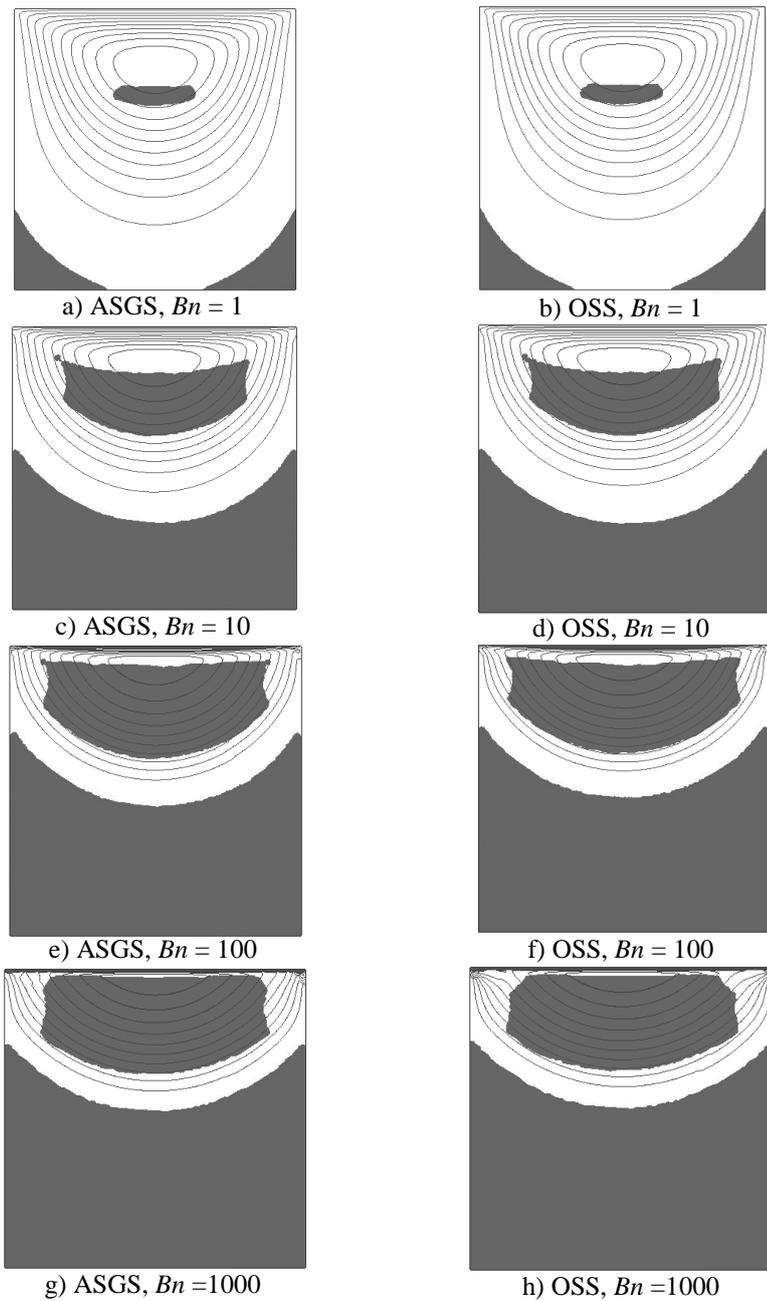


Figura 4.28. Flujo en una cavidad,  $Re \approx 0$ , ASGS, OSS. Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras) para diferentes números de Bingham con el método ASGS y el método OSS. Malla no estructurada M4.

#### 4.4.6.2.2. Intensidad de los vórtices del flujo

Las características principales de los vórtices son la intensidad del vórtice (valor mínimo de la función de corriente (ecuación (2.23)) en el ojo del vórtice),  $\Psi_{\min}$ , y las coordenadas del centro del vórtice.

En las Figura 4.32 a) y Figura 4.32 b) se muestran la intensidad y la posición del centro del vórtice creado por el flujo. Ambos valores tienden a estabilizarse para valores del número de Bingham muy grandes.

Los resultados comparan muy bien con los resultados obtenidos por Mitsoulis y Zisis (Mitsoulis and Zisis, 2001) para un amplio rango de valores de números de Bingham.

En el trabajo de Mitsoulis, la estabilización se alcanza para  $Bn \geq 1000$ , mientras que en el presente trabajo lo hace para  $Bn \geq 5000$ . Este hecho indica que las zonas de no fluencia y el centro del vórtice siguen desplazándose hacia arriba hasta estabilizarse más allá del valor alcanzado por Mitsoulis.

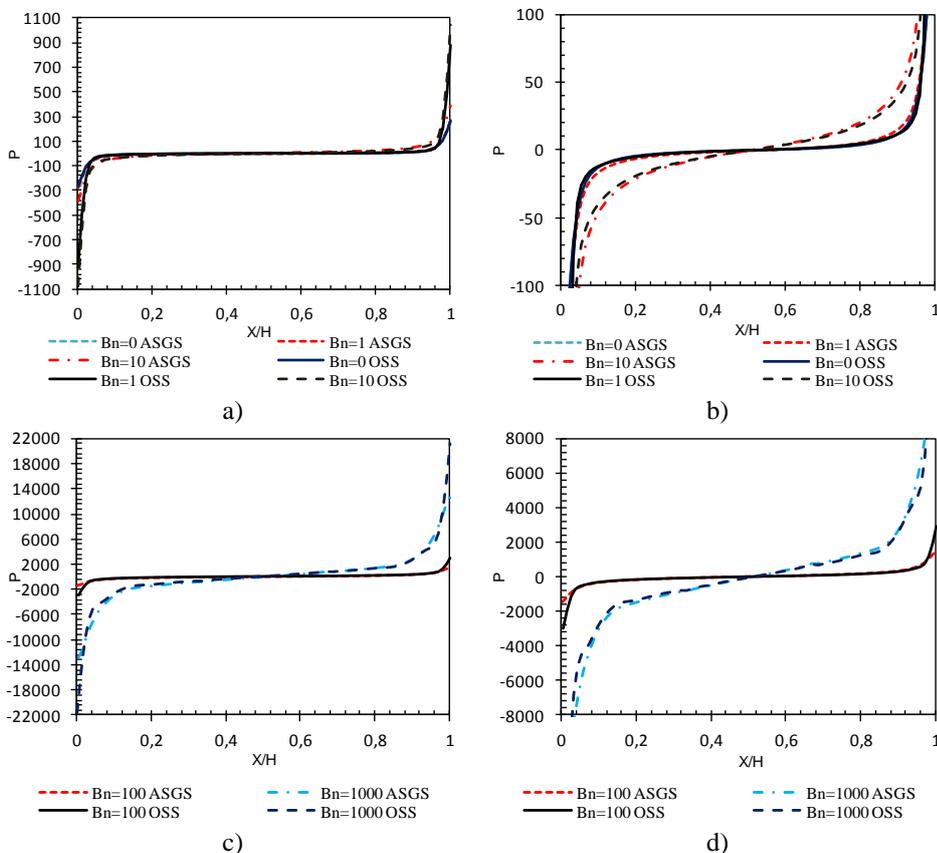


Figura 4.29. Flujo en una cavidad. Distribución de presiones en el tope de la cavidad. a)  $Bn = 0, 1, 10$ . b)  $Bn = 0, 1, 10$ , ampliada. c)  $Bn = 100, 1000$ , d)  $Bn = 100, 1000$ , ampliada.

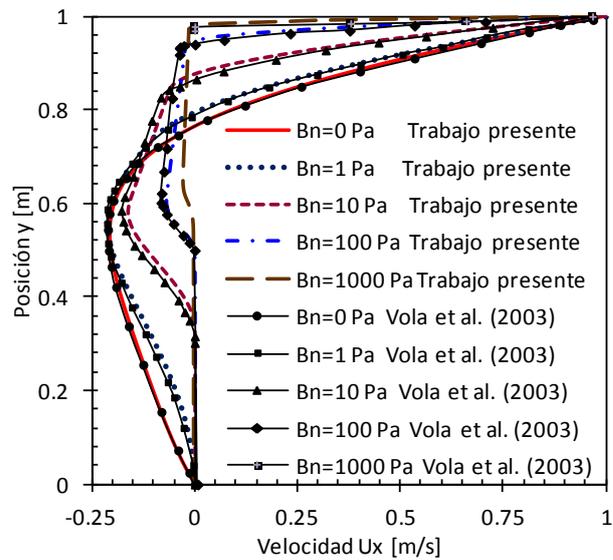


Figura 4.30. **Flujo en una cavidad.** Variación de la velocidad horizontal  $u_x$  a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$  para fluido Newtoniano y no-Newtoniano con  $Bn = 1, 10, 100, 1000$ . Comparación del presente trabajo con datos numéricos de Vola et al. (2003).

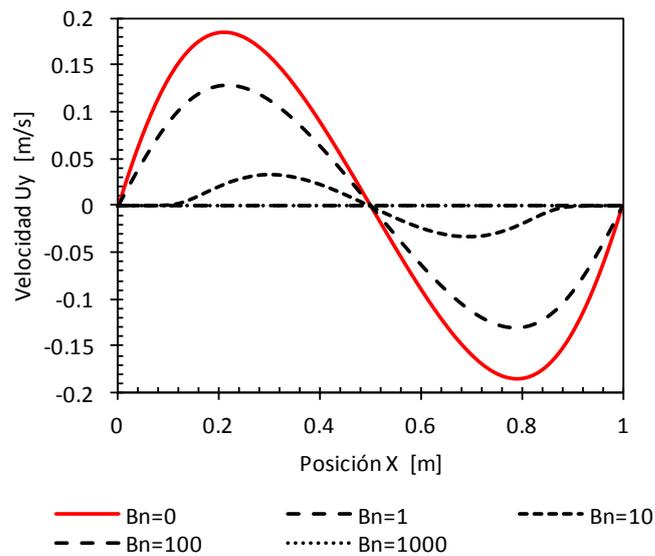
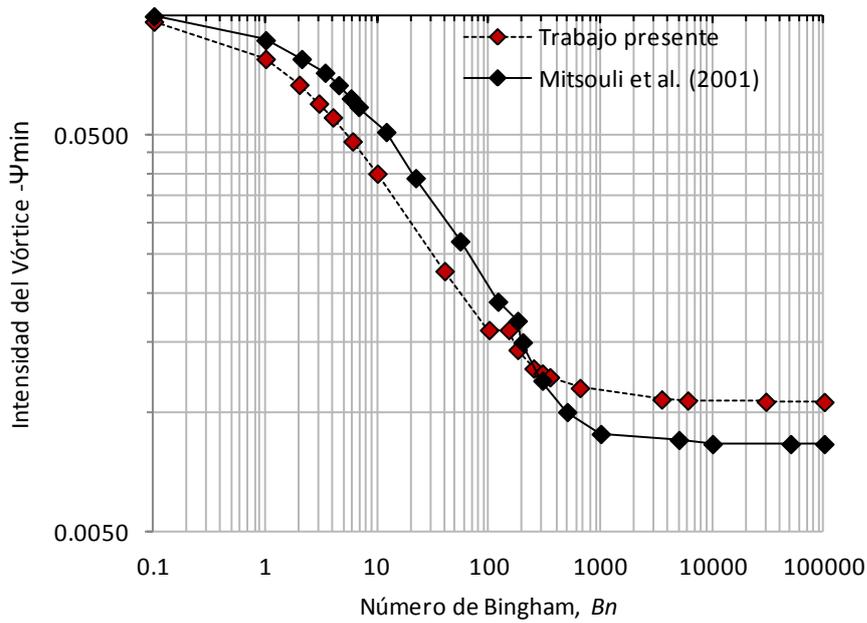
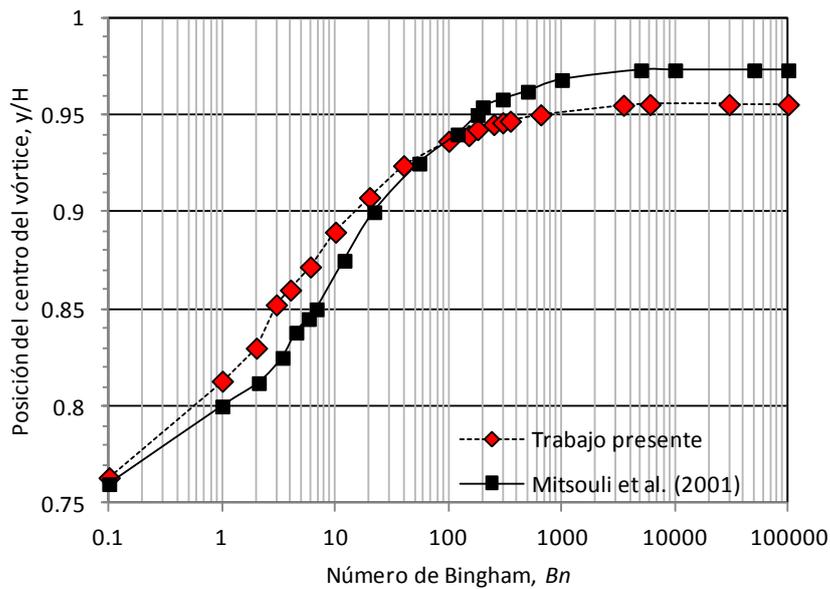


Figura 4.31. **Flujo en una cavidad.** Variación de la velocidad vertical  $u_y$  a lo largo de la sección horizontal  $y = H/2$  para fluido Newtoniano y no-Newtoniano con  $Bn = 1, 10, 100, 1000$ .



a)



b)

Figura 4.32. *Flujo en una cavidad,  $Re \approx 0$ , OSS.* a) Ordenada de la intensidad del vórtice para diferentes números de Bingham. b) Ordenada del ojo del vórtice ( $x = H/2$ ). Malla M5,  $m = 1000$  s.

#### 4.4.7. Caso inercial, $Re = 100$

##### 4.4.7.1. Fluido viscoplástico de Bingham

A continuación, se analiza el problema del flujo en una cavidad para número de Reynolds igual a 100,  $Re = 100$ , valores del número de Bingham  $Bn = 0.1, 1$  en la malla no estructurada M4 con la estabilización OSS. Se analizan las velocidades y se comparan los resultados con los de Neofytou (Neofytou, 2005) y los de Frey (Frey et al., 2010). Neofytou y Frey usan una formulación en velocidad y presión ( $\mathbf{u}, p$ ). Neofytou usa una formulación de volúmenes finitos de cuatro caras para el caso 2D y el modelo regularizado sin estabilización. Frey usa elementos finitos con estabilización GLS e interpolación bilineal para la velocidad y la presión (elementos Q1Q1) y un modelo regularizado.

##### 4.4.7.1.1. Dinámica del flujo

En la Figura 4.33 se compara la variación de velocidad horizontal  $u_x$  en la sección vertical central  $x = H/2$  para valores del número de Bingham de  $Bn = 0.1, 1$ . Aumentando la tensión de fluencia, la velocidad en el fondo de la cavidad va disminuyendo y el perfil de velocidades se desplaza hacia el tope de la cavidad. Para  $Bn = 1$  las velocidades son menores en el fondo de la cavidad que para el flujo con número de Bingham de  $Bn = 0.1$ , lo contrario sucede en la parte superior de la cavidad. Estos resultados comparan muy bien con los obtenidos por Neofytou y Frey.

En la Figura 4.34 puede verse la variación de la velocidad vertical  $u_y$  en la sección  $x = H/2$ , para ambos valores de  $Bn$ . En esta figura puede observarse que el flujo pierde la antisimetría del caso no inercial ( $Re = 0$ ); el punto de inflexión de la gráfica ( $u_y = 0$ ) se desplaza a la derecha, ya no se encuentra en el punto medio ( $x = H/2$ ).

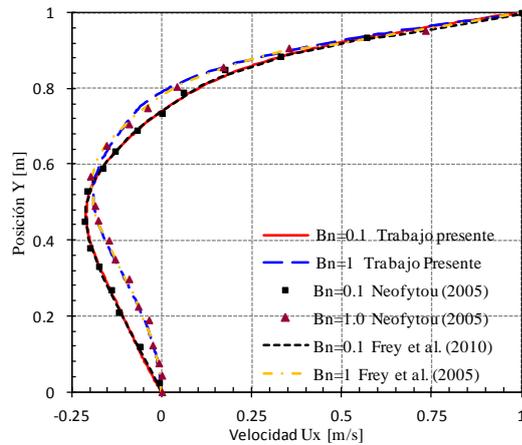


Figura 4.33. **Flujo en una cavidad,  $Re = 100$ , OSS.** Distribución de la velocidad horizontal  $u_x$  a lo largo de la sección vertical en  $x = H/2$  para  $Bn = 0.1, 1$ . Comparación con otros autores.

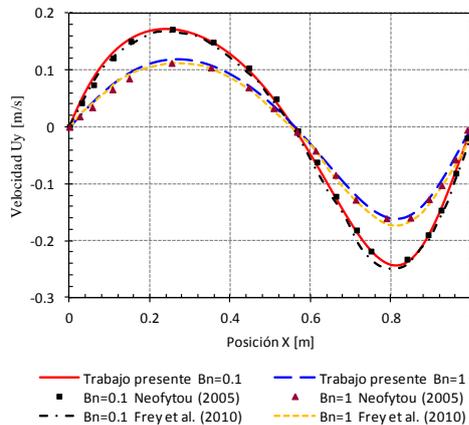


Figura 4.34. **Flujo en una cavidad,  $Re = 100$ , OSS.** Distribución de la velocidad vertical  $u_y$  a lo largo de la sección horizontal en  $y = H/2$  para  $Bn = 0.1, 1$ . Comparación con otros autores.

#### 4.4.8. Caso inercial, $Re = 1000$

A continuación, se analiza el problema para número de Reynolds igual a 1000,  $Re = 1000$ , para el caso Newtoniano y para fluido de Bingham con diferentes tensiones de fluencia en la malla no estructurada M4 y usando el método de estabilización OSS. Se analizan las líneas de corriente, las zonas de no fluencia y fluencia, las velocidades y la intensidad y ubicación del vórtice para el caso Newtoniano y para el fluido de Bingham. Se comparan los resultados numéricos con resultados de Ghia et al. (Ghia et al., 1982), Botella y Peyret (Botella and Peyret, 1998) y Vola et al. (Vola et al., 2003). Ghia et al. usan una formulación corriente-vorticidad de la ecuación de Navier-Stokes bidimensional con una técnica de multi-

mallas para fluidos Newtonianos. Botella y Peyret utiliza un modelo no regularizado y un esquema espectral que regulariza las ecuaciones de Navier-Stokes con el método de colocación. Vola usa una formulación en velocidades y presión ( $\mathbf{u}$ ,  $p$ ), modelo ideal y el método de elementos finitos (P1P1) con estabilización Brezzi-Pitkäranta.

#### 4.4.8.1. Fluido Newtoniano

##### 4.4.8.1.1. Dinámica del flujo

###### *Líneas de corriente y vórtices*

En la Figura 4.35 se muestra las líneas de corriente. Se observa la presencia de un vórtice principal central y dos vórtices secundarios en las esquinas del fondo de la cavidad. Las líneas de corriente están muy bien definidas y son completamente cerradas. El vórtice principal se ubica aproximadamente en el centro de la cavidad. El vórtice secundario ubicado en la esquina derecha del fondo de la cavidad tiene mayor tamaño que el vórtice secundario de la esquina izquierda.

###### *Intensidades de los vórtices del flujo*

En la Tabla 4.7 se presentan las intensidades de los vórtices y su ubicación obtenidas en el presente trabajo y se comparan con los valores reportados por otros autores. Los resultados que se obtienen en este trabajo coinciden prácticamente con los dados por Botella.

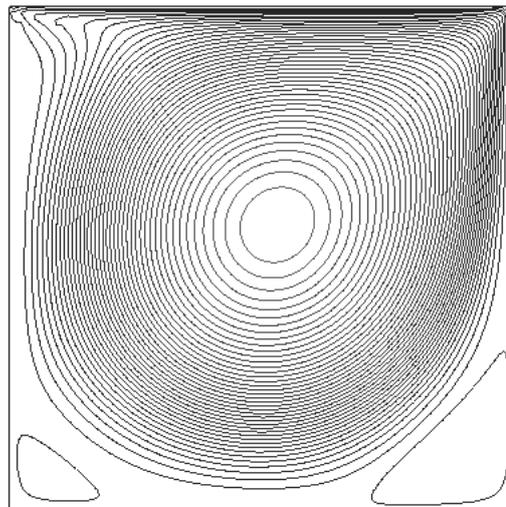


Figura 4.35. Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ ,  $Bn = 0$ . Líneas de corriente, vórtices principal (central) y secundarios (esquinas) para  $Bn = 0$ .

### Velocidades

En la Figura 4.36 a) puede verse la variación de velocidad  $u_x$  en la sección vertical central  $x = H/2$ . Los resultados para la velocidad  $u_x$  se corresponden muy bien con los obtenidos por Botella y Peyret.

En la Figura 4.36 b) se muestra la variación de velocidad vertical  $u_y$  en la sección horizontal  $y = H/2$ . Las velocidades muestran en su gráfica una zona de velocidad lineal y el flujo pierde la antisimetría del caso no inercial ( $Re = 0$ ); el punto de inflexión se desplaza a la derecha, ya no se encuentra en el punto medio ( $x = H/2$ ). Los resultados para la velocidad vertical  $u_y$  se corresponden muy bien a los obtenidos por Botella.

Referencias	Vórtice principal	Vórtice derecho	Vórtice izquierdo
<b>Presente_trabajo</b>			
$\Psi_{\min}$	0.11594	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
(x,y)	(0.531,0.568)	(0.8639,0.1121)	(0.0828,0.0774)
<b>Botella y Peyret</b>			
$\Psi_{\min}$	0.1189	$1.73 \cdot 10^{-3}$	$2.3 \cdot 10^{-4}$
(x,y)	(0.531,0.652)	(0.864,0.118)	(0.0833,0.0781)
<b>Otras referencias de Botella y Peyret</b>			
$\Psi_{\min}$	[0.113,0.119]	[ $1.6 \cdot 10^{-3}$ , $1.9 \cdot 10^{-3}$ ]	[ $2.1 \cdot 10^{-4}$ , $3.2 \cdot 10^{-4}$ ]

Tabla 4.7. Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ ,  $Bn = 0$ . Malla M4. Características principales de los vórtices comparados con los resultados de Botella y Peyret (1998).

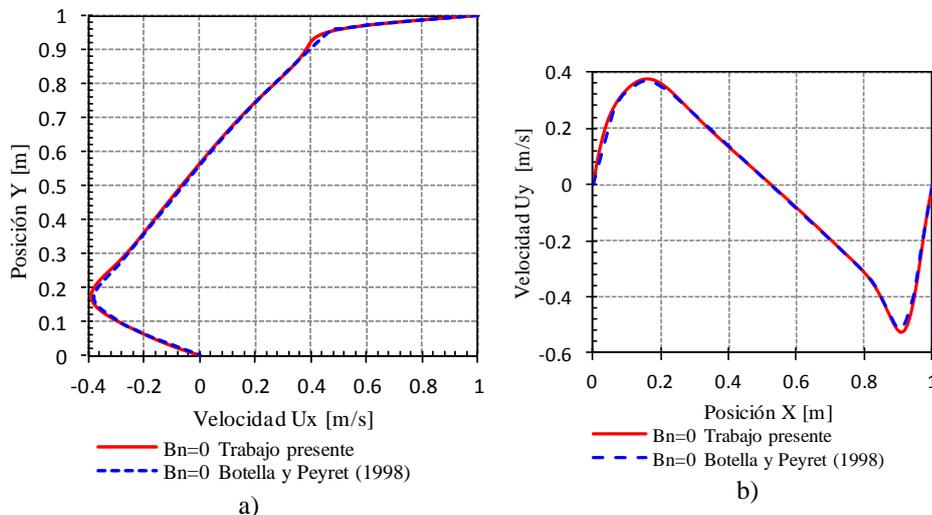


Figura 4.36. Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ ,  $Bn = 0$ . a) Variación de la velocidad horizontal  $u_x$  a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$ . b) Variación de la velocidad vertical  $u_y$  a lo largo de  $y = H/2$ . Comparación de la velocidad con los resultados obtenidos por Botella y Peyret (1998).

#### 4.4.8.2. Fluido viscoplástico de Bingham

##### 4.4.8.2.1. Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 4.37 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia para un flujo de  $Re = 1000$  y distintos números de Bingham,  $Bn = 1, 10, 100, 1000$ . Se observa que a medida que aumenta el número de Bingham:

- Aumentan las zonas de no fluencia y disminuyen las zonas de fluencia.
- La zona de no fluencia principal (central) se desplaza inicialmente hacia la izquierda y luego vuelve a ubicarse en el centro de la cavidad; esta última ubicación es similar a la obtenida para flujo no inercial.

Los resultados para las zonas de fluencia y no fluencia son muy similares a los resultados obtenidos por Vola et al. (Vola et al., 2003) en los casos inerciales.

##### 4.4.8.2.2. Dinámica del flujo

###### *Líneas de corriente y vórtices*

En la Figura 4.37 se muestran también las líneas de corriente y sus vórtices para diferentes números de Bingham. Se observa que, a medida que aumenta el número de Bingham:

- Las líneas de corriente van desplazándose hacia el tope de la cavidad.
- Las líneas de corriente sólo muestran antisimetría respecto a la sección vertical ubicada en  $x = H/2$  para  $Bn = 1000$ .
- El vórtice principal cambia de forma redondeada a ovalada y aplastada.
- El vórtice principal va girando en el sentido de las agujas del reloj hasta reubicarse en la vertical con  $x = H/2$  para  $Bn = 1000$ .
- Los vórtices secundarios desaparecen.

###### *Velocidades*

En las Figura 4.38 a) y b) se muestra la variación de la componentes horizontal y vertical de la velocidad,  $u_x$  y  $u_y$ , respectivamente, a lo largo de la sección vertical ubicada en  $x = H/2$  para diferentes números de Bingham. Se observa que a medida que aumenta el número de Bingham, la magnitud de ambas componentes  $u_x$  y  $u_y$  va disminuyendo hasta hacerse casi nula en el fondo de la cavidad.

Los resultados obtenidos para la variación de la velocidad horizontal,  $u_x$ , en el problema de la cavidad cuadrada considerando la inercia son muy similares a los resultados obtenidos por Vola et al. (Vola et al., 2003), excepto para  $Bn = 10 Pa$ . Sin embargo, el resultado para la variación de la velocidad con este valor es congruente con la evolución del comportamiento global a medida que se aumenta la tensión de fluencia.

En la Figura 4.39 a) se muestra la variación de la velocidad vertical,  $u_y$ , en una sección horizontal que pasa por  $y = H/2$  para números de Bingham de 0, 1 y 10 y en la Figura 4.39 b) para números de Bingham de 100 y 1000. A medida que el número de Bingham aumenta:

- La magnitud de la velocidad disminuye.
- La variación de la velocidad pierde la antisimetría del caso no inercial ( $Re = 0$ ) pero parece recuperarla para muy altos números de Bingham.

*Velocidades máximas y mínimas e intensidad de los vórtices*

En la Tabla 4.8 se muestran los resultados para las velocidades máximas y mínimas y el punto de ubicación donde se producen estas velocidades dentro de la cavidad. Estos resultados comparan muy bien con los obtenidos por Botella y Peyret (Botella and Peyret, 1998), Vola et al. (Vola et al., 2003), y Ghia.

En la Tabla 4.9 se presentan la ubicación del centro del vórtice principal y las intensidades máximas y mínimas obtenidas para diferentes números de Bingham. A medida que aumenta el número de Bingham:

- La ubicación del vórtice central va girando en sentido antihorario desde el centro de la cavidad hacia la derecha, para finalmente ubicarse en la parte superior de la sección central  $x = H/2$ .
- Las intensidad máxima ( $\psi_{\max}$ ) y mínima ( $\psi_{\min}$ ) disminuyen a medida que aumenta el número de Bingham. Para  $Bn = 1000$ , la intensidad máxima aumenta, posiblemente como consecuencia de que el vórtice se ubica cerca del eje de simetría.

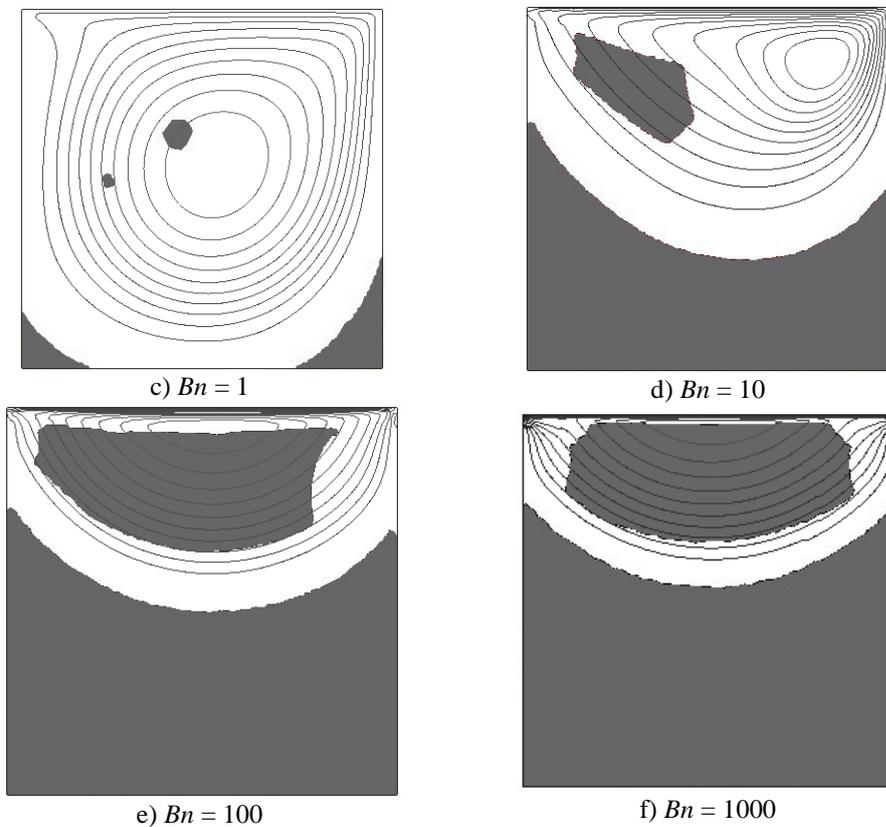


Figura 4.37. Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ , OSS. Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras).  $Bn = 0, 1, 10, 100, 1000$ . Malla no estructurada M4.

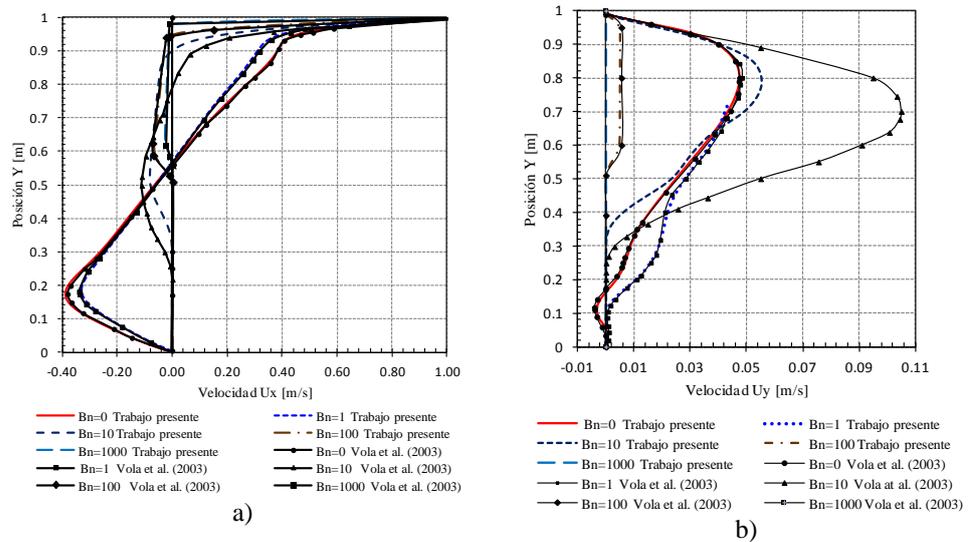


Figura 4.38. **Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ .** a) Variación de la velocidad horizontal  $u_x$  a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$  para  $Bn = 0, 1, 10, 100, 1000$ . b) Variación de la velocidad vertical  $u_y$  a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$  para  $Bn = 0, 1, 10, 100, 1000$ . Comparación del presente trabajo con los resultados obtenidos por Vola et al. (2003).

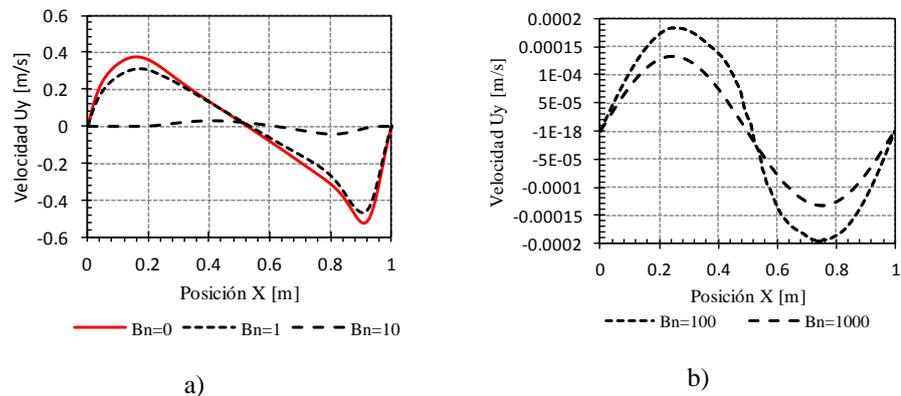


Figura 4.39. **Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ .** a) Variación de la velocidad vertical  $u_y$  a lo largo de la sección horizontal  $y = H/2$  para un fluido Newtoniano y un fluido de Bingham con  $Bn = 0, 1, 10$  Pa. b) Variación de la velocidad a lo largo de la sección  $y = H/2$  para un fluido Newtoniano y un fluido de Bingham con  $Bn = 100, 1000$ .

Velocidades máximas y mínimas							
Referencias	Tensión de fluencia	A lo largo de $x = 0.5$		A lo largo de $y = 0.5$			
	$\tau_y$ [Pa]	$Y_{mín.}$	$V_{xmín.}$	$X_{mín.}$	$Y_{ymín.}$	$X_{máx.}$	$Y_{ymáx.}$
<b>Presente trabajo</b>	0	0.1770	-0.3869	0.9059	-0.5251	0.1583	0.3757
	1	0.1883	-0.3286	0.9061	-0.4701	0.1677	0.3106
	10	0.5269	-0.0804	0.79	-0.0425	0.4125	0.031
	100	0.6092	-0.0667	0.7660	-0.00019	0.2 29	0.00018
	1000	0.6518	-0.0258	0.7535	-0.00013	0.2496	0.00013
<b>Vola et al.</b>	0	0.175	-0.3813	0.9125	-0.5181	0.1625	0.3723
	1	0.17	-0.3796	0.9	-0.482	0.1625	0.3286
	10	0.5	-0.1156	0.825	-0.1258	0.3375	0.0572
	100	0.6	-0.0762	0.61 5	-0.0002	0.4625	0.00017
	1000	0.6375	-0.0288	0.925	-0.00015	0.075	0.00016
<b>Botella y Peyret</b>	0	0.1717	-0.3886	0.9092	0.5271	0.1578	-0.3769
<b>Otras ref. de Botella y Peyret</b>	0	[0.16,0.18]	[-0.39,0.37]	[0.90,0.91]	[0.49,0.5]	[0.15,0.16]	[-0.38,-0.34]
<b>Ghia</b>	0	0.1719	-0.3829	0.9063	-0.5155	0.1563	0.37095

Tabla 4.8. Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ . Velocidades extremas y su posición para el flujo Newtoniano y el flujo de Bingham. Comparación con resultados numéricos de otros autores.

$Bn$	Vórtice principal (x,y)	$\Psi_{mín.}$	$\Psi_{máx.}$
1	(0.538,0.570)	0.10024	$4.74 \cdot 10^{-3}$
10	(0.797,0.850)	0.04395	$4.65 \cdot 10^{-3}$
100	(0.532,0.948)	0.01745	$3.86 \cdot 10^{-3}$
1000	(0.5014,0.9758)	$4.02 \cdot 10^{-3}$	$5.81 \cdot 10^{-3}$

Tabla 4.9. Flujo en una cavidad,  $Re = 1000$ . Ubicación del vórtice principal para el flujo de Bingham y valores extremos para las líneas de corriente.

#### 4.4.9. Conclusiones

Se ha realizado un amplio estudio del fluido viscoplástico de Bingham para flujos no inerciales e inerciales en una cavidad cuadrada. Se analizaron las zonas de fluencia y no fluencia y las líneas de corriente obtenidas en mallas estructuradas y no estructuradas. Se estudió la variación de la presión y la velocidad así como la ubicación e intensidad de los vórtices del flujo en una malla estructurada.

A medida que aumenta el número de Bingham:

- El tamaño de las zonas de no fluencia aumenta y éstas se van desplazando hacia el tope de la cavidad.
- Las zonas de no fluencia muestran contornos más suaves.
- Las zonas de no fluencia son simétricas respecto a la sección vertical en  $x = H/2$  para flujos no inerciales y asimétricas en flujos inerciales.
- La magnitud de las componentes de la velocidad  $u_x$  y  $u_y$  disminuye.
- Disminuye sustancialmente la intensidad de los vórtices y éstos se desplazan hacia el tope de la cavidad.

En el flujo inercial las zonas de no fluencia se desplazan girando en sentido horario, de acuerdo con el sentido de la velocidad en el tope. Para muy altos números de Bingham el problema recupera la simetría que se presenta en los flujos no inerciales.

Los resultados obtenidos con el método OSS mostraron menor error que los obtenidos con el método ASGS en las comparaciones realizadas para las zonas de fluencia y no fluencia, las líneas de corriente y las presiones.

Los resultados para la velocidad en el flujo Newtoniano usando el método OSS se ajustan muy bien a los resultados experimentales y numéricos de diferentes autores.

Los resultados en el flujo viscoplástico de Bingham para las zonas de fluencia y no fluencia, las líneas de corrientes, la velocidad, la presión, intensidad y posición de los vórtices se corresponden con los resultados numéricos encontrados para otros autores.

## 4.5. Flujo en una expansión súbita

### 4.5.1. Descripción del problema

En este problema se examina la entrada y salida del flujo en una expansión súbita. El objetivo principal es describir el comportamiento viscoplástico del material a través de la expansión y la forma de las zonas de fluencia y no fluencia. El flujo se estudia para números de Reynolds casi nulos y también en flujos inerciales.

El problema del flujo en una cavidad con expansión repentina ha sido simulado por medio de elementos finitos, diferencias finitas y el método de Lattice Boltzmann, entre otros. Los estudios de este problema se iniciaron para el caso Newtoniano y se realizaron después para casos no-Newtonianos. El estudio de las zonas de fluencia y no fluencia comenzó con Abdali y Mitsoulis (Abdali and Mitsoulis, 1992). Los primeros trabajos sobre flujos inerciales en expansión fueron realizados por Scott et al. (Scott et al., 1988) quienes ampliaron su primer trabajo sobre fluidos Newtonianos en expansiones a fluidos no-Newtonianos como el fluido de Bingham.

Para un fluido Newtoniano, este flujo ha sido estudiado experimentalmente por Alleborn (Alleborn et al., 1997), que establece casos limitantes para la geometría y los parámetros del flujo. Hace referencia a un valor crítico del número de Reynolds ( $Re_c = 218$ ) para una expansión plana con relación de expansión 1:2; para valores de Reynolds tales que  $Re < Re_c$  hay una única, simétrica y estable configuración del flujo; a partir de ese valor crítico, el flujo presenta asimetría.

Para el fluido de Bingham, Hammad y Vradis (Hammad and Vradis, 1996) estudian el efecto de la temperatura en el flujo para diferentes números de Reynolds en una expansión axisimétrica. Mitsoulis y Huigol (Mitsoulis and Huilgol, 2003) estudian las zonas de fluencia y no fluencia. Analiza la forma, tamaño e intensidad de los vórtices en las esquinas de la expansión (zonas de recirculación) para flujos en expansión plana y axisimétrica. Mitsoulis emplea un amplio rango de números de Bingham ( $0 \leq Bn < \infty$ ) y un amplio rango de números de Reynolds ( $0 \leq Re \leq 200$ ). Frey et al. (Frey et al., 2010) estudian las zonas de fluencia y no fluencia en un rango de  $0.2 \leq Bn \leq 127$  y número de Reynolds de  $1 \leq Re \leq 30$  para expansiones planas con relaciones de 1:2 y de 1:4. Establece un valor crítico de número de Reynolds alrededor de 8 para un número de Bingham de 0.2, en una expansión con relación de altura de 1:4. Pari et al. (Pari et al., 2010) estudian las zonas de fluencia y no fluencia y las tensiones que ocurren en una cavidad plana. Tang et al. (Tang et al., 2011) analizan las zonas de fluencia y no fluencia y las longitudes de los vórtices del flujo en las esquinas entrantes de una cavidad plana.

Para fluidos de Bingham, los investigadores mencionados utilizan el modelo regularizado de Papanastasiou (Papanastasiou, 1987). Sanjay y Jayaraman (Sanjay and Jayaraman, 2002) también han estudiado el flujo en expansión axisimétrica y Masud y Kwack (Masud and Kwack, 2011) en expansión plana para fluidos que siguen la ley de potencia.

En este trabajo, para el flujo Newtoniano, se estudian las líneas de corriente en el flujo no inercial e inercial. Para el flujo de Bingham, se estudian las zonas de fluencia y no fluencia y las líneas de corriente para diferentes valores de la tensión de fluencia adimensional  $\tau_y^*$  (ec. (2.45)) y para diferentes números de Bingham,  $Bn$ , (ec. (2.44)).

El flujo se estudia para varios números de Reynolds. El número de Reynolds,  $Re$ , es el de la ec. (2.47), considerando la velocidad promedio del flujo de Bingham.

La velocidad se adimensionaliza dividiéndola por la velocidad promedio del flujo Newtoniano  $V_N = 1 \text{ m/s}$  con la misma viscosidad que para el fluido viscoplástico de Bingham.

La solución analítica de Poiseuille para la velocidad en el canal de entrada y en el canal de salida es la obtenida en el apartado 2.8.3.2, ecuación (2.108). Los perfiles completamente desarrollados en la entrada y en la salida se muestran en las Figura 4.41 y Figura 4.42, respectivamente para los diferentes valores de  $\tau_y^*$ . En el canal de salida la velocidad máxima está relacionada con la expansión del canal y resulta de la conservación de *momentum*. La velocidad máxima en la salida,  $V_{\max}^s$ , es proporcional a la velocidad máxima en la entrada,  $V_{\max}^e$ , e inversamente proporcional a la expansión del canal,  $H:2H$ . Esto es:  $V_{\max}^s / H = V_{\max}^e / 2H$ .

La tensión se adimensionaliza dividiéndola por el valor de la tensión de fluencia correspondiente.

El flujo lo produce un gradiente de presión adimensional  $\Delta P^* = 3$ , definido como:

$$\Delta P^* = \left( \frac{\Delta P}{\Delta L} \right) \frac{H^2}{\mu V_N} = 3 \quad (4.2)$$

Para el flujo Newtoniano los resultados del presente trabajo se comparan con los obtenidos por Alleborn (Alleborn et al., 1997), que estudia tanto el caso no inercial como las bifurcaciones que ocurren para altos números de Reynolds.

Para el flujo de Bingham los resultados se comparan con los obtenidos por Mitsoulis y Huilgol (Mitsoulis and Huilgol, 2003), Frey et al. (Frey et al., 2010), Pari et al. (Pari et al., 2010) y Tang et al. (Tang et al., 2011). Todos estos trabajos usan una formulación  $(\mathbf{u}, p)$ . Mitsoulis y Huilgol usan un modelo regularizado, un método lagrangeano mejorado y elementos cuadrados con interpolación Q2Q1. Frey et al. usan un modelo regularizado, interpolación bilineal de igual orden para la velocidad y presión, estabilización con el método GLS. Pari et al. (Pari et al., 2010) usan un modelo regularizado, con interpolación bilineal para la velocidad y presión, estabilización GLS. Tang et al. usan el método de Lattice-Boltzmann.

#### 4.5.2. Geometría y condiciones de contorno

Para una geometría plana con una expansión de 1:2 las condiciones de contorno se muestran en la Figura 4.40.

Por simetría del problema, se simula solamente la parte superior del dominio.

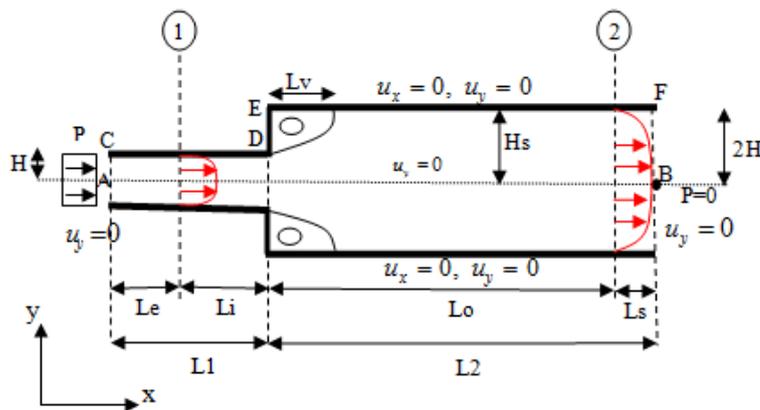


Figura 4.40. Geometría y condiciones de contorno.

La condición de no deslizamiento se impone en las paredes de la cavidad de la expansión a lo largo de CDEF. La condición de deslizamiento se impone a lo largo del plano de simetría, AB. El fluido se mueve por la aplicación de un gradiente de presión. En la sección de salida BF la presión es nula. En la entrada AC se aplica un perfil de presiones  $P$  constante de manera tal que se produzca el gradiente de presión deseado.

Los efectos de entrada debido a la aplicación de esta presión son importantes en la sección CA y mucho menos importantes en la sección de salida BF. Desde la sección de entrada, se desarrolla una capa límite, en una longitud  $L_e$ , que desaparece en la sección 1; en esta sección 1, el perfil de velocidades está completamente desarrollado ((Schlichting, 1968), (Chhabra and Richardson, 2008)). Después de la expansión, el perfil de velocidades se desarrolla a lo largo de  $L_o$  (canal expandido) hasta la sección 2; este perfil totalmente desarrollado se mantiene en el resto del canal de salida ( $L_s$ ). Una vez que se ha desarrollado completamente el perfil de velocidades, éste es independiente de la longitud del canal ( $L_i$  y  $L_s$ ).

De acuerdo con Alleborn (Alleborn et al., 1997), la longitud de entrada,  $L_e$ , y la de salida,  $L_o$ , deben ser lo suficientemente grandes como para permitir el completo desarrollo de los perfiles de velocidad en las secciones 1 y 2 (Figura 4.40). La longitud de entrada mínima de  $L_e = 4R$  ( $R$  es el radio del cilindro) es estándar en el caso axisimétrico. En el caso de geometrías planas esta longitud se toma  $L_e = 4H$  ( $H$  es la mitad del ancho del canal). En el canal de salida Shapira (Shapira et al., 1990) sugiere usar una longitud adimensional  $L_s/H$  en función del número de Reynolds como  $L_s/H = 8 + 0.08Re$ . De acuerdo con Shapira, para  $Re = 100$ , esta longitud resulta en  $L_s/H = 16$ .

En este estudio se toma una longitud total en el canal de entrada de  $L1 = 6H = 6$  y en el canal de salida de  $L2 = 15H = 15$ . Para estos valores se obtiene una solución completamente desarrollada en el caso no-Newtoniano para números de Reynolds de hasta 150 y valores de fluencia adimensional igual a 1. Sin embargo, si se desea estudiar números de Reynolds más altos para valores de fluencia adimensional igual a 1 es necesario ampliar la longitud  $L2$  como recomienda Mitsoulis (Mitsoulis and Huilgol, 2003). En este trabajo, el valor máximo de número de Reynolds usado es  $Re = 26$  para la tensión adimensional  $\tau_y^* = 1$ .

En las Figura 4.41 y Figura 4.42 se muestra el perfil parabólico para la velocidad de entrada y la de salida en un flujo Newtoniano no inercial. La variación de la velocidad de entrada, Figura 4.41, se ajusta exactamente a la solución analítica del flujo de Poiseuille. La velocidad en el canal de salida es la mitad de la velocidad en el canal de entrada.

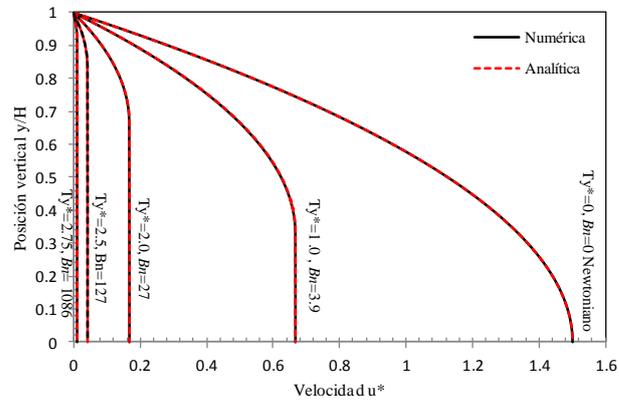


Figura 4.41. *Flujo en una expansión súbita. Variación de la velocidad adimensional en el canal de entrada para diferentes tensiones de fluencia adimensionales. Comparación entre la solución analítica y la numérica.*

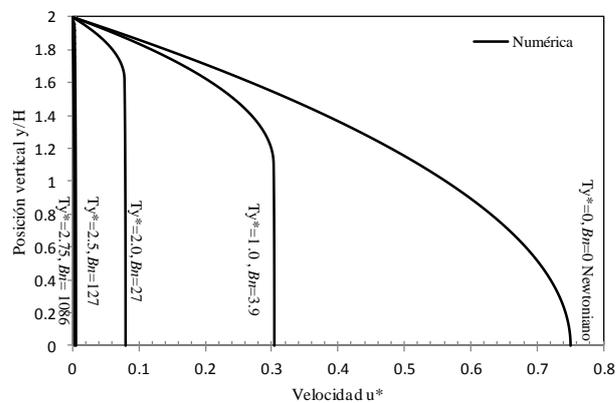


Figura 4.42. *Flujo en una expansión súbita. Variación de la velocidad adimensional en el canal de salida para diferentes tensiones de fluencia adimensionales  $\tau_y^*$ .*

### 4.5.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

Las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización usados para el problema del flujo en expansión súbita se dan en la Tabla 4.10.

Propiedades constitutivas	
Modelo del fluido	Bingham
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1
Tensión de fluencia $\tau_y^*$	0, 1, 2.5, 2.75, 2.9
Números de Bingham, $Bn$	0, 3.9, 27.1, 127, 1086, 7078
Regularización	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 4.10. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

### 4.5.4. Descripción del problema discreto

El procedimiento seguido para la solución del problema del flujo en una expansión súbita para diferentes números de Bingham es el siguiente:

- Las simulaciones se realizan para diferentes valores de la tensión de fluencia adimensional  $\tau_y^*$ . Estos valores se toman desde  $\tau_y^* = 0$  hasta  $\tau_y^* = 2.9$ .
- Para el flujo Newtoniano ( $\tau_y^* = 0$ ) se impone una presión estimada en la entrada del canal y presión nula en la salida del canal expandido.
- Se itera con el valor de la presión en la sección de entrada hasta lograr el gradiente de presión adimensional  $\Delta P^* = 3$  y, por ende, el perfil desarrollado de Poiseuille en la sección 1 (ver Figura 4.41 para  $\tau_y^* = 0$ ).
- Este resultado es la base para el cálculo del flujo viscoplástico usando diferentes números de Bingham.
- Para cada número de Bingham, y partiendo del valor obtenido en el caso anterior, se itera con el valor de la presión de entrada hasta obtener el gradiente deseado y el perfil desarrollado correspondiente a la Figura 4.41.
- Al lograrse el perfil desarrollado en la sección 1 se logra simultáneamente el perfil desarrollado de la velocidad en la sección 2 del canal de salida (Figura 4.42).

#### 4.5.4.1. Discretización

Para el análisis numérico se usa la malla estructurada  $M$ , formada por elementos cuadriláteros Q1Q1 con interpolación bilineal para velocidad y presión. El número de nodos y elementos se presenta en la Tabla 4.11. En la Figura 4.43 se muestra la malla estructurada  $M$ .

El origen de coordenadas y los ejes de referencia se sitúan en el punto medio de la sección de expansión.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos	$L_e/H$
M	29348	28776	15

Tabla 4.11. Número de nodos y elementos para la malla estructurada M.

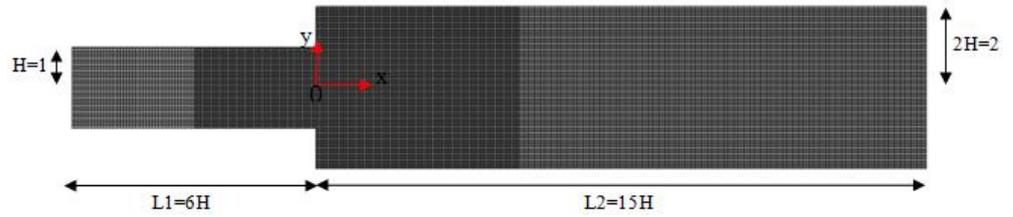


Figura 4.43. Malla estructurada M de elementos cuadriláteros.

#### 4.5.5. Caso no inercial, $Re \approx 0$

##### 4.5.5.1. Fluido Newtoniano

En la Figura 4.44 se muestran las líneas de corriente y los vórtices en el canal expandido. Se observa que las líneas de corriente son suaves y se encuentran más separadas en el canal expandido que en el canal de entrada (disminución de la velocidad). En el canal expandido aparecen dos vórtices ubicados en las esquinas salientes.

Los resultados numéricos obtenidos están de acuerdo con los reportados por Alleborn et al. (Alleborn et al., 1997) y Mitsoulis y Huilgol (Mitsoulis and Huilgol, 2003) para geometría plana.

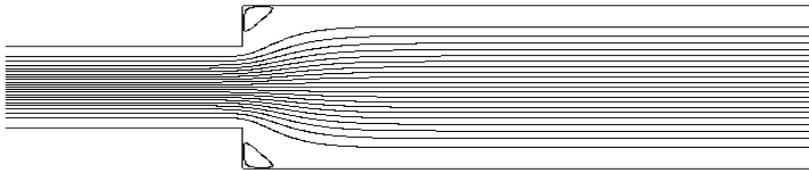


Figura 4.44. Flujo en una expansión súbita. Líneas de corriente para el flujo Newtoniano. Vórtices en la expansión.

##### 4.5.5.2. Fluido viscoplástico de Bingham

###### 4.5.5.2.1. Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 4.45 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia obtenidas para  $Re \approx 0$  y valores de tensión de fluencia adimensional,  $\tau_y^*$ , desde 1 hasta 2.9 y sus respectivos números de Bingham,  $Bn$ . Los resultados mostrados de las zonas de fluencia (blanco) y no fluencia (en color) se dan entre las secciones  $x/H = -3$  y  $x/H = 9$  de la geometría,  $x = 0$  en la expansión. A medida que aumenta el número de Bingham las zonas de no fluencia van extendiéndose y se van acercando a la zona donde ocurre la expansión. Para  $\tau_y^* = 2.9$ , el material extruido se comporta prácticamente como un sólido. En las esquinas de la expansión se presentan zonas de no fluencia que van extendiéndose en el sentido del flujo a medida que el número de Bingham aumenta.

Estos resultados tienen similitud con los encontrados en Mitsoulis y Huilgol (Mitsoulis and Huilgol, 2003), Frey et al. (Frey et al., 2010), Pari et al. (Pari et al., 2010) y Tang et al. (Tang et al., 2011). Los resultados de Mitsoulis y Huilgol y Frey et al. para la morfología de la zona de no fluencia en el canal expandido se presentan redondeadas en su inicio, en el trabajo de Pari et al. y el presente son menos redondeadas. En el trabajo de Tang et al. estas zonas de no fluencia muestran varias curvaturas.

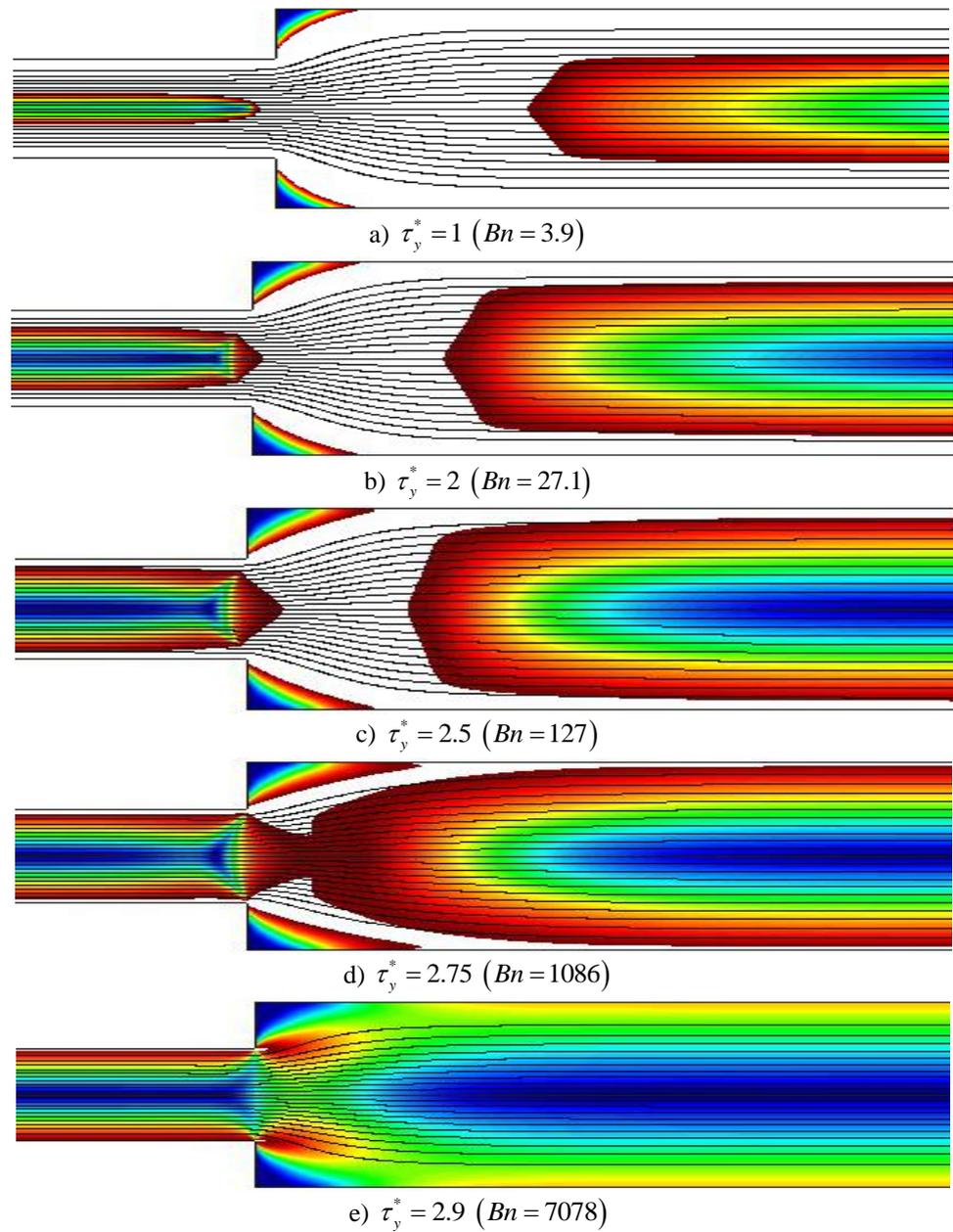


Figura 4.45. **Flujo en una expansión súbita.** Caso no-Newtoniano,  $Re \approx 0$ . Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia para una geometría expandida repentinamente 1:2. La cavidad en expansión se muestra desde las secciones  $x/H = -3$  hasta  $x/H = 9$ .

#### 4.5.5.2.2. Dinámica del flujo

##### Líneas de corriente

En la Figura 4.45 se muestran las líneas de corriente en el canal expandido. Éstas aparecen suaves y sin distorsiones numéricas para todas las tensiones adimensionales.

##### Presión

En la Figura 4.46 se muestra la caída de presión adimensional  $P^*$  para un flujo con un gradiente de presión  $\Delta P^* = 3$ , para diferentes valores de tensión de fluencia adimensional. A medida que aumenta la tensión de fluencia hasta el valor de  $\tau_y^* = 2.75$ , aumenta la caída de presión, consecuencia del aumento de la resistencia al movimiento (tensiones) del fluido. Para valores  $\tau_y^* > 2.75$ , la caída de presión comienza a descender. Esta caída de presión puede relacionarse con la caída en la velocidad del flujo. La velocidad analítica de un flujo de Poiseuille va disminuyendo a medida que se incrementa el número de Bingham hasta hacerse nula para la tensión adimensional de  $\tau_y^* = 3$ .

El perfil lineal de la caída de presión (Figura 4.46) cambia su pendiente antes y después de la expansión.

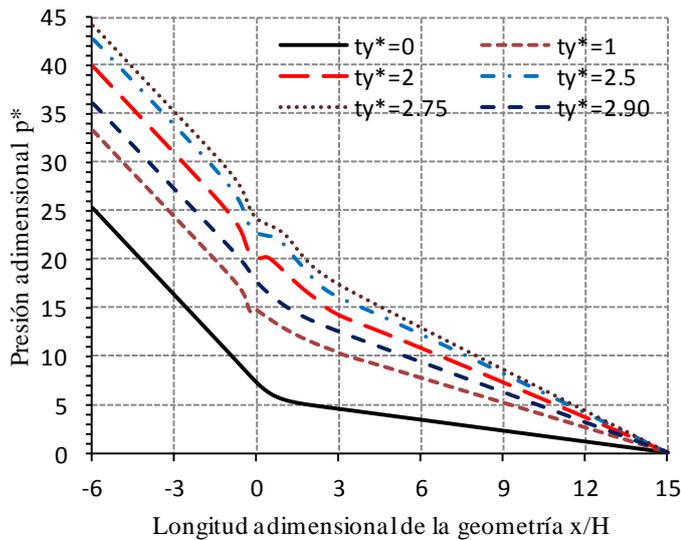


Figura 4.46. Flujo en una expansión súbita. Caída de presión adimensional para diferentes tensiones adimensionales  $\tau_y^*$ .

#### 4.5.6. Caso inercial

##### 4.5.6.1. Comportamiento reológico, $\tau_y^* = 1$ , $Re \neq 0$

###### *Zonas de fluencia y no fluencia*

En la Figura 4.47 se muestran resultados para flujos inerciales con números de Reynolds  $Re = 13$  y  $Re = 26$  con tensión de fluencia adimensional  $\tau_y^* = 1$ . Al aumentar el número de Reynolds, el flujo va desplazando las zonas de no fluencia (color) hacia la salida del canal expandido. Las zonas de no fluencia avanzan en el canal de salida y en el canal de entrada retroceden ligeramente. Las zonas de recirculación en las esquinas van alargándose a medida que aumenta el número de Reynolds.

###### *Tensiones*

En la Figura 4.48 se muestran los perfiles longitudinales de las tensiones adimensionales para el flujo de Bingham con tensión de fluencia adimensional de  $\tau_y^* = 1$  ( $Bn = 3.9$ ) y números de Reynolds de  $Re = 0$ ,  $Re = 13$  en el canal expandido a lo largo de las secciones horizontales  $y/H = 0$  y  $y/H = 2$ .

A lo largo de la sección  $y/H = 0$  dominan las tensiones normales adimensionales  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$ ; la tensión  $\tau_{12}^*$  es prácticamente nula (véanse las Figura 4.48 a) y c)). Por el contrario, a lo largo de la sección  $y/H = 2$  dominan las tensiones cortantes adimensionales  $\tau_{12}^*$ ; las tensiones  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$  son prácticamente nula (véanse las Figura 4.48 b) y d)).

En ambas secciones, la zona de no fluencia se corresponde con las zonas por debajo de la línea azul  $\tau_y^* = 1$ .

Los perfiles de las tensiones adimensionales son similares a los resultados presentados para estas tensiones en el trabajo de Pari usando  $\tau_y^* = 2$ .

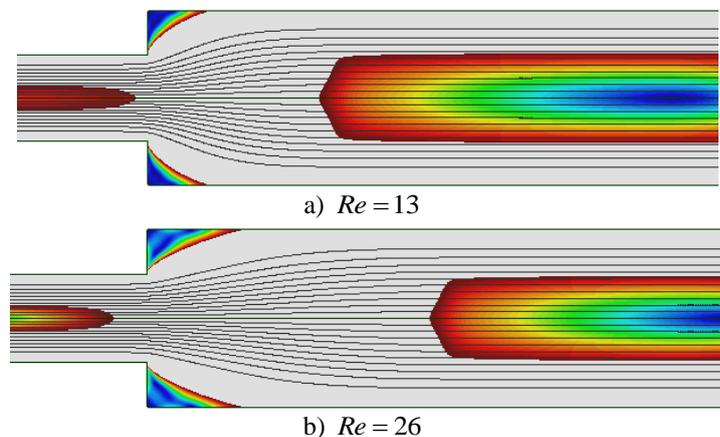


Figura 4.47. **Flujo en una expansión súbita.** Crecimiento progresivo de las zonas de fluencia debido a la inercia para una expansión súbita 1:2,  $\tau_y^* = 1$  ( $Bn = 3.9$ ). a)  $Re = 13$ , b)  $Re = 26$ .

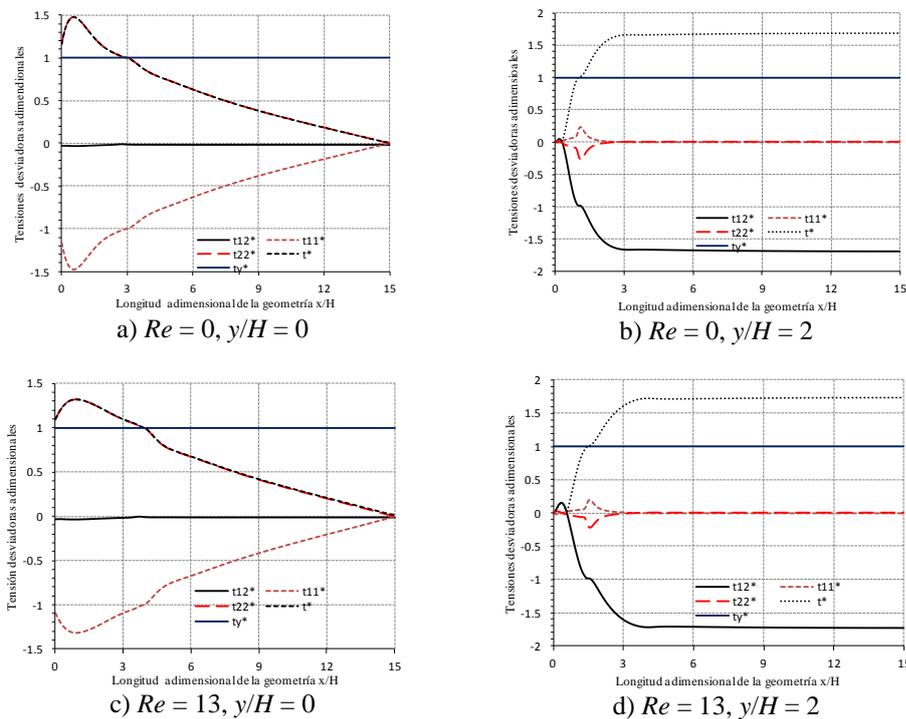


Figura 4.48. **Flujo en una expansión súbita.** Perfiles longitudinales de las componentes adimensionales del tensor de tensiones  $\tau_{ij}^*$  y la magnitud de este tensor  $\tau^*$  para ( $Bn = 3.9$ ). a)  $Re = 0, y/H = 0$ , b)  $Re = 0, y/H = 2$ , c)  $Re = 13, y/H = 0$ , d)  $Re = 13, y/H = 2$ .

#### 4.5.6.2. Comportamiento reológico, $\tau_y^* = 2.75, Re \neq 0$

##### Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 4.49 se muestran flujos inerciales para números de Reynolds de  $Re = 20.25, Re = 30.38, Re = 50.64$  con tensión de fluencia adimensional de  $\tau_y^* = 2.75$ . Al aumentar el número de Reynolds, el flujo va desplazando las zonas de no fluencia (color) hacia la salida del canal expandido, aunque con mucha dificultad. Las zonas de no fluencia avanzan muy poco en el canal de salida y en el canal de entrada apenas retroceden. En las zonas de recirculación (en las esquinas) apenas se aprecia alargamiento a medida que aumenta el número de Reynolds.

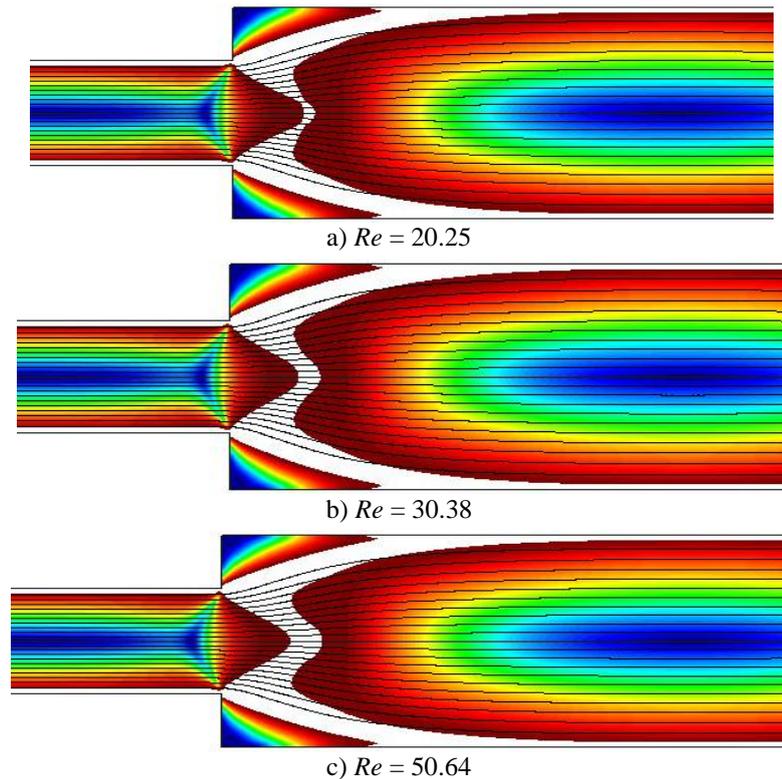


Figura 4.49. **Flujo en una expansión súbita.** Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia debido a la inercia para una expansión de 1:2,  $\tau_y^* = 2.75$  ( $Bn = 1086$ ).

#### Tensiones

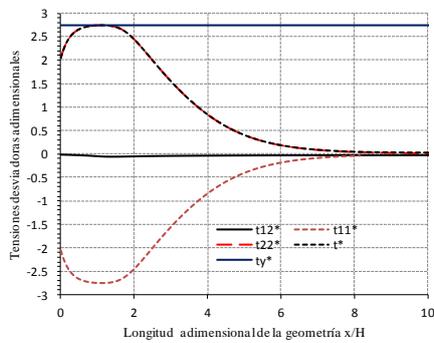
En la Figura 4.50 se muestran los perfiles longitudinales de las tensiones adimensionales para el flujo de Bingham con tensión de fluencia adimensional de  $\tau_y^* = 2.75$  ( $Bn = 1086$ ) y números de Reynolds de  $Re = 20.25$ ,  $Re = 30.38$ ,  $Re = 50.64$  en el canal expandido a lo largo de  $y/H = 0$  y  $y/H = 2$ .

A lo largo del eje de simetría  $y/H = 0$  dominan las tensiones normales adimensionales  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$ ; la tensión  $\tau_{12}^*$  es prácticamente nula (véanse las Figura 4.50 a) y c)). Se observa que donde se intercepta la línea azul con el perfil de velocidades es una pequeña zona en fluencia.

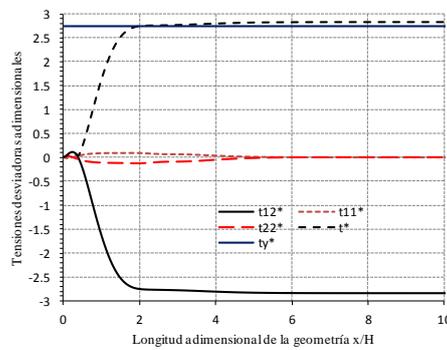
Por el contrario, a lo largo de  $y/H = 2$  dominan las tensiones cortantes adimensionales  $\tau_{12}^*$ ; las tensiones  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$  son prácticamente nulas (véanse las Figura 4.50 b) y d)).

En ambas secciones, la zona de no fluencia se corresponde con las zonas por debajo de la línea azul  $\tau_y^* = 1$ .

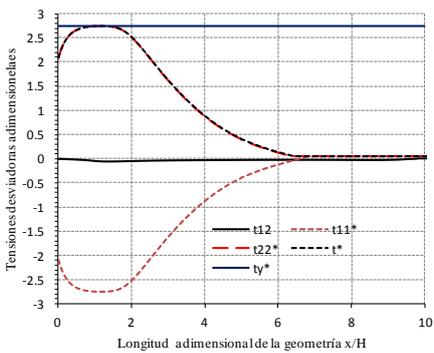
No existen grandes cambios entre los perfiles de las tensiones adimensionales para el flujo con número de Reynolds de  $Re = 20.25$  y el flujo con Reynolds de  $Re = 30.38$ .



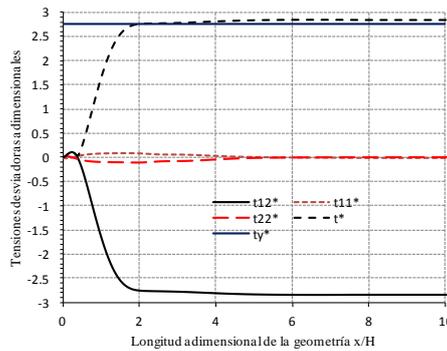
a)  $Re = 20.25, y/H = 0$



b)  $Re = 20.25, y/H = 2$



c)  $Re = 30.38, y/H = 0$



d)  $Re = 30.38, y/H = 2$

Figura 4.50. **Flujo en una expansión súbita.** Perfiles longitudinales de las componentes adimensionales del tensor de tensiones  $\tau_{ij}$  y la magnitud de este tensor  $\tau$  para  $\tau_y^* = 2.75$  ( $Bn = 1086$ ). a)  $Re = 20.25, y/H = 0$ , b)  $Re = 30.38, y/H = 2$ , c)  $Re = 20.25, y/H = 0$ , d)  $Re = 30.38, y/H = 2$ .

#### 4.5.7. Conclusiones

Se ha estudiado el fluido viscoplástico de Bingham en una cavidad con expansión súbita para el caso no inercial y algunos casos inerciales. Se han mostrado las zonas de fluencia y de no fluencia, las líneas de corriente, presiones y tensiones desviadoras.

En el flujo no inercial con diferentes números de Bingham se muestra que a medida que aumenta el número de Bingham:

- Aumentan las zonas de no fluencia.
- Aumentan las presiones hasta un cierto número de Bingham y luego disminuyen.
- Existe un reajuste de las presiones y tensiones luego de la expansión. En el eje de simetría dominan las tensiones normales y en las paredes de la cavidad las tensiones cortantes.

En el flujo inercial con diferentes números de Reynolds se observa que a medida que aumenta la velocidad:

- Las zonas de no fluencia se desplazan hacia la salida del canal expandido. Para valores de tensión de fluencia bajos, el flujo es casi Newtoniano (fluido totalmente en fluencia en el canal expandido).
- El flujo está dominado por las tensiones normales en la línea de simetría del canal expandido y por el cortante en las paredes superior e inferior del mismo.

## 4.6. Flujo de extrusión

### 4.6.1. Descripción del problema

El proceso de extrusión consiste en colocar una lámina de material dentro de un molde forzándolo a fluir a través de éste para producir la forma deseada. Este proceso es muy usado en la industria, en el área del conformado de metales, en productos manufacturados como envases, tubos, revestimiento de cables, entre otros. La extrusión consiste en empujar la lámina de material con un punzón a través del cual se aplica la presión necesaria para que comience a fluir. El proceso es directo cuando la lámina y el punzón de presión se mueven juntas contra un molde que está fijo, la dirección del flujo del material extruido coincide con la dirección del movimiento del punzón (Figura 4.51 a); es indirecto cuando el molde está unido al punzón y juntos se mueven sobre la lámina, el material extruido se mueve en dirección opuesta a la dirección del punzón (Figura 4.51 b)).

Aunque las aplicaciones industriales suelen ser tridimensionales, una simulación bidimensional simplificada provee información cualitativa de la naturaleza de la región plástica y permite estimar las fuerzas requeridas en el proceso de extrusión.

Prandtl introdujo en 1920 el método de las líneas de deslizamiento (*slip-line theory*) (Prandtl, 1920) como método sistemático para determinar los campos de tensiones y los campos de velocidades asociados a estas tensiones en cuerpos perfectamente plásticos que obedecen el criterio de fluencia de Von Mises (o Tresca) en deformación plana. Este método fue generalizado por Mandel (Mandel, 1962) con el fin de incluir otros criterios de fluencia e incluir el caso de tensión plana (Lubliner, 1990).

Las líneas de deslizamiento son las líneas tangentes a las direcciones de máxima tensión tangencial (2 direcciones ortogonales en cada punto, a  $45^\circ$  con las direcciones de las tensiones principales en problemas planos). Esto las define como las trayectorias de las máximas tensiones de cortante.

En deformación plana, el flujo plástico coincide con las direcciones de máxima tensión cortante. Por tanto, en un material rígido-plástico, el material desliza a lo largo de las líneas de máxima tensión cortante. De ahí el nombre de líneas de deslizamiento (*slip-lines*).

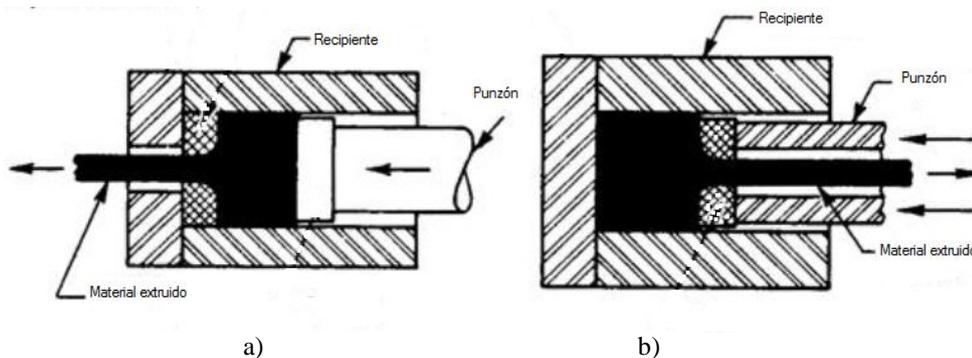


Figura 4.51. a) Extrusión directa. b) Extrusión indirecta.

Las líneas de deslizamiento forman un campo de familias ortogonales de curvas cuyas envolventes permiten definir zonas del dominio que deslizan sobre otras como sólidos rígidos, formando un mecanismo cinemático admisible. A partir de este mecanismo y utilizando las ecuaciones de Hencky (Hencky, 1924) se puede calcular la carga de fluencia en un problema dado. También se pueden usar los teoremas del máximo y del mínimo para acotar la carga de extrusión superior e inferiormente.

Con la teoría de las líneas de deslizamiento, Hill desarrolló en 1948 la solución para una extrusión directa sin fricción con el molde (Hill, 1948), con una reducción del cincuenta por ciento en la sección transversal. En esta solución el campo de las líneas de deslizamiento consiste en dos abanicos OAB y O'A'B' completamente simétricos y centrados en A y A', respectivamente, como se muestra en la Figura 4.52. Posteriormente, Alexander (Alexander, 1961) muestra que en una reducción de la cavidad en dos tercios (2/3) (Figura 4.53) existe una extensión (zona ABDC) de la zona en fluencia cuya tensión promedio es igual a la presión de extrusión:

$$p = \frac{4}{3} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \right) \tau_y \quad (4.3)$$

donde  $p$  es la presión de extrusión y  $\tau_y$  es la tensión de fluencia.

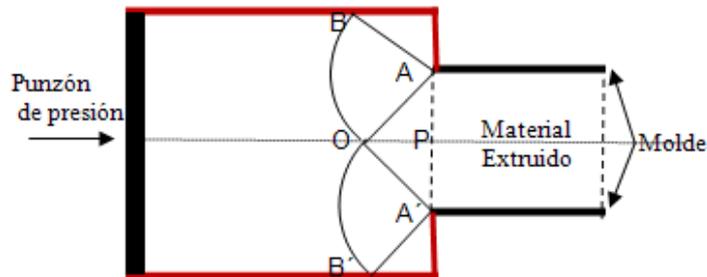


Figura 4.52. Envolvente del campo de las líneas de deslizamiento para una reducción del 50 %, Hill (1948).

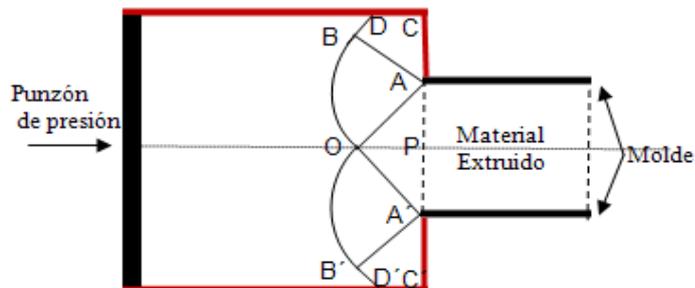


Figura 4.53. Envolvente del campo de las líneas de deslizamiento para una reducción de dos-tercios, Alexander (1961).

El problema de extrusión puede formularse en una forma lagrangeana bajo la aproximación de flujo plástico o como un sólido elasto-plástico.

En el primer caso, donde se ignoran completamente las deformaciones elásticas, el material obedece el criterio de Von Mises y una regla de flujo asociada. Zienkiewicz et al. (Zienkiewicz et al., 1978) y Oñate (Oñate, 1980) obtuvieron con esta formulación resultados para extrusión en deformación plana de un material sin endurecimiento en una malla lagrangeana que se deforma con el material. El problema es análogo al problema de elasticidad incompresible intercambiando los conceptos de desplazamiento, deformación y módulo de rigidez en el problema elástico por los de velocidad, velocidad de deformación y viscosidad no-Newtoniana en la formulación de flujo.

El segundo caso, considerando las deformaciones elásticas, es más complicado debido a la no linealidad geométrica y no linealidad del material. Lee (Lee, 1984) presentó uno de los primeros ejemplos de la aplicación del método de grandes deformaciones elasto-plásticas al problema de extrusión, utilizando un esquema lagrangeano actualizado y un modelo de material basado en el criterio de Von Mises con endurecimiento.

Alternativamente, este problema puede estudiarse en forma euleriana, como un flujo viscoplástico obedeciendo el criterio de Von Mises ((Diez and Godoy, 1991), (Perić and Slijepčević, 2001), (Händle Frank (Ed), 2007)). En esta formulación el material se comporta como rígido-plástico o perfectamente plástico, con una viscosidad plástica muy pequeña. En este contexto, una vez se alcanza la tensión de fluencia, el material fluye casi sin resistencia adicional. Dentro de las zonas de fluencia se forman líneas con alta localización de la velocidad de deformación que pueden identificarse con las líneas de deslizamiento de la teoría de Prandtl. Estas líneas forman un mecanismo cinemático que permite que otras zonas del material se muevan casi como un sólido rígido. La envolvente de las líneas de deslizamiento puede identificarse con los límites de las zonas de fluencia.

Esta es la formulación que se sigue en este trabajo. El objetivo principal es encontrar las zonas de fluencia y no fluencia, las líneas de corriente y el campo de las líneas de deslizamiento. Se obtiene también el correspondiente valor de la presión de extrusión, y se compara con la solución analítica dada por la teoría de las líneas de deslizamiento, ecuación (4.3).

El material se modela como un fluido regularizado de Bingham de manera similar al planteado por Perić y Slijepčević (Perić and Slijepčević, 2001). Este problema también ha sido estudiado por Larese de Tetto (Larese de Tetto, 2012).

#### 4.6.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 4.54 se muestran la geometría y las condiciones de contorno para una cavidad plana con una reducción de dos-tercios (2/3).

Se impone la condición de deslizamiento en las paredes CDEF y C'D'E'F'. Se aplica una condición de tracción normal impuesta a lo largo de la línea CC', que representa la presión aplicada por la almohadilla. La componente vertical de la velocidad en CC' es nula. La presión aplicada sigue la función lineal de carga que se muestra en la Figura 4.55. En el punto B, se impone una presión nula con el fin de determinar el campo de presiones. En el punto E se deja libre la componente horizontal de la velocidad.

La condición de contorno aplicada en las paredes del canal de entrada para el flujo de extrusión es distinta a la aplicada en el problema *benchmark* de flujo en expansión (sección 4.5); en consecuencia, el comportamiento del flujo es distinto.

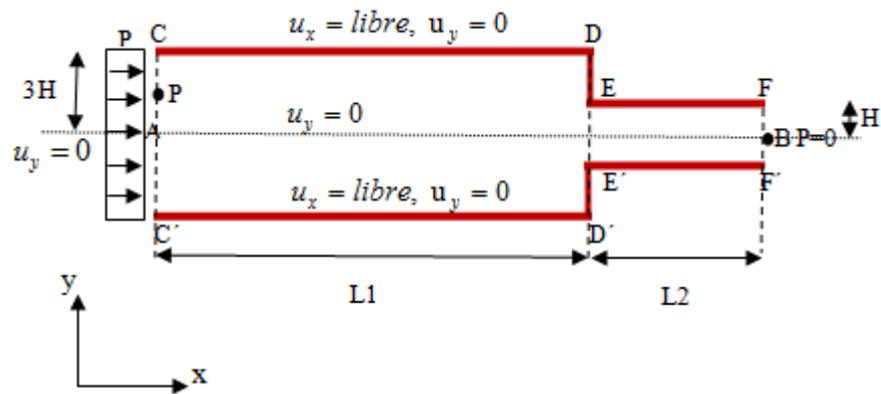


Figura 4.54. Geometría y condiciones de contorno.

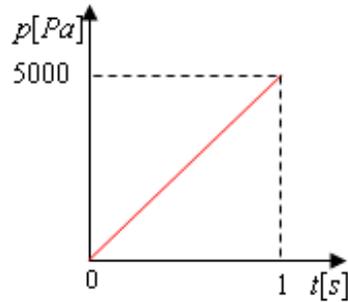


Figura 4.55. Función lineal de carga aplicada.

#### 4.6.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

Las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización usado en la simulación numérica para el fluido de Bingham en el flujo de extrusión se muestran en la Tabla 4.12.

Propiedades constitutivas	
Modelo del fluido	Bingham
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	1E-06
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	100
Tensión de fluencia $\tau_y^*$ [Pa]	1000
Número de Bingham, $Bn$	1000
Regularización	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 4.12. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

#### 4.6.4. Descripción del problema discreto

El problema se resuelve mediante sucesivos problemas estacionarios a medida que se incrementa la presión. Es un problema bidimensional de deformación plana. La simulación se realizó considerando el término convectivo en la ecuación de conservación de *momentum* y sin éste.

##### 4.6.4.1. Discretización

Por simetría sólo se analiza la mitad superior de la cavidad. Se utilizó una malla uniforme no estructurada de elementos triangulares P1P1, con número de nodos y elementos en la Tabla 4.13. La malla se muestra en la Figura 4.56.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
M	2821	5340

Tabla 4.13. Número de nodos y elementos para la malla no estructurada M.

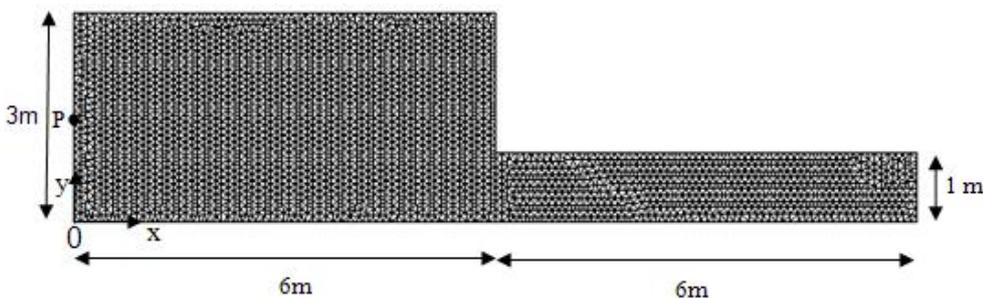


Figura 4.56. Malla no estructurada M.

#### 4.6.5. Presión de extrusión

La Figura 4.57 muestra la velocidad del punzón respecto a la presión aplicada, considerando el término convectivo en la ecuación de conservación de *momentum* y sin éste. Se muestra también la solución analítica obtenida de la teoría de las líneas de deslizamiento. En la solución numérica, el flujo está desarrollado y las zonas de fluencia están conformadas para una presión  $P = 3400 \text{ Pa}$  para el instante  $t = 0.68 \text{ s}$ . La solución analítica de la teoría de líneas de deslizamiento, ec. (4.3), es  $P_{ana} = 3428 \text{ Pa}$ .

En la solución sin el término inercial, una vez formado el mecanismo de las líneas de deslizamiento, y dada la muy baja viscosidad del fluido, el flujo alcanza velocidades muy grandes para pequeños incrementos de presión.

Esto no ocurre si se considera el término convectivo. En este caso, es necesario seguir aumentando la presión para vencer los efectos inerciales después de formarse el mecanismo

de las líneas de deslizamiento y conseguir velocidades importantes. Esta dependencia velocidad-fuerza de inercia es cuadrática.

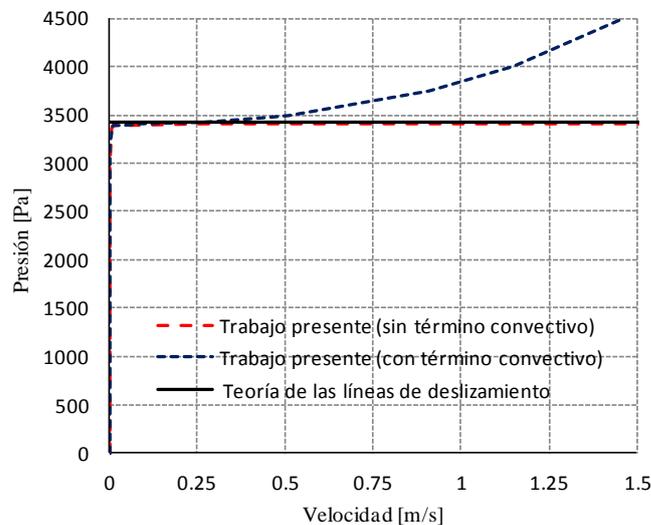


Figura 4.57. **Flujo de extrusión.** Relación presión-velocidad en el punzón (punto A). Comparación entre la solución analítica y la numérica.

#### 4.6.6. Dinámica del flujo

En la Figura 4.58 se muestran las líneas de corriente para diferentes instantes de tiempo. Las líneas de corriente se presentan suaves para el tiempo de  $t = 0.6$  s (Figura 4.58 a.1)) y se van ajustando a las paredes de la geometría a medida que aumenta el tiempo a partir de  $t = 0.677$  s (Figura 4.58 b.1), c.1), y d.1)). En estas figuras se observa cómo, a medida que se forma el mecanismo cinemático de extrusión, las líneas de corriente presentan cambios bruscos de dirección. Las líneas a lo largo de las cuales se producen estos cambios de la dirección de la velocidad son las líneas de deslizamiento. En el canal de salida, la distribución de las líneas de corriente se mantiene constante para cada instante de tiempo.

En la Figura 4.59 se muestran los perfiles de variación de la velocidad y de la presión a lo largo del eje de simetría. La velocidad y la presión se ven afectadas por la reducción de la sección.

#### 4.6.7. Comportamiento reológico

##### *Zonas de fluencia y no fluencia y líneas de deslizamiento*

La secuencia de la Figura 4.58 de arriba abajo muestra la formación del mecanismo de extrusión. A la izquierda, se muestra la formación de las zonas de fluencia (oscuras) y no fluencia (claras). A la derecha, se muestra la distribución de la velocidad de deformación y la formación de las líneas de deslizamiento.

En la Figura 4.58 a.1), en el tiempo  $t = 0.6$  s, el material se encuentra sólido casi en su totalidad; aparece sólo el inicio de la zona en fluencia. En la Figura 4.58 b.1), en el tiempo  $t = 0.677$  s, el flujo comienza el proceso de extrusión, se amplía la zona de fluencia. En la Figura 4.58 c.1), en el tiempo  $t = 0.678$  s, se ha extendido mucho más la zona en extrusión y en la Figura 4.58 d.1), en el tiempo  $t = 0.68$  s, la presión de extrusión aplicada  $P = 3400$  Pa ha desarrollado completamente el campo de las líneas de deslizamiento.

En la Figura 4.58 a.2), en el tiempo  $t = 0.6$  s, puede verse el campo de la velocidad de deformación para el cual se inicia el proceso de extrusión. La evolución del campo de la velocidad de deformación coincide con el campo de las líneas de deslizamiento. Se ha tomado como la velocidad de deformación crítica  $\dot{\gamma}_{crit} = 0.01688$  s<sup>-1</sup>, que corresponde con el valor de la tensión de fluencia ( $\tau_y = 1000$  Pa) en la relación tensión-velocidad de deformación del modelo regularizado. En las Figura 4.58 b.2, c.2), los tiempos  $t = 0.677$  s y  $t = 0.678$  s, respectivamente, continua el proceso de extrusión. En la Figura 4.58 d.2), en el tiempo  $t = 0.68$  s, el material se encuentra completamente extruido. En este momento se alcanza el mecanismo de extrusión y se forman líneas de alta localización de la velocidad de deformación en las zonas de fluencia. Estas líneas se identifican con las líneas de deslizamiento de la teoría clásica.

### Tensiones

En la Figura 4.60 se muestra el perfil longitudinal de la tensión desviadora a lo largo de la sección vertical intermedia  $y = 1.5$  m (canal de entrada) en el tiempo  $t = 0.68$  s. Puede verse que se alcanza el valor de la tensión de fluencia de  $\tau_y = 1000$  Pa a una distancia  $x = 4.095$  m desde la entrada.

La zona de fluencia está entre las líneas azules, en correspondencia con la zona de fluencia de la Figura 4.58 d.1) para la misma sección.

En la Figura 4.61 a) se muestra la velocidad de deformación a lo largo del eje de simetría  $y = 0$  m. Puede verse que la velocidad de deformación varía desde valores casi nulos a valores altos. La zona en que se producen valores altos de la velocidad de deformación se corresponde con la zona de fluencia del flujo.

En la Figura 4.61 b) se muestra la distribución de la tensión a lo largo del eje de simetría  $y = 0$  m. Desde la entrada, las tensiones van aumentando a lo largo del eje hasta alcanzar la tensión de fluencia, para mantenerse prácticamente constante en la zona de fluencia. Pasada ésta, la tensión desciende linealmente hasta hacerse prácticamente nula después de la reducción. Luego, existe un reajuste de la tensión con variación de la misma en una corta longitud del canal de salida para luego hacerse casi nula. En el canal de salida, el material se comporta como un sólido.

En la Figura 4.62 se muestran los perfiles longitudinales de las tensiones a lo largo de las secciones longitudinales en el canal de entrada,  $y = 0$  m,  $y = 1.5$  m y  $y = 3$  m. Puede verse que las tensiones predominantes son las tensiones normales,  $\tau_{11}$  y  $\tau_{22}$ , en el eje de simetría,  $y = 0$  m, y en las paredes,  $y = 3$  m, véase la Figura 4.62 a) y c), respectivamente. En la sección intermedia,  $y = 1.5$  m, es la tensión cortante,  $\tau_{12}$ , la que predomina hasta cerca de la reducción; a partir de allí predominan las tensiones normales, como se muestra en la Figura 4.62 b).

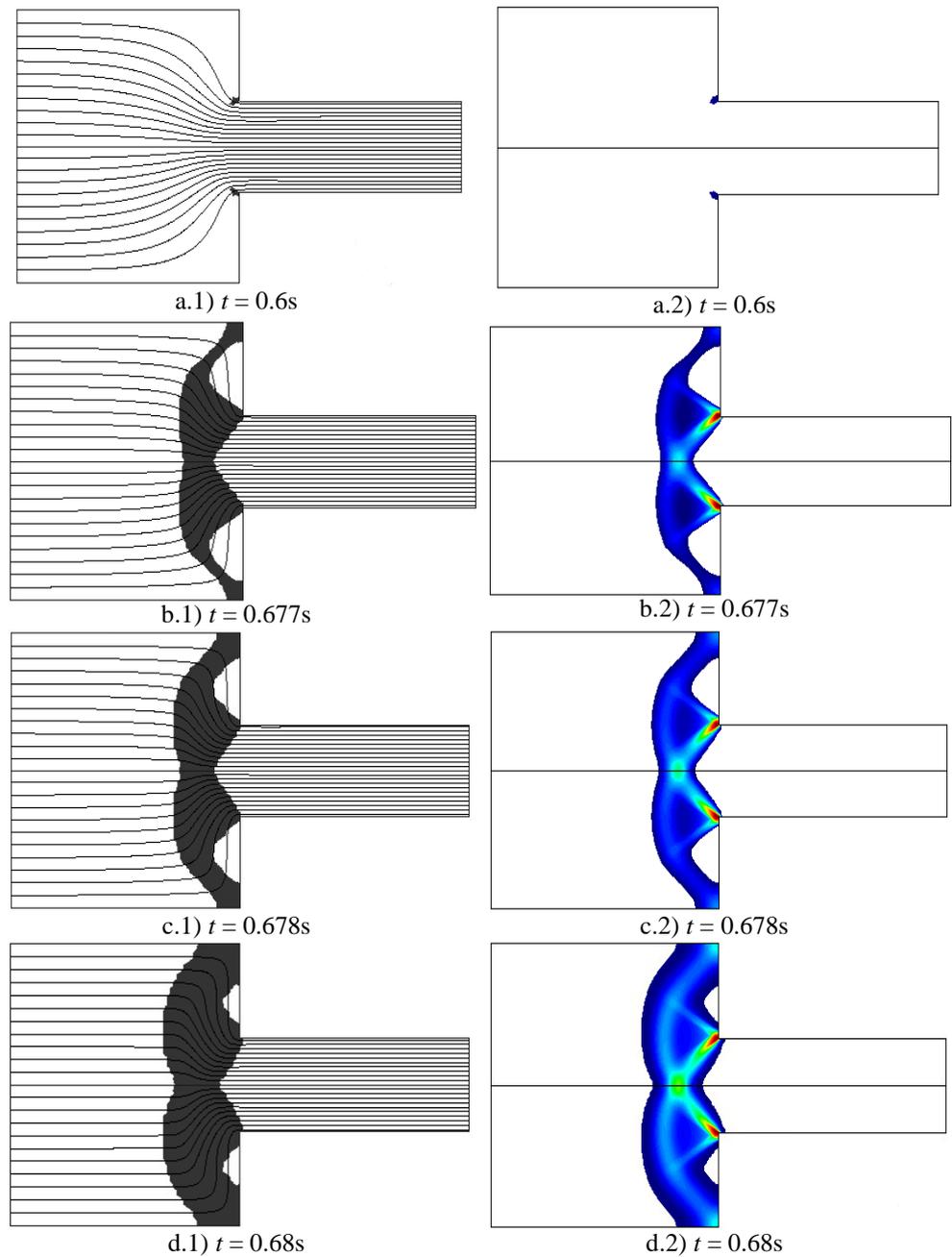


Figura 4.58. **Flujo de extrusión.** Líneas de corriente y zonas de fluencia (oscuras) y zonas en no fluencia (claras) en: a.1), b.1), c.1) y d.1), tensión de fluencia  $\tau_y = 1000 \text{ Pa}$ . Velocidad de deformación en a.2), b.2), c.2) y d.2),  $\dot{\gamma}_{crit} = 0.01688 \text{ s}^{-1}$ .

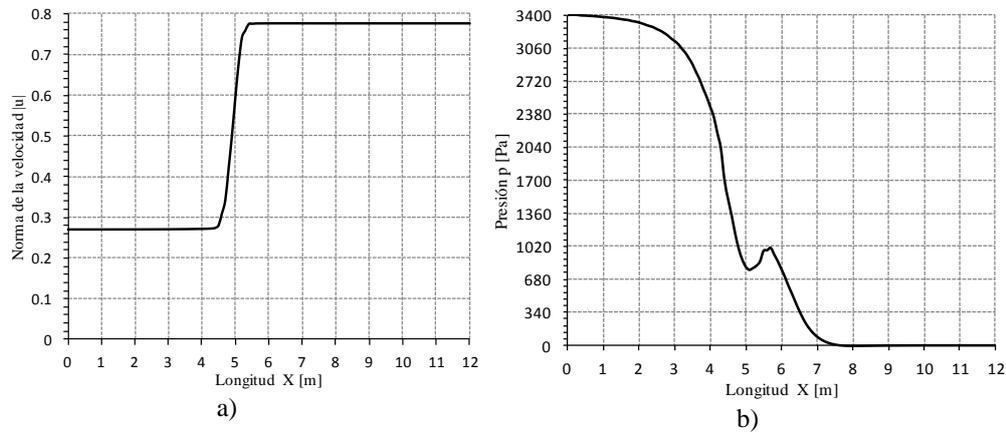


Figura 4.59. **Flujo de extrusión.** Perfiles a lo largo del eje de simetría,  $y = 0$  m. a) Variación de la Norma de la velocidad  $|u|$ , y b) Variación de la presión.

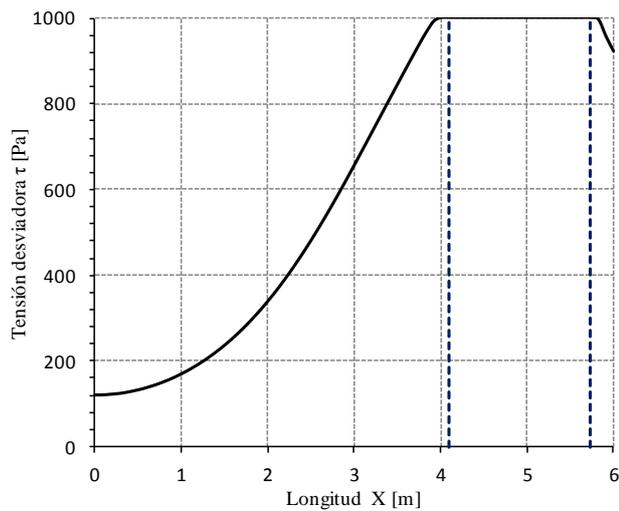


Figura 4.60. **Flujo de extrusión.** Perfil de la variación de la tensión desviadora a lo largo del eje  $y = 1.5$  m, para  $t = 0.68$  s, delimitación de la zona de fluencia,  $\tau_y = 1000$  Pa.

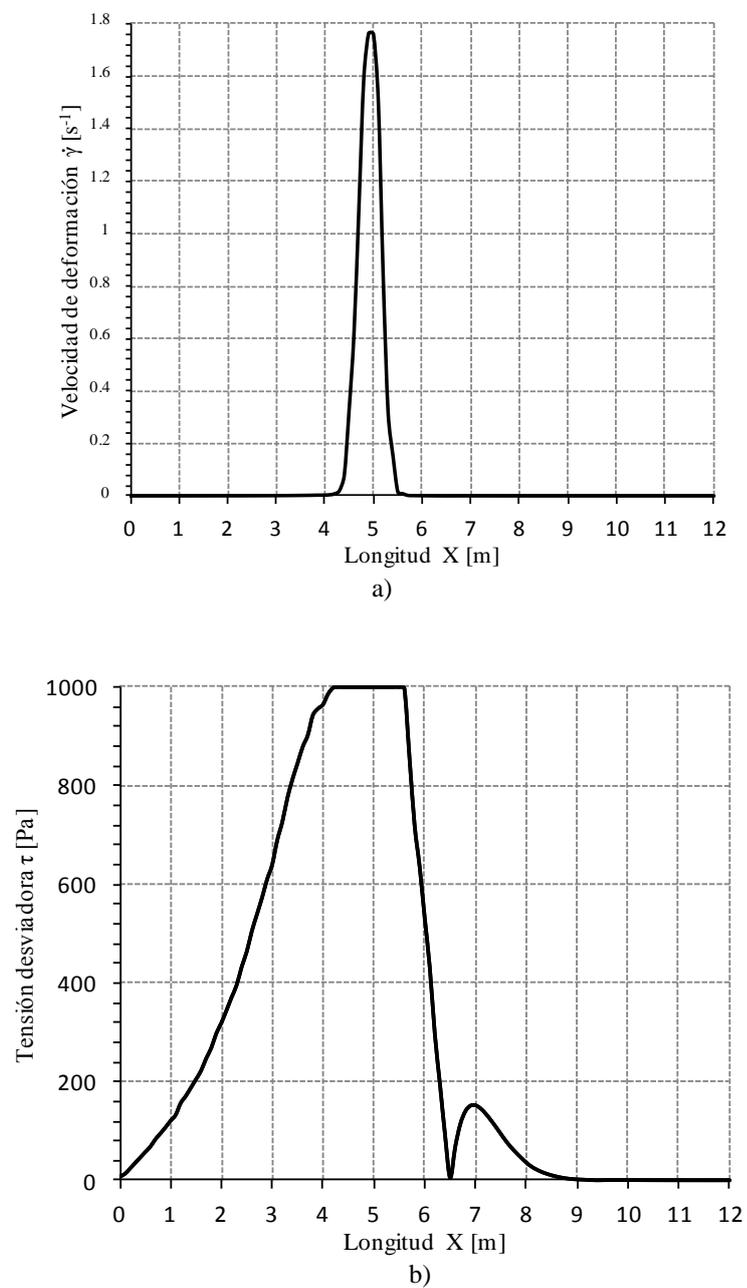


Figura 4.61. **Flujo de extrusión.** Perfiles a lo largo del eje de simetría,  $y = 0$ .  
a) Variación de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$ , b) Variación de la tensión.  $\tau_y = 1000 \text{ Pa}$ ,  
 $t = 0.68 \text{ s}$ .

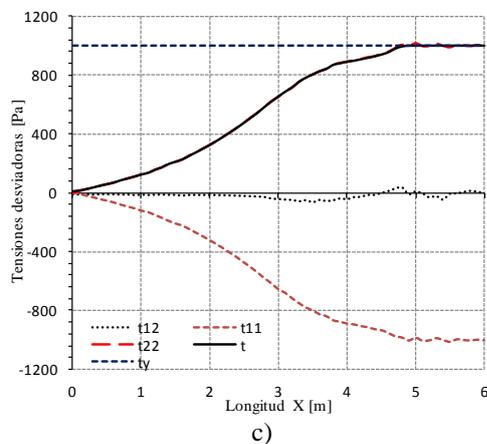
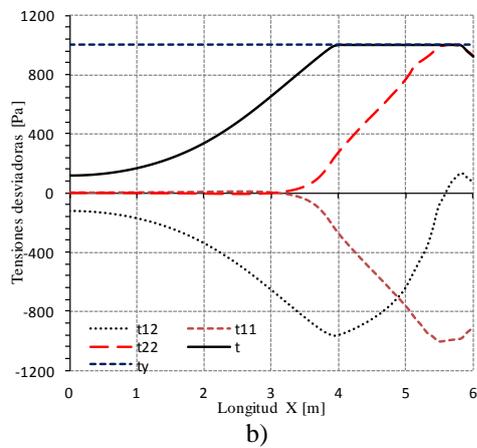
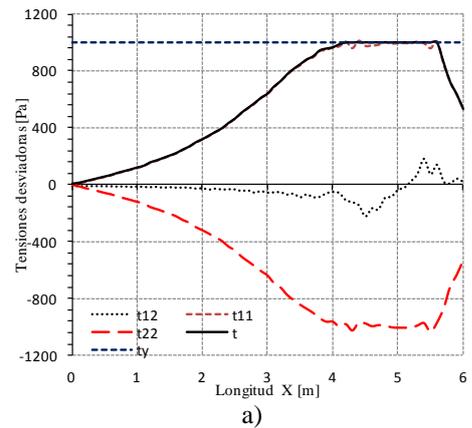


Figura 4.62. **Flujo de extrusión.** Variación de las componentes de la tensión en el canal de entrada. a) Tensión a lo largo del eje de simetría,  $y = 0$  m, b) Tensión a lo largo de  $y = 1.5$  m y c) Tensión a lo largo de las paredes,  $y = 3.0$  m. Incluye la magnitud del tensor de tensiones  $\tau$ .

#### 4.6.8. Conclusiones

Se ha estudiado el problema de extrusión para el fluido viscoplástico de Bingham con viscosidad muy baja, modelando un comportamiento rígido-plástico.

Se ha mostrado la evolución de las zonas de fluencia y de velocidades de deformación hasta plastificar completamente el material a medida que aumenta la presión de extrusión.

El resultado obtenido para el valor de la presión de extrusión se corresponde con la solución analítica de la teoría de las líneas de deslizamiento para el caso de un material perfectamente plástico y flujo no inercial. Cuando no se considera el término convectivo en la ecuación de conservación de *momentum* y una vez formado el mecanismo de las líneas de deslizamiento, el flujo alcanza velocidades grandes para cualquier incremento de presión. Cuando se considera el término convectivo, es necesario vencer los efectos inerciales con el aumento de la presión para conseguir velocidades importantes.

Cuando se alcanza el mecanismo de extrusión se forman líneas de alta localización de la velocidad de deformación en las zonas de fluencia. Estas líneas se identifican con las líneas de deslizamiento de la teoría clásica.

Se define el valor de la velocidad de deformación crítica  $\dot{\gamma}_{crit} = 0.01688 \text{ s}^{-1}$  (para  $\tau = \tau_y$ ) que define la envolvente del campo de las líneas de deslizamiento, que determina los límites de la zona de fluencia.

Las tensiones normales dominan el flujo en el eje de simetría y en las paredes de la cavidad. La tensión cortante tiene influencia en secciones intermedias.

## 4.7. Flujo alrededor de un cilindro entre placas paralelas

### 4.7.1. Descripción del problema

El problema del flujo alrededor de un obstáculo fue inicialmente estudiado considerando un obstáculo esférico. Es un problema clásico en mecánica de fluidos y con muchas aplicaciones prácticas, principalmente en la industria química. Ejemplos de este problema pueden verse también en la industria de alimentos en materiales heterogéneos con el fin de mantener las partículas separadas, en trabajos de perforación para facilitar el transporte de lodos, en ingeniería ambiental con el uso de aerosoles, también en materiales como pastas de cemento, entre otros. Estos materiales son típicamente suspensiones de partículas gruesas en un líquido y están sujetos a una tensión de fluencia. Esto implica que la caída o asentamiento de estas partículas puede ocurrir sólo si la fuerza gravitacional neta excede la fuerza resistente debido a la tensión de fluencia ((Chhabra, 1993), (Tabuteau and Coussot, 2007), (Putz et al., 2008)).

Se han hecho muchos trabajos relativos al estudio del flujo de materiales viscoplásticos alrededor de obstáculos, teórica y experimentalmente, así como en modelado y simulación numérica ((Chhabra, 1986), (Chhabra and Uhlherr 1988), (Walters and Tanner, 1992), (Chhabra, 1993)).

En fluidos de Bingham, se ha estudiado el flujo alrededor de una esfera y/o de un cilindro bajo la influencia de su propio peso entre placas paralelas o en un medio infinito((Blackery and Mitsoulis, 1997), (Zisis and Mitsoulis, 2002), (Liu, 2002), (Mitsoulis, 2004)). Roquet y Saramito (Roquet and Saramito, 2003) lo han analizado bajo la influencia de un gradiente de presión para una esfera en un dominio infinito y Slijecpčević y Perić (Slijecpčević and Perić, 2004) en una esfera dentro de un cilindro.

Actualmente, se dispone de una amplia información sobre el fenómeno de la estela de arrastre en esferas cayendo en un fluido pseudoplástico, en un fluido viscoplástico y en un fluido viscoelástico, para bajos números de Reynolds (Chhabra et al., 2001). En comparación, existen pocos estudios sobre el arrastre en cilindros cayendo libremente en medios no-Newtonianos en general y en medio viscoplástico en particular.

El objetivo principal de este trabajo es la determinación de la fuerza de arrastre hidrodinámica para un cilindro entre placas paralelas. Inicialmente, se presentan las ecuaciones para el cálculo del coeficiente de arrastre en esferas a partir de las cuales se obtienen las ecuaciones del coeficiente de arrastre para el cilindro.

#### 4.7.1.1.1. El problema de la caída de una esfera

El problema de la caída de una esfera cayendo a través de un fluido ha sido muy estudiado a través del tiempo. Aristóteles (384-322) estableció que los objetos pesados caían unos más lentos y otros más rápidos. Este punto de vista fue ampliamente aceptado hasta el siglo XVI, cuando Galileo demostró experimentalmente (usando planos inclinados) que si se ignora el fluido que rodea a la esfera, el movimiento de caída de la esfera es independiente de su masa. La velocidad de caída es proporcional al tiempo y la distancia de caída es proporcional al tiempo al cuadrado. Newton desarrolló en 1687 la teoría de Galileo al considerar el arrastre del fluido, encontrando la segunda Ley de Newton y conformando así el moderno conocimiento del flujo de esferas en términos de coeficiente de arrastre y aceleración. El coeficiente

de arrastre es la clave en la solución del problema de interacción entre el fluido y la esfera (Guo, 2011).

En un fluido Newtoniano para una partícula densa cayendo en una solución menos densa con bajo número de Reynolds ( $Re \ll 1$ ) la fuerza de flotación o fuerza ejercida por la gravedad sobre la esfera  $F$  es:

$$F = \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_e - \rho) g \quad (4.4)$$

donde  $\rho_e$  es la densidad de la esfera,  $\rho$  es la densidad del fluido y  $g$  es la aceleración de la gravedad. El valor  $R$  es el radio de la esfera.

La fuerza de arrastre de la esfera (proporcional a la velocidad de caída,  $V$  (Stokes, 1851)) es:

$$F_D = 6\pi\mu RV \quad (4.5)$$

La velocidad de caída de la partícula (velocidad terminal),  $V$ , se obtiene haciendo  $F = F_D$ :

$$V = \frac{2\Delta\rho R^2}{9\mu} g \quad (4.6)$$

donde  $\Delta\rho = \rho_p - \rho_f$  es la diferencia entre la densidad de la partícula y la densidad del fluido.  $V$  se conoce como la velocidad de Stokes.

El coeficiente adimensional de arrastre o coeficiente de Stokes se define como:

$$C_S = \frac{F}{F_D} = \frac{F}{6\pi\mu RV} \quad (4.7)$$

Los casos donde el fluido presenta una tensión de fluencia son mucho más complejos de estudiar. Para flujos no inerciales el flujo es simétrico y la partícula experimenta una fuerza de arrastre,  $F_D$ , que es proporcional a la velocidad de la partícula  $V$  (Putz et al., 2008).

El entendimiento del mecanismo de caída o asentamiento de las partículas es muy rudimentario, en especial en lo concerniente a formas no esféricas de las partículas. Resulta evidente que la evaluación de la fuerza de arrastre requiere la determinación de la zona de fluencia que rodea a la partícula.

Este problema ha sido estudiado extensivamente en la comunidad de mecánica de fluidos e identificado como un problema *benchmark* por Happel y Brenner (Happel and Brenner, 1973). Un caso estudiado habitualmente es aquel donde el ancho del canal es dos veces el diámetro de la esfera o cilindro, es decir, tiene una relación  $H:R = 2:1$ , donde  $H$  es la mitad del ancho del canal y  $R$  es el radio de la esfera o cilindro ((Happel and Brenner, 1973), (Mitsoulis and Huilgol, 2003), (Phan-Thien and Dou, 1999)).

#### 4.7.1.1.2. Zonas de fluencia y no fluencia

##### Esferas

En fluidos viscoplásticos como el de Bingham, para el caso de esferas, Volarovich y Gutkin (Volarovich and Gutkin, 1953) fueron los primeros en darse cuenta que una esfera cayendo dentro de este material lo hace envuelta en una zona de fluido que separa al cuerpo de la zona rígida en la cual las tensiones no superan a la tensión de fluencia. Valentic y Whitmore (Valentic and Ewhitmore, 1965) desarrollaron una cruda aproximación para la velocidad de caída de una esfera utilizando la idea de Andres (Andres, 1960) de que el sólido está rodeado de líquido sobre el cual solamente las fuerzas viscosas causan arrastre “influencia de la esfera”. Dentro de esta área de influencia de la esfera pueden aparecer unas zonas de estancamiento delante y detrás del objeto, en la dirección del flujo. Posteriormente, Yoshioka y Adashi (Yoshioka and Adachi, 1971a) y Yoshioka et al. (Yoshioka et al., 1971b), reconocieron la presencia de estas zonas para cualquier valor finito de la tensión de fluencia.

Beris et al. (Beris et al., 1985) resolvió numéricamente por primera vez el problema de la esfera. La conclusión más importante es que la esfera se encuentra en medio de la zona en fluencia y que más allá de la superficie de fluencia el material no presenta ninguna deformación. En esta solución mostró la existencia de los casquetes polares unidos a los polos de la esfera, véase la Figura 4.63. Beris encontró el valor crítico de tensión de fluencia adimensional  $\tau_{y\text{crit.}}^* = 0.143$  para el cual la esfera permanece inmóvil. Ninguno de estos autores reportaron la presencia de zonas de recirculación a los lados del cilindro, en el plano de simetría (ecuador).

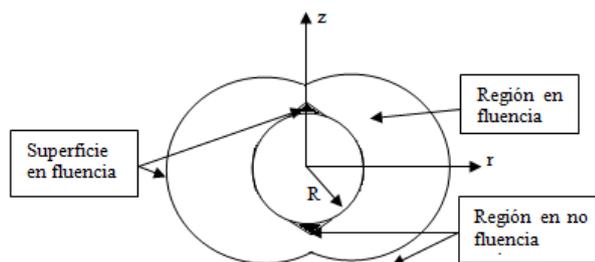


Figura 4.63. Representación esquemática de la forma de las zonas de fluencia y no fluencia del flujo alrededor de una esfera encontradas por Beris (Beris et al., 1985), flujo no inercial en un medio infinito de Bingham, caso axisimétrico.

##### Cilindro

Un cilindro moviéndose en un fluido de Bingham también está sujeto a fuerzas viscosas que causan arrastre, ya que el comportamiento del flujo alrededor del cilindro es muy similar al que ocurre en las esferas. El cilindro se encuentra envuelto en una zona de fluencia y pueden aparecer zonas de estancamiento o casquetes polares delante y detrás del cilindro y zonas de recirculación a los lados del cilindro en el eje ecuatorial. También es posible encontrar el número de la tensión de fluencia adimensional crítico para la cual el cilindro permanece inmóvil dentro del fluido. Este flujo ha sido estudiado en un medio infinito, es decir, sin la influencia de las placas paralelas por Ansley y Smith (Ansley and Smith, 1967) y Yoshioka y Adachi (Yoshioka and Adachi, 1971a).

En la Figura 4.64 a) puede verse el patrón de flujo mediante el análisis de las líneas de deslizamiento *slip-line* para materiales viscoplásticos postulado por Ansley y Smith (Ansley and Smith, 1967). Yoshioka y Adachi (Yoshioka and Adachi, 1971a) reportan una localización aproximada de las zonas de fluencia y no fluencia calculadas semi-analíticamente que se muestran en la Figura 4.64 b). Estos autores usaron el teorema del máximo para obtener el campo de tensiones y el teorema del mínimo para obtener el campo de velocidades.

Posteriormente, Mitsoulis y Huilgol (Mitsoulis and Huilgol, 2003) reexaminaron el flujo para  $Re \approx 0$  de un cilindro moviéndose simétricamente entre placas paralelas en el medio viscoplástico de Bingham comparándolo luego con el trabajo de Yoshioka y Adachi (Yoshioka and Adachi, 1971a) en un medio infinito. Mitsoulis determina los coeficientes de arrastre para un amplio rango de números de Bingham. En sus resultados también muestra la presencia de los casquetes polares y las zonas de recirculación.

Tanner (Tanner, 1993) ha estudiado el problema para un cilindro en un fluido pseudoplástico también en un medio infinito.

En este trabajo el estudio del movimiento de un cilindro entre placas paralelas en un fluido de Bingham está enfocado a determinar las zonas de fluencia y no fluencia, los coeficientes de arrastre correspondientes a diferentes relaciones geométricas  $H:R$  y el valor crítico de la tensión de fluencia adimensional  $\tau_{y,crit}^*$ , para el cual el cilindro permanece inmóvil.

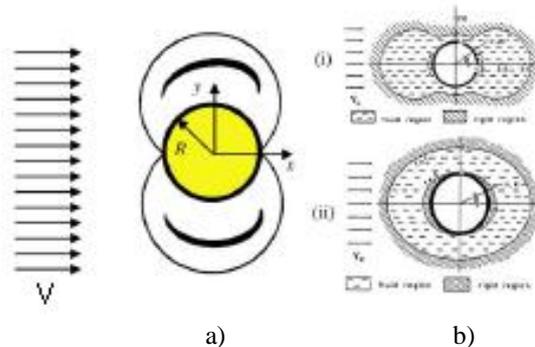


Figura 4.64. Representación esquemática de la forma de las zonas de fluencia (punteada) y no fluencia (rayada) del flujo alrededor de un cilindro sin inercia y en medio infinito de Bingham. a) Teoría de las líneas de deslizamiento de Ansley y Smith (1967). b) i) Teorema del máximo y ii) Teorema del mínimo, Adachi y Yoshioka (1973). Figura tomada de Mitsoulis (2003).

#### 4.7.1.1.3. Coeficiente de arrastre para un cilindro en un fluido Newtoniano

El problema de caída de un cilindro en un fluido Newtoniano en un dominio infinito, despreciando los términos inerciales, no tiene solución, situación que se conoce como la paradoja de Stokes (Van Dyke, 1964). Sin embargo, sí puede resolverse el problema entre placas paralelas (dominio acotado). Faxén (Faxén, 1946) desarrolló analíticamente la solución para este problema utilizando el método de las imágenes para obtener un desarrollo en serie y calcular la fuerza de arrastre,  $F_{D,N}$ , en función de la relación entre  $H$ , mitad de la separación entre las placas y  $R$  el radio del cilindro ( $H/R$ ):

$$F_{D,N} = \frac{4\pi \mu V}{\left[ \ln\left(\frac{H}{R}\right) - 0.91157 + 1.7244\left(\frac{R}{H}\right)^2 - 1.7302\left(\frac{R}{H}\right)^4 + 2.4056\left(\frac{R}{H}\right)^6 - 4.5913\left(\frac{R}{H}\right)^8 \right]} \quad (4.8)$$

Para un fluido Newtoniano, la fuerza de arrastre adimensional,  $F_{D,N}^*$ , se define como:

$$F_{D,N}^* = \frac{F_{D,N}}{\mu V L} \quad (4.9)$$

donde  $F_{D,N}$  es la fuerza de arrastre determinada en la solución de Faxén,  $V$  es la velocidad de caída del cilindro y  $L$  es la longitud unitaria del cilindro en la dirección  $z$ .

#### 4.7.1.1.4. Coeficiente de arrastre para un cilindro en un fluido viscoplástico

En un medio viscoplástico la fuerza de arrastre,  $F_D$ , es la componente de la fuerza resultante actuando sobre el cilindro en la dirección del movimiento relativo. Se calcula integrando las presiones y tensiones de corte sobre la superficie del cilindro en la dirección del movimiento del fluido:

$$F_D = L \int_0^{2\pi} t_x ds = 4L \int_0^{\pi/2} [\sigma_{xx} \cos \theta + \sigma_{xy} \operatorname{sen} \theta] R d\theta \quad (4.10)$$

donde  $t_x$  es la componente según el eje  $x$  (dirección del movimiento relativo) de la tracción sobre el cilindro,  $\sigma_{xx}$  es el esfuerzo normal según el eje  $x$  y  $\sigma_{xy}$  es el esfuerzo de cortante.  $\theta$  es el ángulo entre el vector normal a la superficie del cilindro y el eje  $x$ . En la ec. (4.10) se ha supuesto que el problema presenta doble simetría (Figura 4.67).

El coeficiente de arrastre adimensional,  $F_D^*$ , puede expresarse como:

$$F_D^* = \frac{F_D}{\mu V L} \quad (4.11)$$

#### 4.7.1.1.5. Magnitudes adimensionales

##### *Esfera*

Para el flujo alrededor de la esfera se define el número de Bingham como:

$$Bn = \frac{\tau_y (2R)}{\mu V} \quad (4.12)$$

donde  $\tau_y$  es la tensión de fluencia,  $R$  es el radio de la esfera,  $\mu$  es la viscosidad del fluido y  $V$  es la velocidad de caída de la esfera (velocidad terminal).

La tensión de fluencia adimensional asociada a la fuerza de arrastre  $F_D$  actuando sobre la esfera se define (Beris et al., 1985):

$$\tau_y^* = \frac{2\tau_y \pi R^2}{F} \quad (4.13)$$

donde  $F$  es la fuerza de flotación de la esfera, ec. (4.4).

La tensión adimensional  $\tau_y^*$ , ec. (4.13), puede escribirse en función del número de Bingham y del coeficiente de arrastre de Stokes (ec. (4.7)) como:

$$\tau_y^* = \frac{Bn}{6C_s} \quad (4.14)$$

La tensión adimensional  $\tau_y^*$  puede expresarse también en función de la tensión de fluencia y la fuerza de flotación usando la ec. (4.4):

$$\tau_y^* = \frac{3\tau_y}{gD(\rho_e - \rho)} \quad (4.15)$$

donde  $D$  es el diámetro de la esfera.

En el caso Newtoniano,  $\tau_y^* = 0$ . Se puede definir un valor crítico  $\tau_{y\text{crit.}}^*$  para el cual la esfera permanece inmóvil.

Beris encontró que para una esfera inmóvil en un medio infinito se tiene que el valor crítico  $\tau_{y\text{crit.}}^* = 0.143$ .

#### *Cilindro*

La fuerza de arrastre del cilindro en un fluido viscoso (proporcional a la velocidad de caída,  $V$ ) es:

$$F_D = 4\pi\mu RV \quad (4.16)$$

donde  $R$  es el radio del cilindro.

El coeficiente de arrastre de Stokes,  $C_s$ , queda:

$$C_s = \frac{F}{F_D} = \frac{F}{4\pi\mu VR} \quad (4.17)$$

La tensión adimensional  $\tau_y^*$  (4.13) puede escribirse en términos del número de Bingham y del coeficiente de arrastre de Stokes (ec. (4.17)) como:

$$\tau_y^* = \frac{Bn}{4C_s} \quad (4.18)$$

Chhabra et al. (Chhabra et al., 2001) Jossic y Magnin (Jossic and Magnin, 2001) definen un número de fluencia-gravedad,  $Y_G$ , como:

$$Y_G = \frac{\tau_y}{gL(\rho_e - \rho)} = \frac{\tau_y^*}{3} \quad (4.19)$$

#### 4.7.2. Geometría y condiciones de contorno

El cilindro de radio  $R = 1$  m se encuentra entre dos placas paralelas separadas por una distancia  $2H$ . Las placas paralelas tienen longitud infinita y el eje del cilindro está ubicado equidistante de éstas.

El problema del flujo alrededor del cilindro puede plantearse en dos sistemas de referencia:

1.- Con los ejes de referencia fijos (Figura 4.65), de forma que las placas están fijas y el cilindro se mueve con velocidad  $V$  y arrastra el fluido. La fuerza de arrastre sobre el cilindro se opone al movimiento de éste.

2.- Con los ejes de referencia que se trasladan con el cilindro (Figura 4.66). En estos ejes, el cilindro está quieto y el fluido fluye alrededor del mismo. La fuerza de arrastre sobre el fluido se opone al movimiento de éste. En este caso, las placas se desplazan con una velocidad constante  $V$ . Esta misma velocidad  $V$  se aplica en el contorno de entrada del dominio, suficientemente lejos del cilindro. Esta velocidad se desarrolla dentro del fluido hasta alcanzar la misma velocidad  $V$  en el contorno de salida del dominio.

Esta segunda forma es mucho más adecuada para una formulación euleriana, ya que el dominio de análisis permanece fijo. Es por tanto, la que se adopta en este trabajo.

Respecto a la superficie del cilindro, se pueden adoptar dos condiciones:

- Con deslizamiento (*slip condition*).

$u_n = 0$ ;  $u_t = libre$ , donde  $u_n$  es la velocidad normal y prescrita y  $u_t$  es la velocidad tangencial libre.

- Sin deslizamiento (*stick condition*).

$$u_x = 0 ; u_y = 0.$$

En lo que sigue se estudia el problema empleando la condición de no deslizamiento sobre el cilindro e ignorando los efectos inerciales ( $Re \approx 0$ ). En estas condiciones, el flujo presenta dos condiciones de simetría: una según el plano vertical y la otra según el plano horizontal ((Piau, 2002), (Beris et al., 1985)).

Aplicando las condiciones de contorno apropiadas, el flujo plano puede estudiarse considerando sólo un cuarto del dominio (zona rallada). En la Figura 4.67 se muestra la geometría y las condiciones de contorno a usar. La condición de no deslizamiento se aplica en la línea AB. La velocidad y las fuerzas tangenciales en la dirección  $x$  son nulas en la línea AD y nulas en la dirección  $y$  en la línea BC.

La velocidad de la placa (CE) se impone igual a la velocidad de entrada  $V$ ,  $u_x = V = 1$  m/s y  $u_y = 0$ . En la salida DE, se impone  $u_y = 0$ ; la velocidad en la dirección  $x$ ,  $u_x$ , es uniforme e igual a  $V$ . Se impone presión nula en el punto C para determinar el campo de presiones.

Se requiere una longitud mínima  $L$  para que el dominio se pueda considerar indefinido y el flujo esté completamente desarrollado.

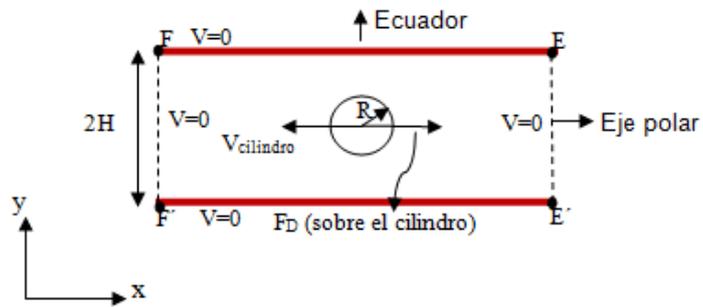


Figura 4.65. Geometría y condiciones de contorno para un cilindro desplazándose en un fluido de Bingham, referido a ejes fijos.

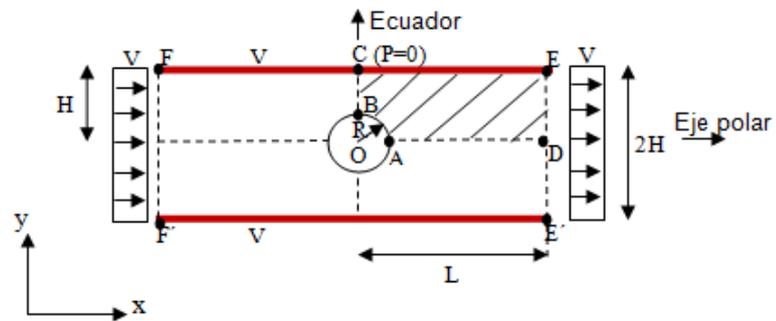


Figura 4.66. Geometría y condiciones de contorno para un cilindro desplazándose en un fluido de Bingham, referido a ejes que se trasladan con el cilindro.

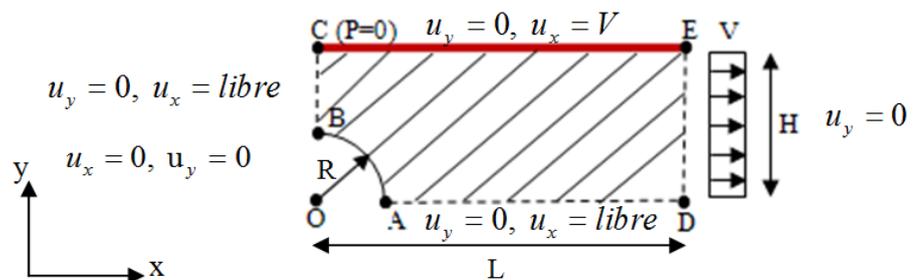


Figura 4.67. Geometría y condiciones de contorno para un cuarto de dominio. Condición de no deslizamiento entre fluido y el cilindro.

### 4.7.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 4.14 se indican las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización utilizadas en el problema del cilindro entre placas paralelas.

Un parámetro de regularización de  $m = 1000$  s asegura que el modelo regularizado coincida prácticamente con el modelo ideal de Bingham. Parámetros de regularización más bajos afectan poco los valores obtenidos para la fuerzas de arrastre, pero sí la extensión de las superficies de fluencia.

Las simulaciones se realizaron para diferentes números de Bingham, desde  $Bn = 0$  hasta alcanzar el número de Bingham  $Bn = 1000$ .

Propiedades constitutivas	
Modelo del fluido	Bingham
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	0, 0.05, 0.5, 5, 50, 500
Números de Bingham, $Bn$	0, 0.1, 1, 10, 100, 1000
Regularización	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 4.14. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

### 4.7.4. Discretización

Los dominios estudiados en el presente trabajo se detallan en la Tabla 4.15. Para cada malla utilizada se indica el número de nodos y elementos.

En la Figura 4.68 se muestra una de las mallas no estructuradas de elementos finitos triangulares P1P1 que se emplea en la simulación numérica. El mallado es más denso en la zona del cilindro. El detalle de este refinamiento (cuadro rojo en la Figura 4.68) puede verse ampliado en la Figura 4.69. En los dominios con distintas relaciones  $H:R$  y  $L:R$  se utilizan mallas similares.

En la Figura 4.68 el tamaño de los elementos en la línea AB (ver Figura 4.67) del cilindro para la malla M1 y M2 es de 0.042 y para las mallas M3 y M4 es de 0.030. En la línea BC (ver Figura 4.67), el tamaño es de 0.04 en todas las mallas.

Malla	$H:R$	$L:R$	Número de nodos	Número de elementos
M1	2:1	12:1	783	1401
M2	4:1	24:1	3494	6623
M3	10:1	60:1	5371	10245
M4	50:1	250:1	13513	25473

Tabla 4.15. Número de nodos y elementos para las diferentes mallas en cada dominio estudiado.

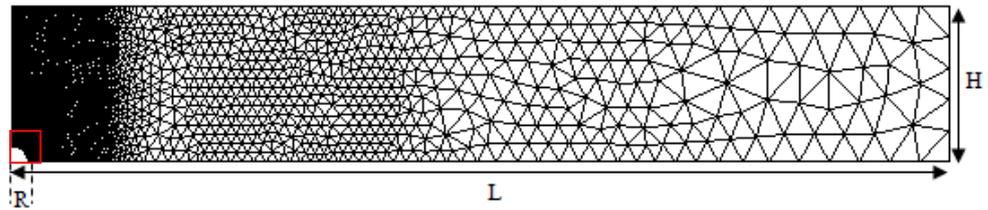


Figura 4.68. Malla no estructurada M3, para el caso  $H:R = 10$ ,  $H:R = 60$ .

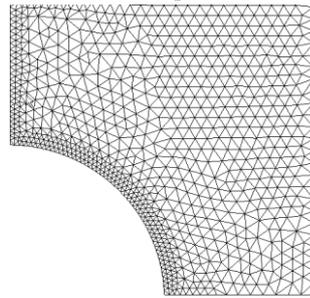


Figura 4.69. Detalle de la Malla M3 alrededor del cilindro.

#### 4.7.5. Fluido Newtoniano

Se analiza el problema de arrastre de un cilindro en un fluido Newtoniano para diferentes distancias o relaciones  $H:R$  entre placas y cilindro.

En la Tabla 4.16 se muestra el coeficiente de arrastre obtenido para el cilindro en un fluido Newtoniano calculado de forma analítica y numérica, así como la diferencia entre ambos. Puede verse que a medida que aumenta la relación  $H:R$ , el coeficiente de arrastre se hace más pequeño.

El coeficiente de arrastre calculado numéricamente se aproxima muy bien a la solución analítica de Faxén. Como se muestra en la Tabla 4.16 las diferencias encontradas son pequeñas a excepción de la relación 2:1. En la relación 2:1 las placas ejercen una fuerte influencia en el comportamiento del flujo alrededor del cilindro

Malla	H:R	L:R	Analítica $F_{D,N}^*$	Numérica $F_{D,N}^*$	Diferencia %
M1	2:1	12:1	104.665	99.7972	4.651
M2	4:1	24:1	21.9643	21.9697	0.025
M3	10:1	60:1	8.9507	8.9522	0.018
M4	50:1	250:1	4.193	4.1962	0.078

Tabla 4.16. **Flujo alrededor de un cilindro.** Coeficiente de arrastre para un cilindro moviéndose en un fluido Newtoniano calculado en el presente trabajo y comparado con la solución analítica.

#### 4.7.6. Fluido viscoplástico de Bingham

Se analiza el fluido Bingham para diferentes relaciones  $H:R$  entre placas y cilindro. Se analiza el valor del coeficiente de arrastre, las líneas de corriente y las superficies de fluencia.

En la Figura 4.70 se muestran las líneas de corriente para el fluido Newtoniano y el fluido de Bingham ( $Bn = 10$ ). Se utiliza el dominio con relación  $H:R = 2:1$ . Las líneas de corrientes son suaves y su distribución entre las placas son similares en el flujo Newtoniano y en el de Bingham.

La Figura 4.70 a.2) muestra también las zonas de fluencia y no fluencia para el fluido de Bingham ( $Bn = 10$ ). Puede verse que la zona de fluencia se encuentra alrededor del cilindro formando dos círculos no concéntricos cortados por las placas. Hay zonas de recirculación a ambos lados del cilindro, entre éste y las placas. Apenas se aprecian los casquetes polares.

En la Figura 4.70 se muestran las distribuciones de la presión, la tensión normal y tensión cortante para el caso Newtoniano y el caso viscoplástico con  $Bn = 10$ . El patrón de las líneas de igual presión y tensión es complejo en ambos flujos. En el fluido de Bingham este patrón se extiende más en la dirección del flujo. Las presiones tienen su máximo a  $90^\circ$  desde el eje polar y su mínimo a  $0^\circ$  (Figura 4.70 b)). Las tensiones normales tienen su máximo y su mínimo a  $45^\circ$  desde el eje polar (Figura 4.70 c)) mientras que las tensiones cortantes lo tienen a  $90^\circ$  desde este eje (Figura 4.70 d)).

Los resultados para las líneas de corriente y las tensiones consideradas son similares a los resultados encontrados por Mitsoulis (Mitsoulis, 2004).

En la Tabla 4.17 se presentan los valores máximos y mínimos para la presión y las tensiones normal y cortante para el fluido Newtoniano y el fluido de Bingham. Estos valores se producen en los puntos marcados en las distribuciones de la Figura 4.70. En esta figura los valores máximos se señalan con punto oscuros ( $\bullet$ ) y los valores mínimos con puntos claros ( $\circ$ ). Puede observarse que los valores de presión y de tensión son mucho mayores para el fluido de Bingham que para el fluido Newtoniano, producto de las fuerzas viscosas.

En las Figura 4.71 a.1) y a.2) se muestran las líneas de corriente para el fluido Newtoniano para las relaciones  $H:R = 4:1$  (malla M2) y  $10:1$  (Malla M3), respectivamente.

Las líneas de corriente son suaves y con distribución similar para los dos dominios. Para el mismo número de líneas de corriente se observa que éstas están más distanciadas en el flujo con relación  $H:R = 10:1$ , ya que a mayor separación entre placas disminuye la velocidad alrededor del cilindro.

En la Figura 4.71 se presentan también las zonas de fluencia y no fluencia para los números de Bingham de  $Bn = 0.1, 1, 10, 100$ . Se utiliza los dominios cuyas relaciones  $H:R$  son  $4:1$  (malla M2),  $10:1$  (Malla M3). Puede verse que a medida que aumenta el número de Bingham:

- Las zonas de fluencia alrededor del cilindro se reducen.
- Las zonas de no fluencia van cerrándose hasta rodear completamente al cilindro para el número de Bingham de  $Bn = 100$  en la relación  $4:1$ . Estas zonas se cierran sobre la zona de fluencia mucho antes para el dominio con la relación  $10:1$ . Es evidente el efecto de pared.
- Las zonas de recirculación entre el cilindro y las placas comienzan a aparecer y van aumentando de tamaño de manera simétrica, acercándose al cilindro para adherirse luego a su superficie en  $Bn = 100$ .

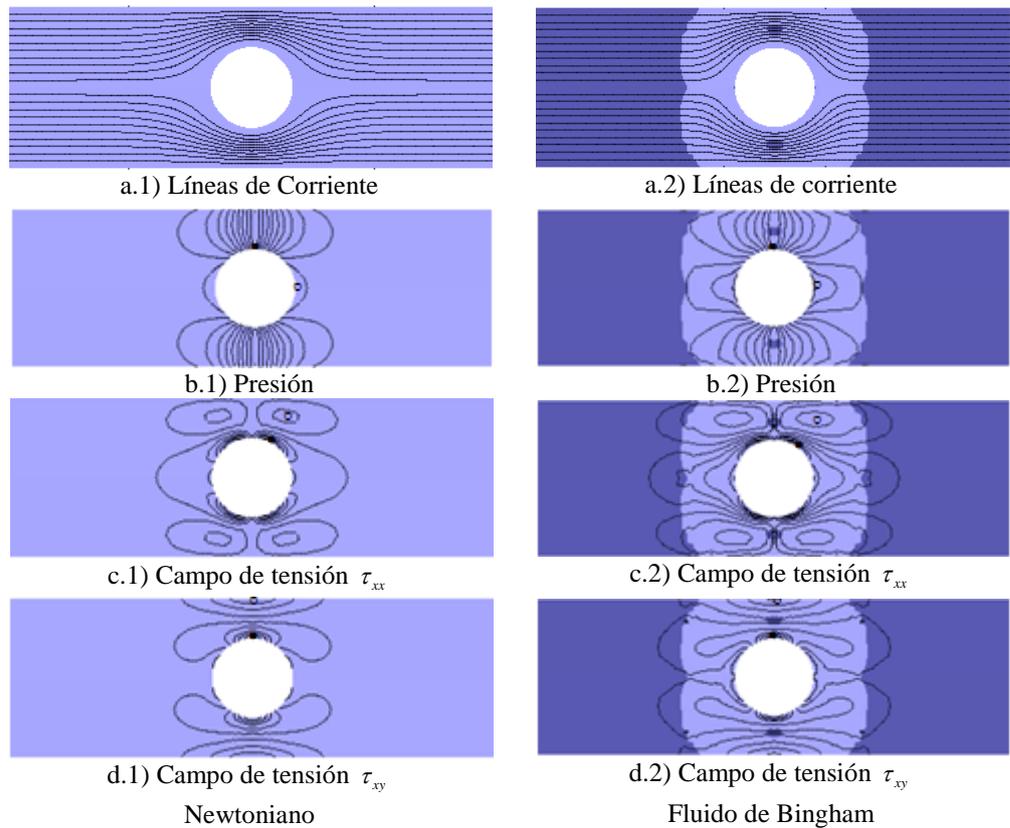


Figura 4.70. **Flujo alrededor de un cilindro.** Líneas de corriente, campo de presiones y tensiones en un flujo Newtoniano y de Bingham para el número de Bingham de  $Bn = 10$ ,  $H:R = 2:1$ . En el flujo de Bingham se muestran las zonas de fluencia (claras) y no fluencia (oscuras) y los valores máximos denotados con punto oscuros (●) y mínimos con puntos claros (◦).

Fluido	$H:R$	Presión	Tensión	Tensión
		$p$ Max. Min.	$\tau_{xx}$ Max. Min.	$\tau_{xy}$ Max. Min.
Newtoniano	2:1	0.0307 -19.76	6.8268 -2.097	11.717 -6.9703
Bingham	2:1	0.0802 -62.28	14.571 -7.345	21.709 -14.229

Tabla 4.17. **Flujo alrededor de un cilindro.** Valores máximos y mínimos de presiones y tensiones para  $H:R = 2:1$ .

- Los casquetes polares (zonas de estancamiento) aparecen a los lados del cilindro en la dirección del flujo y van aumentando. El tamaño de estas zonas casi no logra apreciarse en la Figura 4.71.
- Las zonas de estancamiento son más pequeñas que las zonas de recirculación.

Los resultados para la morfología de los casquetes polares son similares a los encontrados por Beris et al. (Beris et al., 1985) en su estudio de una esfera en un medio infinito y también a los definidos por Yoshioka y Adachi (Yoshioka and Adachi, 1971a).

#### 4.7.7. Coeficiente de arrastre

Existe poca información referida al coeficiente de arrastre para un cilindro moviéndose en fluido viscoplástico. Sólo en los trabajos de Roquet (Roquet and Saramito, 2003) y de Mitsoulis (Mitsoulis, 2004) se ha encontrado un estudio específico para este problema.

En la Figura 4.72 se muestra el coeficiente de arrastre adimensional calculado en este trabajo en función del número de Bingham y la tensión de fluencia adimensional. Puede verse que a medida que aumenta el número de Bingham,  $Bn$ , o la tensión de fluencia adimensional,  $\tau_y^*$ , el coeficiente de arrastre adimensional:

- Aumenta y tiende a valores muy grandes.
- Se hace independiente de la relación  $H:R$ , para  $H:R > 2:1$

En la Figura 4.72 a) puede verse que cuando  $Bn \rightarrow 0$  el coeficiente de arrastre,  $F_D^*$ , tiende al coeficiente de arrastre en el fluido Newtoniano (aproximación de Faxén en la ecuación (4.8)) y cuando  $Bn \rightarrow \infty$  el coeficiente de arrastre tiende a:

$$F_D^* = 1.14Bn \text{ para } (Bn \rightarrow \infty) \quad (4.20)$$

Esta relación asintótica fue señalada por Mitsoulis y Huilgol (Mitsoulis and Huilgol, 2003).

Los resultados encontrados para el coeficiente de arrastre se encuentran entre los valores obtenidos por Adashi y Yoshioka con los teoremas del máximo y del mínimo.

En la Figura 4.72 b) se muestra que para valores altos de la tensión de fluencia adimensional el coeficiente de arrastre crece, y lo hace de forma rápida a medida que se acerca a un valor crítico (línea asintótica roja en la figura). Este valor crítico de la tensión de fluencia adimensional es  $\tau_{y \text{ crit.}}^* = 0.128$ . Para este valor la fuerza de arrastre se equilibra con la de flotación o la de gravedad. El valor  $\tau_{y \text{ crit.}}^*$  está próximo al valor resultante dado por Beris (1985) de  $\tau_{y \text{ crit.}}^* = 0.143$  para esferas en un medio infinito.

Con este valor del numero fluencia-gravedad se obtiene el coeficiente de arrastre de Stokes de  $Cs = 1.95Bn$  de la ecuación (4.18).

Para valores mayores a  $Bn > 10$  el coeficiente de arrastre se hace independiente de la relación  $H:R$  (Figura 4.72 a)), una vez alcanzada una cobertura total del cilindro de material sólido (Figura 4.71 d.2)).

Los resultados que se muestran en la Figura 4.72 a) y b) para  $H:R = 4:1, 10:1$  es similar al encontrado por Mitsoulis y Huilgol (Mitsoulis and Huilgol, 2003).

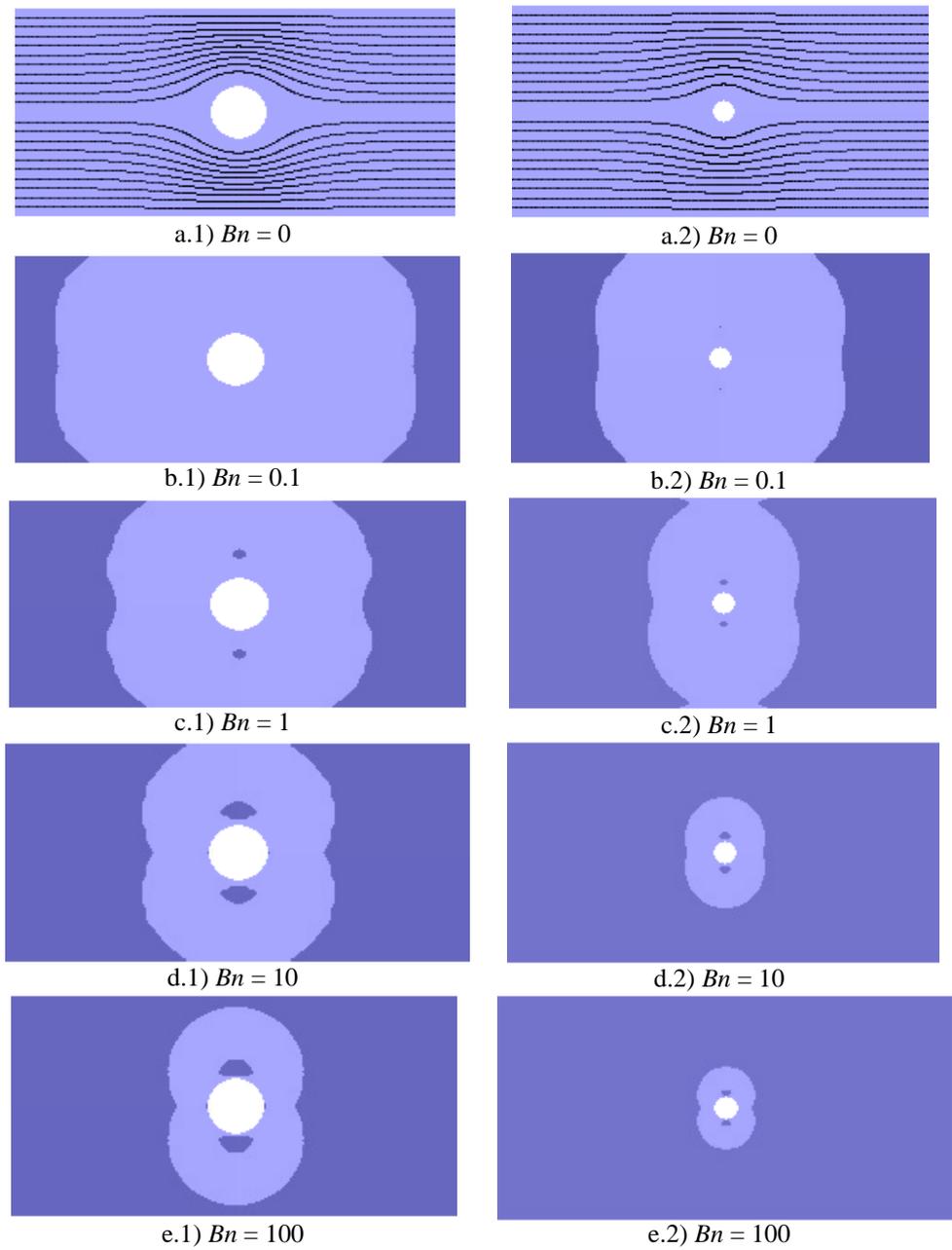
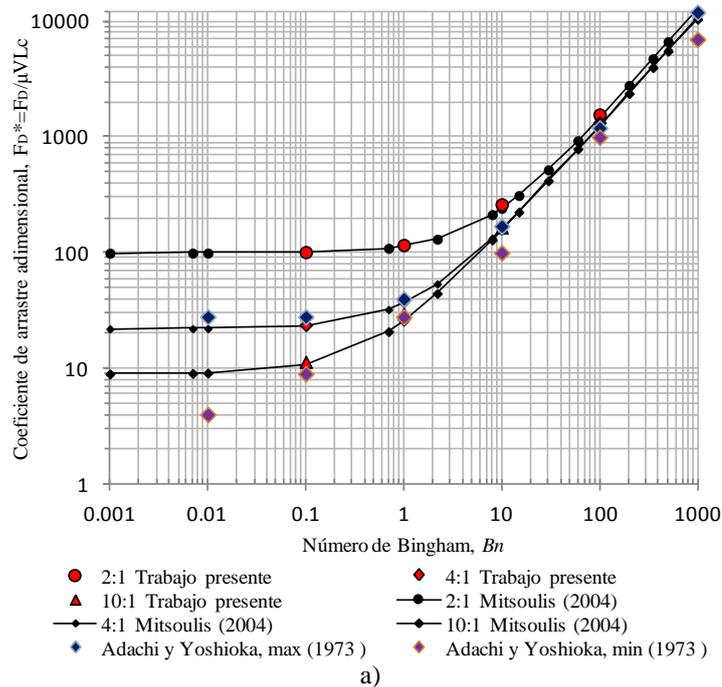
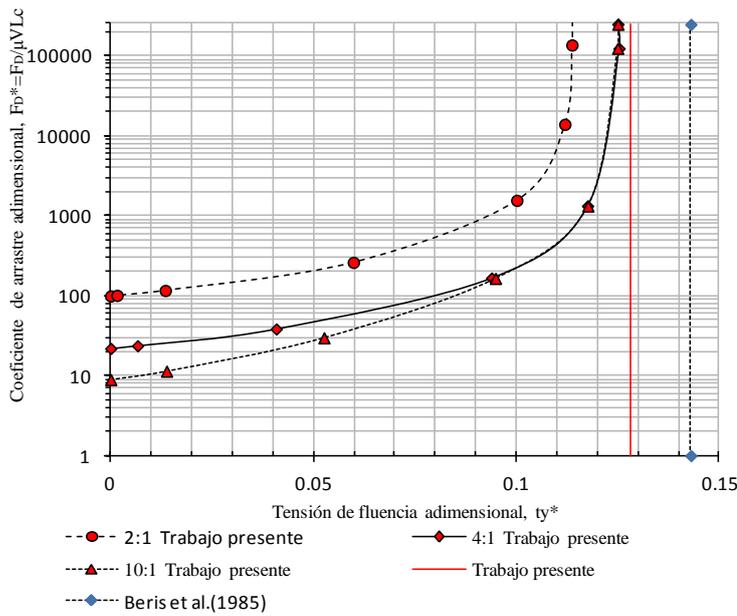


Figura 4.71. **Flujo alrededor de un cilindro.** Líneas de corriente y zonas de fluencia (claro) y no fluencia (oscuras) para diferentes números de Bingham  $Bn$ . Relación  $H:R = 4:1$  a la izquierda y  $10:1$  a la derecha.



a)



b)

Figura 4.72. **Flujo alrededor de un cilindro.** a) Variación del coeficiente de arrastre respecto a  $Bn$ . b) Variación del coeficiente de arrastre respecto a la tensión de fluencia adimensional  $\tau_y^*$ .

#### 4.7.8. Conclusiones

En el presente trabajo se estudia el problema de un cilindro moviéndose entre placas paralelas infinitas en un fluido Newtoniano y un fluido de Bingham para diferentes valores del número de Bingham.

En el caso Newtoniano los resultados para el coeficiente de arrastre se ajustan muy bien a la solución analítica de Faxén excepto para la relación  $H:R = 2:1$ .

En el fluido de Bingham se observa que a medida que aumenta el número de Bingham:

- Las zonas de no fluencia, las zonas de recirculación y de estancamiento aumentan con el número de Bingham.
- El coeficiente de arrastre aumenta linealmente (escala logarítmica) para valores de  $Bn \geq 10$  y la tensión de fluencia adimensional, para la que el cilindro permanece inmóvil, tiende a un valor crítico igual a  $\tau_{y\text{crit.}}^* = 0.128$ .

Las zonas de fluencia y no fluencia, las zonas de recirculación y los casquetes polares se forman alrededor del cilindro en el problema plano de forma similar a como ocurre en el flujo alrededor de la esfera.

# Capítulo 5

## Fluidos de Herschel-Bulkley

### 5.1. Introducción

El modelo de Herschel-Bulkley es un modelo más general que el clásico modelo de Bingham de comportamiento viscoplástico. Es uno de los modelos que permite un mejor ajuste a datos reológicos y experimentales (Gómez-Arias et al., 2009). El nombre de este nuevo modelo se debe al trabajo de W. Herschel y R. Bulkley (Herschel and Bulkley, 1926). Estos científicos obtuvieron los parámetros de este modelo para 114 sustancias cuyo comportamiento tensión-velocidad de deformación se obtuvo en el laboratorio logrando ajustes altamente satisfactorios.

El flujo de Herschel-Bulkley es más complejo que el de Bingham, ya que, además de la tensión umbral de fluencia, el modelo incorpora una fuente de no-linealidad adicional, el índice potencial  $n$ . Para flujos dilatantes ( $n > 1$ ) las velocidades son menores que para el correspondiente fluido de Bingham. Por el contrario, para flujos pseudoplásticos ( $n < 1$ ) las velocidades son mayores que en el flujo de Bingham; esto provoca mayores gradientes de velocidad y localización de la velocidad de deformación, lo cual hace el problema mucho más no-lineal y difícil de resolver numéricamente. Los fluidos de Herschel-Bulkley dilatante ( $n < 1$ ), una vez que comienzan a fluir, presentan un comportamiento muy particular e interesante, debido a que su estructura interna se expande con el aumento de la velocidad de deformación (se observa en el transporte de los granos de arena en las dunas). Son menos comunes que los fluidos de Herschel-Bulkley pseudoplástico ( $n > 1$ ) y han sido mucho menos estudiados.

Al igual que los fluidos de Bingham, los fluidos de Herschel-Bulkley requieren de una tensión de corte mínima para ponerse en movimiento. La determinación de las zonas de fluencia y no fluencia es uno de los principales objetivos del estudio del flujo de estos materiales. También lo es la caracterización de las zonas de localización de la velocidad de deformación (*slip-lines*) que permitan el mecanismo cinemático del flujo.

En este capítulo se trata la modelización numérica de flujos de Herschel-Bulkley. De maneja similar al capítulo anterior, se presentan seis soluciones numéricas, la mayoría problemas *benchmark*, en las cuales se aplican los conceptos y estrategias desarrolladas en los capítulos 2 y 3. Las soluciones numéricas se comparan con soluciones analíticas y resultados experimentales y numéricos de otros autores.

Los problemas a analizar son:

- Flujo de Poiseuille,
- Flujo de Couette,
- Flujo en una cavidad cuadrada,
- Flujo en una expansión súbita,
- Flujo alrededor de un cilindro en un medio infinito y,
- Flujo alrededor de un cilindro que se desplaza y rota sobre su eje.

Para todos los problemas se tiene que, en el problema continuo:

- Las ecuaciones de gobierno están definidas por las ecuaciones (2.17) y (2.15), en condiciones tanto no inerciales (flujo de Stokes, *creeping flow*) como inerciales.
- Se usa el modelo regularizado Herschel-Bulkley-Papanastasiou (Papanastasiou, 1987) para la viscosidad, ec. (2.65), con diferentes índices de potencia  $n$ . Se usa un valor mínimo de velocidad de deformación con el fin de evitar la singularidad numérica que presenta este modelo.
- La condición de fluencia y no fluencia para la determinación de las zonas sólidas ( $\tau \leq \tau_y$ ) y las zonas en las que el fluido fluye ( $\tau > \tau_y$ ) es el del modelo ideal.
- Las líneas de corriente del flujo se determinan resolviendo la ecuación (2.23).

En el problema discreto:

- Se usa una formulación mixta ( $\mathbf{u}/p$ ) de elementos finitos de acuerdo con la metodología presentada en el capítulo 3. Esto es:
  - Elementos finitos triangulares con interpolación lineal tanto para la velocidad como para la presión (P1-P1) o elementos cuadriláteros (Q1-Q1) con interpolación bilineal para la velocidad y la presión.
  - Estabilización con el método OSS (ec. (3.53)). En algunos casos el método OSS se compara con el método ASGS.
  - Linealización de Picard.
  - Discretización temporal BDF1.
- Los flujos considerados en este capítulo son flujos estacionarios desarrollados en una malla fija. El fluido se supone inicialmente en reposo.
- Se considera que se ha alcanzado el estado estacionario cuando la variación de la norma de velocidad entre pasos sucesivos de tiempo es menor de  $1e-04$ .

Las implementaciones computacionales del modelo regularizado Herschel-Bulkley-Papanastasiou se han realizado en el programa de elementos finitos Zephyr desarrollado por el Prof. Codina y sus colaboradores en el Centro Internacional de los Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE). El pre-proceso y el post-proceso de los problemas a estudiar ha sido realizado con GiD (Geometría y Data), desarrollado también en el CIMNE.

## 5.2. Flujo de Poiseuille

### 5.2.1. Descripción del problema

El flujo de Poiseuille es un flujo estacionario que se desarrolla entre placas paralelas infinitas. Es un flujo con solución analítica para el fluido de Herschel-Bulkley (ver sección 2.8.3.1, ec. (2.106)). Este problema se ha resuelto en el capítulo 3, estudio de convergencia con malla estructurada y elementos bilineales Q1Q1 (ver sección 3.5.8) y en el capítulo 4 para el fluido de Bingham (ver sección 4.2).

El flujo de Poiseuille con el fluido de Herschel-Bulkley puede modelar un flujo de excavación que ocurre entre anillos concéntricos (Kelessidis et al., 2006). Una investigación sobre el comportamiento del flujo de varios tipos de grasas en un canal rectangular que se comportan según el modelo de Herschel-Bulkley puede encontrarse en Westerberg et al. (Westerberg et al., 2010).

El objetivo principal de esta sección es mostrar el comportamiento del fluido de Herschel-Bulkley mostrando la influencia del índice potencial  $n$  en la velocidad y velocidad de deformación,  $\dot{\gamma}$ . Se muestran resultados para el flujo de Herschel-Bulkley pseudoplástico y dilatante.

La estrategia de solución y discretización es la usada con el fluido de Bingham; la geometría y condiciones de contorno pueden verse en la Figura 5.1. El gradiente de presión es:

$$-\Delta P = -\frac{P_o - P_L}{L} = -\frac{1600}{6} = -266.67 \text{ Pa/m} \quad (5.1)$$

En la Figura 5.2 se muestra la malla utilizada. En la Tabla 5.1 se indica el número de nodos y de elementos P1P1.

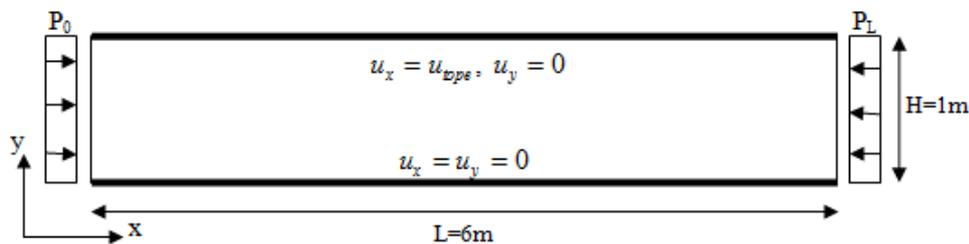


Figura 5.1. Geometría y condiciones de contorno.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
M ( $h_{\text{máx}} = 0.1\text{m}$ )	8897	16496

Tabla 5.1. Número de nodos y elementos para la malla no estructurada M.

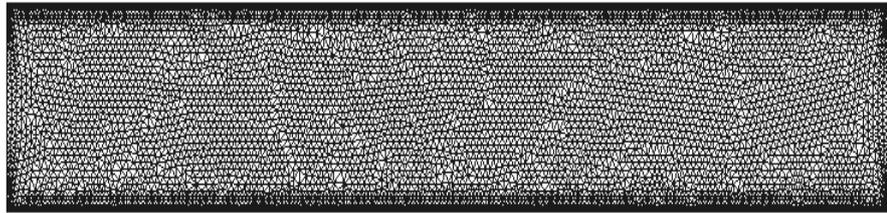


Figura 5.2. Malla no estructurada  $M$  de elementos triangulares.

### 5.2.2. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 5.2 se indican las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización del fluido de Herschel-Bulkley usadas en la simulación numérica.

Con el parámetro de regularización empleado, la relación entre la velocidad de deformación y la tensión es la que se muestra en la Figura 5.3, prácticamente indistinguible de los modelos ideales de Herschel-Bulkley-pseudoplástico ( $n = 0.5$ ) y Herschel-Bulkley-dilatante ( $n = 2$ ).

Propiedades constitutivas	
Modelo del fluido	Herschel-Bulkley
Índice de consistencia $k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	10
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	100
Índice potencial $n$ [-]	0.5, 0.75, 1, 2
Regularización	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 5.2. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

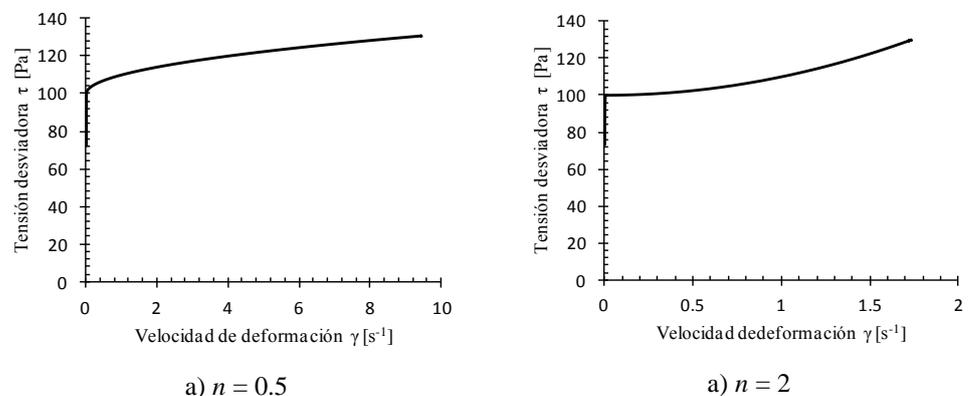


Figura 5.3. **Flujo de Poiseuille.** Variación de la tensión desviadora  $\tau$  con la velocidad de deformación para  $\tau_y = 100$  Pa. a) Fluido Herschel-Bulkley-pseudoplástico. b) Fluido Herschel-Bulkley-dilatante.

### 5.2.3. Dinámica del flujo

Los resultados para las respectivas variaciones se muestran en la sección central. A esta distancia del contorno de entrada el flujo está completamente desarrollado.

En la Figura 5.4 se muestra la distribución de la velocidad para diferentes valores del índice potencial  $n$ . Puede observarse que, para un gradiente de presión dado, la velocidad del flujo aumenta a medida que disminuye el valor del índice potencial  $n$ . Es evidente la diferenciación de las zonas con velocidad constante (zona de no fluencia) y velocidad variable (zonas de fluencia). Las superficies de fluencia separan unas zonas de otras. La ubicación de estas superficies de fluencia se calcula analíticamente mediante la ec. (2.107).

Los resultados se correlacionan muy bien con la solución analítica. Para  $n = 0.5, 0.75, 1, 2$  la solución numérica prácticamente se superpone a la solución analítica. El error numérico de discretización se hace más evidente para índices potenciales muy bajos.

### 5.2.4. Comportamiento reológico

En la Figura 5.5 se muestra la variación de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$  (en valor absoluto) para los fluidos de Herschel-Bulkley pseudoplástico (Figura 5.5 a) y dilatante (Figura 5.5 b)) con los valores del índice potencial de  $n = 0.5$  y  $n = 2$ , respectivamente. La velocidad de deformación prácticamente es nula en las zonas de no fluencia y variable en el resto de la sección, zona de fluencia. La forma de la curvatura para la velocidad de deformación en las zonas de fluencia representa gráficamente el efecto del índice  $n$  en el comportamiento constitutivo de este modelo.

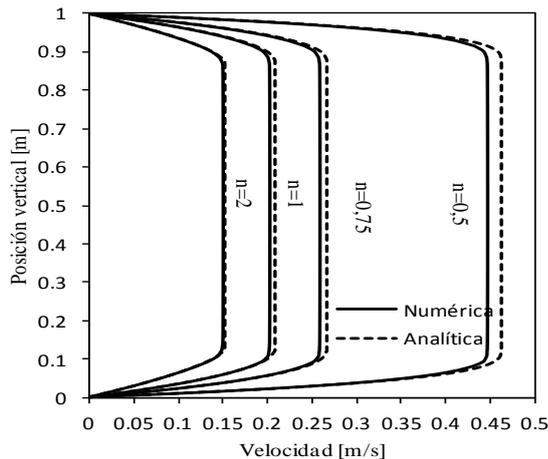


Figura 5.4. **Flujo de Poiseuille.** Variación de la velocidad para diferentes valores de  $n$ . Comparación de la solución analítica y la numérica.  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ ,  $\tau_y = 100 \text{ Pa}$ .

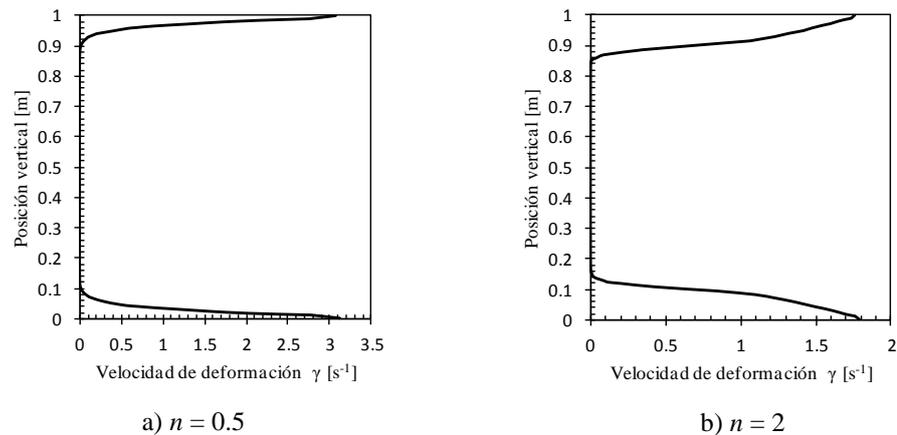


Figura 5.5. **Flujo de Poiseuille.** Variación de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$  para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ . a) Flujo de Herschel-Bulkley pseudoplástico. b) Flujo de Herschel-Bulkley dilatante.

### 5.2.5. Zona de fluencia, caso pseudoplástico, $n = 0.5$

Las zonas de fluencia y no fluencia se relacionan con la distribución de la velocidad (Figura 5.6) y la viscosidad (Figura 5.7) en cada sección del dominio. La zona de no fluencia coincide con la zona de velocidad constante ( $u_{\max} = 0.4475 \text{ m/s}$ ) y valores de viscosidad elevados correspondientes a un gradiente de velocidad casi nulo.

En la Figura 5.8 se muestra la configuración de las zonas de fluencia ( $\tau > \tau_y$ ) y no fluencia ( $\tau \leq \tau_y$ ). Puede observarse que las zonas de fluencia son más estrechas que las correspondientes al flujo de Bingham (Figura 5.4). Esto muestra que en fluidos pseudoplásticos la velocidad de deformación está más localizada.

### 5.2.6. Zona de fluencia, caso dilatante, $n = 2$

Como en el caso anterior, las zonas de fluencia y no fluencia se relacionan con la distribución de la velocidad (Figura 5.9) y la viscosidad (Figura 5.10) en el dominio. La zona de no fluencia coincide con la zona de velocidad constante ( $u_{\max} = 0.1466 \text{ m/s}$ ) y valores de viscosidad elevados correspondientes a un gradiente de velocidad casi nulo.

En la Figura 5.11 se muestra la configuración de las zonas de fluencia ( $\tau > \tau_y$ ) y no fluencia ( $\tau \leq \tau_y$ ). Puede observarse que las zonas de fluencia son más ampliadas que las correspondientes al flujo de Bingham (Figura 5.4). Esto muestra que en fluidos dilatantes la velocidad de deformación está menos localizada.



Figura 5.6. Flujo de Poiseuille,  $n = 0.5$ . Distribución de las velocidades para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ .

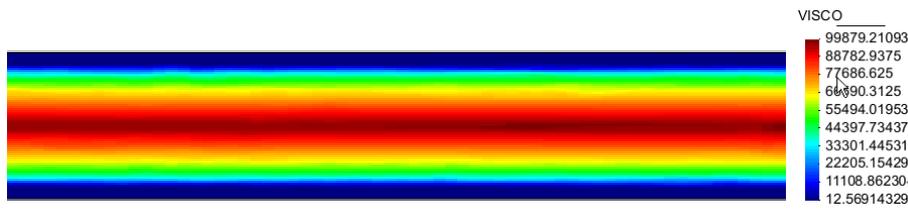


Figura 5.7. Flujo de Poiseuille,  $n = 0.5$ . Distribución de la viscosidad para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ .

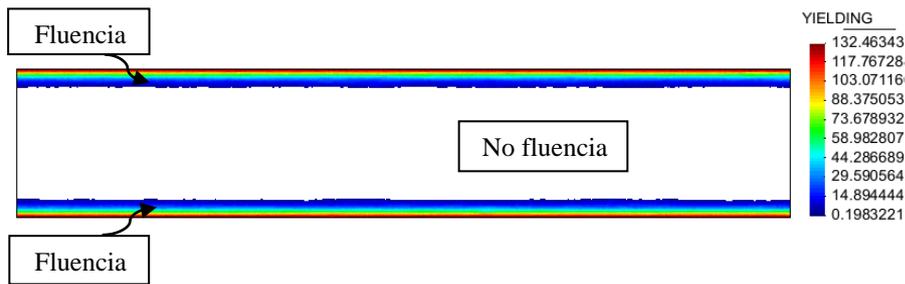


Figura 5.8. Flujo de Poiseuille,  $n = 0.5$ . Distribución de las zonas de fluencia y no fluencia para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ .



Figura 5.9. Flujo de Poiseuille,  $n = 2$ . Distribución de la velocidad para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ .

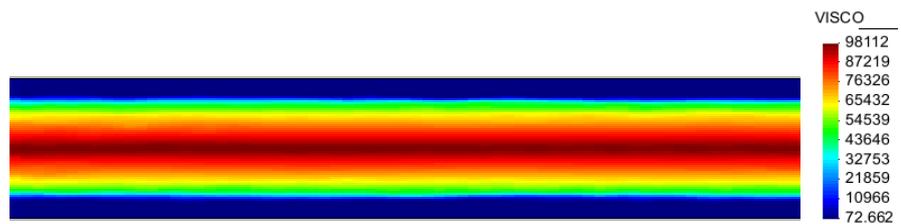


Figura 5.10. Flujo de Poiseuille,  $n = 2$ . Distribución de la viscosidad para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ .

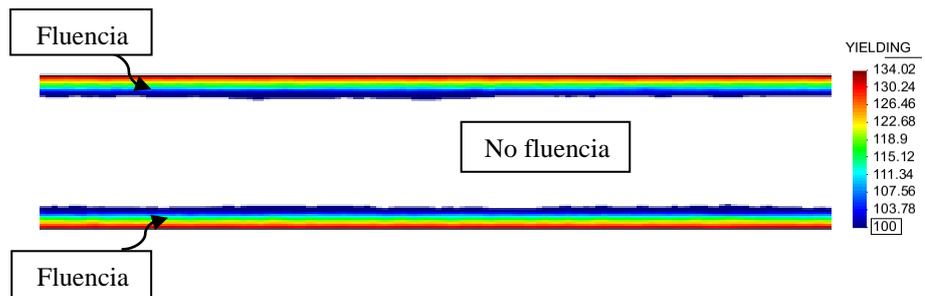


Figura 5.11. Flujo de Poiseuille,  $n = 2$ . Distribución de las zonas de fluencia y no fluencia para  $\Delta P = -266.67 \text{ Pa/m}$ .

### 5.2.7. Conclusiones

En esta sección se estudia el flujo paralelo de Poiseuille con el modelo regularizado del fluido de Herschel-Bulkley. El parámetro de regularización usado  $m = 1000$  s aproxima adecuadamente el modelo ideal, tanto para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico con  $n = 0.5$  como para el dilatante con  $n = 2$ .

La distribución de las diferentes variables obtenidas numéricamente se ajusta muy bien a la solución analítica para el gradiente de presión usado y los diferentes valores del índice potencial.

Las mallas estructuradas resultan más adecuadas para este tipo de flujo paralelo como lo son para el fluido de Bingham.

El flujo de Herschel-Bulkley es más complejo que el de Bingham. Se ha comprobado que el índice potencial incorpora una fuente de no-linealidad adicional. Para flujos dilatantes ( $n > 1$ ) las velocidades son menores que para el correspondiente fluido de Bingham. Por el contrario, Para flujos pseudoplásticos ( $n < 1$ ) las velocidades son mayores que en el flujo de Bingham. Esto provoca mayores gradientes de velocidad y localización de la velocidad de deformación, lo cual hace el problema mucho más no-lineal y difícil de resolver numéricamente.

### 5.3. Flujo de Couette

#### 5.3.1. Descripción del problema

El flujo de Couette es un flujo paralelo y estacionario que se desarrolla entre placas paralelas infinitas, una de ellas se encuentra fija y la otra en movimiento. Es un flujo con solución analítica para el fluido de Herschel-Bulkley (sección 2.8.2.1, ec. (2.97)). Este problema ha sido resuelto en el capítulo 4 para el fluido de Bingham (ver sección 4.3).

Según Huang (Huang et al., 1997), el flujo de Couette con el modelo de Herschel-Bulkley pseudoplástico puede usarse para modelar materiales cerámicos vaciados en condición húmeda.

En esta sección se analiza el flujo de Couette para el fluido de Herschel-Bulkley con alta pseudoplasticidad ( $n = 0.5$ ) y su efecto en la variación de la velocidad, la velocidad de deformación, la viscosidad y la tensión desviadora. Se muestran las zonas de fluencia y no fluencia. Las velocidades obtenidas numéricamente se comparan con la solución analítica.

#### 5.3.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 5.12 se muestran la geometría y las condiciones de contorno. La placa superior se mueve a una velocidad constante de  $u_{\text{tope}} = 0.3 \text{ m/s}$  y la placa inferior está fija. Se imponen condiciones de presión en los contornos de entrada (izquierda) y salida (derecha). La presión tiene valor nulo en la pared del lado derecho ( $P_L=0$ ). En el lado izquierdo, la presión  $P_0$  adopta distintos valores para producir los gradientes de presión de la Tabla 5.3.

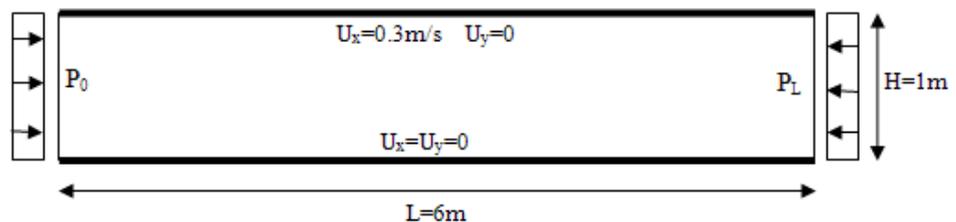


Figura 5.12. Geometría y condiciones de contorno para el flujo de Couette.

$P_0$ (Pa)	$-\Delta P = -\frac{P_L - P_0}{L}$ (Pa/m)
1800	-300.00
1700	-283.33
1050	-250.00

Tabla 5.3. Valores del gradiente de presión para distintas presiones  $P_0$ .

### 5.3.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 5.4 se muestran las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización.

<b>Propiedades constitutivas</b>	
Modelo del fluido	Herschel-Bulkley
Índice de consistencia $k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	10
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	100
Índice de la ley de potencia $n$	0.5
<b>Regularización</b>	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 5.4. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

### 5.3.4. Discretización

En el flujo de Couette para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico se usa una malla más refinada que la malla usada en el flujo de Poiseuille. En la Figura 5.13 puede verse la malla M utilizada.

En la Tabla 5.5 se indican el número de nodos y de elementos PIP1 de la malla M utilizada.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
M ( $h=0.02m$ )	17460	34217

Tabla 5.5. Número de nodos y elementos para la malla no estructurada M.

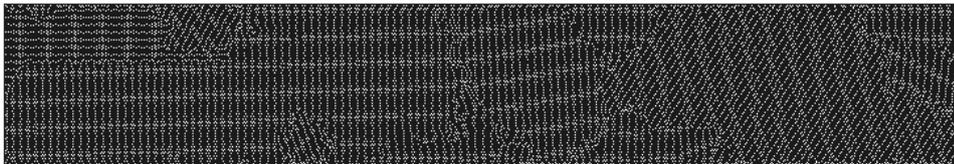


Figura 5.13. Malla no estructurada M.

### 5.3.5. Dinámica del flujo

En la Figura 5.14 se muestra la variación de la velocidad para los diferentes gradientes de presión. Se puede ver que la velocidad aumenta con el aumento del gradiente de presión. La solución numérica prácticamente se superpone a la solución analítica.

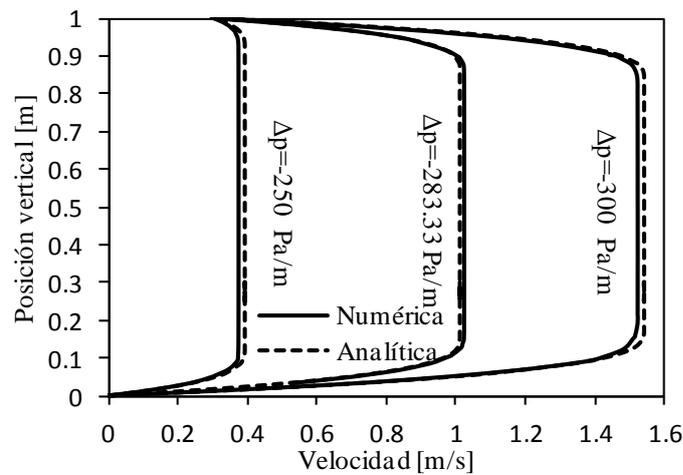


Figura 5.14. **Flujo de Couette,  $n = 0.5$ .** Variación de la velocidad para diferentes gradientes de presión. Comparación entre la solución analítica y la numérica,  $u_{tope} = 0.3 \text{ m/s}$  y  $\tau_y = 100 \text{ Pa}$ .

### 5.3.6. Comportamiento reológico

En la Figura 5.15 se muestra la variación de la velocidad de deformación y la tensión (en valor absoluto) para un gradiente de presión de  $\Delta P = -300 \text{ Pa/m}$ . Esta variación de la velocidad de deformación se ajusta muy bien a la solución analítica presentada en la Figura 2.20 del capítulo 2. Puede verse que la velocidad de deformación, Figura 5.15 a), es prácticamente nula en la zona de no fluencia, de acuerdo con el modelo regularizado.

La tensión desviadora, Figura 5.15 b), muestra una variación lineal como en la solución analítica de la Figura 2.19 del capítulo 2.

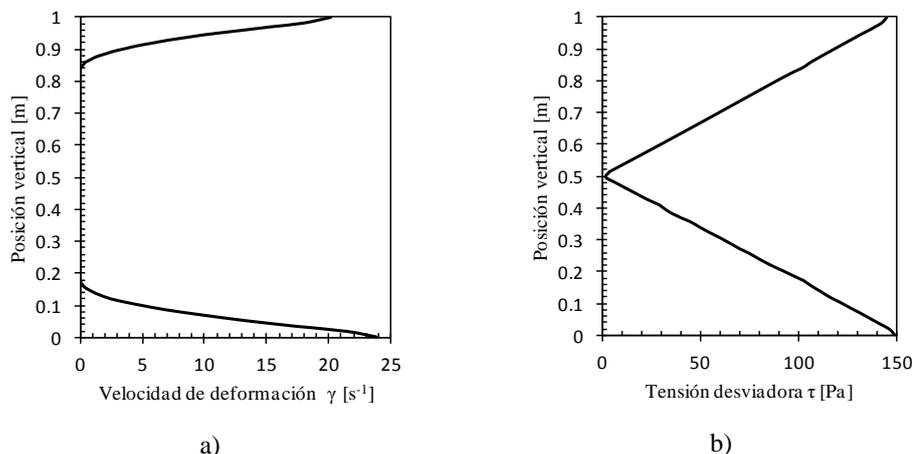


Figura 5.15. **Flujo de Couette,  $n = 0.5$ .** a) Variación de la velocidad de deformación  $\dot{\gamma}$ . b) Variación de la tensión  $\tau$ .  $\Delta P = -300 \text{ Pa/m}$ .

Las zonas de fluencia y no fluencia se relacionan con la distribución de la velocidad (Figura 5.16) y la viscosidad (Figura 5.17). La zona de no fluencia coincide con la zona de velocidad constante ( $u_{\max} = 0.15201$  m/s) y valores de viscosidad elevados correspondientes a un gradiente de deformación casi nulo.

En la Figura 5.18 se muestra la configuración de las zonas de de fluencia ( $\tau > \tau_y$ ) y no fluencia ( $\tau \leq \tau_y$ ).

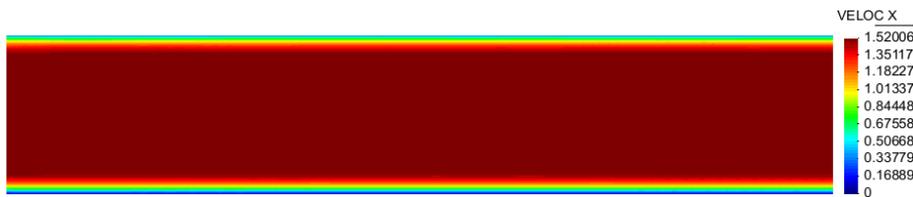


Figura 5.16. Flujo de Couette,  $n = 0.5$ . Distribución de la velocidad para  $\Delta P = -300$  Pa/m.

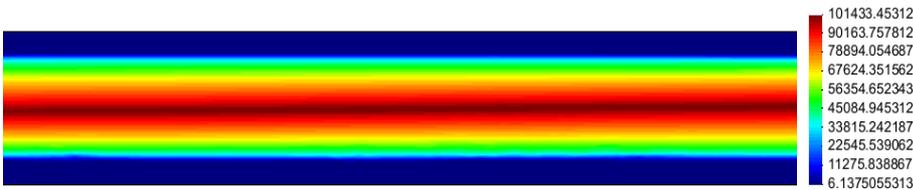


Figura 5.17. Flujo de Couette,  $n = 0.5$ . Distribución de la viscosidad para  $\Delta P = -300$  Pa/m.

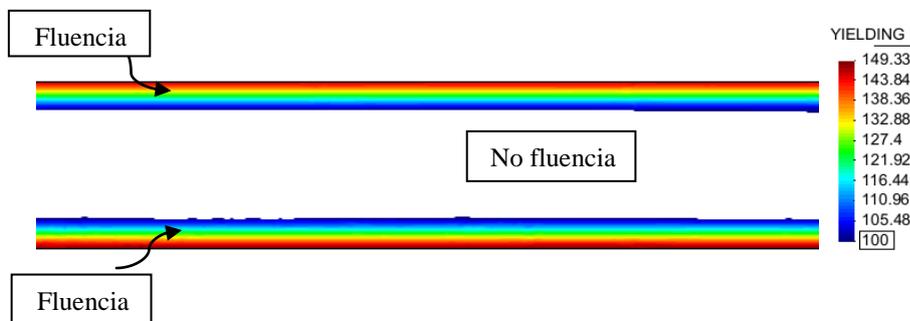


Figura 5.18. Flujo de Couette,  $n = 0.5$ . Distribución de las zonas de fluencia y no fluencia para  $\Delta P = -300$  Pa/m.

### 5.3.7. Conclusiones

Se ha estudiado el flujo paralelo de Couette con el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico con índice potencial  $n = 0.5$ ; el parámetro de regularización  $m=1000$  s aproxima satisfactoriamente el modelo ideal para la velocidad de deformación y la tensión desviadora.

Las distribuciones de las diferentes variables obtenidas numéricamente se ajustan muy bien a las soluciones analíticas para los gradientes de presión usados. Se han obtenido las zonas de fluencia y no fluencia.

El flujo de Couette con el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico y  $n = 0.5$  es altamente no-lineal y difícil de resolver numéricamente. En consecuencia, es necesario usar mallas muy finas para capturar adecuadamente las superficies de fluencia y la localización de la velocidad de deformación de las zonas de fluencia.

## 5.4. Flujo en una cavidad cuadrada

### 5.4.1. Descripción del problema

El problema del flujo viscoplástico en una cavidad cuadrada con velocidad aplicada en el tope (*lid-driven cavity problem*) se considera un problema *benchmark* (Mitsoulis and Zisis, 2001). Este problema ha sido resuelto para el fluido de Bingham en el capítulo 4, utilizando mallas estructuradas con elementos bilineales Q1Q1 y no estructuradas con elementos lineales P1P1.

En la literatura, este flujo ha sido mucho más estudiado en fluidos de Bingham que en fluidos de Herschel-Bulkley. Dall'Onder Dos Santos et al. (Dall'Onder Dos Santos et al., 2011) han estudiado numéricamente este flujo obteniendo las zonas de fluencia y no fluencia para diferentes números de Reynolds, diferentes valores de la tensión de fluencia y diferentes valores del índice potencial  $n$ . En su trabajo usó el modelo regularizado Souza Méndez Dutra (SMD) descrito en el apartado 2.4.7.3.

En el presente trabajo la cavidad es objeto de estudio, primero, en el caso no inercial ( $Re \approx 0$ ). Se determinan las zonas de fluencia y no fluencia, las líneas de corrientes, la distribución de las velocidades, la distribución de presiones y tensiones desviadoras para diferentes valores de la tensión de fluencia  $\tau_y$  y valores del índice potencial de  $n = 0.5, 0.2, n = 2$ . Se comparan las líneas de corriente para el flujo pseudoplástico con  $n = 0.2, 0.5$  y el flujo newtoniano,  $n = 1$ . En el flujo de Herschel-Bulkley se comparan las zonas de fluencia y no fluencia y las líneas de corriente obtenidas usando el método OSS con las obtenidas usando el método ASGS.

Seguidamente, en el caso inercial para número de Reynolds  $Re = 1000$ , se determinan también las variables mencionadas en el párrafo anterior para el flujo de Herschel-Bulkley pseudoplástico.

Se incluyen algunos resultados de la velocidad para el fluido pseudoplástico (ley potencial) con fines comparativos y sin especial énfasis en el mismo.

Cada caso se estudia para diferentes números generalizado de Bingham,  $Bn^*$ , definido en este problema como:

$$Bn^* = \frac{\tau_y}{k} \left( \frac{H}{V} \right)^n \quad (5.2)$$

donde  $\tau_y$  es la tensión de fluencia,  $n$  es el índice potencial,  $V = 1 \text{ m/s}$  es la velocidad en el tope de la cavidad,  $H = 1 \text{ m}$  es el ancho de la cavidad, y  $k = 1 \text{ Pa.s}^n$  es el índice de consistencia del fluido (ver Tabla 5.6).

Las presiones,  $P$ , las tensiones,  $\tau_{ij}$ , y la magnitud de la tensión de fluencia,  $\tau$ , se adimensionalizan respecto a la tensión de fluencia:

$$P^* = \frac{P}{\tau_y}; \quad \tau_{ij}^* = \frac{\tau_{ij}}{\tau_y}; \quad \tau^* = \frac{\tau}{\tau_y} \quad (5.3)$$

respectivamente. Así, la tensión de fluencia adimensional es unitaria,  $\tau_y^* = 1$ .

### 5.4.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 5.19 se muestra la geometría y las condiciones de contorno del problema. Son las mismas que las presentadas para el fluido de Bingham: no deslizamiento en todas las paredes excepto en la tapa donde se impone una velocidad horizontal uniforme,  $u_{\text{tope}} = 1$  m/s. Para determinar el campo de presiones, se impone presión nula en el punto medio de la pared de la base.

En las esquinas superiores se impone velocidad nula. Esta condición se conoce como condición de rampa (*ramp condition*).

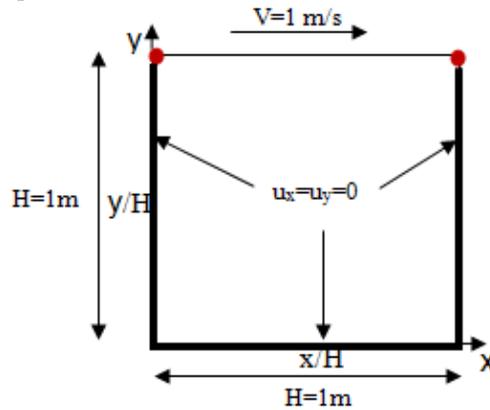


Figura 5.19. Geometría y condiciones de contorno.

### 5.4.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

Las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización del fluido de Herschel-Bulkley utilizados en la simulación numérica se dan en la Tabla 5.6. Se estudia el flujo para diferentes valores de  $Bn^* = \tau_y$ , según la Tabla 5.6.

Propiedades constitutivas	
Modelo del fluido	Herschel-Bulkley
Índice de consistencia $k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	0,1,10,100,1000
Índice potencial $n$ [-]	0.2, 0.5, 2
Regularización	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 5.6. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

#### 5.4.4. Discretización

En la Figura 5.20 se encuentran la malla estructurada M con elementos cuadriláteros Q1Q1. Esta malla se ha usado en el problema resuelto de la cavidad en el flujo de Bingham (ver capítulo 4, sección 4.4, malla M2).

En la Tabla 5.7 se indica el número de nodos y de elementos para la malla M usada.

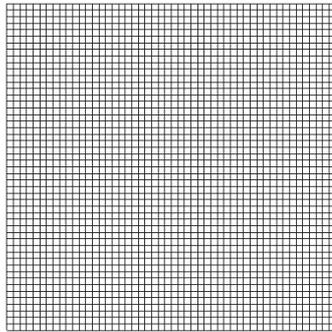


Figura 5.20. Malla estructurada M.

Estructurada	Número de nodos	Número de elementos
M: Malla (100*100)	10201	10000

Tabla 5.7. Número de nodos y elementos para la malla M.

#### 5.4.5. Caso no inercial, $Re \approx 0$ .

##### 5.4.5.1. Fluido pseudoplástico, Newtoniano y dilatante, $\tau_y = 0$ , $n = 0.2, 1, 2$

Se estudia el problema de la cavidad para el caso no inercial (flujo de Stokes, *creeping flow*) en la malla estructurada. Se muestra el comportamiento de las líneas de corriente para el caso particular del fluido de Herschel-Bulkley con  $\tau_y = 0$ , ley potencial. Se usa el método de estabilización OSS.

En la Figura 5.21 se muestran las líneas de corriente calculadas en la malla estructurada M con 100 elementos en cada dirección para los valores del índice potencial de:  $n = 0.2$ , altamente pseudoplástico,  $n = 1$ , modelo Newtoniano y  $n = 2$ , fluido dilatante.

Puede verse que las líneas de corriente son bastante uniformes y suaves en todos los casos. Las líneas de corriente se extienden hacia el fondo algo más en el fluido Newtoniano (Figura 5.21 b)) que en el fluido dilatante (Figura 5.21 c)) y mucho menos en el fluido pseudoplástico (Figura 5.21 a)).

El flujo pseudoplástico presenta mayor velocidad cerca del tope que el flujo Newtoniano y éste a su vez muestra mayor velocidad que el fluido dilatante. El ojo del vórtice es más achatado en el flujo pseudoplástico que en el flujo Newtoniano y éste lo es menos que en el fluido dilatante.

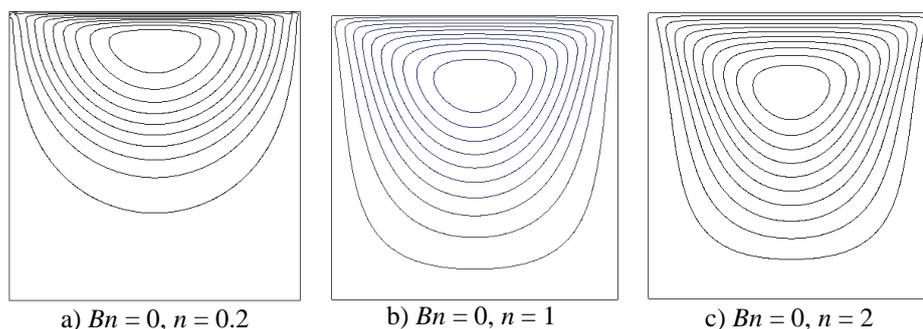


Figura 5.21. **Flujo en una cavidad, OSS.** Líneas de corriente para el flujo Herschel-Bulkley particularizada al modelo de la ley potencial con  $Bn^* = 0$ . a) Flujo pseudoplástico ( $n = 0.2$ ). b) Flujo Newtoniano ( $n = 1$ ). c) Flujo dilatante ( $n = 2$ ).

#### 5.4.5.2. Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n = 0.2$ y $n = 0.5$

Se estudia a continuación el problema de la cavidad para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico. Se comparan los resultados obtenidos para las líneas de corriente y las zonas de fluencia y no fluencia usando los métodos de estabilización ASGS y OSS.

En las Figura 5.22 y Figura 5.23 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia con  $n = 0.2$  y  $n = 0.5$ , respectivamente, usando ambos métodos de estabilización y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Se observa que a medida que el número generalizado de Bingham aumenta la extensión de las zonas de no fluencia (zonas oscuras) se incrementa; éstas a su vez se van extendiendo hacia el tope de la cavidad.

Dada la finura de la malla, en la morfología de las zonas de fluencia (claras) y no fluencia (oscuras) no se aprecian diferencias entre el método OSS y el método ASGS para  $n = 0.2$  pero sí para  $n = 0.5$  y más acentuadas en  $Bn^* = 10, 100$  donde se aprecia cierta influencia de la singularidad de las esquinas en la morfología de la zona de no fluencia principal (central).

Para  $Bn^* = 1$  la zona de no fluencia principal presenta forma de abanico; al parecer, en este flujo hay una mayor influencia de las esquinas que en el flujo de Bingham como consecuencia de presentar mayores velocidades cerca del tope. La zona de no fluencia en el fondo de la cavidad es menos cóncava que la encontrada en el fluido de Bingham.

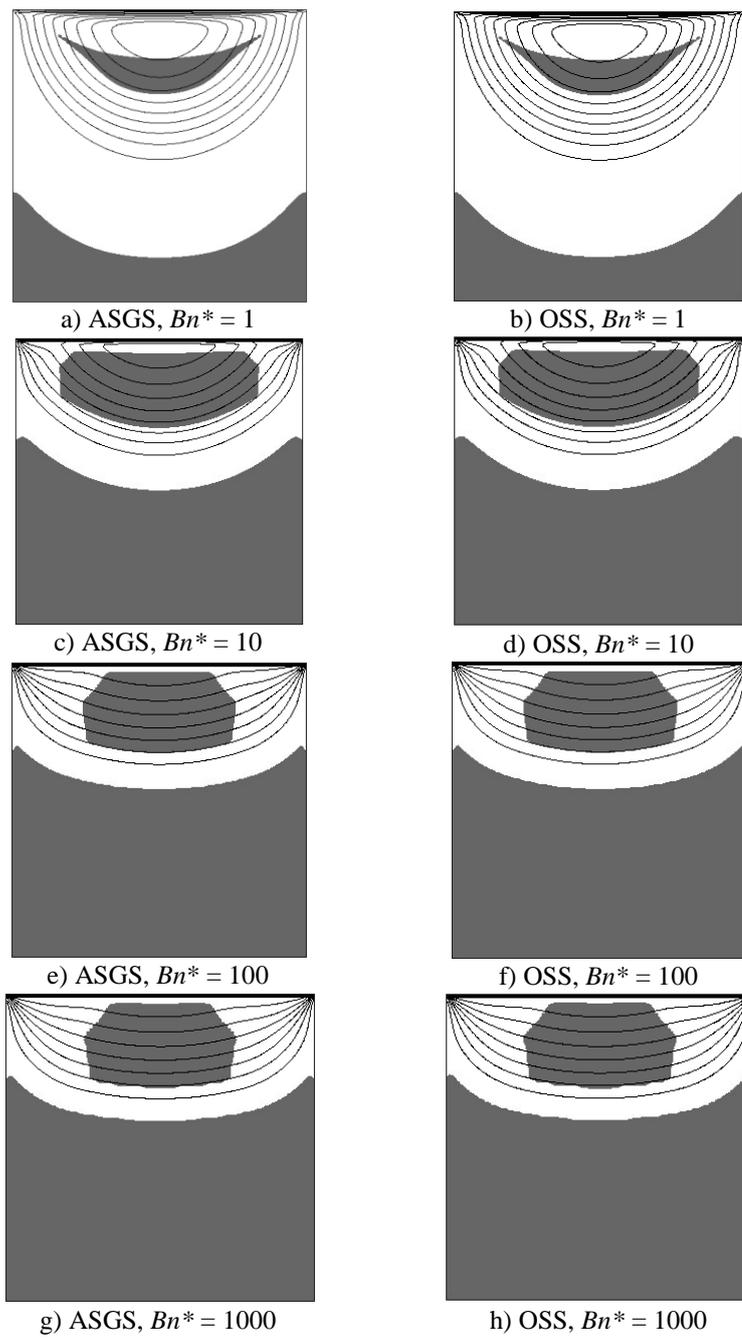


Figura 5.22. *Herschel-Bulkley, cavidad,  $n = 0.2$ ,  $Re \approx 0$ . Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras) para diferentes números de Bingham.*

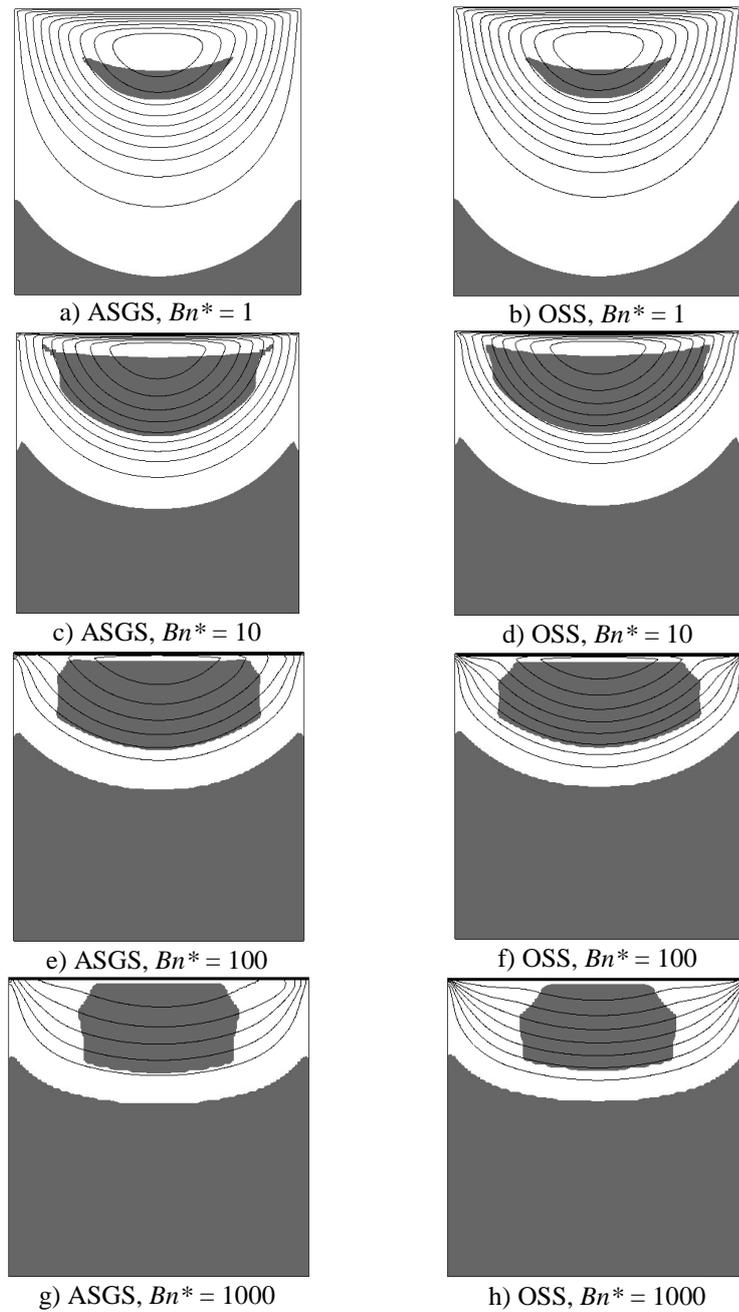


Figura 5.23. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re \approx 0$ . Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras) para diferentes números de Bingham.

### 5.4.5.2.1. Dinámica del flujo

#### *Líneas de corriente*

Las Figura 5.22 y Figura 5.23 muestran las líneas de corriente obtenidas con  $n = 0.2$  y  $n = 0.5$ , respectivamente, y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ , para los métodos de estabilización ASGS y OSS. Puede verse que a medida que el número generalizado de Bingham aumenta:

- Las líneas de corriente no muestran diferencia para ambos métodos de estabilización con  $n = 0.2$ .
- Las líneas de corriente sí muestran diferencia entre ambos métodos de estabilización con  $n = 0.5$  y  $Bn^* \geq 10$ . En el método ASGS se aprecia cierta distorsión de las líneas de corriente cerca de las esquinas singulares. El método OSS muestra completa simetría.
- Las líneas de corriente van desplazándose hacia el tope de la cavidad y se van achatando.
- El ojo del vórtice se va acercando al tope de la cavidad ligeramente más rápido en el flujo con  $n = 0.2$  que en el flujo con  $n = 0.5$ .

#### *Presiones*

En las Figura 5.24 y Figura 5.25 se muestran las presiones adimensionales en el tope de la cavidad para  $n = 0.2$  y  $n = 0.5$  con diferentes valores de números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Puede verse que:

- La presión es nula en el centro de la superficie de la cavidad.
- La singularidad de presión en las esquinas se hace más intensa al aumentar el número de Bingham. El rápido aumento de la presión produce oscilaciones espúreas en la velocidad de los puntos singulares que son amortiguados por el método de estabilización.
- Para todos los casos, el método OSS produce valores más elevados de las puntas de presión, con menores oscilaciones en la velocidad. Para  $n = 0.5$  se obtiene mayor punta de presión en las esquinas que para  $n = 0.2$ .

#### *Velocidades*

En las Figura 5.26 y Figura 5.27 se muestra la componente horizontal de la velocidad adimensional,  $Ux^*$ , a lo largo de la sección vertical central  $x = H/2$  para valores del índice potencial de  $n = 0.2, n = 0.5$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Se incluyen los flujos Newtoniano y pseudoplástico. Se observa que a medida que los números generalizados de Bingham aumentan:

- La velocidad horizontal disminuye. La velocidad  $Ux^*$  es ligeramente mayor para  $n = 0.5$  que para  $n = 0.2$ .
- Los valores pequeños, casi nulos, de la velocidad coinciden con las zonas de no fluencia inferior y central. Estas zonas coinciden con el segundo y tercer cambios de pendiente más fuertes desde la pared inferior en la distribución de velocidad correspondiente a cada valor del número de Bingham. Estos cambios se producen de manera muy suave, mucho más para el flujo con  $n = 0.2$ .

En las Figura 5.28 y Figura 5.29 se muestra las componente vertical de la velocidad adimensional  $U_y^*$  a lo largo de la sección horizontal central  $y = H/2$  para valores del índice potencial de  $n = 0.2$ ,  $n = 0.5$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Se incluye la ley potencial. Puede verse que la velocidad vertical es antisimétrica respecto al eje  $x = H/2$ . A medida que los números generalizados de Bingham aumentan, la velocidad vertical disminuye hasta alcanzar valores muy pequeños, casi nulos para  $Bn = 1000$ .

La magnitud de la velocidad vertical  $U_y^*$  es menor para  $n = 0.2$  que para  $n = 0.5$ . Para valores de  $Bn^* = 1000$  la velocidad es prácticamente nula.

La magnitud de la velocidad vertical,  $U_y^*$ , muestra picos de velocidad mucho menores que los mostrados para la magnitud de la velocidad horizontal  $U_x^*$ .

En todos los casos, las velocidades del fluido pseudoplástico con  $\tau_y = 0$ ,  $Bn^* = 0$  son mayores que para los fluidos de Herschel-Bulkley.

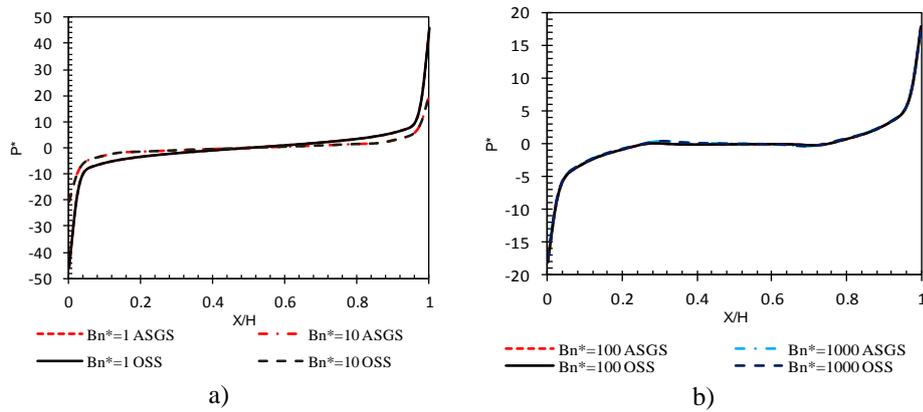


Figura 5.24. Flujo en una cavidad,  $n = 0.2$ ,  $Re \approx 0$ . Distribución de presiones en el tope de la cavidad para el método ASGS y OSS. a) Comparación para  $Bn^* = 1, 10$ . b) Comparación para  $Bn^* = 100, 1000$ .

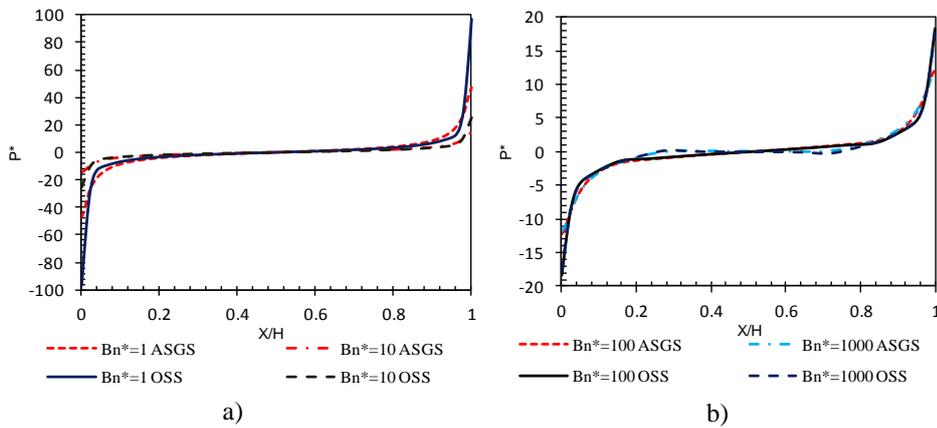


Figura 5.25. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re \approx 0$ . Distribución de presiones en el tope de la cavidad para el método ASGS y OSS. a)  $Bn^* = 1, 10$ . b)  $Bn^* = 100, 1000$ .

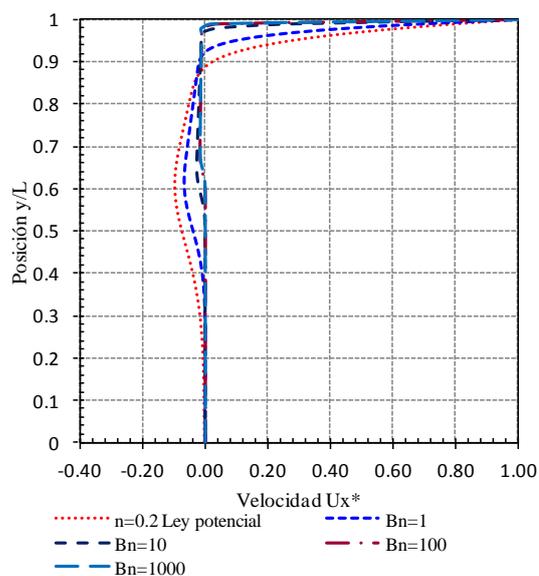


Figura 5.26. **Flujo en una cavidad,  $n = 0.2$ ,  $Re \approx 0$ .** Distribución de velocidad horizontal a lo largo de la sección vertical  $x=H/2$  para los fluidos Newtoniano, pseudoplástico ( $Bn^* = 0$ ) y de Herschel-Bulkley con  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

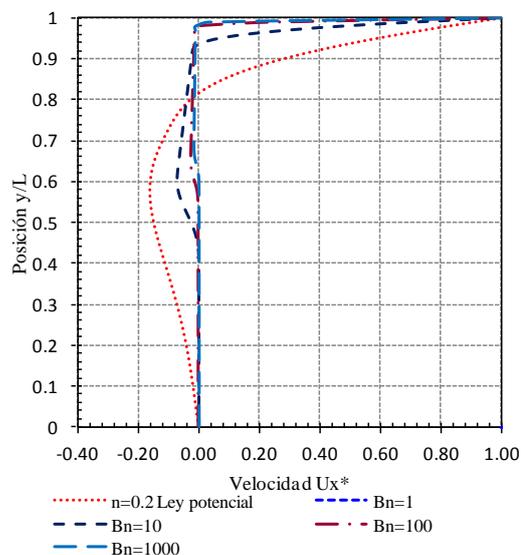


Figura 5.27. **Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re \approx 0$ .** Distribución de velocidad horizontal a lo largo de la sección vertical  $x=H/2$  para los fluidos Newtoniano, pseudoplástico ( $Bn^* = 0$ ) y de Herschel-Bulkley con  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

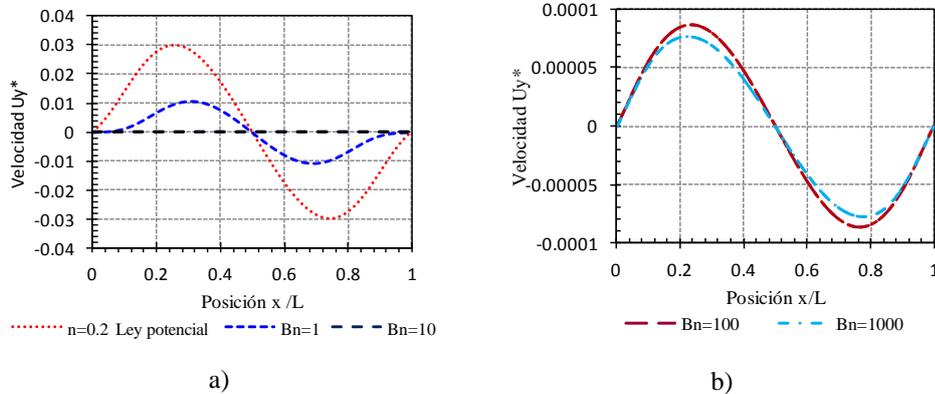


Figura 5.28. **Flujo en una cavidad,  $n = 0.2$ ,  $Re \approx 0$ .** a) Distribución de velocidad vertical a lo largo de la sección horizontal  $y=H/2$  para un fluido Newtoniano, un fluido pseudoplástico ( $Bn^* = 0$ ) y Herschel-Bulkley  $Bn^* = 1, 10, 100$ . b) Fluido de Herschel-Bulkley con  $Bn^* = 100, 1000$ .

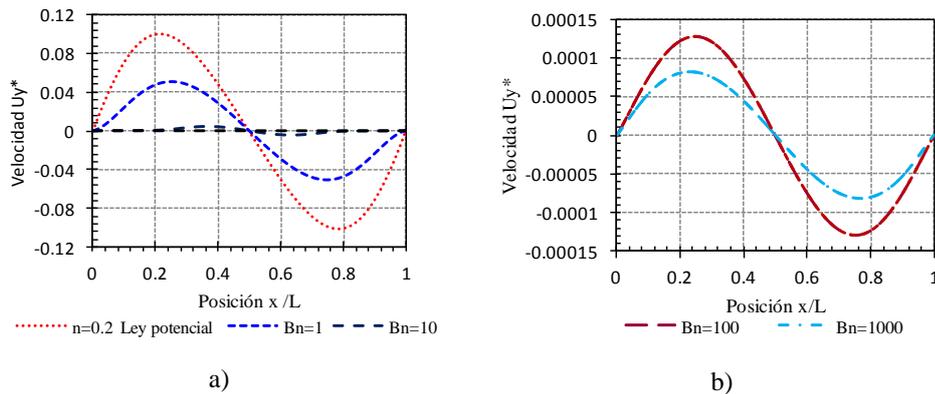


Figura 5.29. **Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re \approx 0$ .** a) Distribución de velocidades vertical a lo largo de la sección horizontal  $y=H/2$  para los fluidos Newtoniano, pseudoplástico ( $Bn^* = 0$ ) y de Herschel-Bulkley con  $Bn^* = 1, 10, 100$ . b) Fluido de Herschel-Bulkley con  $Bn^* = 100, 1000$ .

### 5.4.5.2.2. Comportamiento reológico

#### *Tensiones*

Se analizan las tensiones desviadoras adimensionales del flujo dentro de la cavidad a lo largo de la sección horizontal  $y/H = 0.8$ .

En las Figura 5.30 y Figura 5.31 se muestran las distribuciones de las tensiones desviadoras adimensionales para valores del índice potencial de  $n = 0.2$ ,  $n = 0.5$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

En todos los casos se observa que:

- La tensión en las paredes laterales ( $x/H = 0$ ,  $x/H = 1$ ) está dominada por la tensión cortante debido a la condición de no deslizamiento en las mismas.
- La tensión cortante muestra dos valores mínimos relativos y un valor máximo relativo en el centro de la cavidad.
- La tensión cortante muestra simetría a lo largo de la sección vertical  $x=H/2$ .
- Las componentes de las tensiones son mayores para  $n = 0.2$  que para  $n = 0.5$ ; sólo la tensión cortante en las paredes de la cavidad es un poco mayor para  $Bn^* = 1$ ,  $n = 0.5$  que para  $Bn^* = 1$ ,  $n = 0.2$ .

A medida que el número generalizado de Bingham aumenta, la tensión cortante disminuye en las paredes laterales de la cavidad.

Con  $Bn^* = 10000$  las componentes de las tensiones son prácticamente iguales para ambos valores de  $n$ .

Se puede verificar los tamaños de las zonas de fluencia y no fluencia (Figura 5.22 y Figura 5.23) en la sección  $y/H = 0.8$  siguiendo la envolvente  $t^*$ . Si  $t^* > t_y^*$  el fluido está en fluencia y caso contrario está en no fluencia.

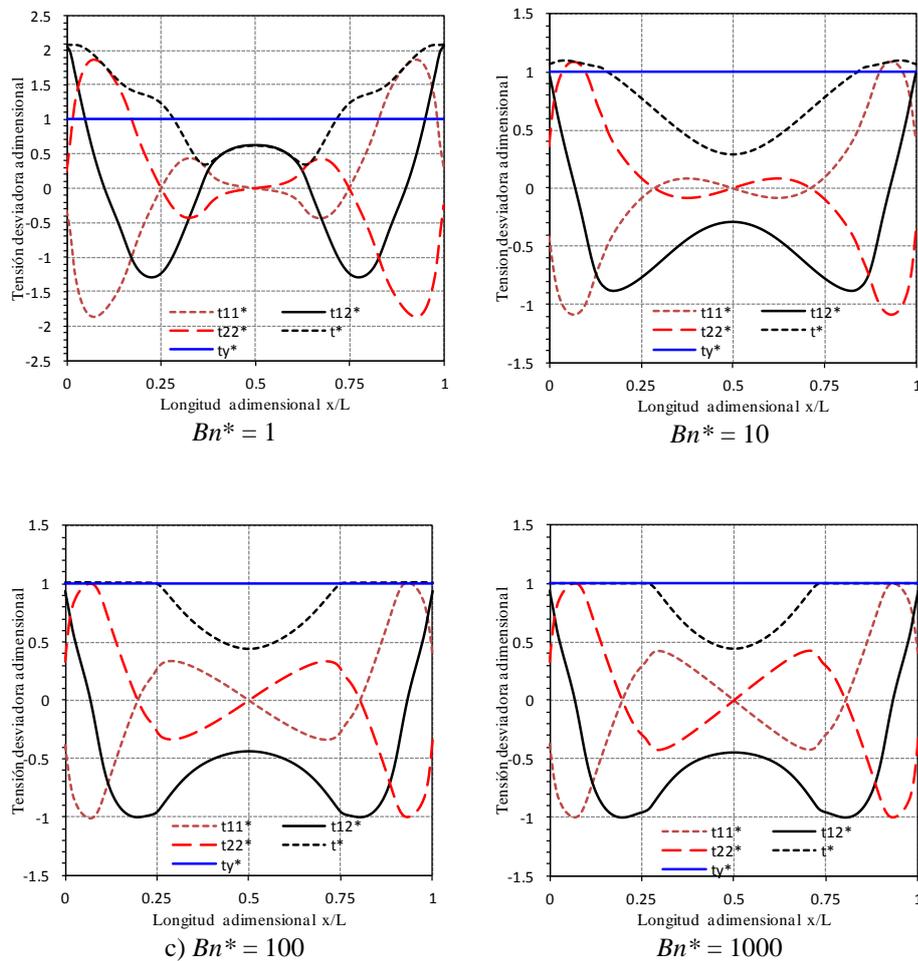


Figura 5.30. Flujo en una cavidad,  $n = 0.2$ ,  $Re \approx 0$ , OSS. Distribución de tensiones a lo largo de la sección horizontal  $y/H=0.8$ .

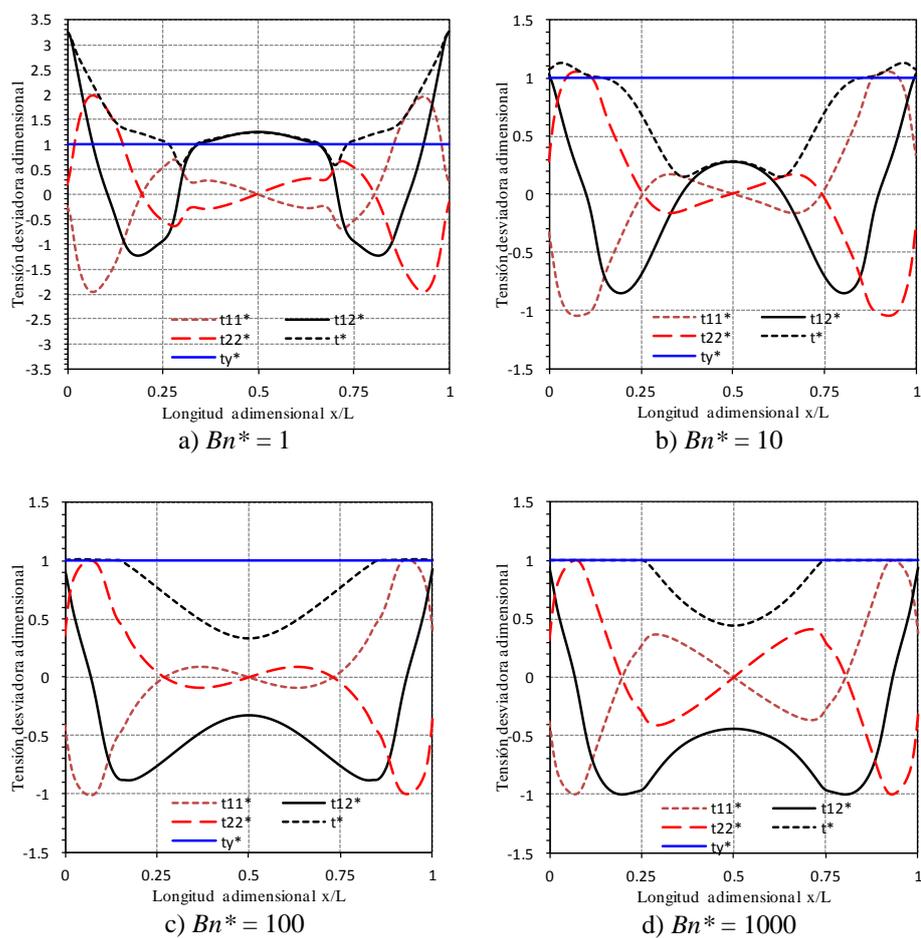


Figura 5.31. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re \approx 0$ , OSS. Distribución de tensiones a lo largo de la sección horizontal  $y/H=0.8$ .

*Comparación de las tensiones obtenidas utilizando los métodos OSS y ASGS*

En la Figura 5.32 se muestran las distribuciones de las tensiones desviadoras adimensionales para valores del índice potencial de  $n = 0.5$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$  usando el método de estabilización ASGS. Los resultados pueden compararse con los de la Figura 5.31, obtenidos con el método OSS.

Solamente se aprecian ciertas diferencias para  $Bn^* = 1$ . En los resultados obtenidos con el método ASGS se observan oscilaciones, principalmente en las tensiones normales, que no se ven en los resultados obtenidos usando el método OSS.

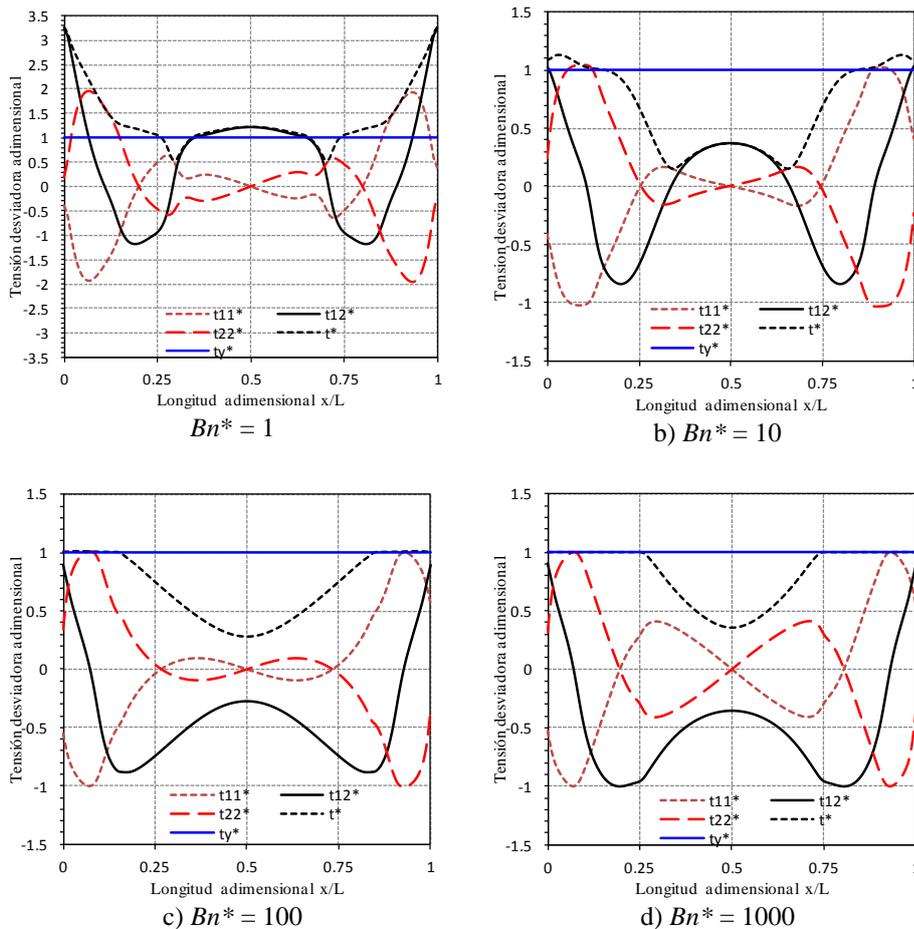


Figura 5.32. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re \approx 0$ , ASGS. Distribución de tensiones a lo largo de la sección horizontal  $y/H=0.8$ .

#### 5.4.6. Fluido de Herschel-Bulkley dilatante, $n = 2$

En la Figura 5.33 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia para valores del índice potencial  $n = 2$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

Se observa que:

- A medida que aumenta el número generalizado de Bingham, aumentan las zonas de no fluencia principal y del fondo de la cavidad.
- La zona de no fluencia principal presenta una forma muy parecida a la encontrada en Bingham ( $n = 1$ ), diferente a la forma de abanico encontrada con  $Bn^* = 1$  en el fluido Herschel-Bulkley pseudoplástico.
- Los contornos de las zonas de no fluencia son menos suaves que los vistos en la solución de problemas anteriores (fluidos de Herschel-Bulkley pseudoplástico, sección 5.4.5.2, y fluido de Bingham, sección 4.4.5.2)

En cuanto a los métodos de estabilización ASGS y OSS, no se observan diferencias importantes entre los resultados de ambos en las zonas de fluencia y no fluencia.

##### 5.4.6.1. Dinámica del flujo

###### *Líneas de corriente*

En la Figura 5.33 se presentan las líneas de corriente para diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^*=1, 10, 100, 1000$ . Puede verse que las líneas de corriente están más separadas entre sí hacia el fondo de la cavidad y puede observarse el vórtice central ovalado para todos los  $Bn^*$ . El vórtice se va desplazando hacia el tope a medida que aumenta  $Bn^*$  y lo hace de una manera más lenta de la que lo hace en un fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico.

###### *Presión*

En la Figura 5.34 se muestran las distribuciones de las presiones para diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Puede verse que:

- La distribución de la presión es antisimétrica respecto al eje  $x = H/2$ . La presión es nula en el centro de la superficie de la cavidad.
- La singularidad de presión en las esquinas se hace menos intensa al aumentar el número generalizado de Bingham. El rápido aumento de la presión produce oscilaciones espúreas en la velocidad de los puntos singulares que son amortiguados por el método de estabilización.
- Para todos los casos, el método OSS produce valores más elevados de las puntas de presión, con menores oscilaciones en la velocidad.
- Las puntas de presión son mayores en el flujo dilatante que en el flujo pseudoplástico.

En una vista ampliada, Figura 5.34 b) y Figura 5.34 d), puede verse con más detalle el comportamiento de la presión en el tope de la cavidad; ambos métodos presentan similar comportamiento, salvo las diferencias señaladas cerca de las esquinas.

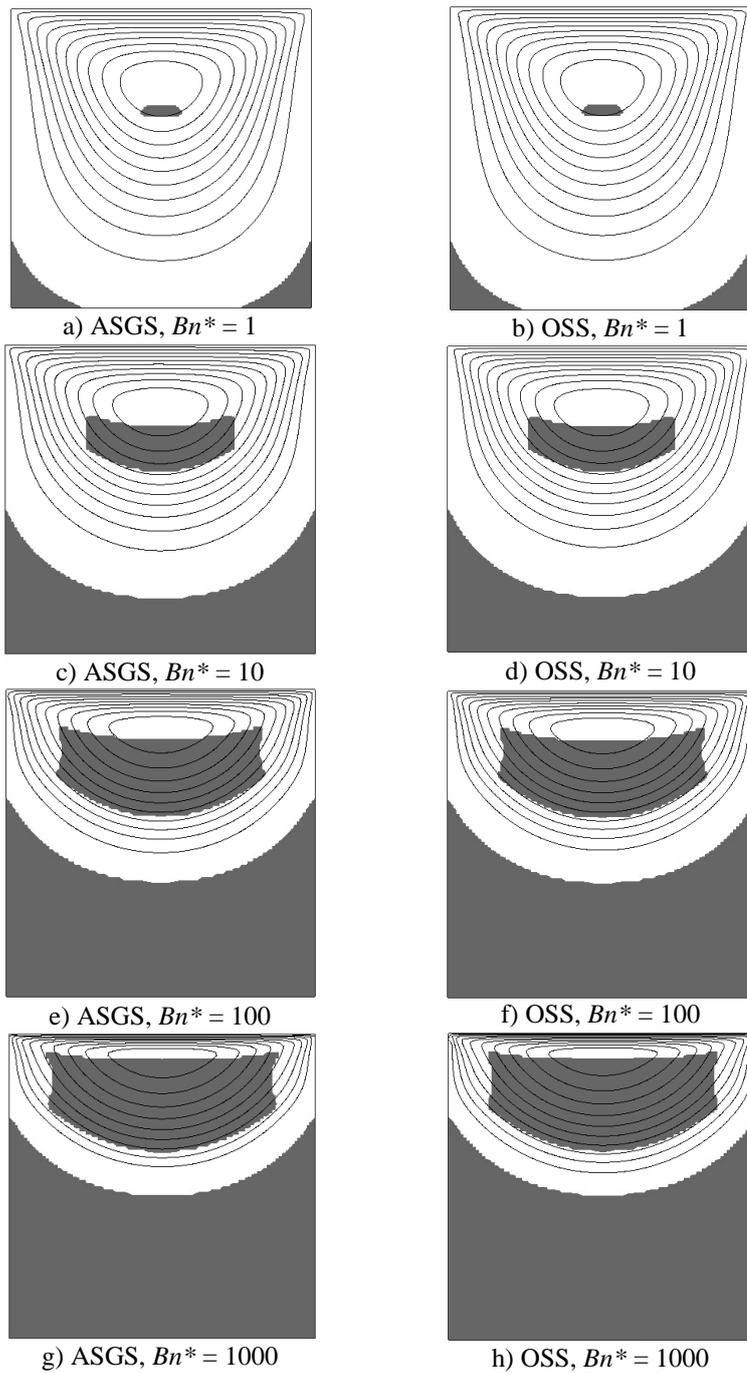


Figura 5.33. Flujo en una cavidad,  $n = 2$ ,  $Re \approx 0$ . Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claras).  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

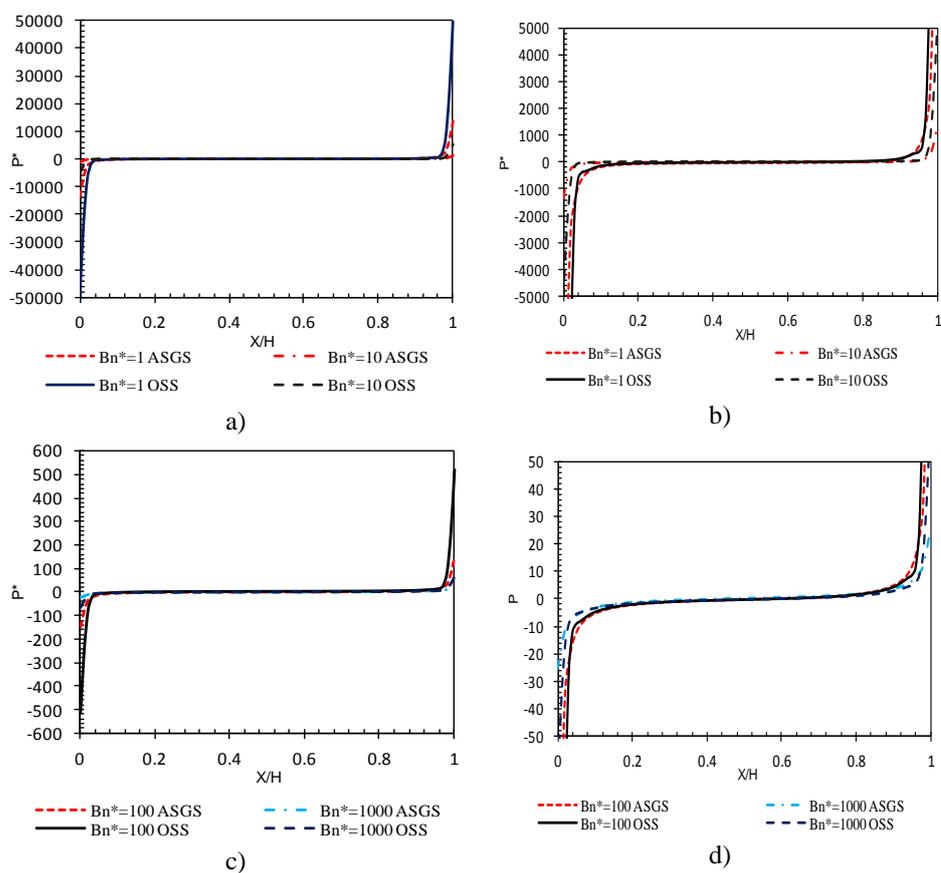


Figura 5.34. *Flujo en una cavidad,  $n = 2$ ,  $Re \approx 0$ . Distribución de presiones en el tope de la cavidad para los métodos ASGS y OSS. a) Comparación caso Newtoniano con no-Newtoniano para  $Bn^* = 1, 10$ . b)  $Bn^* = 1, 10$ , ampliada. c)  $Bn^* = 100, 1000$ , ampliada. d)  $Bn^* = 100, 1000$ , ampliada.*

### Velocidades

En la Figura 5.35 se presenta la componente horizontal adimensional de la velocidad  $U_x^*$  a lo largo de la sección vertical  $x=H/2$  para diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Se incluye el flujo pseudoplástico. Puede verse que las distribuciones de la velocidad para un fluido dilatante y un fluido de Herschel-Bulkley dilatante con  $Bn^* = 1$  son prácticamente iguales.

Se observa que:

- A medida que el número generalizado de Bingham aumenta, la velocidad horizontal disminuye.
- La magnitud de la velocidad horizontal  $U_x^*$  es mayor que la encontrada en el flujo pseudoplástico, excepto la magnitud de la velocidad muy cerca del tope.
- Los valores pequeños, casi nulos, de la velocidad coinciden con las zonas de no fluencia inferior y central. Estas zonas coinciden con el segundo y tercer cambios de pendiente más fuertes desde la pared inferior en la distribución de velocidad correspondiente a cada valor del número de Bingham. Estos cambios se hacen más bruscos a medida que aumenta el número de Bingham y más acentuados que los observados en el flujo pseudoplástico.

En la Figura 5.36 se muestra la componente vertical adimensional de la velocidad  $U_y^*$  a lo largo de la sección horizontal  $y=H/2$  para diferentes números generalizado de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Se incluye el flujo pseudoplástico,  $Bn^*=0$ .

Se observa que:

- A medida que el número generalizado de Bingham aumenta, la magnitud de la velocidad vertical disminuye.
- La distribución de la velocidad vertical es antisimétrica respecto al eje vertical  $x = H/2$ .
- Para valores de  $Bn^* = 1000$  la velocidad es prácticamente nula.

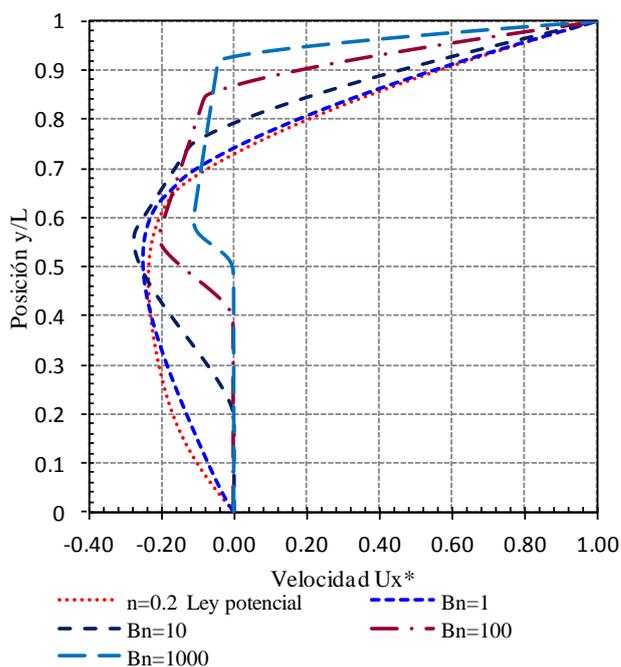


Figura 5.35. **Flujo en una cavidad,  $n = 2$ ,  $Re \approx 0$ .** Distribución de la velocidad horizontal a lo largo de la sección vertical  $x=H/2$  para los fluidos Newtoniano, dilatante ( $n = 0.2$ ) y de Herschel-Bulkley dilatante con  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

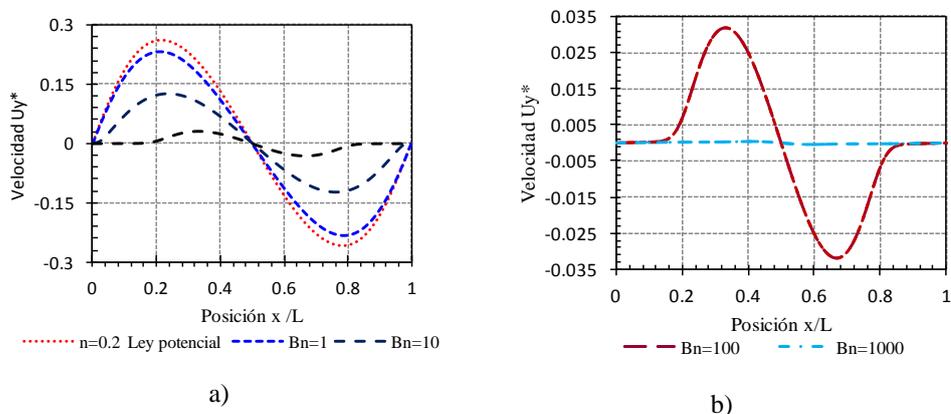


Figura 5.36. **Flujo en una cavidad,  $n = 2$ ,  $Re \approx 0$ .** a) Distribución de velocidad vertical a lo largo de la sección horizontal  $y=H/2$  para los fluidos Newtoniano, dilatante ( $n=0.2$ ) y de Herschel-Bulkley dilatante con  $Bn^* = 1, 10$ . b) Fluido de Herschel-Bulkley dilatante con  $Bn^* = 100, 1000$ .

### 5.4.6.2. Comportamiento reológico

#### Tensiones

Se analizan las tensiones desviadoras adimensionales del flujo dentro de la cavidad a lo largo de la sección horizontal  $y/H=0.8$ .

En la Figura 5.37 se muestra la distribución de la tensión adimensional para valores del índice potencial de  $n = 2$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Puede verse que la diferencia principal del flujo Herschel-Bulkley dilatante con el flujo de Herschel-Bulkley pseudoplástico es que los valores de las tensiones adimensionales son mucho mayores en el primer caso, al contrario que las velocidades.

Las tensiones obtenidas no presentan oscilaciones utilizando el método de estabilización OSS.

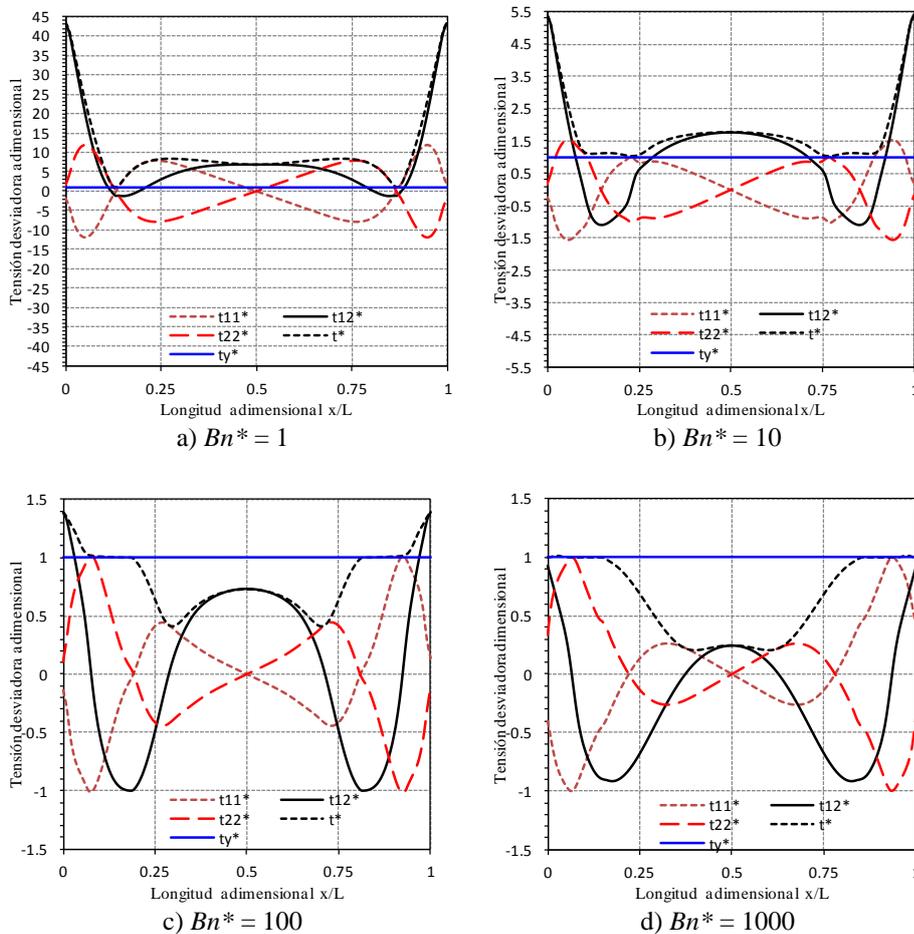


Figura 5.37. Flujo en una cavidad,  $n = 2$ ,  $Re \approx 0$ , OSS. Distribución de tensiones a lo largo de la sección horizontal  $y/H=0.8$ .

#### 5.4.7. Caso inercial, $Re = 1000$ .

#### 5.4.8. Flujo de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n=0.5$

Se estudia el flujo inercial de Herschel-Bulkley pseudoplástico con  $n = 0.5$  para  $Re = 1000$ . Para este caso inercial no se encontraron referencias que permitieran comparar los resultados de las presiones, velocidades y tensiones obtenidas.

En la Figura 5.38 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia para distintos números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . A medida que aumenta el número generalizado de Bingham:

- Aumentan las zonas de no fluencia y disminuyen las zonas de fluencia.
- Las zonas de no fluencia principal y del fondo de la cavidad son asimétricas. La simetría se recupera para  $Bn^* = 1000$ .
- La zona de no fluencia principal (central) se desplaza inicialmente hacia la izquierda y luego vuelve a ubicarse en el centro de la cavidad; esta última ubicación es similar a la obtenida para flujo no inercial con  $Bn^* = 1000$  y  $n = 0.5$ .
- El efecto de la inercia va disminuyendo hasta desaparecer para  $Bn^* = 1000$ .

Para  $Bn^* = 1$  la zona de no fluencia principal es pequeña y aparece otra zona de no fluencia menor ubicada cerca del lateral izquierdo.

Para  $Bn^* = 10$  la zona de no fluencia principal es más delgada en su extremo izquierdo que en el derecho producto de la inercia.

##### 5.4.8.1. Dinámica del flujo

###### *Líneas de corriente*

En la Figura 5.38 se presentan también las líneas de corriente para diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . Puede verse que a medida que aumenta el número generalizado de Bingham:

- Las líneas de corriente se van desplazando hacia el tope de la cavidad.
- El vórtice principal cambia de forma redondeada a ovalada.
- Las líneas de corriente tienden a desplazar el vórtice principal en el sentido de las agujas del reloj hasta reubicarse en la sección vertical  $x = H/2$  para  $Bn = 1000$ .
- Los vórtices secundarios no se observan.
- Las líneas de corriente en el lateral derecho de la cavidad están apretadas, por lo que la variación de velocidad allí es mayor. En el lateral izquierdo, éstas se mantienen un poco más separadas y la variación de la velocidad es más pequeña, la asimetría va desapareciendo.

###### *Presión*

En la Figura 5.39 se presenta la distribución de presiones a lo largo del tope de la cavidad. Puede verse que la presión en el centro del tope es nula y en las esquinas singulares la presión va aumentando a medida que aumenta  $Bn^*$ . La presión en las esquinas es mayor en el caso inercial que en el caso no inercial.

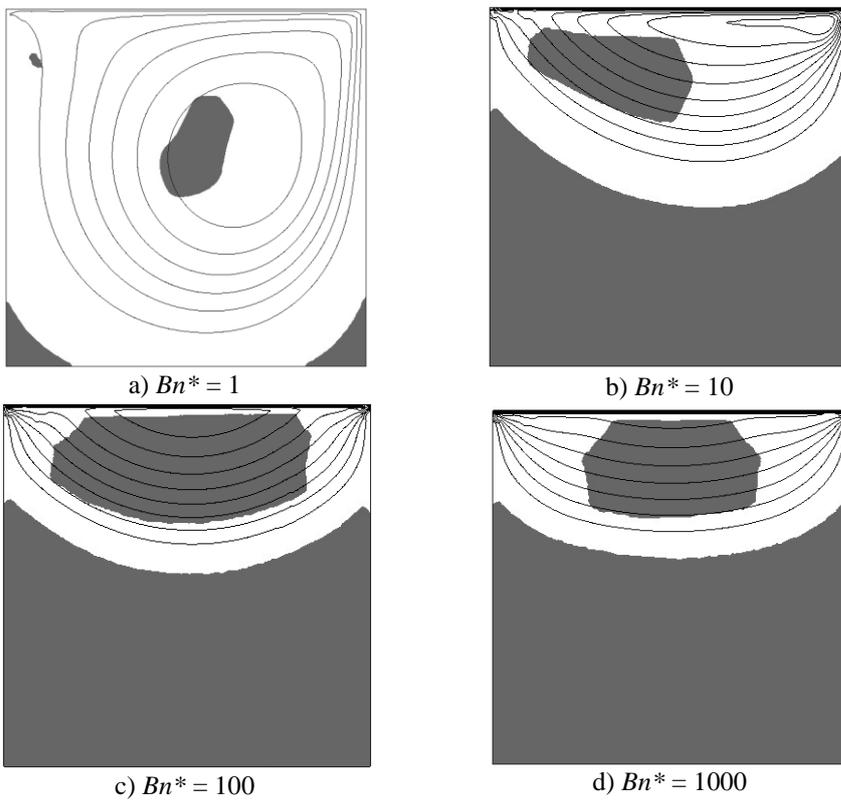


Figura 5.38. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re = 1000$ . Líneas de corriente y zonas de no fluencia (oscuras) y fluencia (claro) para diferentes números de Bingham.

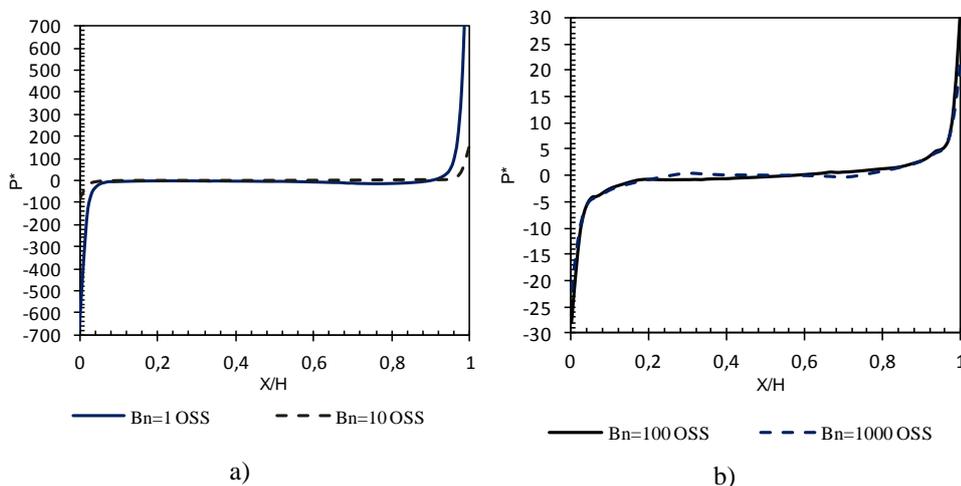


Figura 5.39. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re = 1000$ . Distribución de la presión en el tope de la cavidad. a)  $Bn^* = 1, 10$ . b)  $Bn^* = 100, 1000$

### Velocidades

En la Figura 5.40 se muestran las distribuciones de la componente horizontal adimensional de la velocidad horizontal  $U_x^*$  a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$  para diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . A medida que aumenta el número generalizado de Bingham:

- La velocidad horizontal disminuye.
- Las velocidades cerca del fondo del canal se hacen nulas para  $Bn^* = 100, 1000$ .

En la Figura 5.41 se presentan la distribuciones de la componente vertical adimensional de la velocidad  $U_y^*$  a lo largo de la sección horizontal  $y = H/2$  para diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ . A medida que aumenta el número generalizado de Bingham:

- La velocidad vertical disminuye. Prácticamente es nula para  $Bn^* = 1000$ .
- La variación de la velocidad pierde la antisimetría del caso no inercial ( $Re = 0$ ) pero parece recuperarla para muy altos números de Bingham. Las velocidades son menores hacia el lateral izquierdo de la cavidad que hacia el lado derecho de la misma.

### 5.4.8.2. Comportamiento reológico

#### Tensiones

Se analizan las tensiones desviadoras adimensionales del flujo dentro de la cavidad a lo largo de la sección horizontal  $y/H = 0.8$ .

En la Figura 5.42 se muestran las distribuciones de las tensiones adimensionales para valores del índice potencial de  $n = 2$  y diferentes números generalizados de Bingham,  $Bn^* = 1, 10, 100, 1000$ .

En todos los casos se observa que:

- La tensión en las paredes laterales está dominada por la tensión cortante donde presenta los máximos valores debido a la condición de no deslizamiento en las mismas.
- La tensión cortante pierde la simetría del caso no inercial ( $Re = 0$ ) a lo largo de la sección vertical  $x/H = 0.5$ , pero parece recuperarla para muy altos números de Bingham.
- La tensión cortante muestra dos valores mínimos relativos y un valor máximo relativo en el centro de la cavidad.

A medida que el número generalizado de Bingham aumenta la tensión cortante disminuye en las paredes laterales de la cavidad.

Para  $Bn^* = 1$  la presencia de dos zonas de no fluencia y una gran zona en fluencia hace mucho más complicada la distribución de las tensiones en la cavidad.

Se puede verificar los tamaños de las zonas de fluencia y no fluencia (Figura 5.38) en la sección  $y/H = 0.8$  siguiendo la envolvente  $t^*$ . Si  $t^* > t_y^*$  el fluido está en fluencia y caso contrario está en no fluencia.

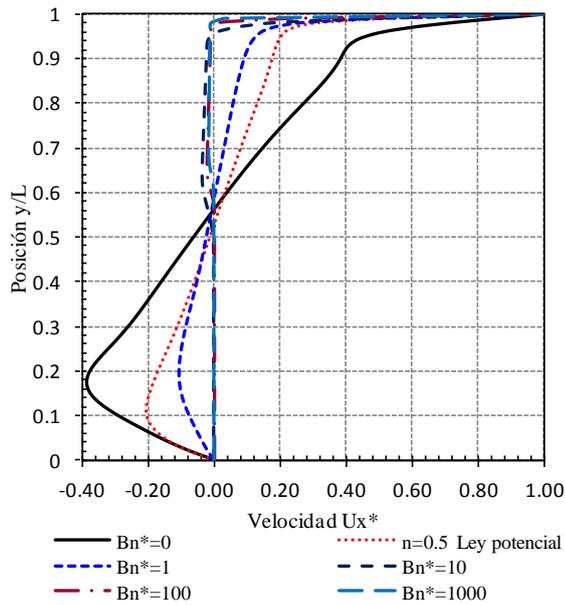


Figura 5.40. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re = 1000$ . Distribución de la velocidad horizontal a lo largo de la sección vertical  $x = H/2$  para los fluidos Newtoniano, pseudoplástico y de Herschel-Bulkley pseudoplástico.

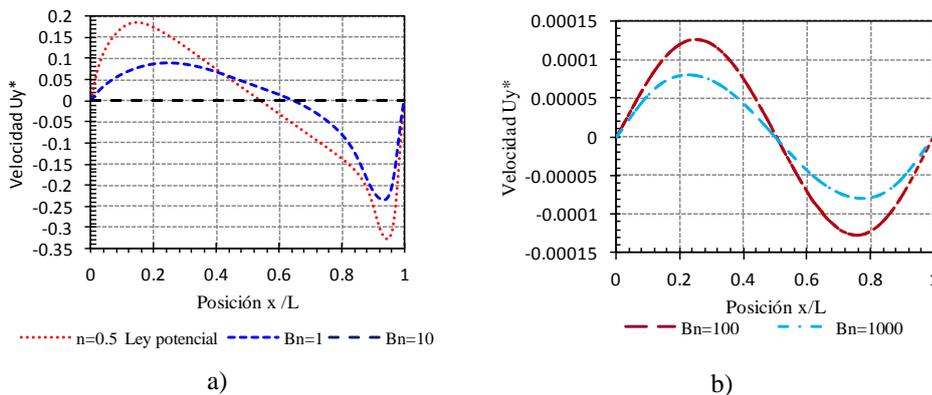


Figura 5.41. Flujo en una cavidad,  $n = 0.5$ ,  $Re = 1000$ . a) Distribución de la velocidad vertical a lo largo de la sección horizontal  $y = H/2$  para los fluidos Newtoniano, pseudoplástico y de Herschel-Bulkley pseudoplástico.

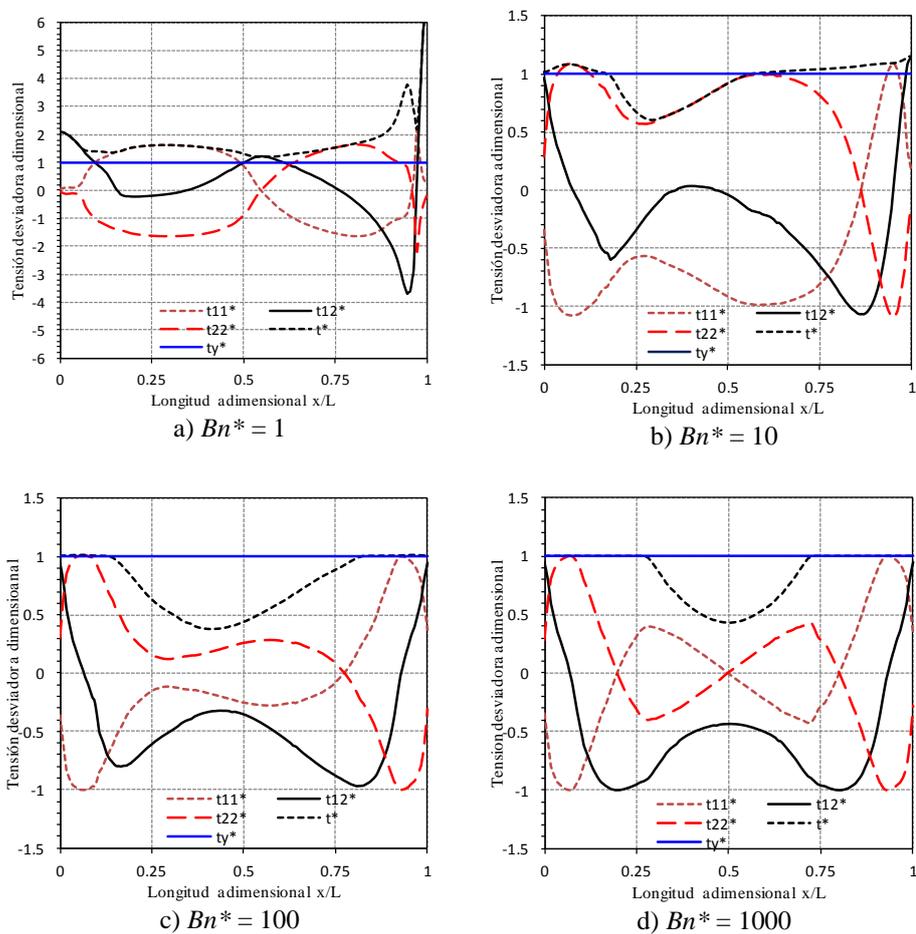


Figura 5.42. Flujo en una cavidad  $n = 0.5$ ,  $Re = 1000$ . Distribución de tensiones a lo largo de la sección horizontal  $y/H = 0.8$ .

### 5.4.9. Conclusiones

Se ha estudiado el fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley en flujos no inerciales e inerciales en una cavidad cuadrada con velocidad aplicada en el tope. Este estudio se realiza para diferentes valores del número generalizado de Bingham,  $Bn^*$ , y diferentes valores del índice potencial,  $n$ . Se incluyen los casos del fluido pseudoplástico y Newtoniano. Se han analizado las zonas de fluencia y no fluencia, las líneas de corriente, la variación de la presión, de la velocidad y de las tensiones.

Para el flujo no inercial:

- El flujo y las zonas de no fluencia son simétricas respecto a una sección vertical en  $x = H/2$ .
- Para una tensión de fluencia dada, la velocidad del flujo va aumentando a medida que aumenta el índice  $n$ .
- Para bajos valores de  $n$ , la velocidad de deformación se localiza cerca del tope.

A medida que aumenta el número generalizado de Bingham:

- La magnitud de la velocidad disminuye.
- El tamaño de las zonas de no fluencia aumenta y éstas se van desplazando hacia el tope de la cavidad.
- Los vórtices se van achatando y se desplazan hacia el tope de la cavidad.

Para el flujo inercial:

- Las zonas de no fluencia son asimétricas.
- Las tensiones son asimétricas.
- En el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, la morfología de las zonas de fluencia y no fluencia depende fuertemente del valor de  $n$  para valores de  $Bn^*$  bajos pero no para valores de  $Bn^*$  altos.

A medida que aumenta el número generalizado de Bingham:

- La magnitud de la velocidad disminuye.
- Disminuye sustancialmente el tamaño de los vórtices y éstos se desplazan hacia el tope de la cavidad.
- Las zonas de no fluencia se desplazan girando en sentido anti-horario por efecto de la velocidad en el tope.
- La simetría de las tensiones en la sección  $x = H/2$  parece recuperarse para altos números de Bingham.

Los resultados obtenidos con el método de estabilización OSS comparan favorablemente con los correspondientes al método ASGS en cuanto a las zonas de fluencia y no fluencia, las líneas de corriente, las presiones y las tensiones.

## **5.5. Flujo en una expansión súbita**

### **5.5.1. Descripción del problema**

En este problema se examina la entrada y salida del flujo en una expansión súbita con fluido de Herschel-Bulkley. Este problema ha sido resuelto para el fluido de Bingham en la sección 4.5 del capítulo 4, utilizando malla estructurada y elementos Q1Q1.

Pocos investigadores han trabajado en este tema. Algunos autores como Jay et al. (2001) y Hammad et al. (Hammad et al., 2001) han realizado estudios numéricos de éste fluido en expansiones axisimétricas. Burgos et al. (Burgos and Alexandrou, 1999) y Alexandrou et al. (Alexandrou et al., 2001) han descrito numéricamente el flujo en una expansión súbita tridimensional para el fluido de Herschel-Bulkley.

Hammad et al. (Hammad et al., 2001) han llevado a cabo un estudio experimental con el fluido de Herschel-Bulkley para un flujo laminar en una expansión utilizando un velocímetro de imagen de la partícula con una técnica óptica (PIV). Este estudio reveló la naturaleza complicada de este flujo con características no encontradas en los flujos Newtonianos. Sin embargo, debido a la dificultad de obtener fluidos ópticamente transparente para un amplio rango de parámetros reológicos como la tensión de fluencia y el índice potencial  $n$ , no fue posible investigar sistemáticamente los efectos de esos parámetros.

Por otro lado, en geometrías axisimétricas en expansiones súbitas, se han realizado estudios computacionales no sistemáticos de este tipo de flujo en fluidos de Herschel-Bulkley; estos estudios cubren un amplio rango de números de Reynolds, tensiones de fluencia e índice potencial. La mayoría de las investigaciones numéricas se han realizado por medio del método de los elementos finitos.

En el presente trabajo el objetivo principal es estudiar numéricamente las líneas de corriente, las zonas de fluencia y no fluencia, las velocidades, las presiones y las tensiones desviadoras para un fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico ( $n = 0.5$ ) y un fluido de Herschel-Bulkley dilatante ( $n = 1.5$ ).

### **5.5.2. Geometría y condiciones de contorno**

En la Figura 5.43 se muestra la geometría y las condiciones de contorno en una expansión plana con relación de altura de 1:2. Por simetría del problema, se simula solamente la parte superior del dominio. La geometría y condiciones de contorno son idénticas a las descritas en la sección 4.5.2 para el fluido de Bingham.

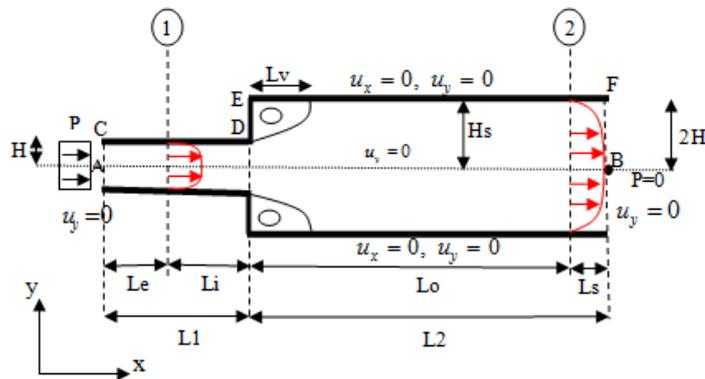


Figura 5.43. Geometría y condiciones de contorno.

Se impone la condición de no deslizamiento en las paredes de la cavidad de la expansión a lo largo de CDEF. El fluido se mueve por la aplicación de un gradiente de presión. En la sección de salida BF la presión es nula. En la entrada AC se aplica un perfil de presiones  $P$  constante de manera tal que se produzcan el gradiente de presión deseado.

Los perfiles de velocidad están completamente desarrollados a partir de la sección 1 en el canal de entrada y de la sección 2 en el canal de salida (Figura 5.43).

El perfil de velocidad desarrollado para el fluido Herschel-Bulkley pseudoplástico en la sección 1 se muestra en la Figura 5.44 para los diferentes gradientes de presión usados. Para el fluido de Herschel-Bulkley dilatante el perfil desarrollado se muestra en la Figura 5.45. Las soluciones numéricas para la velocidad se corresponden muy bien con las soluciones analíticas de la velocidad para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico y dilatante (ec. (2.102)). La velocidad en el canal de salida para la relación 1:2 es la mitad de la velocidad en el canal de entrada.

En el flujo de Herschel-Bulkley dilatante las velocidades adimensionales son mayores que en el flujo pseudoplástico.

Todas las simulaciones se hacen para número de Reynolds  $Re = 1$ , ec. (5.10).

#### Magnitudes adimensionales

Para adimensionalizar las magnitudes del problema se sigue el trabajo de Burgos (Burgos and Alexandrou, 1999). Así:

$$\begin{aligned} x_i^* &= \frac{x_i}{H}; & u^* &= \frac{u}{U_0} \\ P^* &= \frac{P}{\tau_y}; & \tau^* &= \frac{\tau}{\tau_y} \end{aligned} \quad (5.4)$$

donde  $H$  es la mitad de la altura de la sección en el canal de entrada,  $x_i$  es la distancia en la dirección  $i$ ,  $i = 1, 2$  ó  $3$ , dimensión del problema.  $U$  es la velocidad del flujo,  $U_0$  es la velo-

idad característica del problema,  $P$  es la presión,  $\tau$  es la magnitud del tensor de tensiones y  $\tau_y$  es la tensión de fluencia.

La velocidad característica  $U_0$  se define como:

$$U_0 = \frac{\tau_{efect} H}{\mu_{efect}} \quad (5.5)$$

donde la tensión efectiva es:

$$\tau_{efect} = H \left| \frac{\Delta P}{\Delta L} \right| - \tau_y \quad (5.6)$$

siendo  $\Delta P/\Delta L$  el gradiente de presión entre la sección de entrada y la de salida; la viscosidad efectiva es:

$$\mu_{efect} = k \left| \frac{U_0}{H} \right|^{n-1} \quad (5.7)$$

donde  $k$  es el índice de consistencia y  $n$  el índice potencial.

La velocidad característica adimensional,  $U_0^*$ , es:

$$U_0^* = \left( H \left| \frac{U_0}{H} \right| - \tau_y \right)^{\frac{1}{n}} \frac{H}{k^{\frac{1}{n}}} \quad (5.8)$$

El número generalizado de Bingham,  $Bn^*$ , es:

$$Bn^* = \frac{\tau_y H}{\mu_{efect} U_0} = \frac{\tau_y H^n}{k U_0^n} \quad (5.9)$$

El número de Reynolds queda definido como:

$$Re = \frac{\rho U_0^{2-n} H^n}{k} \quad (5.10)$$

El gradiente de presión adimensional es:

$$\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*}; \quad \Delta P^* = \frac{\Delta P}{\tau_y}; \quad \Delta L^* = \frac{L}{H} \quad (5.11)$$

donde  $L$  es la longitud del canal.

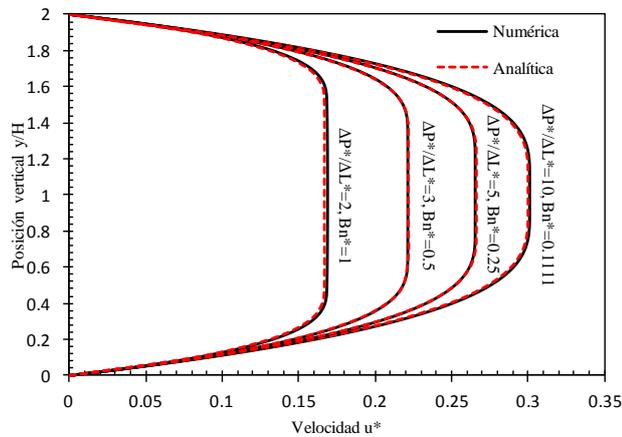


Figura 5.44. Flujo en una expansión súbita,  $n = 0.5$ ,  $Re = 1$ . Distribución de velocidades adimensionales para diferentes gradientes de presión  $\Delta P^*/\Delta L^*$  y diferentes números de Bingham  $Bn^*$  a lo largo de la sección vertical  $x/H = -3$ . Comparación entre la solución analítica y la numérica para el fluido pseudoplástico.

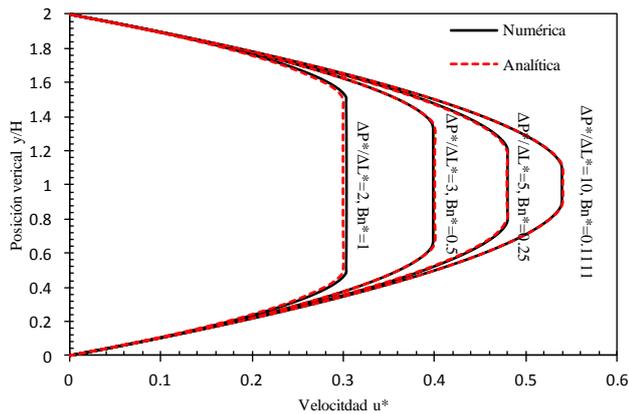


Figura 5.45. Flujo en una expansión súbita,  $n = 1.5$ ,  $Re = 1$ . Distribución de velocidades adimensionales para diferentes gradientes de presión  $\Delta P^*/\Delta L^*$  y diferentes números de Bingham  $Bn^*$  a lo largo de la sección vertical  $x/H = -3$ . Comparación entre la solución analítica y la numérica para el fluido dilatante.

### 5.5.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 5.8 se dan las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización del fluido de Herschel-Bulkley en el problema de expansión repentina empleado en la simulación numérica.

<b>Propiedades constitutivas</b>		
Modelo del fluido	Herschel-Bulkley pseudoplástico	Herschel-Bulkley dilatante
Índice de consistencia $k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	1	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1, 0.125, 0.01565, 0.00138	1, 0.8, 0.63, 0.481
Tensión de fluencia $\tau_y^*$ [Pa]	1	1
Números generalizado de Bingham, $Bn^*$	1, 0.5, 0.25, 0.1111	1, 0.5, 0.25, 0.1111
Índice potencial $n$ [-]	0.5	1.5
Gradientes de presión $\Delta P^*/\Delta L^*$	2, 3, 5, 10	2, 3, 5, 10
<b>Regularización</b>		
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000	1000

Tabla 5.8. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

#### 5.5.4. Descripción del modelo discreto

##### 5.5.4.1. Estrategia de solución

Las simulaciones se realizan para diferentes gradientes de presión adimensional (ec. (5.11)) y, por tanto, diferentes números generalizados de Bingham  $Bn^*$  (ec. (5.9)).

El procedimiento seguido para la solución del problema del flujo en una expansión súbita para diferentes números generalizados de Bingham es el siguiente:

- Las simulaciones se realizan para diferentes valores del número generalizado de Bingham,  $Bn^*$ . Estos valores se toman desde  $Bn^*=0$  hasta  $Bn^*=0.1111$ .
- Para el flujo Newtoniano ( $Bn^*=0$ ) se impone una presión estimada en la entrada del canal y presión nula en la salida del canal expandido.
- Se itera con el valor de la presión en la sección de entrada hasta lograr el gradiente de presión adimensional y, por ende, el perfil desarrollado de Poiseuille en la sección 1 (ver Figura 5.43 o Figura 5.44 para  $Bn^*=0$ ).
- Este resultado es la base para el cálculo del flujo viscoplástico usando diferentes números generalizados de Bingham.
- Para cada número generalizado de Bingham, y partiendo del valor obtenido en el caso anterior, se itera con el valor de la presión de entrada hasta obtener el gradiente deseado y el perfil desarrollado correspondiente a la Figura 5.43 o Figura 5.44.
- Al lograrse el perfil desarrollado en la sección 1 se logra simultáneamente el perfil desarrollado de la velocidad en la sección 2 del canal de salida.

### 5.5.4.2. Discretización

Para el análisis numérico se usa la malla estructurada  $M$ , formada por elementos cuadriláteros Q1Q1 con interpolación bilineal para velocidad y presión. En la Figura 5.46 se muestra la malla estructurada  $M$ . El número de nodos y elementos se presenta en la Tabla 5.9.

El origen de coordenadas y los ejes de referencia se sitúan en el punto medio de la sección de expansión.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos	$L2/H$
M	29348	28776	15

Tabla 5.9. Número de nodos y elementos para la malla estructurada  $M$ .

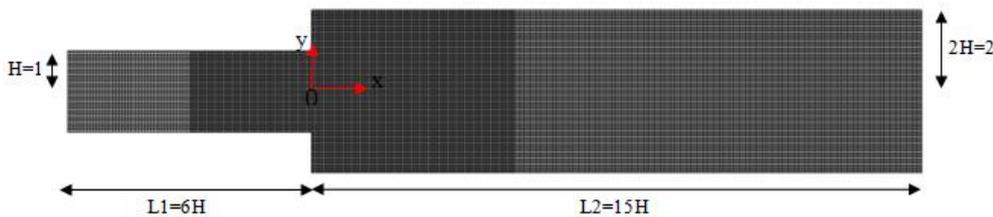


Figura 5.46. Malla estructurada  $M$  de elementos cuadriláteros.

### 5.5.5. Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n = 0.5$

#### 5.5.5.1. Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 5.47 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia obtenidas para  $Re = 1$  y para los gradientes de presión de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 2, 5, 10$  con sus respectivos números generalizados de Bingham,  $Bn^*$ . Los resultados de las zonas de fluencia (blanco) y no fluencia (en color) se muestran entre las secciones  $x = -3H$  y  $x = 15H$  de la geometría,  $x = 0$  en la expansión (ver Figura 5.46). Puede verse que a medida que aumenta el gradiente de presión adimensional disminuye el número generalizado de Bingham y las zonas de no fluencia van desplazándose hacia la salida del canal expandido a la vez que va disminuyendo su tamaño. El comportamiento del fluido tiende a un comportamiento de fluido pseudoplástico (ley potencial) en todo el dominio, desapareciendo las zonas de no fluencia. En el canal expandido las zonas de no fluencia presentan formas redondeadas.

Para el fluido de Herschel-Bulkley, como para el fluido de Bingham, se producen zonas de recirculación del flujo en las esquinas salientes de la expansión. En estas zonas de recirculación, el fluido se encuentra en no fluencia. La longitud de estas zonas va disminuyendo a medida que aumenta el gradiente de presión.

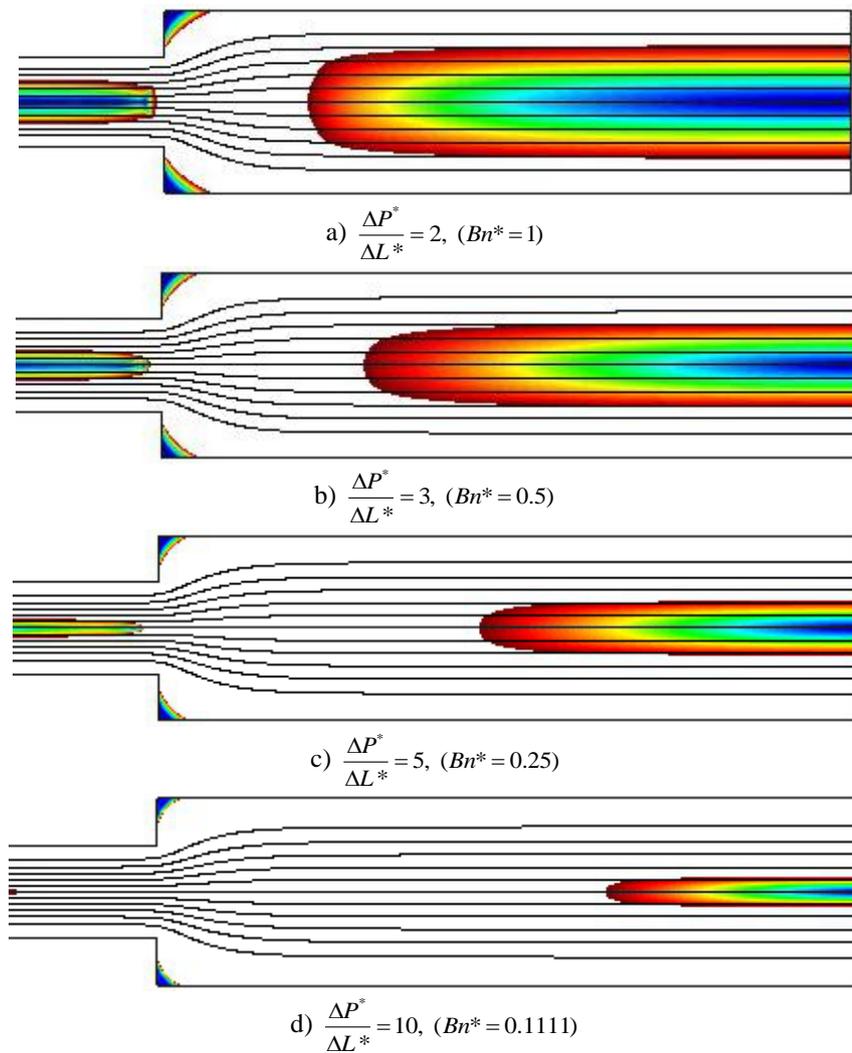


Figura 5.47. Flujo en una expansión súbita,  $n = 0.5$ . Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia para una geometría expandida repentinamente 1:2. Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico.

### 5.5.5.2. Dinámica del flujo

#### Líneas de corriente

En la Figura 5.47 se muestran también las líneas de corriente para los gradientes de presión de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 2, 5, 10$ . Se observa que las líneas de corriente calculadas son suaves en todos los casos.

#### Presión

En la Figura 5.48 se presenta la distribución de la presión adimensional a lo largo del eje longitudinal de simetría para los gradientes de presión de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 2, 5, 10$ . Puede verse la presión adimensional aplicada en el contorno de entrada. A medida que aumenta el gradiente de presión y por tanto disminuye el número generalizado de Bingham  $Bn^*$ , la presión adimensional aumenta, consecuencia del aumento de la resistencia al movimiento del fluido por el aumento de la velocidad.

El perfil de la caída de presión cambia su pendiente antes y después de la expansión.

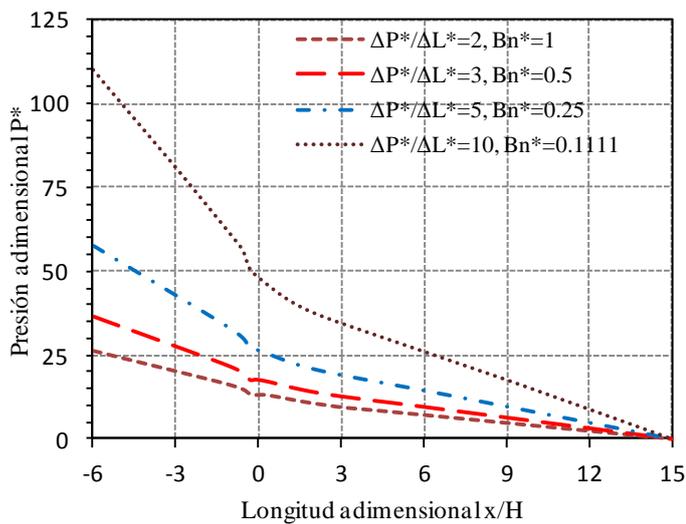


Figura 5.48. Flujo en una expansión súbita,  $n = 0.5$ . Caída de presión a lo largo del eje de simetría para diferentes gradientes de presión adimensional y número de Bingham  $Bn^*$

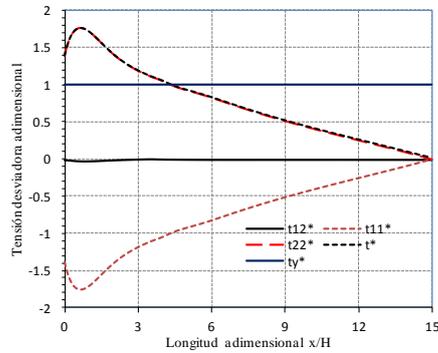
### 5.5.5.3. Comportamiento reológico

#### Tensiones

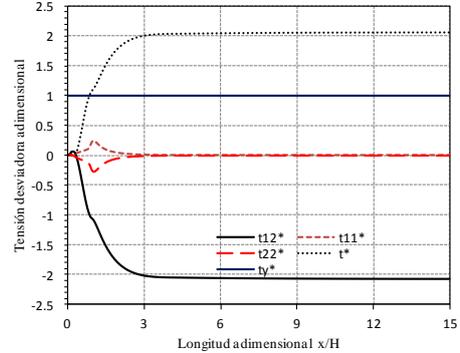
En la Figura 5.49 se muestran las distribuciones de las tensiones desviadoras para los gradientes de presión adimensional de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 3, 10$  en el canal expandido a lo largo de las secciones horizontales  $y/H = 0$  y  $y/H = 2$ .

A lo largo de la sección  $y/H = 0$  dominan las tensiones normales adimensionales  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$ ; la tensión  $\tau_{12}^*$  es prácticamente nula (véanse las Figura 5.49 a) y c)). Por el contrario, a lo largo de la sección  $y/H = 2$  dominan las tensiones cortantes adimensionales  $\tau_{12}^*$ ; las tensiones  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$  son prácticamente nulas (véanse las Figura 5.49 b) y d)).

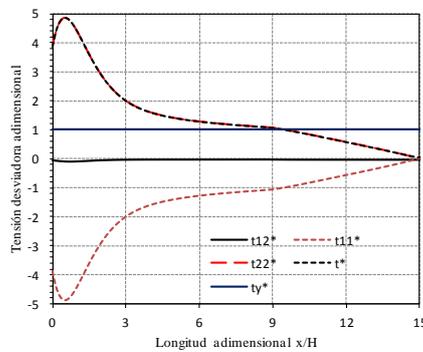
En ambas secciones, la zona de no fluencia se corresponde con las zonas por debajo de la línea azul  $\tau_y^* = 1$ .



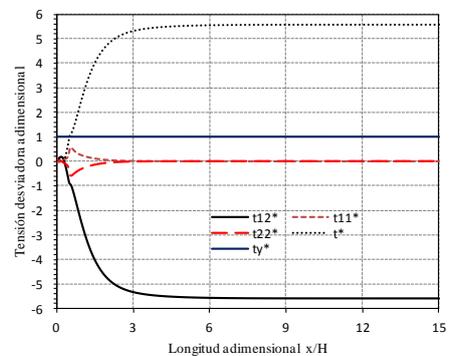
a)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 3, Bn^* = 0.5, y/H=0$



b)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 3, Bn^* = 0.5, y/H=0$



c)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 10, Bn^* = 0.1111, y/H=2$



d)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 10, Bn^* = 0.1111, y/H=2$

Figura 5.49. Flujo en una expansión súbita,  $n = 0.5$ . Perfiles longitudinales de las componentes adimensionales del tensor de tensiones desviadoras  $\tau_{ij}^*$ , la magnitud de este tensor,  $\tau^*$ , y  $\tau_y^* = 1$ .

### 5.5.6. Fluido Herschel-Bulkley dilatante, $n = 1.5$

#### 5.5.6.1. Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 5.50 se muestran las zonas de fluencia y no fluencia obtenidas para  $Re = 1$  y para los gradientes de presión de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 2, 5, 10$  con sus respectivos números generalizados de Bingham,  $Bn^*$ . Los resultados de las zonas de fluencia (blanco) y no fluencia (en color) se muestran entre las secciones  $x = -3H$  y  $x = 15H$  de la geometría,  $x = 0$  en la expansión (ver Figura 4.43). Se muestra que las zonas de no fluencia principales van desplazándose hacia la salida del canal expandido a medida que aumenta el gradiente de presión, pero lo hacen más lentamente que para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico. Estas zonas de no fluencia presentan formas angulosas en el canal expandido.

Igual que para el fluido pseudoplástico, en las esquinas salientes las zonas de no fluencia van disminuyendo a medida que aumenta el gradiente de presión.

#### 5.5.6.2. Dinámica del flujo

##### *Líneas de corriente*

En la Figura 5.50 se muestran las líneas de corriente obtenidas para los gradientes de presión de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 2, 5, 10$  con sus respectivos números generalizados de Bingham,  $Bn^*$ . Éstas aparecen suaves y sin distorsiones numéricas para todos los gradientes de presión adimensionales. Las líneas de corriente presentan una configuración similar a las del fluido pseudoplástico y del de Bingham.

##### *Presiones*

En la Figura 5.51 se presenta la distribución de la presión adimensional a lo largo del eje longitudinal de simetría para los gradientes de presión de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 2, 5, 10$ . Puede verse la presión adimensional aplicada en el contorno de entrada. A medida que aumenta el gradiente de presión y por tanto disminuye el número generalizado de Bingham  $Bn^*$  la presión adimensional aumenta, consecuencia del aumento de la resistencia al movimiento del fluido.

El perfil de la caída de presión cambia su pendiente antes y después de la expansión.

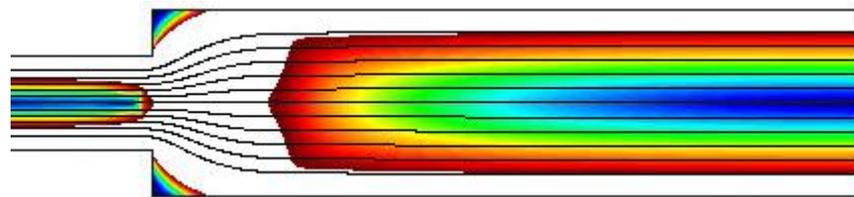
#### 5.5.6.3. Comportamiento reológico

##### *Tensiones*

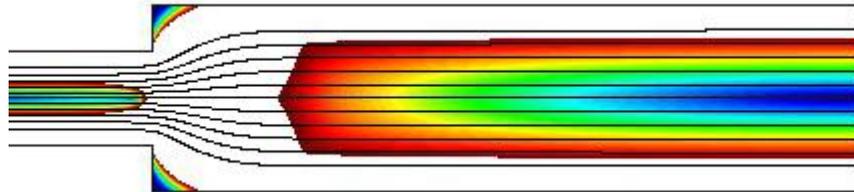
En la Figura 5.52 se muestran las distribuciones de las tensiones desviadoras para los gradientes de presión adimensional de  $\Delta P^*/\Delta L^* = 3, 10$  en el canal expandido a lo largo de las secciones horizontales  $y/H = 0$  y  $y/H = 2$ .

A lo largo de la sección  $y/H = 0$  dominan las tensiones normales adimensionales  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$ ; la tensión  $\tau_{12}^*$  es prácticamente nula (véanse las Figura 5.52 a) y c)). Por el contrario, a lo largo de la sección  $y/H = 2$  dominan las tensiones cortantes adimensionales  $\tau_{12}^*$ ; las tensiones  $\tau_{11}^*$  y  $\tau_{22}^*$  son prácticamente nulas (véanse las Figura 5.52 b) y d)).

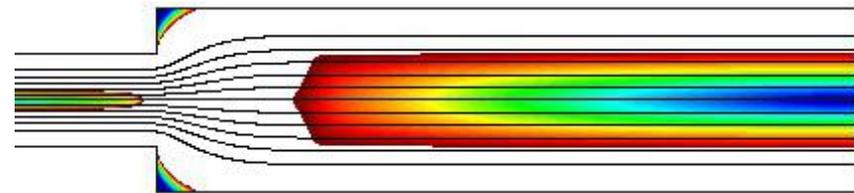
En ambas secciones, la zona de no fluencia se corresponde con las zonas por debajo de la línea azul  $\tau_y^* = 1$ .



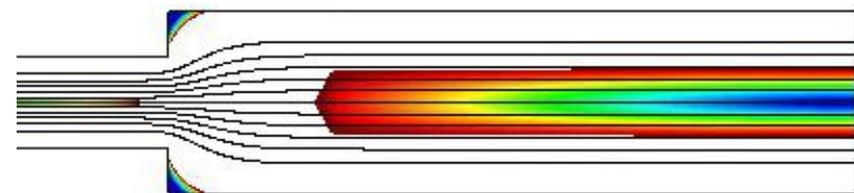
a)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 2, (Bn^* = 1)$



b)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 3, (Bn^* = 0.5)$



c)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 5, (Bn^* = 0.25)$



d)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 10, (Bn^* = 0.1111)$

Figura 5.50. **Flujo en una expansión súbita,  $n = 1.5$ .** Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia para una geometría 1:2. Fluido de Herschel-Bulkley dilatante.

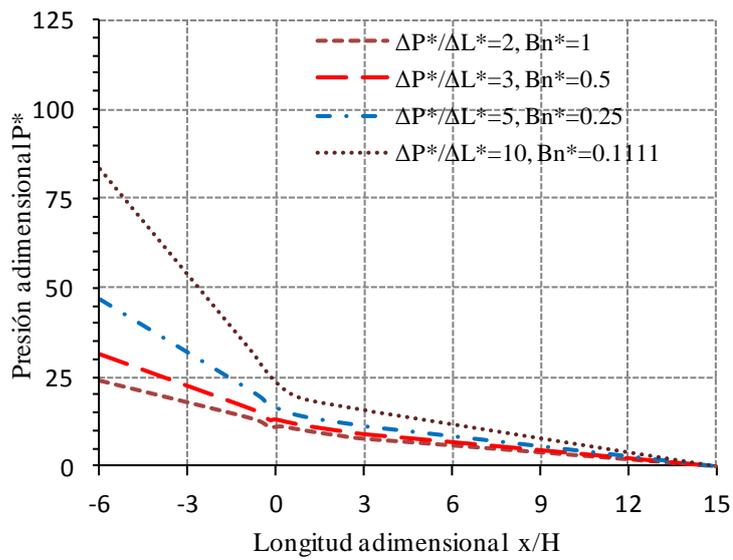
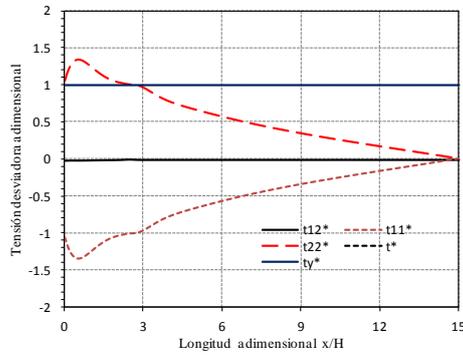
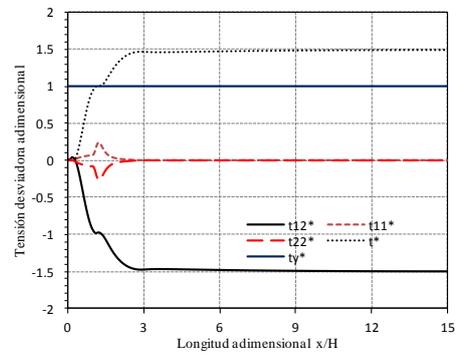


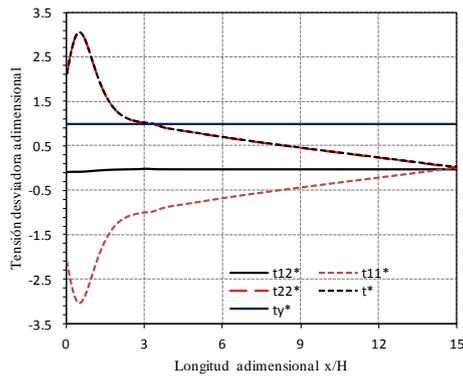
Figura 5.51. Flujo en una expansión súbita,  $n = 1.5$ . Caída de presión a lo largo del eje de simetría para diferentes gradientes de presión adimensionales y números generalizados de Bingham  $Bn^*$ .



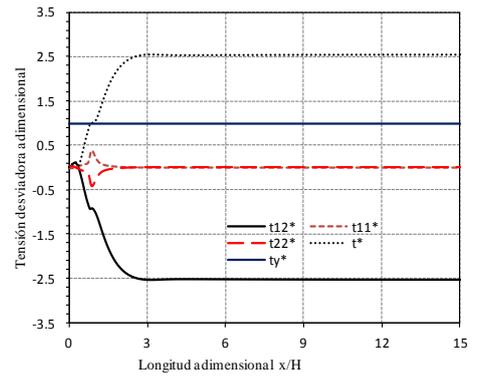
a)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 3, Bn^* = 0.5, y/H=0$



b)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 3, Bn^* = 0.5, y/H=0$



c)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 10, Bn^* = 0.1111, y/H=2$



d)  $\frac{\Delta P^*}{\Delta L^*} = 10, Bn^* = 0.1111, y/H=2$

Figura 5.52. Flujo en una expansión súbita,  $n = 1.5$ . Perfiles longitudinales de las componentes adimensionales del tensor de tensiones desviadoras,  $\tau_{ij}$ , la magnitud de este tensor,  $\tau^*$ , y  $\tau_y^* = 1$ .

### 5.5.7. Conclusiones

Se ha estudiado el fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley pseudoplástico ( $n = 0.5$ ) y dilatante ( $n = 1.5$ ) en una cavidad con expansión súbita para el caso inercial. Se han mostrado las zonas de fluencia y de no fluencia, las líneas de corriente, presiones y tensiones desviadoras.

Puede verse además que:

- El aumento del gradiente de presión tiene el efecto opuesto al aumento del número generalizado de Bingham.
- Las morfología de las zonas de no fluencia en el canal expandido en el pseudoplástico son redondeadas y en el dilatante son angulosas y de mayor espesor.
- En el flujo desarrollado las velocidades numéricas se ajustaron exactamente a las velocidades analíticas para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico y dilatante en el canal de entrada y en el canal de salida.
- Las velocidades en el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico son mayores que las que presenta el fluido de Herschel-Bulkley dilatante.
- La caída de presión es mayor en el fluido pseudoplástico que en el fluido dilatante. Igualmente, el perfil de la presión es más suave en éste último.
- Las tensiones desviadoras son mayores en un flujo pseudoplástico que en un flujo dilatante.
- El flujo está dominado por las tensiones normales en la línea de simetría del canal expandido y por el cortante en las paredes superior e inferior del mismo.

Se observa también que a medida que aumenta el gradiente de presión:

- Las zonas de no fluencia se desplazan hacia la salida del canal expandido y van disminuyendo. Para valores de gradientes de presión altos, el flujo es completamente pseudoplástico o dilatante (fluido totalmente en fluencia en el canal expandido) dependiendo del caso estudiado.
- Las zonas de recirculación van disminuyendo.

El comportamiento general del flujo en una expansión súbita es cualitativamente similar al encontrado en Jay et al. (Jay et al., 2001) en su estudio experimental para geometrías axisimétricas.

## 5.6. Flujo alrededor de un cilindro en un medio infinito

### 5.6.1. Descripción del problema

El flujo alrededor de un cilindro en un fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley es un problema complejo y escasamente estudiado. Un problema parecido, flujo alrededor de un cilindro entre placas paralelas, se ha resuelto en el capítulo 4, sección 4.7, para el fluido de Bingham.

Se han hecho estudios para esferas moviéndose en un fluido de Herschel-Bulkley dentro de un tubo con números de Reynolds casi nulos ((Atapattu et al., 1990), (Beaulne and Mitsoulis, 1997)). Se han realizado estudios experimentales como el de Atapattu (Atapattu et al., 1995). Se ha estudiado también experimentalmente el flujo alrededor de varias esferas usando números de Reynolds  $Re < 1$ , que confirman la dificultad de realizar estudios experimentales a pequeñas velocidades ((Merkak et al., 2006), (Tabuteau and Coussot, 2007)). Existen también estudios para tres tamaños diferentes de cilindros moviéndose dentro de un tubo (Mitsoulis and Galazoulas, 2009) y flujos con números de Reynolds entre  $10^{-1}$  y  $10^{-8}$  alrededor de objetos de varias formas (Jossic and Magnin, 2001). Mitsoulis (Mitsoulis, 2007) presenta un resumen de los resultados de diferentes problemas *benchmark* en fluidos de Bingham y en fluidos de Herschel-Bulkley, donde se menciona el problema de la esfera moviéndose en un medio viscoplástico.

Para el problema del flujo alrededor de un cilindro en el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico en un medio infinito se ha encontrado sólo el trabajo de Deglo et al. (Deglo et al., 2003).

Por otro lado, Tanner (Tanner, 1993) presenta resultados numéricos para un cilindro moviéndose en un fluido pseudoplástico (ley potencial, sin tensión de fluencia) en un medio infinito. En fluidos pseudoplásticos moviéndose en dominios acotados se han hecho estudios en esferas (Missirlis et al., 2001) y en cilindros (Sivakumar, 2006). Bharti et al. (Bharti et al., 2006) incluyen además, el rango de los fluidos dilatantes ( $0.6 < n < 2$ ).

Todas las investigaciones mencionadas basan sus análisis en el método de elementos finitos a excepción de Bharti et al., quienes usan el método de volúmenes finitos y los de Tanner y Milthorpe (Tanner and Milthorpe, 1983), con elementos de contorno. Sivakumar et al. (Sivakumar, 2006) comparan los resultados del método de volúmenes finitos con el método de elementos finitos obteniendo coincidencia de ambos métodos.

El objetivo del presente trabajo es estudiar el flujo de un cilindro alrededor de un medio infinito de Herschel-Bulkley, determinar el coeficiente de arrastre, las zonas de fluencia y no fluencia para diferentes valores del número generalizado de Bingham ( $Bn^*$ ), así como las zonas de recirculación y casquetes polares. El análisis se realiza para flujo no inercial ( $Re \approx 0$ ).

### Paradoja de Stokes

El problema del flujo no inercial alrededor de un cilindro en un medio infinito no tiene solución analítica en el caso Newtoniano, debido a la forma de la función de corriente a grandes distancias del cilindro. Esto se conoce como la paradoja de Stokes (Van Dyke, 1964). Sin embargo, la paradoja desaparece en fluidos pseudoplásticos. Para fluidos dilatantes el problema está abierto y podría ser que la paradoja perdure.

Para el problema del flujo no inercial alrededor de un cilindro en un medio finito (acotado) la solución existe para todo valor del índice potencial  $n$  (Tanner and Milthorpe, 1983). Se pueden encontrar estudios numéricos y experimentales en este caso y para un amplio rango de  $n$  (0.1-1.8) en Chhabra y Richardson (Chhabra and Richardson, 2008).

Los límites de un dominio tienen menor influencia para un fluido de Herschel-Bulkley que para un fluido pseudoplástico (sin tensión de fluencia) y, considerando los pocos resultados numéricos para flujo alrededor de un cilindro en un medio infinito de Herschel-Bulkley se estudia el flujo alrededor de un cilindro en un fluido pseudoplástico para comparar con los resultados de Tanner. Para este caso se estudia el tamaño mínimo del dominio computacional que garantiza la independencia del coeficiente de arrastre obtenido.

El problema de un cilindro moviéndose en un fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley es similar al correspondiente para fluidos de Bingham (véase la sección 4.7). Las superficies de fluencia, las zonas de fluencia y no fluencia para un fluido de Herschel-Bulkley son similares a las mostradas por Beris et al. (Beris et al., 1985) para el caso de esferas en fluidos de Bingham, mostradas esquemáticamente en la Figura 5.53.

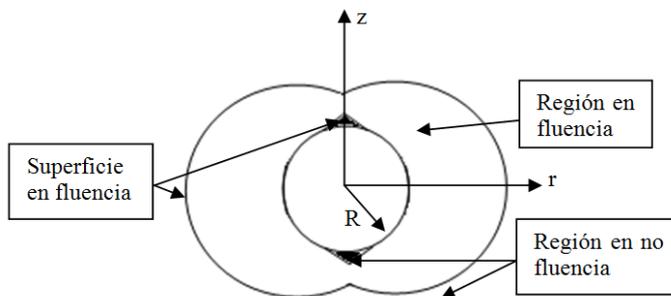


Figura 5.53. Representación esquemática de la forma de las zonas de fluencia y no fluencia del flujo alrededor de una esfera en un medio infinito de Bingham encontradas por Beris (Beris et al., 1985), caso axisimétrico.

### Números adimensionales

El número generalizado de Bingham,  $Bn^*$  (ec. (2.49)), se define para este problema como:

$$Bn^* = \frac{\tau_y (2R)^n}{kV^n} \quad (5.12)$$

donde  $R$  es el radio del cilindro,  $\tau_y$  es la tensión de fluencia,  $k$  es el índice de consistencia y  $n$  es el índice potencial. La velocidad  $V$  es la velocidad de arrastre de cilindro.

También puede definirse una tensión de fluencia adimensional ( $\tau_y^*$ ):

$$\tau_y^* = \frac{2\tau_y R^2}{F} \quad (5.13)$$

donde  $F$  es la fuerza de flotación actuando sobre el cilindro.

En el caso Newtoniano, el coeficiente de arrastre adimensional,  $F_{D,N}^*$ , es:

$$F_{D,N}^* = \frac{F_{D,N}}{\mu VL} \quad (5.14)$$

donde  $L$  es una longitud unitaria del cilindro y  $\mu$  es la viscosidad del fluido. El coeficiente de arrastre  $F_{D,N}$  viene dado por la solución de Faxén (1946) de la ecuación (4.8).

Para el caso viscoplástico en el fluido de Herschel-Bulkley el coeficiente de arrastre adimensional,  $F_D^*$ , es:

$$F_D^* = \frac{\frac{F_D}{RL}}{k \left(\frac{V}{R}\right)^n} = \frac{F_D}{kR^{1-n}V^n L} \quad (5.15)$$

siendo  $F_D$  la fuerza de arrastre (ec. 4.10).

Dividiendo la fuerza de arrastre por la tensión de fluencia se tiene un coeficiente de arrastre,  $F_D'$ , como:

$$F_D' = \frac{F_D}{\tau_y} \quad (5.16)$$

Este valor indica la influencia que tiene la tensión de fluencia en la resistencia que el flujo ofrece al movimiento del cilindro.

Las distancias y la velocidad adimensionales  $U_x^*$ ,  $x^*$ , e  $y^*$  son:

$$x^* = \frac{x}{d}; y^* = \frac{y}{d}; U^* = \frac{U}{V} \quad (5.17)$$

respectivamente, donde  $U$  es la velocidad y  $d$  es el diámetro del cilindro.

La presión  $P$  se adimensionaliza:

$$P^* = \frac{P}{\tau_y} \quad (5.18)$$

### 5.6.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 5.54 se muestra la geometría y las condiciones de contorno para el problema del flujo alrededor de un cilindro en un dominio infinito. Se simula un dominio quasi-infinito mediante un dominio cuadrado de tamaño  $2L \times 2L$ . La longitud  $L$  mínima debe ser lo suficientemente grande como para asegurar la independencia de los resultados respecto a ella. Esta longitud mínima es mayor en el caso Newtoniano que para fluidos pseudoplásticos, y aún menor para el fluido de Herschel-Bulkley.

Se consideran ejes de referencia que se trasladan con el cilindro (ver Cap. 4, sección 4.7) y condiciones de no deslizamiento entre fluido y cilindro. Así, se impone velocidad nula en el contorno del cilindro. Las placas se desplazan con una velocidad constante  $V$ . Esta misma velocidad  $V$  se aplica en el contorno de entrada del dominio, suficientemente lejos del cilindro. Esta velocidad se desarrolla dentro del fluido hasta alcanzar la misma velocidad  $V$  en los contornos entrada y de salida del dominio.

El radio del cilindro es  $R = 0.5 \text{ m}$ ; la velocidad es  $V = 1 \text{ m/s}$ . Se impone presión nula en el punto C para determinar el campo de presiones.

El problema considerando coordenadas cartesianas presenta simetría respecto al eje  $x$  y al eje  $y$ . De acuerdo con esta simetría sólo se estudia un cuarto del dominio.

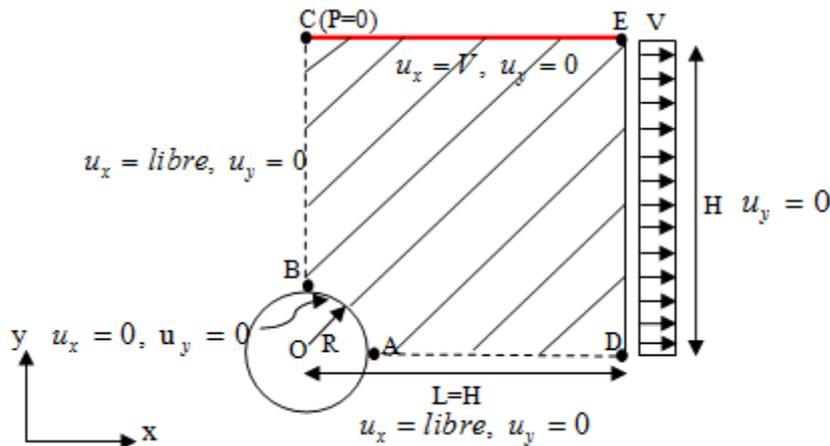


Figura 5.54. Geometría y condiciones de contorno para un dominio quasi-infinito.

### 5.6.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 5.10 se muestran las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización del fluido de Herschel-Bulkley utilizados. Se estudia el fluido Herschel-Bulkley pseudoplástico y Herschel-Bulkley dilatante.

Para todos los casos de estudio se toma  $m = 1000$ .

<b>Propiedades constitutivas</b>	
Modelo del fluido	Herschel-Bulkley
Índice de consistencia $k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	1, 10, 100
Números generalizados de Bingham, $Bn^*$	1, 10, 100
Índice potencial $n$ [-]	0.25, 0.5, 0.75, 1, 2
<b>Regularización</b>	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 5.10. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

#### 5.6.4. Discretización

En la Tabla 5.11 se indican las diferentes mallas no estructuradas y relaciones  $L:R$  usadas en este estudio. Se muestra el número de nodos y el número de elementos para cada malla usada en los flujos Newtoniano, pseudoplástico y de Herschel-Bulkley.

En la Figura 5.55 se muestra la malla M3 de elementos triangulares usada en la simulación numérica. El mallado se refina en la zona alrededor del cilindro. Las otras mallas son similares.

<b>Malla</b>	<b><math>L:R</math></b>	<b>Nodos</b>	<b>Elementos</b>
M1	15:0.5	34290	65352
M2	100:0.5	9367	18351
M3	500:0.5	9500	18601
M4	1000:0.5	9571	18729

Tabla 5.11. Número de nodos y número de elementos para cada dominio estudiado.

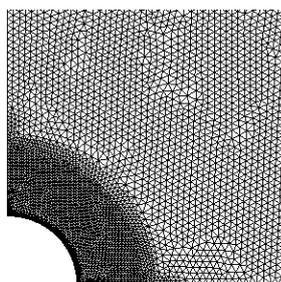


Figura 5.55. Vista ampliada de la malla M3 no estructurada alrededor del cilindro.

### 5.6.5. Fluido Newtoniano

#### 5.6.5.1. Coeficiente de arrastre

En la Tabla 5.12 se muestran los valores del coeficiente de arrastre calculados analítica y numéricamente y la diferencia en porcentaje entre ambos obtenidos para las distintas relaciones  $L:R$ . Puede verse que para el caso Newtoniano el coeficiente arrastre,  $F_{D,N}^*$ , calculado numéricamente se aproxima muy bien a la solución analítica de Faxén (Faxén, 1946) para las relaciones  $L:R = 100:0.5, 500:0.5, 1000:0.5$ .

La diferencia para la relación  $L:R = 15:0.5$  no se debe al error de discretización. La Figura 5.56 muestra la convergencia de la fuerza de arrastre calculada para este dominio en una sucesión de mallas cada vez más finas. Se observa que el valor obtenido converge a un valor muy distinto del de la solución analítica, que corresponde a un dominio indefinido en la dirección del flujo ( $x$  en este caso).

La diferencia se debe, pues, a que la dimensión del dominio analizado no es suficientemente grande en la dirección del flujo ( $x$  en este caso). El flujo no está completamente desarrollado, y entonces, la aplicación de las condiciones de contorno tal y como se ha descrito no se corresponde exactamente con el problema original.

Por otra parte, se observa en la Tabla 5.12 que cuanto mayor es el dominio, menor es el coeficiente de arrastre.

Malla	$L:R$	Analítica $F_{D,N}^*$	Numérica $F_{D,N}^*$	Diferencia %
M1	15:0.5	5.0520	9.0800	44.3612
M2	100:0.5	2.8673	2.9288	2.14410
M3	500:0.5	2.0972	2.1415	2.11170
M4	1000:0.5	1.8797	1.9193	2.10570

Tabla 5.12. *Flujo alrededor de un cilindro. Coeficiente de arrastre para cada relación  $L:R$  en el fluido Newtoniano. Diferencia respecto a la solución analítica de Faxén (1946).*

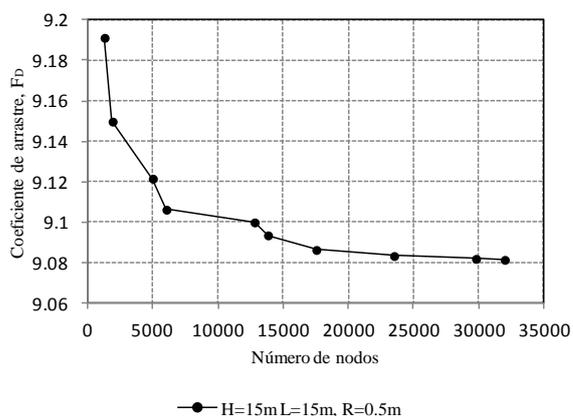


Figura 5.56. Flujo alrededor de un cilindro. Convergencia del coeficiente de arrastre en el caso Newtoniano para  $L=15m$ .

### 5.6.6. Fluido pseudoplástico

Se estudia ahora el comportamiento de un cilindro moviéndose en un fluido pseudoplástico ( $Bn^* = 0$ , sin tensión de fluencia) en un medio infinito, para varios índices  $n$  de la ley potencial.

El interés principal de estudiar el flujo pseudoplástico es comparar numéricamente con los resultados de Tanner y Milthorpe (Tanner and Milthorpe, 1983).

En la Figura 5.57 pueden verse los resultados para el coeficiente de arrastre para las diferentes relaciones  $L:R$  usando índices potenciales desde  $n = 0.1$  hasta  $n = 0.9$ . Puede verse que para los dominios  $L^*L = 500^*500$  y  $L^*L = 1000^*1000$  el coeficiente de arrastre se aproxima a los resultados numéricos de Tanner. Por tanto, puede considerarse  $L^*L = 500^*500$  suficientemente grande para simular un dominio computacional quasi-infinito para un amplio rango de valores de  $n$ .

Obsérvese que es necesario emplear dominios más grandes cuando  $n > 0.5$ . Este resultado concuerda con lo reportado por Tanner (1993).

A medida que el índice  $n$  disminuye, el coeficiente de arrastre adimensional aumenta su valor. Para  $n = 0.1$ , el coeficiente de arrastre es  $F_D^* = 25.23$ . Para  $n = 0.9$ , el coeficiente de arrastre es  $F_D^* = 3.27$ .

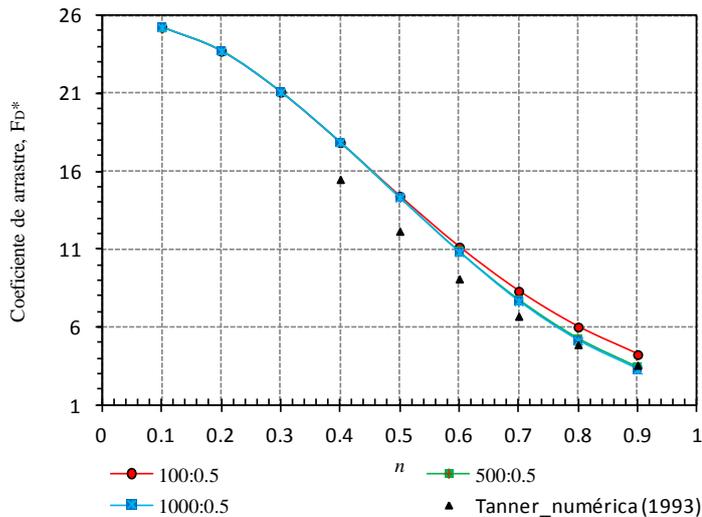


Figura 5.57. Flujo alrededor de un cilindro. Coeficiente de arrastre para diferentes relaciones  $L:R$  y diferentes valores de  $n$  ( $n < 1$ ).

### 5.6.7. Fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley

Se analizan los fluidos de Herschel-Bulkley pseudoplástico ( $n \leq 1$ ) incluyendo el caso particular para  $n = 1$ , fluido de Bingham, y el caso del fluido de Herschel-Bulkley dilatante ( $n = 2$ ). Se usan diferentes valores de  $Bn^*$  ( $\tau_y$ ). Se determinan las características principales del flujo y las zonas de fluencia y no fluencia.

### 5.6.8. Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico

#### 5.6.8.1. Coeficiente de arrastre

En la Figura 5.58 se muestra el coeficiente de arrastre obtenido con diferentes relaciones  $L:R$  usando valores de  $n = 0.25, 0.5, 0.75, 1, 2$  para el número generalizado de Bingham de  $Bn^* = 10$ . Como se observa, se obtiene el mismo valor del coeficiente de arrastre en todos los dominios. Esto demuestra que un dominio con  $L:R > 50:0.5$  es suficiente para simular un medio quasi-infinito en este caso.

Comparando las Figura 5.57 y Figura 5.58 se observa que el coeficiente de arrastre se ve afectado considerablemente por la tensión de fluencia. Los valores calculados para el flujo de Herschel-Bulkley con  $Bn^* = 10$  son de un orden de magnitud mayor que para el caso pseudoplástico con  $Bn^* = 0$ . Además, la dependencia con el valor del índice  $n$  es distinta en ambos casos. También puede verse que el coeficiente de arrastre aumenta con el índice  $n$  y que esta dependencia es lineal a partir de  $n = 0.5$ .

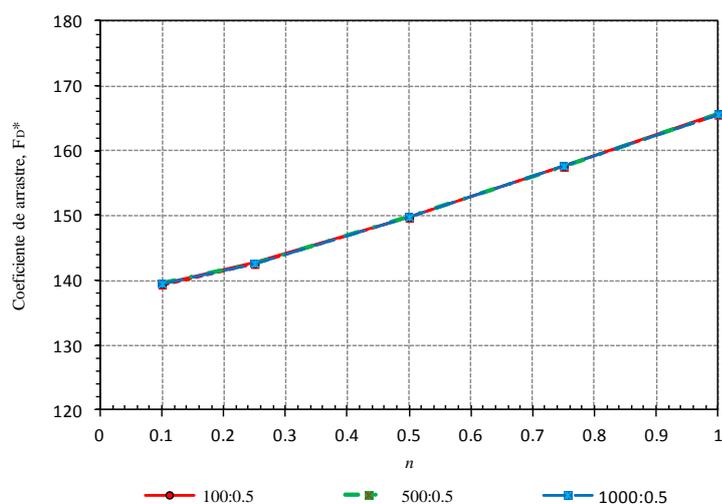


Figura 5.58. Flujo alrededor de un cilindro. Coeficiente de la fuerza de arrastre para diferentes relaciones L:R.

En la Figura 5.59 se presenta el coeficiente de arrastre  $F_D^*$  y el coeficiente de arrastre en función de la tensión de fluencia  $F_D'$  para  $n = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  y  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ .

Como se observa en la Figura 5.59 a) el coeficiente de arrastre aumenta con el aumento del  $Bn^*$ . En la Figura 5.59 b) se muestra que a mayor valor de  $Bn^*$  mayor influencia de la tensión de fluencia.

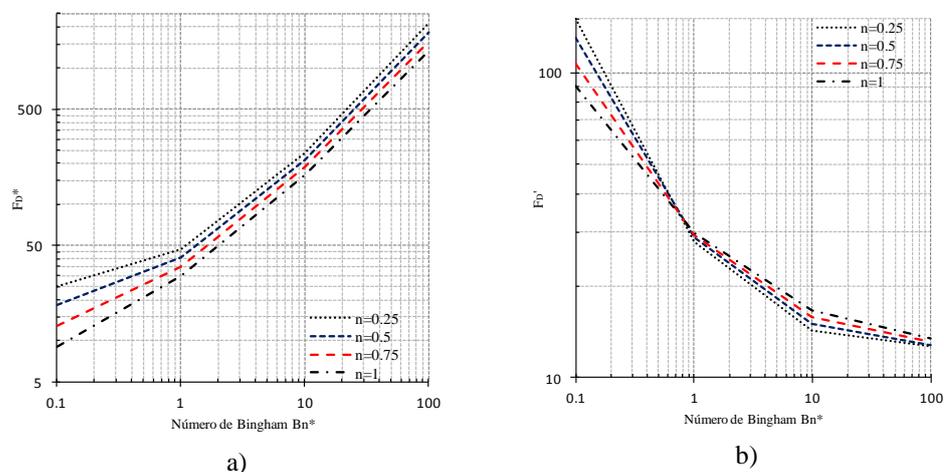


Figura 5.59. Flujo alrededor de un cilindro. a) Coeficiente de arrastre, b) Coeficiente de arrastre relacionado con la tensión de fluencia.

### 5.6.8.2. Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 5.60 se muestra la disminución de las zonas de fluencia y la localización de la superficie de fluencia para los números generalizados de Bingham de  $Bn^* = 10$  y  $Bn^* = 100$  con  $n = 0.25$ . Como puede verse, la zona en no fluencia (color) rodea al cilindro totalmente. Para  $Bn^* = 10$  ésta tiene forma casi elíptica con algo de excentricidad, tal como señala Deglo (Deglo et al., 2003) en su trabajo para  $n = 0.26$ . Las zonas de fluencia van reduciéndose y achatándose en los polos a medida que aumenta  $Bn^*$ .

En la Figura 5.61 se muestran las distancias adimensionales en el eje  $x$  y en el eje  $y$ ,  $x^*$  e  $y^*$ , a las que se encuentran la zona de no fluencia desde la superficie del cilindro para  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$  y valores de  $n = 0.25, 0.5, 0.75$ . Puede verse que la distancia adimensional,  $x^*$ , disminuye mucho más que la distancia  $y^*$  hasta aproximadamente  $Bn^* < 10$  y cada valor de  $n$ . Para valores entre  $10 \leq Bn^* \leq 100$  disminuye la distancia  $y^*$  más que la distancia  $x^*$ .

Con relación a la variación con  $n$ , la distancia  $x^*$  disminuye a medida que aumenta  $n$  entre  $0.1 \leq Bn^* \leq 1$ ; entre  $0.1 < Bn^* \leq 100$  ocurre lo contrario. Para  $Bn^* = 1$  la zona de no fluencia se encuentra a una misma distancia  $x^*$  para los distintos valores de  $n$ . La distancia  $y^*$  disminuye a medida que aumenta  $n$  entre  $0.1 \leq Bn^* \leq 10$ ; entre  $10 < Bn^* \leq 100$  ocurre lo contrario. Estos resultados concuerdan con los de Deglo.

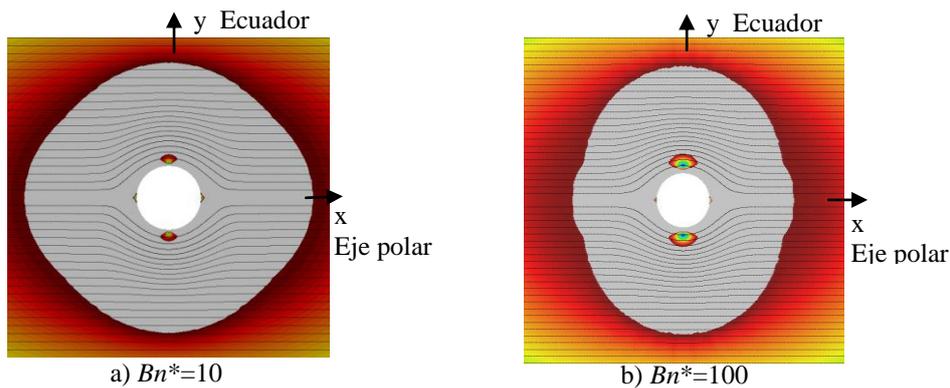


Figura 5.60. Flujo alrededor de un cilindro,  $n = 0.25$ . Zona de fluencia (gris) y no fluencia (color) y líneas de corriente. Zonas de recirculación en el ecuador (eje  $y$ ) y puntos de estancamiento en los polos (eje  $x$ ).

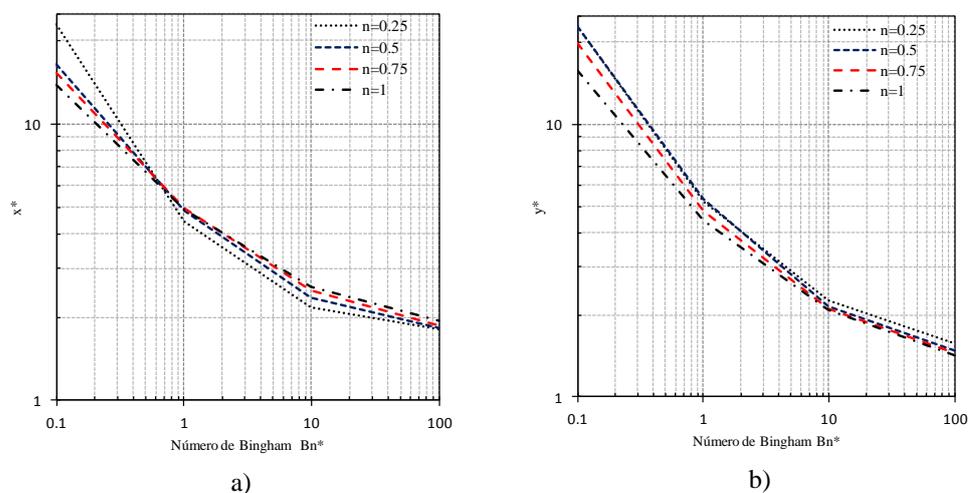


Figura 5.61. **Flujo alrededor de un cilindro.** a) Distancia de la zona de fluencia en la dirección  $x$ . b) Distancia de la zona de fluencia en la dirección  $y$ .

En la Figura 5.62 se muestran los casquetes polares (zonas de estancamiento en los polos) y las zonas de recirculación (en el ecuador) para  $n = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  y  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ . Puede verse que los casquetes polares aumentan de tamaño con el aumento del número generalizado de Bingham pero no se muestran afectados por el aumento del valor de  $n$ . Estas zonas forman un vértice similar a lo observado por Beris et al. (Beris et al., 1985) en su estudio de una esfera en un medio infinito (ver Figura 5.53) que reportan Yoshioka y Adachi (Yoshioka and Adachi, 1971a) en su trabajo usando los teoremas del máximo y del mínimo con forma redondeada.

Las zonas de recirculación a los lados del cilindro en la línea del ecuador crecen a medida que aumenta el número generalizado de Bingham y el valor de  $n$ . Tienen forma redondeada y existe una capa límite entre el cilindro y esta zona de circulación que disminuye a medida que aumentan los valores de  $Bn^*$ . Esta capa crece con el aumento de  $n$ ; para valores altos del número generalizado de Bingham se mantiene la misma capa límite.

La presencia de la capa límite entre la superficie del cilindro y la zona de recirculación ocurre como consecuencia de la utilización de la condición de no deslizamiento alrededor del cilindro. Cuando se impone una condición de deslizamiento en la superficie del cilindro, la zona de recirculación se encuentra adherida a la superficie. Deglo et al. (Deglo et al., 2003) muestra un estudio para ambas condiciones en un fluido Herschel-Bulkley.

En la Figura 5.62 puede verse que las zonas de estancamiento son más pequeñas que las zonas de recirculación.

Los resultados obtenidos comparan muy bien con los resultados numéricos de Deglo et al. en cuanto al tamaño de las zonas de recirculación. Respecto a los casquetes polares, el tamaño de los resultados en el presente trabajo es la mitad del reportado por el mismo autor, véase la Figura 5.62. Esto puede deberse a que la estabilización OSS utilizada permite resolver mucho mejor esta zona.

### 5.6.8.3. Dinámica del flujo

#### Velocidades

En las Figura 5.63 se muestran las distribuciones adimensionales de las velocidades,  $U_x^*$ , a lo largo del eje de simetría y y desde la superficie del cilindro para  $n = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  y  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ . Se incluye el caso pseudoplástico,  $Bn^* = 0$ . Puede verse que desde el cilindro, la velocidad adimensional horizontal,  $U_x^*$ , va disminuyendo a medida que aumenta el  $Bn^*$  y el índice potencial  $n$ . Cuando la velocidad adimensional alcanza la velocidad adimensional constante y unitaria el fluido tiene comportamiento de sólido rígido. El punto donde se tiene velocidad constante define entonces la superficie de fluencia; antes de este punto es la zona de fluencia. Las zonas de fluencia son más grandes a menores números de Bingham generalizados como se reflejó en la Figura 5.61 a) y la Figura 5.61 b). El valor máximo de la velocidad para cada valor de  $Bn^*$  ocurre dentro de la zona de recirculación.

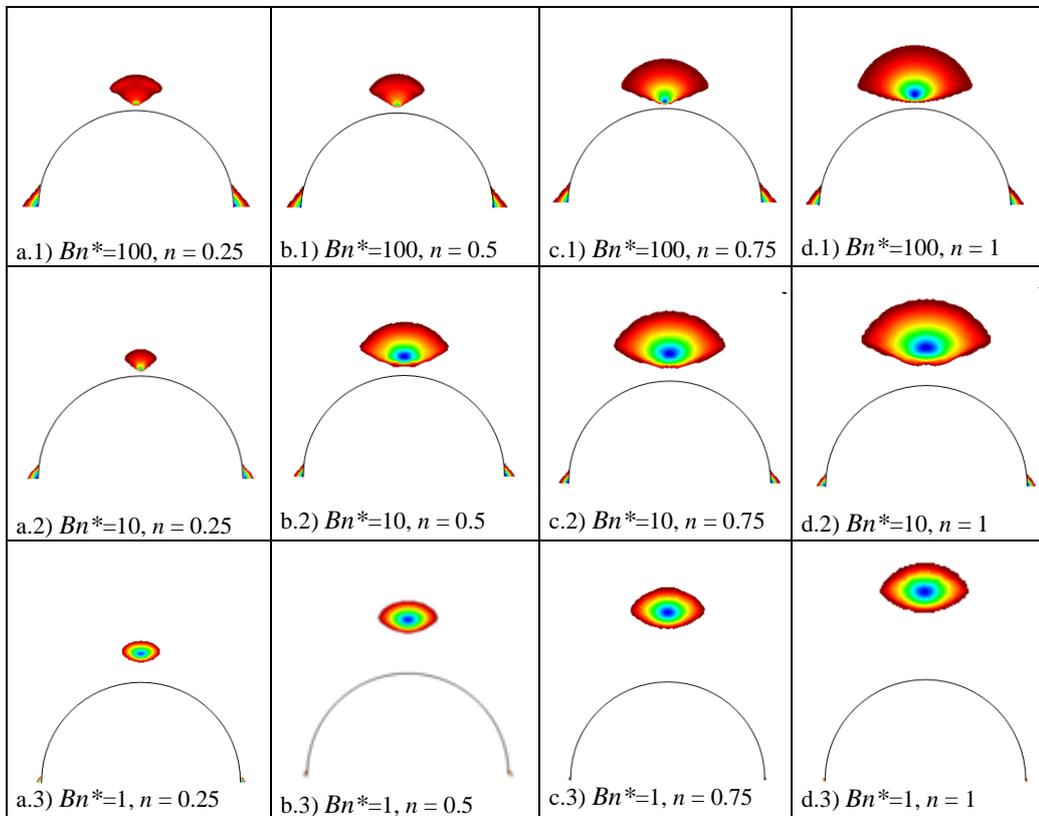


Figura 5.62. **Flujo alrededor de un cilindro.** Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia para los números de Bingham: 1)  $Bn^* = 100$ . 2)  $Bn^* = 10$ . 3)  $Bn^* = 1$  e índice potencial  $n$ : a)  $n = 0.25$ , b)  $n = 0.5$ , c)  $n = 0.75$  y d)  $n = 1$ .

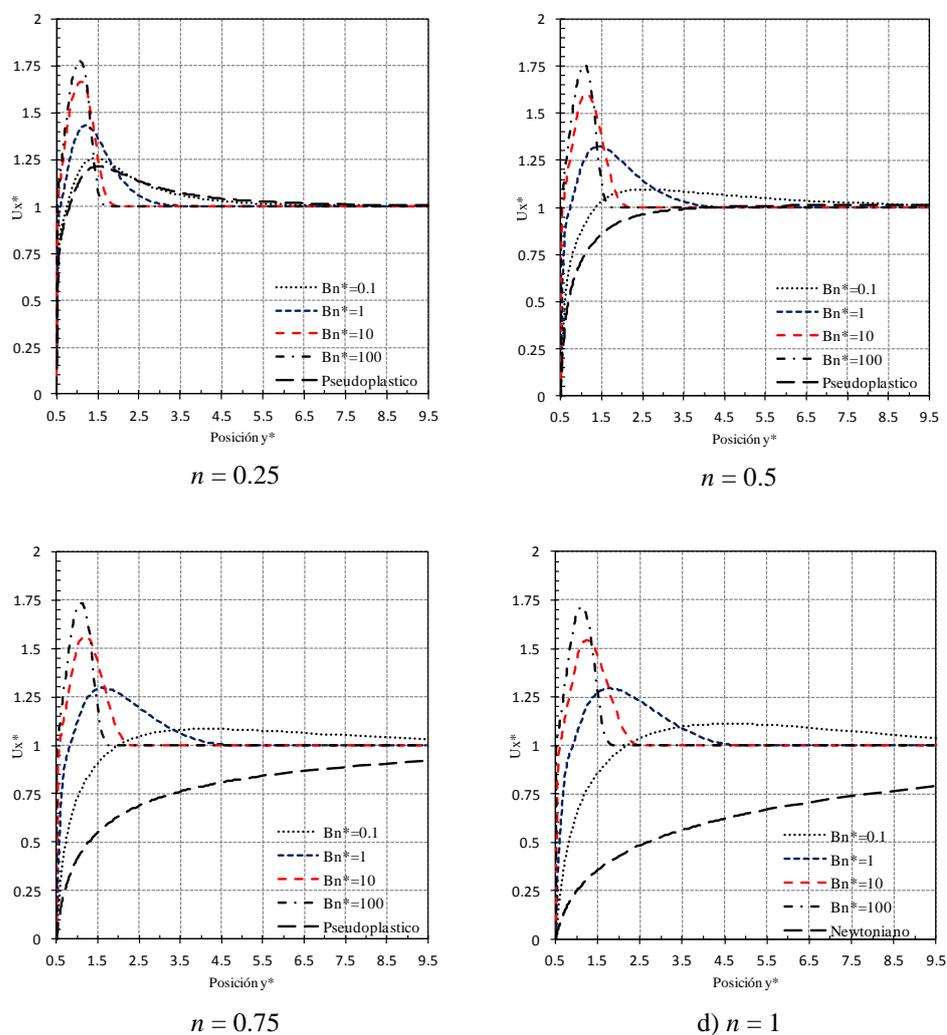


Figura 5.63. Flujo alrededor de un cilindro. Perfiles de velocidad horizontal adimensional  $U_x^*$  en el eje  $y$  y para diferentes valores de  $Bn^*$ . a)  $n = 0.25$ , b)  $n = 0.5$ , c)  $n = 0.75$ , d)  $n = 1$ .

### Presión

En la Figura 5.64 se presenta la distribución de presión adimensional,  $P^*$ , a lo largo de la superficie del cilindro para  $n = 0.5$ , 1 y  $Bn^* = 10$ ; el eje  $y$  (ecuador) corresponde a  $0^\circ$  y el eje  $x$  (eje polar) a  $\pm 90^\circ$ . Se observa que la presión adimensional muestra antisimetría respecto al eje  $x$ . Existe poca variación de la presión entre el flujo Herschel-Bulkley pseudoplástico ( $n = 0.5$ ) y el de Bingham ( $n = 1$ ).

Entre los ángulos  $22.44^\circ$  y  $78.61^\circ$  la presión disminuye linealmente. Esta zona de presiones lineales no está afectada por las zonas de estancamiento y recirculación. Esta situación se verifica al trazar una línea radial desde el centro del cilindro a un ángulo de  $22.44^\circ$  tangente en el punto superior de la zona de recirculación y al trazar otra línea radial a  $78.61^\circ$ , tangente a la zona de estancamiento sobre el cilindro. El ancho de la zona de estancamiento se encuentra entre  $78.61^\circ$  y  $90^\circ$ ; en  $78.61^\circ$  la presión pasa de un gradiente negativo a un gradiente positivo. La longitud de la zona de estancamiento,  $L_{est.}$ , alrededor del cilindro es de:

$$L_{est.} = \frac{2\pi R\theta}{360^\circ} = \frac{2\pi \cdot 0.5 (90^\circ - 78.61^\circ)}{360^\circ} = 0.0994 \text{ m} \quad (5.19)$$

Este valor coincide con la longitud obtenida para la zona de estancamiento para  $Bn^* = 10$  y  $n = 0.5$ ,  $n = 1$ , como puede verse en la Figura 5.62.

En la zona entre  $0^\circ$  y  $22.44^\circ$  alrededor del cilindro la variación de presión es más pronunciada y se observa diferencia para ambos valores de  $n$ . Esta región está muy influenciada por la zona de recirculación.

En la Tabla 5.13 se dan las presiones máximas y mínimas y sus ángulos (entre  $0^\circ$  y  $90^\circ$ ) para cada índice  $n$ .

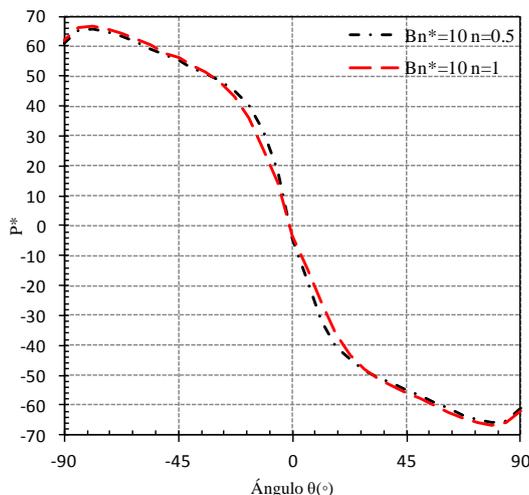


Figura 5.64. Flujo alrededor de un cilindro. Presión adimensional alrededor del cilindro para  $Bn^* = 10$  y  $n = 0.5$  y  $n = 1$ .

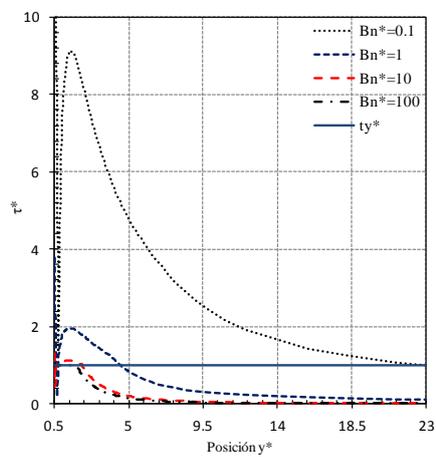
$n$	$P^*$		$\theta(^{\circ})$	
	$P_{\min}^*$	$P_{\max}^*$	$\theta_{\max}$	$\theta_{\min}$
0.5	-4.589	-65.75	78.61	0
1	-3.14	-66.81	78.61	0

Tabla 5.13. **Flujo alrededor de un cilindro.** Valores máximos y mínimos de la presión adimensional para  $Bn^* = 10$  y  $n = 0.5, 1$ .

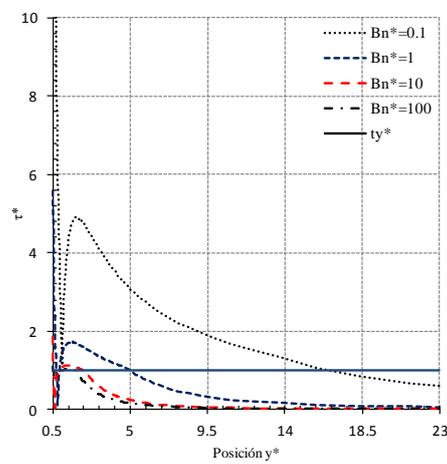
#### Tensiones

En la Figura 5.65 se muestran las distribuciones de la magnitud del tensor de tensiones adimensionales,  $\tau^*$ , a lo largo del eje y para  $n = 0.25, 0.5, 0.75, 1$  y  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ . Las zonas de fluencia están determinadas cuando la magnitud del tensor de tensiones adimensional es mayor que la unidad,  $\tau^* > \tau_y^* = 1$ , por encima de la línea azul. Por debajo de la línea azul, el material se encuentra en estado quasi-rígido como se muestra en las Figura 5.65 a), b), c) y d) y las Figura 5.63 a), b), c) y d). La magnitud del tensor de tensiones es máxima en la superficie del cilindro.

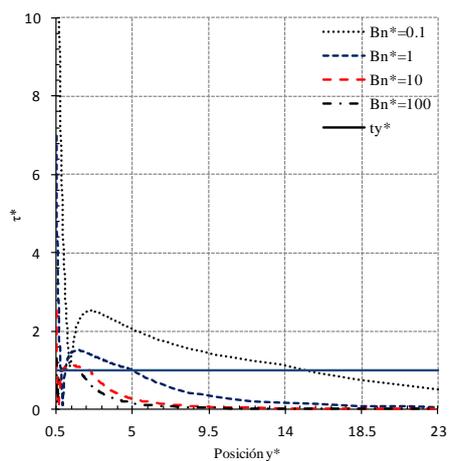
El primer valor mínimo de la magnitud del tensor de tensiones adimensional,  $\tau^*$ , se corresponde con el centro de la zona de recirculación.



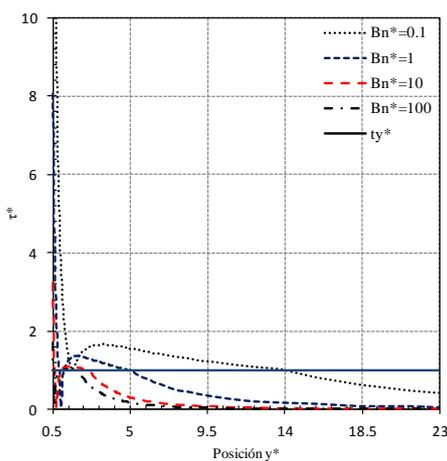
$n = 0.25$



$n = 0.5$



$n = 0.75$



d)  $n = 1$

Figura 5.65. Flujo alrededor de un cilindro. Perfiles de la magnitud del tensor de tensiones adimensionales en el eje y para diferentes valores de  $Bn^*$ . a)  $n = 0.25$ , b)  $n = 0.5$ , c)  $n = 0.75$ , d)  $n = 1$ .

### 5.6.9. Fluido de Herschel-Bulkley dilatante, $n = 2$

En esta sección se analiza el fluido de Herschel-Bulkley dilatante para un índice potencial  $n = 2$ . El objetivo es determinar las principales zonas de fluencia y no fluencia, así como las zonas de estancamiento y recirculación. Se determinan los perfiles de la velocidad, la magnitud del tensor de tensiones y la presión para diferentes números generalizados de Bingham. En la literatura no se han encontrado estudios para el problema del flujo alrededor de un cilindro con fluido de Herschel-Bulkley dilatante.

#### 5.6.9.1. Zonas de fluencia y no fluencia

El flujo con este tipo de material se desarrolla con menos dificultad que para el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico.

En la Figura 5.66 se muestra las zonas de fluencia y no fluencia para los números generalizados de Bingham de  $Bn^* = 10, 100$ . Puede verse como las zonas de no fluencia aumentan a medida que aumenta el número generalizado de Bingham, crecen más rápido que para un fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico. Dos círculos no concéntricos, cuyos centros se encuentran en el ecuador, definen la localización de la superficie de fluencia.

En la Figura 5.67 se presentan las zonas de estancamiento y recirculación para los números generalizados de Bingham de  $Bn^* = 10, 100$ . Se observa que las zonas de estancamiento comienzan a ser visibles a partir de  $Bn^* = 1$  y van creciendo a medida que el número generalizado de Bingham aumenta.

Las zonas de recirculación están siempre presentes, y van ampliándose y acercándose al cilindro a medida que aumenta el número de Bingham. Para el caso de  $Bn^* = 0.1$  la zona de recirculación tiene forma de abanico. Al aumentar  $Bn^*$ , esta forma de la zona de recirculación cambia a medida que se acerca al cilindro. Comparativamente la distancia en la que se producen estas zonas de recirculación para este flujo es más grande que para los casos estudiados en fluidos Herschel-Bulkley pseudoplásticos.

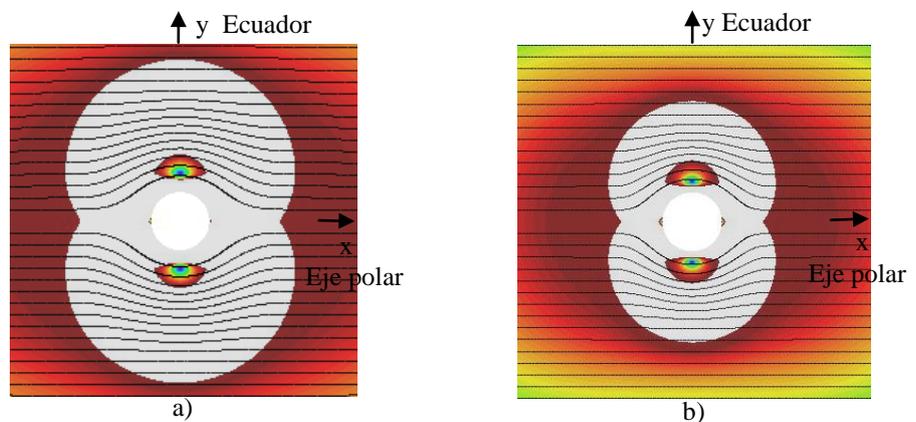


Figura 5.66. Flujo alrededor de un cilindro,  $n = 2$ . Zona de fluencia (Blanca) y no fluencia (color) y sus líneas de corriente. a) Zonas de recirculación en el ecuador (y) y puntos de estancamiento en los polos (x), para  $Bn^* = 10$ . b) Zonas de recirculación en el ecuador (y) y puntos de estancamiento en los polos (x), para  $Bn^* = 100$ .

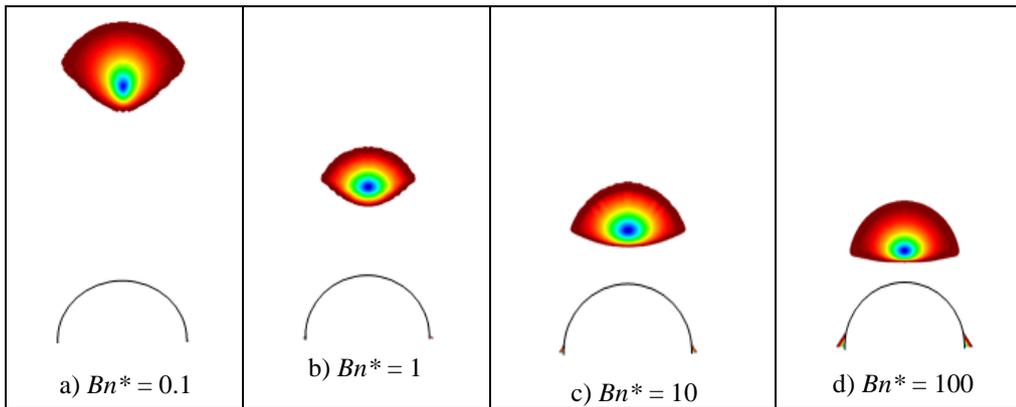


Figura 5.67. Flujo alrededor de un cilindro,  $n = 2$ . Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia para los diferentes números de Bingham.  $Re \approx 0$ .

5.6.9.2. Coeficiente de arrastre

En la Figura 5.68 se muestra el coeficiente de arrastre,  $F_D^*$ , y el coeficiente de arrastre relacionado con la tensión de fluencia,  $F_D'$ , para los valores del número generalizado de Bingham de  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ . Puede verse que en la Figura 5.68 a) el coeficiente de arrastre aumenta a medida que aumenta el  $Bn^*$ , pero los valores son mucho menores que los correspondientes del fluido pseudoplástico. Igualmente, como se muestra en la Figura 5.68 b), el efecto de la tensión de fluencia es mayor a medida que aumenta el número de  $Bn^*$ .

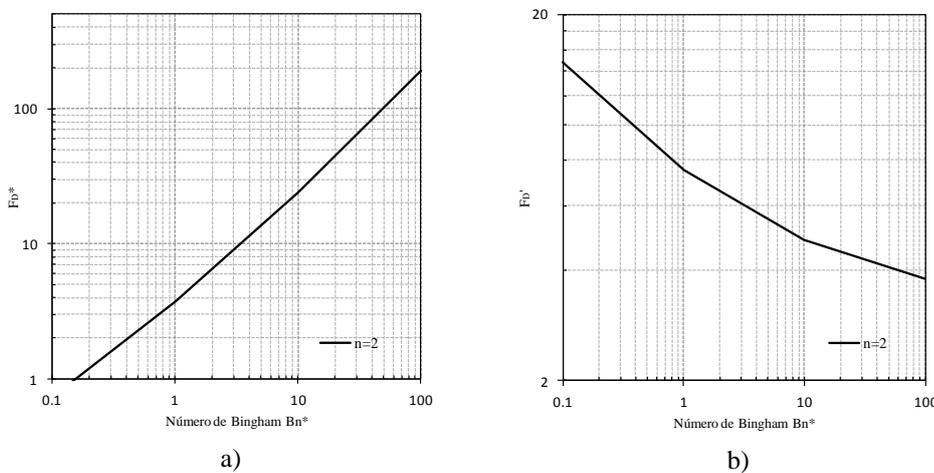


Figura 5.68. Flujo alrededor de un cilindro. a) Coeficiente de arrastre para diferentes números de Bingham. b) Coeficiente de arrastre relacionado con las tensiones plásticas en el caso no-Newtoniano para el modelo de Herschel-Bulkley.

### 5.6.9.3. Dinámica del flujo

#### *Velocidades*

En la Figura 5.69 a) se muestran las distribuciones adimensionales de las velocidades,  $U_x^*$ , a lo largo del eje de simetría y para los valores del número generalizado de Bingham de  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ .

Desde el cilindro, la velocidad adimensional horizontal,  $U_x^*$ , va disminuyendo a medida que aumenta el  $Bn^*$ . Cuando la velocidad se hace constante, el fluido tiene comportamiento de sólido rígido. El punto donde tiene velocidad constante define entonces la superficie de fluencia; antes de este punto es la zona de fluencia. Las zonas de fluencia son más grandes a menor número generalizado de Bingham.

El valor máximo de la velocidad para cada valor de  $Bn^*$  ocurre dentro de la zona de recirculación.

#### *Presión*

En la Figura 5.70 se presenta la distribución de presión adimensional a lo largo de la superficie del cilindro para  $Bn^* = 10$ ; el eje  $x$  corresponde a  $0^\circ$  y el eje  $y$  a  $\pm 90^\circ$ . Puede verse que las presiones alrededor del cilindro van en aumento entre los ángulos  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  con presiones negativas y de  $0^\circ$  a  $-90^\circ$  las presiones aumentan y son positivas, por tanto, tiene un máximo en un punto frente al cilindro y un mínimo detrás del cilindro próximos al eje polar. La zona lineal de la distribución de presiones que se apreciaba en el caso pseudoplástico (Figura 5.64) apenas se aprecia para  $n = 2$ .

#### *Tensiones*

En la Figura 5.71 b) se muestran las distribuciones de la magnitud del tensor de tensiones adimensionales,  $\tau^*$ , a lo largo del eje  $y$  para  $Bn^* = 0.1, 1, 10, 100$ . Pueden verse que las zonas de fluencia,  $\tau^* > \tau_y^* = 1$ , están determinadas cuando la magnitud del tensor de tensiones es mayor que la unidad, por encima de la línea azul. Por debajo de la línea azul el flujo se encuentra en estado rígido. La magnitud del tensor de tensiones es máxima en la superficie del cilindro.

El primer valor mínimo de la magnitud del tensor de tensiones adimensional,  $\tau^*$ , se corresponde con el centro de la zona de recirculación.

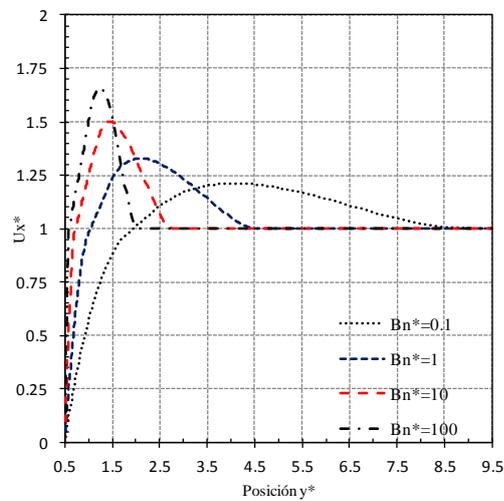


Figura 5.69. Flujo alrededor de un cilindro. Perfiles de velocidades  $U_x^*$  a lo largo del eje y (ecuador) para  $n = 2$  y valores de  $Bn^*$ .

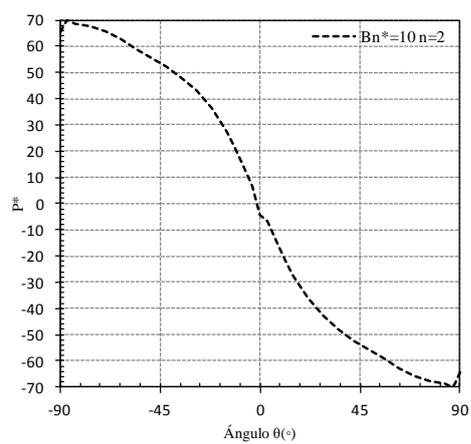


Figura 5.70. Flujo alrededor de un cilindro. Presión adimensional alrededor del cilindro para  $Bn^* = 10$  y  $n = 2$ .

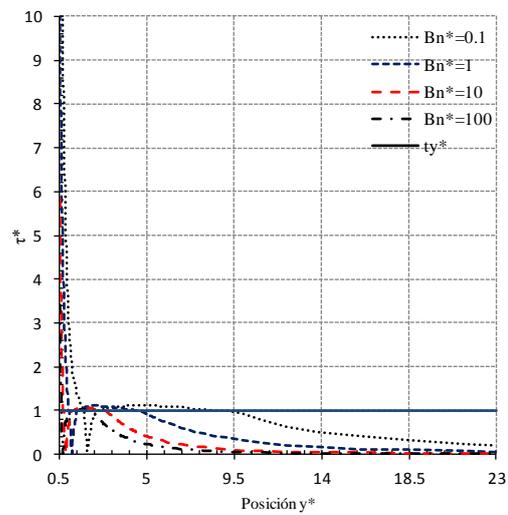


Figura 5.71. Flujo alrededor de un cilindro. Perfiles de la magnitud del tensor de tensiones adimensionales a lo largo del eje y para diferentes valores de  $Bn^*$  y  $n = 2$ .

### 5.6.10. Conclusiones

Se ha estudiado el problema del flujo alrededor de un cilindro en un medio infinito con el fluido de Herschel-Bulkley. Se ha investigado numéricamente la influencia del índice potencial para diferentes números generalizados de Bingham en el caso no inercial. Se ha estudiado el coeficiente de arrastre para fluido Newtoniano y pseudoplástico ( $Bn^* = 0$ ). En algunos casos se incluyó el fluido de Bingham con  $n = 1$ .

En la determinación del coeficiente de arrastre los fluidos Newtonianos son los que requieren dominios más grandes para simular un dominio quasi-infinito, con poca influencia de las condiciones de contorno; los fluidos pseudoplásticos requieren un dominio menor y los fluidos viscoplásticos como el de Herschel-Bulkley aún menor.

En el fluido pseudoplástico, el coeficiente de arrastre disminuye de manera no lineal a medida que aumenta el índice potencial  $n$ . En el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, el coeficiente de arrastre aumenta prácticamente de manera lineal con el aumento de  $n$ .

En el fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico ( $n < 1$ ) la superficie de fluencia tiene forma elíptica. Para  $Bn^* = 100$  presenta la forma de dos círculos no concéntricos con centros sobre el ecuador. En el fluido de Herschel-Bulkley dilatante ( $n = 2$ ), la zona de fluencia está muy bien definida por estos dos círculos no concéntricos.

A medida que aumenta el número de Bingham, las zonas de no fluencia aumentan de tamaño. Sin embargo, se requieren números generalizados de Bingham muy altos para que el comportamiento sea quasi-rígido, de forma similar a lo que ocurre para el fluido de Bingham entre placas paralelas.

Se obtuvieron casquetes polares con forma similar a los encontrados por Beris y Adachi y Yoshioka. Aunque para éstos último, los casquetes tenían formas redondeadas.

En el fluido de Herschel-Bulkley la zona de no fluencia, los casquetes polares y las zonas de recirculación van aumentando a medida que aumenta el número generalizado de Bingham y la zona de recirculación se va acercando al cilindro.

La magnitud de la velocidad en el flujo de Herschel Bulkley pseudoplástico son mayores que las resultantes en el flujo de Herschel Bulkley dilatante.

Los resultados del presente trabajo compararon muy bien con las soluciones analíticas, experimentales y numéricas disponibles.

## 5.7. Flujo alrededor de un cilindro que se desliza y rota sobre su eje

### 5.7.1. Descripción del problema

En este caso se estudia el problema del flujo de Herschel-Bulkley alrededor un cilindro que se desliza entre dos placas paralelas a la vez que rota sobre su propio eje. El objetivo principal es mostrar el patrón de localización de las velocidades de deformación en el fluido, así como las zonas de fluencia y no fluencia y las líneas de corriente para diferentes velocidades de rotación. Se determinan también la fuerza de arrastre y de sustentación sobre el cilindro y los respectivos coeficientes adimensionales.

Sea  $x$  la dirección del movimiento e  $y$  la dirección perpendicular ((Figura 5.72) y (Figura 5.73)). La fuerza de arrastre  $F_D$  sobre el cilindro es la misma de la ec. (4.10):

$$F_D = L \int_0^{2\pi} t_x ds = 4LR \int_0^{\pi/2} [\sigma_{xx} \cos \theta + \sigma_{xy} \sin \theta] d\theta \quad (5.20)$$

La fuerza de sustentación  $F_L$  sobre el cilindro es:

$$F_L = L \int_0^{2\pi} t_y ds = 4LR \int_0^{\pi/2} [\sigma_{yy} \sin \theta + \sigma_{xy} \cos \theta] d\theta \quad (5.21)$$

donde  $R$  es el radio del cilindro y  $L$  es la longitud unitaria del cilindro. El vector de tracciones sobre el cilindro,  $\vec{t}$ , es  $\vec{t} = (t_x, t_y) = (\sigma_{xx} \cos \theta + \sigma_{xy} \sin \theta, \sigma_{yy} \sin \theta + \sigma_{xy} \cos \theta)$ , siendo  $\sigma_{xx}$ ,  $\sigma_{xy}$  y  $\sigma_{yy}$  las componentes del tensor de tensiones en el plano  $xy$ .  $\theta$  es el ángulo entre el vector normal a la superficie del cilindro y el eje  $x$ .

Para el fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley, la fuerza de arrastre y de sustentación adimensionales son:

$$F_D^* = \frac{\frac{F_D}{RL}}{k \left(\frac{V}{R}\right)^n} = \frac{F_D}{kR^{1-n}V^n L}; \quad F_L^* = \frac{\frac{F_L}{RL}}{k \left(\frac{V}{R}\right)^n} = \frac{F_L}{kR^{1-n}V^n L} \quad (5.22)$$

donde  $k$  es el índice de consistencia del fluido.

### 5.7.2. Geometría y condiciones de contorno

El cilindro de radio  $R = 1$  se encuentra entre dos placas paralelas separadas por una distancia  $2H$ . Las placas paralelas tienen longitud infinita y el eje del cilindro está ubicado equidistante de éstas.

Como se describió en el Cap. 4, sección 4.7, el problema del flujo alrededor del cilindro que se desliza y rota sobre su propio eje puede plantearse respecto a dos sistemas de referencia:

1.- Con los ejes de referencia fijos (Figura 5.72), con lo cual las placas están fijas y el cilindro se mueve con velocidad  $V$  y arrastra el fluido; a su vez, el cilindro rota. La fuerza de arrastre sobre el cilindro se opone al movimiento de éste.

2.- Con los ejes de referencia que se desplazan con el cilindro, sin rotar (Figura 5.73). Respecto a estos ejes, el cilindro sólo rota y el fluido fluye alrededor del mismo. La fuerza de

arrastre,  $F_D$ , sobre el fluido se opone al movimiento de éste. En este caso, las placas se desplazan con una velocidad constante  $V$ . Esta misma velocidad  $V$  se aplica en el contorno de entrada del dominio, suficientemente lejos del cilindro. Esta velocidad se desarrolla dentro del fluido hasta alcanzar la misma velocidad  $V$  en el contorno de salida del dominio.

Esta segunda forma es mucho más adecuada para una formulación euleriana, ya que el dominio de análisis permanece fijo. Es por tanto la que se adopta en este trabajo.

Respecto a la superficie del cilindro, se pueden adoptar dos condiciones:

- Con deslizamiento (*slip condition*).

$u_n = 0$ ;  $u_t = libre$ , donde  $u_n$  es la velocidad normal y  $u_t$  es la velocidad tangencial sobre el cilindro.

- Sin deslizamiento (*stick condition*).

$u_x = 0$ ;  $u_y = V_{rot} = \omega R$ , donde  $\omega$  es la velocidad angular del cilindro.

En lo que sigue se adoptan las condiciones de no deslizamiento. Aplicando las condiciones de antisimetría apropiadas a lo largo del ecuador del cilindro, el flujo plano puede estudiarse considerando sólo la mitad del dominio (zona rallada CEE'C') de la Figura 5.73. En la línea BCC'G la velocidad en la dirección  $y$  se impone nula.

La velocidad de las placas (CE y C'E') se impone igual a la velocidad de entrada  $V$ ,  $u_x = V$  y  $u_y = 0$ . En la salida EE', se impone  $u_y = 0$ ; la velocidad en la dirección  $x$ ,  $u_x$ , es uniforme e igual a  $V$ .

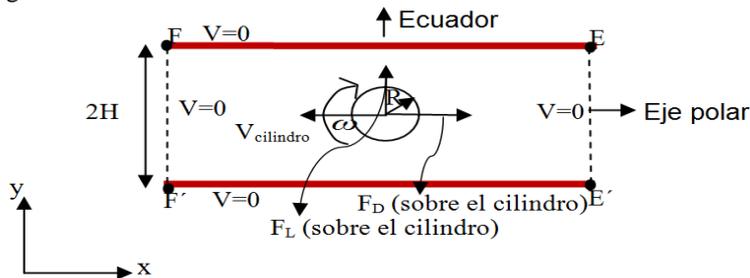


Figura 5.72. Geometría y condiciones de contorno para un cilindro desplazándose y rotando sobre su propio eje, referido a ejes fijos.

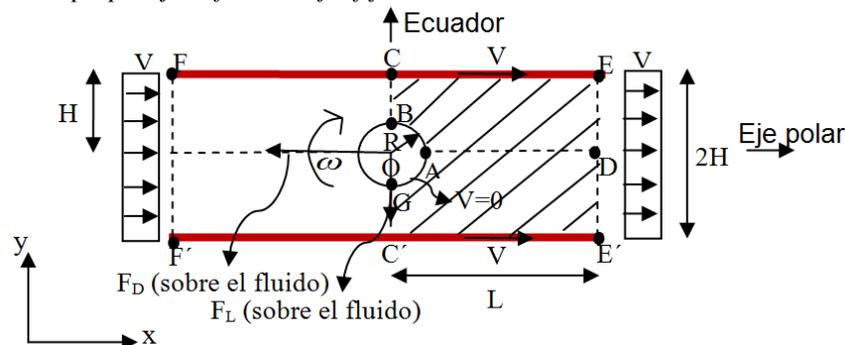


Figura 5.73. Geometría y condiciones de contorno para un cilindro desplazándose y rotando sobre su propio eje, respecto a ejes que se desplazan con el cilindro.

### 5.7.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 4.14 se indican las propiedades constitutivas del fluido y el parámetro de regularización utilizado. El índice potencial es  $n = 0.25$ , correspondiente a un fluido fuertemente pseudoplástico.

<b>Propiedades constitutivas</b>	
Modelo del fluido	Herschel-Bulkley
Índice de consistencia $k$ [Pa.s <sup>n</sup> ]	1
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	100
Índice potencial $n$ [-]	0.25
<b>Regularización</b>	
Parámetro de regularización $m$ [s]	1000

Tabla 5.14. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

### 5.7.4. Discretización

En la Tabla 5.15 se muestra el número de nodos y elementos que se emplean en la simulación numérica en la malla M, que discretiza un dominio con relaciones  $H:R = 10:1$  y  $L:R = 30:1$ .

<b>Malla</b>	<b>H:R</b>	<b>L:R</b>	<b>Nodos</b>	<b>Elementos</b>
M	10:1	30:1	9425	18345

Tabla 5.15. Número de nodos y número de elementos.

En la Figura 5.74 se muestra la malla no estructurada M de elementos triangulares P1P1 y detalle alrededor del cilindro. El mallado es más denso en la zona del cilindro.

El tamaño de los elementos en la línea BG (ver Figura 5.73) del cilindro para la malla M es de 0.01. En las líneas BC y GC' (ver Figura 5.73), el tamaño varía desde 0.01 hasta 0.04.

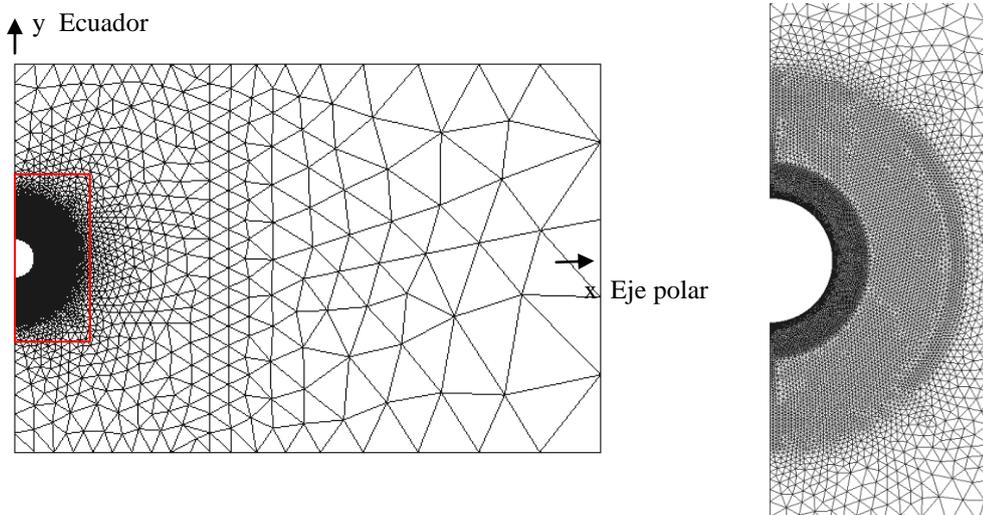


Figura 5.74. Malla no estructurada  $M$  alrededor del cilindro y detalle (cuadro rojo) alrededor del cilindro.

### 5.7.5. Fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico, $n = 0.25$

Se estudia un cilindro moviéndose en un fluido viscoplástico de Herschel-Bulkley y rotando sobre su propio eje. La velocidad de rotación  $V_{rot}$  tiene sentido horario. Se estudian los casos con velocidad de rotación  $V_{rot} = 0, 0.5, 1, 5$  m/s.

#### *Efecto de la velocidad de rotación en la velocidad de deformación*

En la Figura 5.75 se muestran las distribuciones de la velocidad de deformación para las velocidades de rotación  $V_{rot} = 0, 0.5, 1, 5$  m/s.

Para la velocidad de rotación nula (Figura 5.75), la velocidad de deformación es simétrica respecto a los ejes  $x$  e  $y$ . Puede verse que la velocidad de deformación se localiza en dos bandas circulares no concéntricas (rojas), los centros de estas bandas están sobre el ecuador a ambos lados del cilindro. El cilindro se circunscribe dentro de cada banda.

Cuando el cilindro rota, las velocidades de deformación alrededor del cilindro son simétricas sólo respecto al eje  $y$  (ecuador).

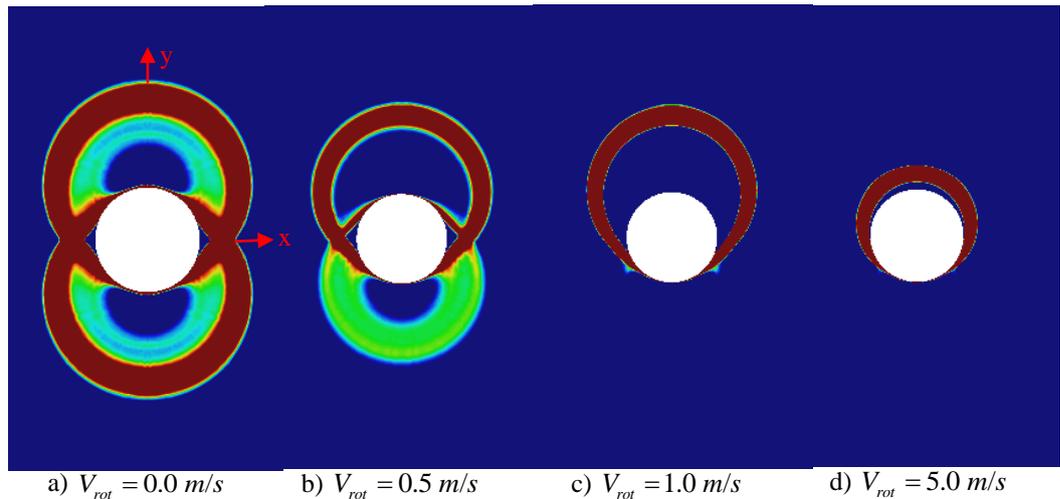


Figura 5.75. **Flujo alrededor de un cilindro.** Distribución de las velocidades de deformación para la velocidad lineal y diferentes velocidades de rotación del cilindro.

A medida que la velocidad de rotación va aumentando, la banda de velocidad de deformación a un lado del cilindro va desapareciendo y la del otro se va acercando al cilindro (Figura 5.75 b)). Este hecho se debe a que las velocidades de rotación y de traslación del cilindro se suman a un lado y se restan en el otro.

En la Figura 5.75 c) puede verse que cuando la velocidad de rotación es  $V_{rot} = 1 \text{ m/s}$ , uno de los anillos prácticamente ha desaparecido. En la Figura 5.75 d) el único anillo visible es prácticamente tangente al cilindro. Para mayores valores de la velocidad de rotación, la velocidad de deformación se concentra alrededor del cilindro.

#### Líneas de corriente

En la Figura 5.76, para la velocidad de rotación nula, las líneas de corriente son simétricas respecto al eje polar y al ecuador. Para valores no nulos de la velocidad de rotación, las líneas de corrientes son simétricas respecto al ecuador. A medida que esta velocidad aumenta, las líneas de corriente a un lado del cilindro pasan de ser ovaladas y se acercan mucho más al cilindro. Allí donde las líneas de corriente dejan de ser líneas rectas se producen los mayores gradientes de velocidad y altos valores de velocidad de deformación (ver Figura 5.76), que se corresponden con las bandas de la Figura 5.75 dentro de la zona en fluencia. Para mayores valores de la velocidad de rotación, las líneas de corriente están muy cerca del cilindro.

#### 5.7.6. Zonas de fluencia y no fluencia

En la Figura 5.76 se muestran las zonas de fluencia (gris) y no fluencia (color) para las velocidades de rotación de  $V_{rot} = 0, 0.5, 1, 5 \text{ m/s}$ . Pueden verse los efectos de la velocidad de rotación en el flujo; las zonas de fluencia y no fluencia muestran un patrón de evolución complejo alrededor del cilindro. Los casquetes polares y las zonas de recirculación varían a medida que aumenta la velocidad de rotación. En el lado superior del cilindro, la zona en fluencia va disminuyendo más rápido que en el lado inferior.

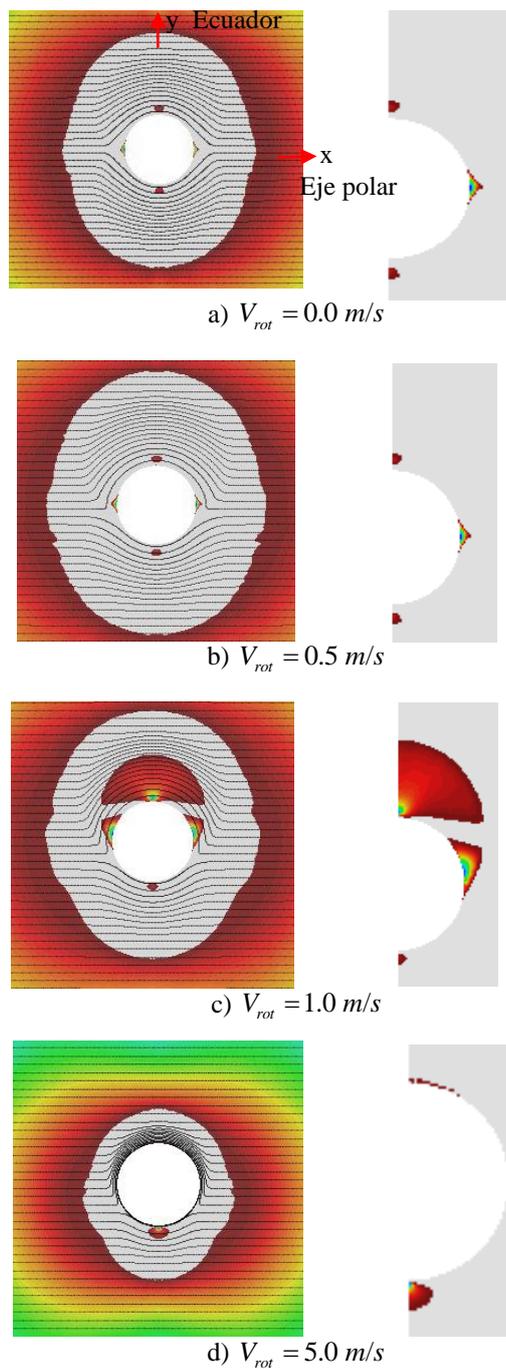


Figura 5.76. **Flujo alrededor de un cilindro.** Zona de fluencia (gris) y no fluencia (a color) y líneas de corriente para diferentes velocidades de rotación. A la derecha se muestra un detalle de la zona en no fluencia alrededor del cilindro.

En la Figura 5.76 se muestran también en detalle las zonas de no fluencia (casquetes polares y zona de recirculación) alrededor del lado derecho del cilindro para diferentes velocidades de rotación aplicada.

Puede verse que los casquetes polares y la zona de recirculación aumenta hasta  $V_{rot} = 1$  m/s; a partir de este valor comienzan a disminuir y para  $V_{rot} = 5$  m/s sólo se observa la zona de recirculación del lado inferior del cilindro. También se observa que para la velocidad de rotación  $V_{rot} = 1$  m/s, en el lado superior del cilindro, la zona de recirculación es prácticamente medio círculo y los casquetes polares se encuentran esviados (Figura 5.76 c)). Para valores de la velocidad de rotación mayores la tendencia es a que desaparezcan los casquetes polares y la zona de recirculación, por tanto, que haya sólo flujo en una zona muy localizada alrededor del cilindro.

#### 5.7.7. Fuerzas de arrastre y de sustentación

En la Figura 5.77 se muestra la fuerza de arrastre para las velocidades de rotación de  $V_{rot} = 0, 0.5, 1, 5$  m/s. Se observa que a medida que la velocidad de rotación aumenta, el coeficiente de arrastre disminuye.

En la Figura 5.78 puede verse la fuerza de sustentación para las velocidades de rotación de  $V_{rot} = 0, 0.5, 1, 5$  m/s. La fuerza de sustentación es nula cuando no hay rotación y va aumentando a medida que la velocidad de rotación aumenta. En cualquier caso, la magnitud de la fuerza de sustentación es muy inferior a la de la fuerza de arrastre.

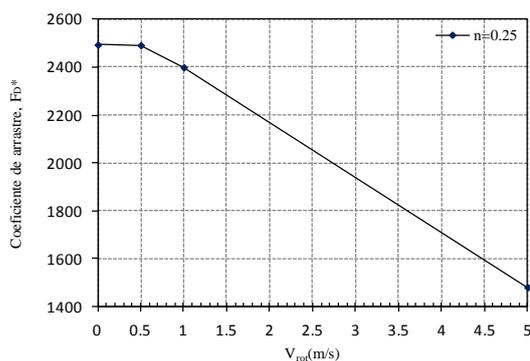


Figura 5.77. Fluido de Herschel-Bulkley,  $n = 0.25$ , cilindro en movimiento. Coeficiente de arrastre respecto a la velocidad de rotación.

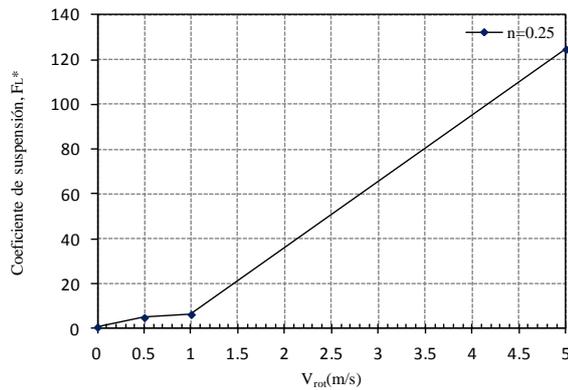


Figura 5.78. *Flujo alrededor de un cilindro. Coeficiente de sustentación respecto a la velocidad de rotación.*

### 5.7.8. Conclusiones

En este problema la rotación del cilindro afecta el comportamiento del flujo alrededor del mismo. Al aumentar la velocidad de rotación la distribución de la velocidad de deformación y las zonas de fluencia y no fluencia pasan de tener una distribución simétrica respecto al eje  $x$  y antisimétrica respecto al eje  $y$  a una distribución antisimétrica sólo respecto al eje  $y$ .

Para velocidad de rotación nula, la distribución de la velocidad de deformación muestra dos bandas circulares no concéntricas y equidistantes del centro del cilindro. Este patrón cambia con la presencia de la velocidad de rotación.

Al aumentar la velocidad de rotación, las bandas circulares, ubicadas por debajo del cilindro, en el ecuador, disminuyen. El tamaño de las zonas de fluencia y no fluencia, los casquetes polares y las zonas de recirculación aumentan hasta que la velocidad de rotación es  $V_{rot} = 1$  m/s; luego, estas zonas comienzan a disminuir y los casquetes polares y las zonas de recirculación prácticamente desaparecen con  $V_{rot} = 5$  m/s.

Los cambios bruscos de pendiente de las líneas de corriente indican alta localización de la velocidad de deformación.

La fuerza de arrastre del cilindro disminuye con el aumento de la velocidad de rotación mientras que la fuerza de sustentación aumenta.



# Capítulo 6

## Flujos con superficie libre

### 6.1. Introducción

En los capítulos anteriores se han estudiado diferentes tipos de flujos confinados para fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley en casos no inerciales e inerciales. Se han utilizado los modelos regularizados de Bingham y de Herschel-Bulkley propuestos por Papanastasiou. Estos estudios han permitido mostrar el comportamiento de estos flujos a través de la determinación de las zonas de fluencia y no fluencia, la superficie de fluencia y de las variables características del flujo.

En este capítulo se trata la modelización numérica de flujos Newtonianos y viscoplástico con superficie libre. El objetivo principal es la determinación de la ubicación de la superficie libre del flujo. Se utiliza el modelo regularizado de doble viscosidad Bingham-DV.

Se presentan tres soluciones numéricas en las que se aplican los conceptos y estrategias desarrolladas en los capítulos 2 y 3. Las soluciones numéricas se comparan con soluciones analíticas y resultados experimentales y numéricos de otros autores. También se compara con datos de campo en un caso real.

Los problemas a analizar son:

- Flujo extruido con superficie libre
- Flujo Newtoniano de agua y aceite debido a la rotura de presa
- Flujo de Bingham debido a la rotura de una balsa minera. Caso real

Para todos los problemas se tiene que, en el problema continuo:

- Las ecuaciones de gobierno están definidas por las ecuaciones (2.17) y (2.15), en condiciones tanto no inerciales (flujo de Stokes, *creeping flow*) como inerciales en algunos casos.
- Se usa el modelo regularizado de doble viscosidad, Bingham-DV, propuesto en este trabajo, sección 2.4.7.5.
- La condición de fluencia y no fluencia para la determinación de las zonas rígidas o sólidas y las zonas en las que el fluido fluye está determinada por la tensión de

fluencia crítica,  $\tau_c$ , proporcional a la tensión de fluencia,  $\tau_y$ ; si  $\tau_c > \tau_y$  está en fluencia y, caso contrario, no.

- Para resolver el flujo con superficie libre se usa el método euleriano simplificado expuesto en la sección (2.3.2). La superficie libre se determina considerando dos fluidos con distintas propiedades. Su ubicación se realiza por medio del método de superficie de nivel *level set* de acuerdo con las formulaciones dadas en el apartado 2.3.2.1.
- Se ignoran los efectos de la tensión superficial.

En el problema discreto:

- Se usa una formulación mixta ( $\mathbf{u}/p$ ) de elementos finitos de acuerdo con la metodología presentada en el capítulo 3. Esto es:
  - Elementos finitos triangulares con interpolación lineal tanto para la velocidad como para la presión (P1-P1).
  - Estabilización con el método *split-OSS* (ec. (3.58)).
  - Linealización de Picard.
  - Discretización temporal BDF1.
- Para resolver la posición de la superficie libre se usa estabilización con el método ASGS.
- Los flujos considerados en este capítulo son flujos estacionarios y transitorios desarrollados en una malla fija. El fluido se supone inicialmente en reposo.
- Se considera que se ha alcanzado el estado estacionario cuando la variación de la norma de velocidad entre pasos sucesivos de tiempo es menor de  $1e-04$ . La convergencia para la superficie libre en cada paso se logra cuando la variación de la norma de velocidad entre iteraciones sucesivas es menor de  $1e-08$ .

Las implementaciones computacionales del modelo viscoplástico regularizado Bingham-DV se han realizado en el programa de elementos finitos *Zephyr* desarrollado por el Prof. R. Codina y sus colaboradores en el Centro Internacional de los Métodos Numéricos en la Ingeniería (CIMNE). El pre-proceso y el post-proceso de los problemas a estudiar ha sido realizado con *GiD* (Geometría y Data), desarrollado también en el CIMNE.

## 6.2. Flujo extruido con superficie libre

### 6.2.1. Descripción del problema

En esta sección se estudia el problema de extrusión a la atmósfera de un fluido viscoplástico contenido en una cavidad a través de un orificio de salida. El objetivo fundamental del estudio es determinar la forma que adopta el dominio del fluido fuera de la cavidad. La superficie libre es la interfase entre el dominio fluido y el aire.

Este proceso está asociado a la industria de los plásticos, las pinturas y las fibras sintéticas; se plantea también en el revestimiento de cables, en la formación de películas plásticas transparentes, inyección a tinta y muchos otros.

La Figura 6.1 muestra una representación de cómo se expande un fluido visco-elástico con efecto de "Weissenberg"; un fluido viscoplástico se expande o se contrae en la salida de acuerdo con el valor de la tensión de fluencia.

Este problema ha sido mucho más estudiado para un fluido Newtoniano que para un fluido viscoplástico. En geometría axisimétrica, fluido Newtoniano, se ha analizado numéricamente el fluido saliendo desde un tubo ((Nickell and Tanner, 1974), (Tanner, 2000)). En geometría axisimétrica, fluido de Bingham, el problema del flujo extruido a la atmósfera ha sido estudiado numéricamente por Ellwood et al. (Ellwood et al., 1990). En geometría plana, fluido de Bingham, se ha estudiado el problema mediante el método de los elementos finitos. Tanner en 1983 construyó numéricamente la superficie libre para un flujo lento como una línea de corriente a través de un proceso iterativo utilizando el método de elementos finitos. Este procedimiento ha sido usado después por autores como Abdali y Mitsoulis ((Reddy and Tanner, 1977), (Tanner and Milthorpe, 1983), (Papanastasiou, 1987), (Abdali and Mitsoulis, 1992)). En geometría 3D, fluido de Bingham, lo ha estudiado Mitsoulis (Mitsoulis, 1998).

En estudios experimentales, se ha evaluado principalmente la forma y tamaño de la sección transversal del flujo, así como la ubicación de la superficie libre ((Goren and Wronski, 1965), (Batchelor and Horsfall, 1973)).

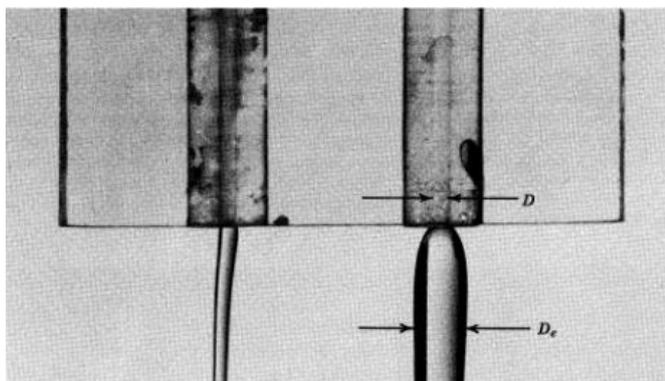


Figura 6.1. Flujo extruido de una cavidad. Fluido Newtoniano (silicona,  $De = 13 \% D$ ) y no-Newtoniano (solución de polímero,  $De = 300 \% D$ ). Bird (1983).

En este trabajo, en una geometría plana, para fluido Newtoniano y fluidos de Bingham, se determinan la forma y ubicación de la superficie libre una vez que el fluido sale a la superficie. En el fluido de Bingham se determinan también las zonas de fluencia y no fluencia del flujo extruido.

Se ignora el efecto de la tensión superficial. Se considera el caso de flujo no inercial estacionario (flujo de Stokes, *creeping flow*). El flujo es paralelo dentro de la cavidad; fuera de la cavidad se tiene nuevamente un flujo paralelo, a una distancia suficiente de la sección de extrusión.

La tensión de fluencia y el número de Bingham se adimensionalizan  $\tau_y^*$ ,  $Bn$  (ecs. (2.44), (2.45)), como:

$$\tau_y^* = \frac{\tau_y H}{\mu V_N}, \quad Bn = \frac{\tau_y 2H}{\mu V_B} \quad (6.1)$$

donde  $H$  es la mitad del ancho de la cavidad de extrusión,  $V_N$  es la velocidad promedio del correspondiente líquido Newtoniano con viscosidad  $\mu$  al mismo gradiente de presión,  $V_B$  es la velocidad promedio del fluido de Bingham.

La distancia adimensional,  $x^*$ , y las posiciones,  $y^*$ ,  $y_{max}^*$  en las que se encuentra la superficie libre expresada por la relación de expansión son:

$$x^* = \frac{x}{H}; \quad y^* = \frac{h}{H}; \quad y_{max}^* = \frac{h_{max}}{H} \quad (6.2)$$

donde  $x$  es la distancia desde el orificio de salida,  $h$  es la mitad del ancho del flujo extruido correspondiente a la distancia  $x$  y  $h_{max}$  es la mitad del ancho del flujo extruido desarrollado.  $H = 1$  m es la mitad del ancho de entrada.

### 6.2.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 6.2 se indican la geometría y las condiciones de contorno para el problema del flujo extruido a la atmósfera. Por simetría del problema, se simula solamente la parte superior del dominio.

La condición de deslizamiento se impone a lo largo de la línea ABEF. El fluido se mueve por la aplicación de un gradiente de presión. En la sección de salida en B la presión es nula. En la entrada AC se aplica un perfil de presiones  $P$  constante de manera tal que se produzcan el gradiente de presión deseado.

El perfil de velocidad está completamente desarrollado en el canal de entrada, lo que requiere una longitud mínima del canal de entrada  $L1$  (Figura 6.2).

La solución analítica de Poiseuille para la velocidad en el canal de entrada es la obtenida en el apartado 2.8.3.2, ecuación (2.108).

La longitud del canal de entrada es  $L1 = 10$  m. Para este valor se obtiene una solución completamente desarrollada para fluidos de Bingham. Se ha tomado  $L2 = 15$  m para la cual la distribución de la velocidad en la salida GD es completamente horizontal y tiene un valor constante,  $V$ . La condición de deslizamiento se impone a lo largo del plano de simetría, CD.

El flujo lo produce un gradiente de presión definido como:

$$\Delta P = -\left(\frac{P_o - P_L}{L1}\right) = -3 \text{ Pa/m} \quad (6.3)$$

donde  $P_o$  es la presión en la entrada de la cavidad,  $P_L$  es presión nula en la salida y  $L_I$  es la longitud de la cavidad.

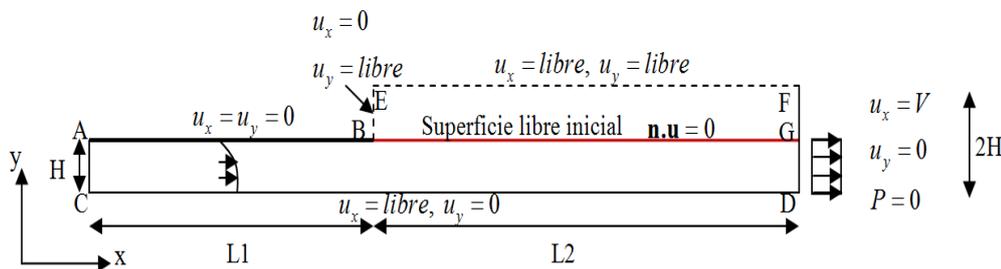


Figura 6.2. Geometría y condiciones de contorno.

### 6.2.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

En la Tabla 6.1 se indican las propiedades constitutivas y numéricas para el problema del flujo de extrusión con el fluido de Bingham.

Propiedades constitutivas		
Modelo del fluido	Bingham	Aire
Viscosidad $\mu$ [pa.s]	1	1E-06
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1E-06	1E-06
Tensión de fluencia $\tau_y^*$ [Pa]	0.1-2.9	-
Regularización		
Parámetro de regularización, $m$ [s]	1000	-

Tabla 6.1. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización.

### 6.2.4. Descripción del problema discreto

Se supone una posición inicial de la superficie libre o interfase (línea BG). Para el gradiente de presión usado y dominio encerrado por la superficie libre (sección 3.4, capítulo 3), se resuelven las ecuaciones de Navier-Stokes. Se encuentran las velocidades en la superficie libre. Con estas velocidades, por medio del método de superficie de nivel (*level set*), se encuentra una nueva posición de la superficie libre.

### 6.2.5. Discretización

En la Figura 6.3 puede verse la malla no estructurada M de elementos triangulares (P1-P1). En la Tabla 6.2 se muestran el número de nodos y elementos de la malla.

Se ha refinado en la línea donde se ubica inicialmente la superficie libre.

El sistema de coordenadas se ubica en el centro de la sección de extrusión.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
M ( $h_{\text{máx.}}=0.05\text{m}$ )	20415	39603

Tabla 6.2. Número de nodos y elementos para la malla no estructurada M.

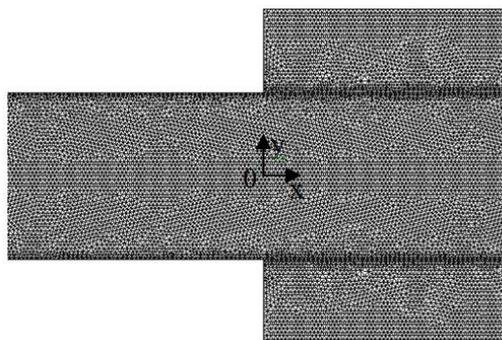


Figura 6.3. Malla M no estructurada de elementos triangulares. Se muestra el dominio entre  $x = -3H$  m,  $x = 3H$  m.

#### 6.2.6. Fluido Newtoniano

En la Figura 6.4 se muestran la máxima relación de expansión del flujo Newtoniano desarrollado o ubicación de la superficie libre,  $y_{\text{max}}^*$ , una vez que sale a la atmósfera. Puede verse que presenta una relación de expansión de 1.194 para  $\tau_y^* = 0$ . Corresponde con la máxima relación de expansión mostrada en la Figura 6.7 a). Esta relación de expansión es similar a los resultados numéricos obtenidos por Reddy y Tanner (Reddy and Tanner, 1977), Crochet y Keuning (Crochet and Keunings, 1982), Ellwood (Ellwood et al., 1990) y Abdali y Mitsoulis (Abdali and Mitsoulis, 1992). Para el fluido Newtoniano, la posición de la superficie libre se encuentra alrededor de 19 % por encima de su posición inicial según datos obtenidos experimentalmente por Goren y Wronski (Goren and Wronski, 1965).

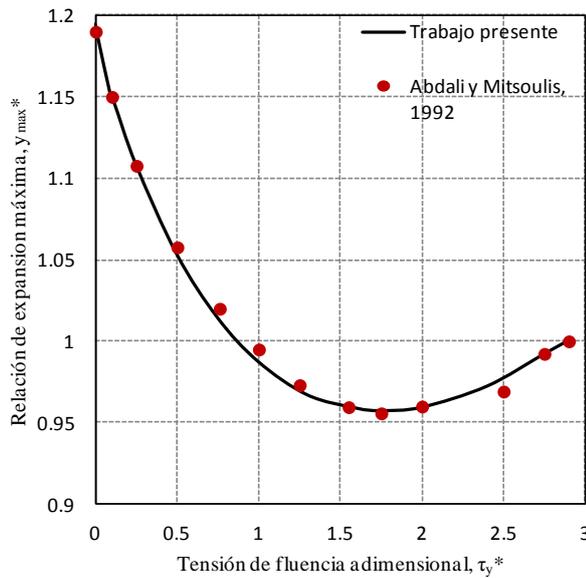


Figura 6.4. **Flujo de extrusión.** Fluido Newtoniano y de Bingham. Máxima relación de expansión para diferentes valores adimensionales de la tensión de fluencia.

### 6.2.7. Fluido viscoplástico de Bingham

En la Figura 6.4 se muestra la máxima relación de expansión o ubicación de la superficie libre,  $y_{max}^*$ , para el fluido de Bingham con valores de la tensión de fluencia adimensional,  $\tau_y^*$ , entre 0.1 y 2.9. Una vez que el fluido es extruido, el flujo se expande por encima de  $y_{max}^* = 1$  para valores de la tensión de fluencia adimensionales menores de  $\tau_y^* \leq 0.88$ . Para valores mayores, el flujo se contrae hasta un valor mínimo de 0.957 en  $\tau_y^* = 1.75$ ; luego, comienza a expandirse nuevamente hasta alcanza el valor de  $y_{max}^* = 1$  para  $\tau_y^* = 2.9$ . Los resultados comparan bien con los obtenidos por Abdali y Mitsoulis (Abdali and Mitsoulis, 1992).

En la Figura 6.5 se muestra la máxima relación de expansión o ubicación de la superficie libre,  $y_{max}^*$ , para el fluido de Bingham con números de Bingham equivalentes a la tensión de fluencia adimensional de la Figura 6.4. Una vez que el fluido es extruido, el flujo se expande por encima de  $y_{max}^* = 1$  para valores del número de Bingham menores de  $Bn \leq 3$ . Para valores mayores, el flujo se contrae hasta  $Bn = 3519$  ( $\tau_y^* = 2.9$ ), presenta un valor mínimo de contracción de 0.957 en  $Bn = 15$  ( $\tau_y^* = 1.75$ ).

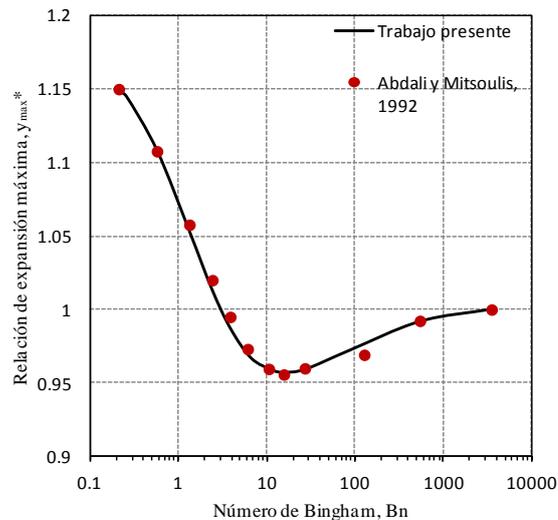


Figura 6.5. **Flujo de extrusión.** Variación de la sección transversal para diferentes números de Bingham.

En la Figura 6.6 se muestra la posición de la superficie libre dada por la relación de expansión,  $y^*$ , para el fluido de Bingham con tensión de fluencia adimensional de  $\tau_y^* = 0.1$  y  $Bn = 0.21$  obtenida en el presente trabajo comparada con la obtenida por Ellwood. La superficie libre alcanza una posición constante de 1.149 antes y a mayor altura que el resultado obtenido por Ellwood de 1.137 usando el modelo regularizado de Papanastasiou. Esto se debe a la utilización del modelo de doble viscosidad en el presente trabajo.

Los resultados obtenidos para la superficie libre se aproximan de manera similar a los resultados obtenidos por Abdalí y Mitsoulis con el modelo regularizado de Papanastasiou para  $m = 200$  s.

En la Figura 6.7 se muestra la posición de la superficie libre obtenida para diferentes valores adimensionales de tensión de fluencia y números de Bingham a partir del fluido Newtoniano. Puede verse como la superficie libre muestra el flujo expandido para las tensiones de fluencia adimensional de  $\tau_y^* = 0, 0.25, 0.5$ ; para valores de  $\tau_y^* = 1.6, 2$ , el flujo se contrae y para  $\tau_y^* = 2.9$  ( $Bn = 3519$ ) el flujo es prácticamente paralelo ( $y_{max}^* = 1$ ). Para  $\tau_y^* = 2.75$  el material extruido se comporta como un quasi-rígido.

En la Figura 6.8 se presenta la superficie libre y las zonas de fluencia y no fluencia para diferentes números de Bingham. Las zonas de fluencia (gris) y no fluencia (color) del flujo extruido están delimitadas por la superficie libre, fuera de ésta, el material es el aire. Las zonas de fluencia van disminuyendo a medida que aumenta el número de Bingham hasta convertirse totalmente en zonas de no fluencia aproximadamente a partir de  $\tau_y^* = 2.75$ . En la cavidad, las zonas de fluencia y no fluencia son como las que se dan en el flujo de Poiseuille para gradiente de presión adimensional de 3; a medida que aumenta el número de Bingham el comportamiento es menos fluido, volviéndose casi completamente rígido para  $\tau_y^* = 2.75$ . Los resultados son muy similares a los encontrados por Abdalí y Mitsoulis.

En la Figura 6.9 se muestran la superficie libre y las zonas de fluencia y no fluencia para  $Bn = 27$  y valores del parámetro de regularización  $m = 200, 1000$ . La diferencia que puede observarse se da en las islas en no fluencia cerca de la salida a la atmósfera. Para  $m = 1000$  las islas casi desaparecen. Para  $m = 200$  estas islas son más grandes, como era de esperar. Por otro lado, para  $m = 200$  estas islas son un poco más pequeñas que las encontradas por Abdali y Mitsoulis con el modelo regularizado de Papanastasiou. Esto demuestra que el modelo de doble viscosidad se ajusta mejor al modelo ideal de Bingham que el modelo regularizado de Papanastasiou.

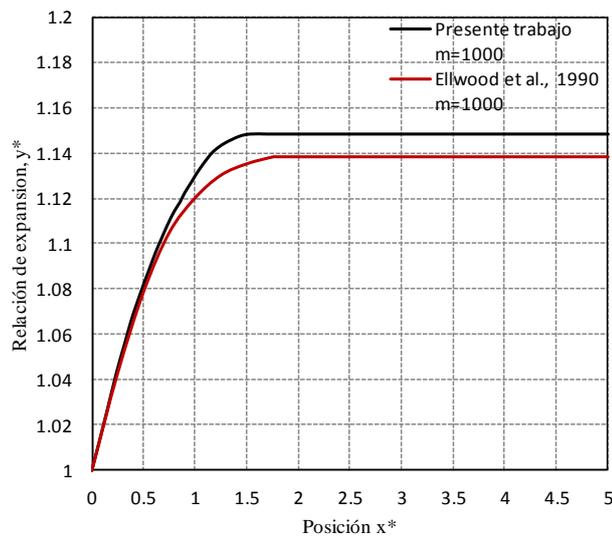


Figura 6.6. **Flujo de extrusión.** Perfil de la superficie libre para un fluido de Bingham con  $\tau_y^* = 0.1$ ,  $Bn = 0.21$

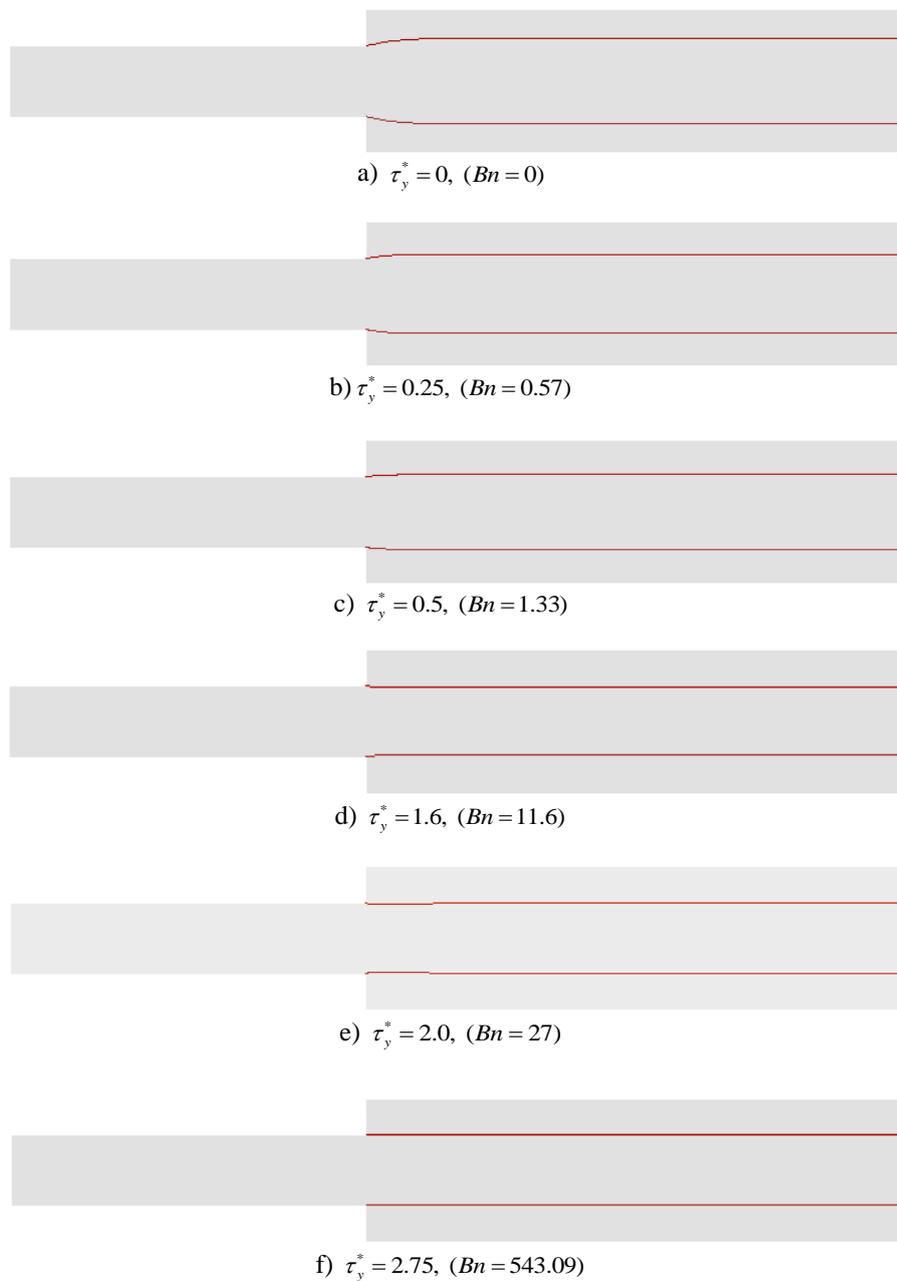


Figura 6.7. **Flujo de extrusión.** Fluido Newtoniano y de Bingham. Variación de la superficie libre para el fluido extruido para diferentes valores de tensión de fluencia.

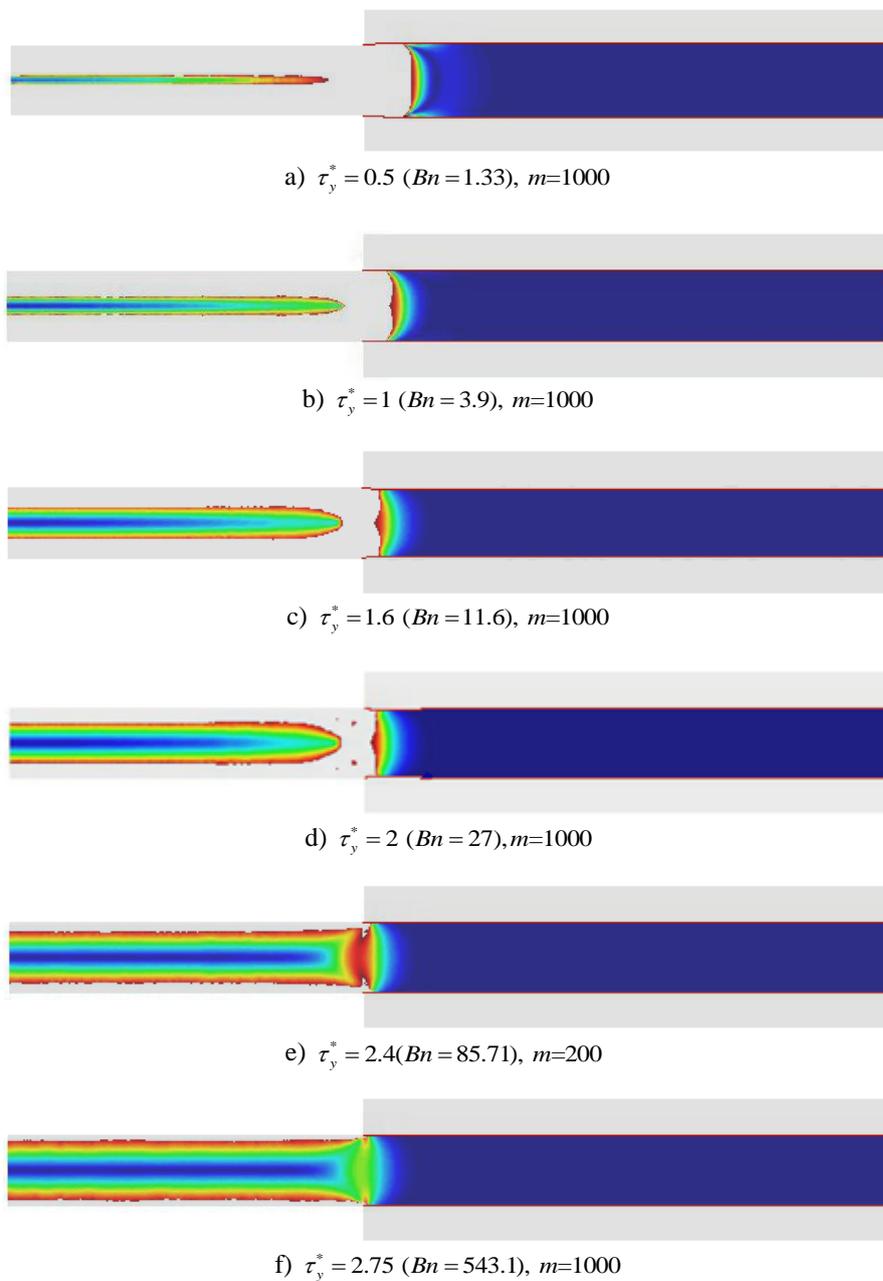


Figura 6.8. **Flujo de extrusión.** Crecimiento progresivo de las zonas de no fluencia en el fluido extruido.

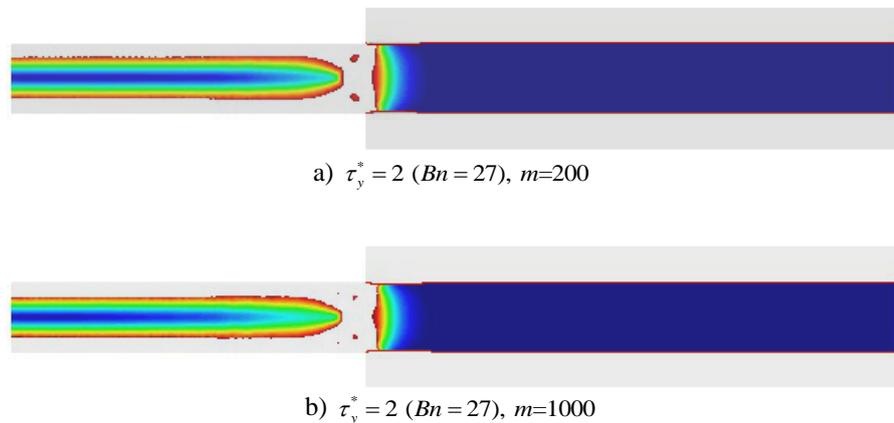


Figura 6.9. **Flujo de extrusión.** Variación de la zona de fluencia y no fluencia del fluido extruido para  $Bn=27$  y diferentes valores de  $m$ .

### 6.2.8. Conclusiones

Se ha estudiado el problema del flujo extruido con superficie en fluidos Newtoniano y de Bingham para diferentes tensiones adimensionales y diferentes números de Bingham. Se ha obtenido la posición de la superficie libre y las zonas de fluencia y no fluencia.

El método de *superficies de nivel* ha permitido resolver la superficie libre para un fluido viscoplástico de Bingham de manera satisfactoria. A su vez, se han determinado adecuadamente las zonas de fluencia y no fluencia.

Los resultados obtenidos se ajustan muy bien a las soluciones numéricas y experimentales. El fluido Newtoniano estudiado presenta mayor relación de expansión al ser extruido que un fluido viscoplástico de Bingham. El flujo de Bingham extruido se expande por encima de  $y_{max}^* = 1$  para valores de la tensión de fluencia adimensionales menores de  $\tau_y^* \leq 0.88$ . Para valores mayores,  $0.88 < \tau_y^* \leq 2.9$ , el flujo se contrae. Para  $\tau_y^* = 2.9$  la relación de expansión alcanza el valor de  $y_{max}^* = 1$ .

Puede considerarse que el modelo regularizado usado se ajusta mejor al fluido ideal de Bingham que el modelo regularizado de Papanastasiou. Aunque las diferencias no son considerables entre ambos modelos para valores altos de  $m$ . La superficie libre alcanza el valor asintótico antes que con el modelo regularizado de Papanastasiou. Se ha podido observar que el parámetro  $m$  tiene su influencia en la delimitación de las zonas de no fluencia.

## 6.3. Flujo de agua y aceite debido a la rotura de presa

### 6.3.1. Descripción del problema

El problema del flujo debido a la rotura de presa consiste en fluidos Newtonianos o no-Newtonianos que se desplazan sobre la superficie terrestre una vez que se produce la falla de la presa que los retiene.

La predicción del comportamiento de estos flujos es de suma dificultad debido a los distintos factores que participan, tales como la geología de la zona, la topografía, los factores climáticos, así como las propiedades físicas y mecánicas que se interrelacionan entre sí dentro de la reología del material.

El área de las zonas de inundación afectadas por estos flujos dependen de la ubicación de la presa; ésta puede estar ubicada en zonas de alta montaña, con lo que el volumen desplazado alcanza velocidades muchos más grandes que el flujo debido a rotura de presas ubicadas en zonas de llanura.

Los flujos debido a la rotura de presa han aumentado su poder destructivo sobre la vida humana a medida que las poblaciones se han ido ubicando o asentando en las zonas de inundación. Ejemplo de situaciones reales de los flujos debido a la rotura de presa es el producido por la rotura de la presa “El Guapo” durante las lluvias torrenciales que azotaron a Venezuela en Diciembre del año 1999. La función de esta presa era almacenar agua potable; al romperse, puso en riesgo a la población ubicada aguas abajo e impidió el suministro a sus pobladores. Así mismo, se han presentado este tipo de desastres en países como Estados Unidos, Japón y China, entre otros (véase la Figura 6.10). En los últimos tiempos ha habido preocupación por garantizar la seguridad contra la falla de presas y evaluar los riesgos inherentes a la ocurrencia de éstas ((Gray, 1974), (Ellingwood et al., 1993), (De Almeida and Franco, 1994), (Bozkus and Kasap, 1998)).

Los modelos matemáticos sencillos que representan el fenómeno se fundamentan en las ecuaciones de continuidad y de conservación de *momentum*. Estas ecuaciones pueden integrarse en la profundidad o altura del fluido para producir un modelo simplificado que desprecia la influencia de la velocidad en la dirección perpendicular al lecho sobre el que se transporta el flujo (comportamiento unidimensional, 1D) ((Savage and Hutter, 1989), (Jin and Fread, 1997), (Pastor et al., 2004), (Delinger and Iverson, 2004)).

En este trabajo de investigación el modelo matemático y numérico se formula mediante las ecuaciones de Navier-Stokes que parten de la ecuación de continuidad y de conservación de *momentum*. La superficie libre es ubicada por el método de superficie de nivel (*level set*) de la misma manera que en el problema del flujo de extrusión. Se consideran los efectos inerciales. Es un flujo transitorio.

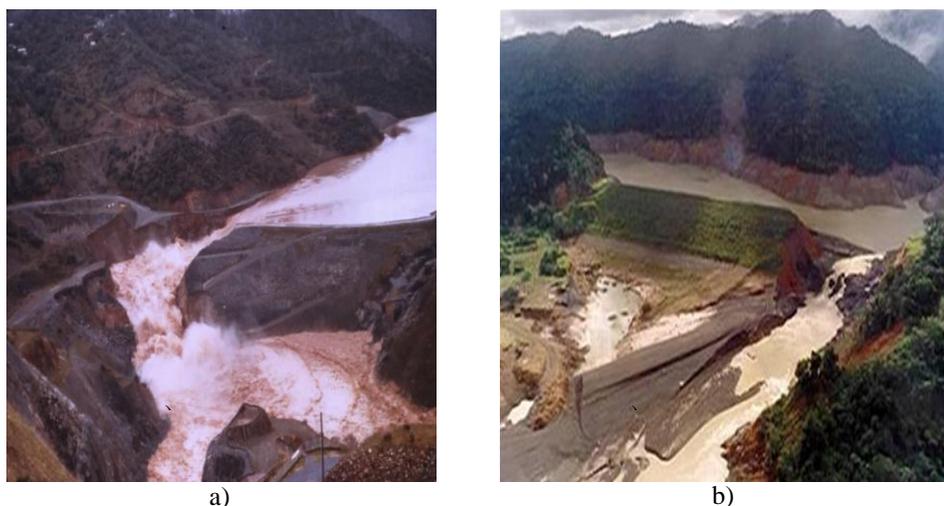


Figura 6.10. a) Rotura de presas en Auburn, Estados Unidos. b) Rotura de la presa El Guapo durante las lluvias torrenciales en Venezuela, Diciembre, 1999 (<http://www.covenpre.org.ve/presas/elguapo.htm>).

En esta sección se evalúa el problema del flujo Newtoniano de agua y aceite debido a la rotura de presa. La solución se encuentra de manera similar a la usada en el problema del flujo de extrusión. Los resultados obtenidos de la superficie libre, altura de la lámina de agua o aceite y la ubicación del frente de flujo, llamado también distancia de inundación, para el flujo de agua se compara con las soluciones analíticas de Chanson (Chanson, 2005a) descritas en la sección 2.8.5.3 y el experimento de Schoklitsch (Schoklitsch, 1917). Igualmente, los resultados obtenidos para el flujo de aceite se comparan con los experimentos de Jelapayan (Jelapayan et al., 1983) para un canal horizontal y un canal en pendiente.

La distancia del frente del flujo y la altura de la lámina de agua se adimensionalizan,  $x^*$  y  $h^*$ , como:

$$x^* = \frac{x}{\sqrt{\frac{g}{h_0} t}}; \quad h^* = \frac{h}{h_0} \quad (6.4)$$

donde  $x$  es la distancia horizontal desde la ubicación de la presa,  $h$  es la altura de la lámina de fluido correspondiente a la distancia  $x$ ,  $g$  es la aceleración de la gravedad y  $t$  es el instante de tiempo, medido a partir de la rotura de la presa.

### 6.3.2. Geometría y condiciones de contorno

En la Figura 6.11 se muestra la geometría y las condiciones de contorno para el problema del flujo de agua. Es un canal horizontal. La altura inicial de lámina de agua es  $h_o = 0.074$  m, altura de la presa (o compuerta). Se conoce la posición inicial de la superficie libre (línea roja) representando el reservorio de agua. La fricción en el fondo del canal se simula mediante la ley de pared (ec 2.21). El lateral derecho se deja con velocidad libre; en el resto de los contornos se impone condición de deslizamiento. En la esquina que intercepta el lateral izquierdo con el fondo del canal se fija velocidad nula.

En la Figura 6.12 se muestra la geometría y las condiciones de contorno para el problema del flujo de aceite. La altura de lámina inicial de aceite para el canal horizontal es  $h_o = 0.1526$  m y para el canal con pendiente de  $4^\circ$  es  $h_o = 0.2286$  m. La posición inicial de la superficie libre (línea roja) coincide con el reservorio de aceite. Las condiciones de contorno se usan tanto para el canal horizontal como el canal con pendiente de  $4^\circ$ . La fricción en el fondo del canal también se simula mediante la ley de pared. El lateral derecho se deja con velocidad libre, en el resto de los contornos se impone condición de deslizamiento. En la esquina que intercepta el lateral izquierdo con el fondo del canal se fija velocidad nula.

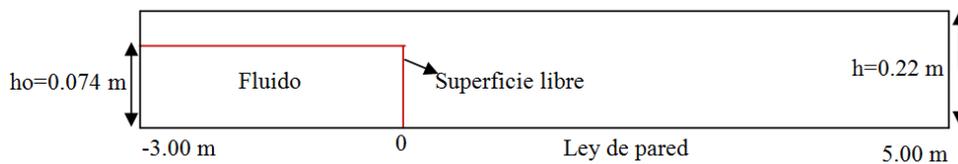


Figura 6.11. Geometría y condiciones de contorno para el flujo de agua.

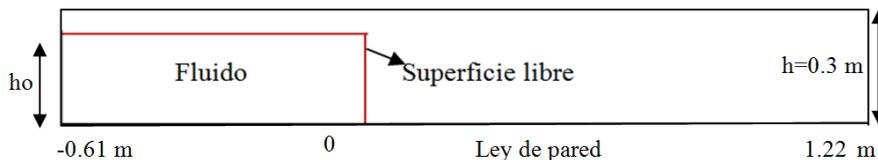


Figura 6.12. Geometría y condiciones de contorno para el flujo de aceite. Configuración para el canal horizontal y en pendiente.

### 6.3.3. Propiedades constitutivas

En la Tabla 6.3 se presentan las propiedades constitutivas utilizadas en el problema del flujo de agua y aceite debido a la rotura de presa.

Propiedades constitutivas			
Modelo del fluido (Newtoniano)	Agua	Aceite	Aire
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	1E-03	3.9	1E-06
Densidad $\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	1000	896	0.5

Tabla 6.3. Propiedades constitutivas para el flujo de agua y aceite debido a la rotura de la presa.

### 6.3.4. Discretización

En la Figura 6.13 puede verse la malla no estructurada M1. En la Figura 6.14a) se muestra la malla no estructurada M2 usada en el canal horizontal y en la Figura 6.14 b) se muestra la malla no estructurada M3 usada en el canal en pendiente. Las mallas están formadas por elementos triangulares (P1-P1). En la Tabla 6.4 se muestra el número de nodos y elementos para la malla M1 usada en el flujo de agua y las mallas M2 y M3 usadas en el flujo de aceite.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
Malla M1 ( $h_{min} = 0.004$ m)	59670	116468
Malla M2 ( $h_{max.} = 0.01$ m)	3393	6412
Malla M3 ( $h_{max.} = 0.01$ m)	19820	36906

Tabla 6.4. Número de nodos y elementos para las diferentes mallas.

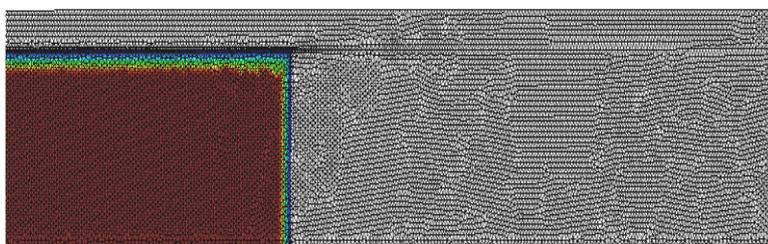
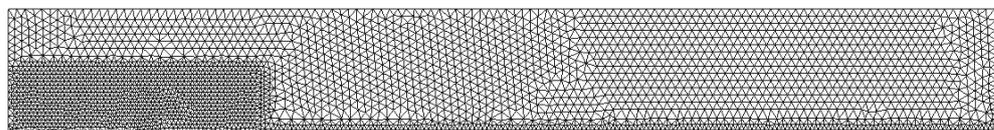
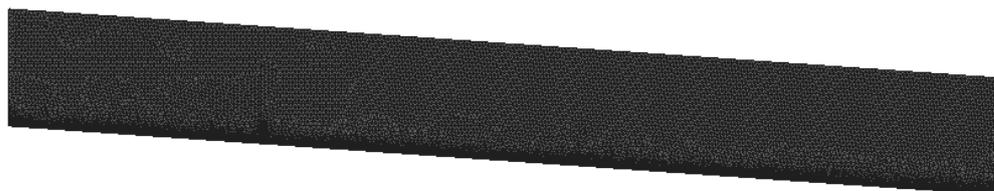


Figura 6.13. Malla no estructurada M1, canal horizontal.



a)



b)

Figura 6.14. a) Malla no estructurada M2, canal horizontal. b) Malla M3, canal en pendiente.

### 6.3.5. Superficie libre y desplazamiento del frente del flujo

En la Figura 6.15 se muestra el desplazamiento del fluido sobre el fondo del canal y la superficie libre para el tiempo  $t = 3.75$  s. Puede verse que la altura de agua va disminuyendo a medida que se desplaza el fluido. El frente del flujo presenta forma redondeada.

En la Figura 6.16 se muestran los resultados para la altura adimensional de la agua dados de los datos experimentales de Schoklitsch con tiempo adimensional de 43, de la solución analítica de Chanson para un tiempo de 3.75 s y coeficiente de fricción  $f = 0.03$  (ver ecuaciones en la sección 2.8.5.3), de la solución de Ritter para un fluido ideal y del presente trabajo para un tiempo  $t = 3.75$  s. En el sitio de presa la longitud horizontal adimensional es nula. Aquí, la altura de la lámina de agua ha disminuido aproximadamente la mitad de su altura inicial. El frente del flujo tiene forma redondeada, está definido por la superficie libre, y se inicia aproximadamente en la longitud adimensional de 0.4. La superficie libre detrás del frente de flujo se ajusta al fluido ideal de Ritter.

Los resultados obtenidos para la altura adimensional de la lámina de agua se ajustan bien a los resultados experimentales de Schoklitsch del frente del flujo, y se aproximan a los resultados mostrados por Chanson para un fondo con rugosidad suave.

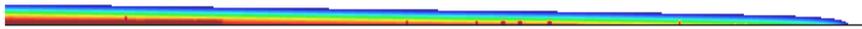


Figura 6.15. Flujo de agua debido a la rotura de presa. Superficie libre y altura agua en  $t=3.75$  s

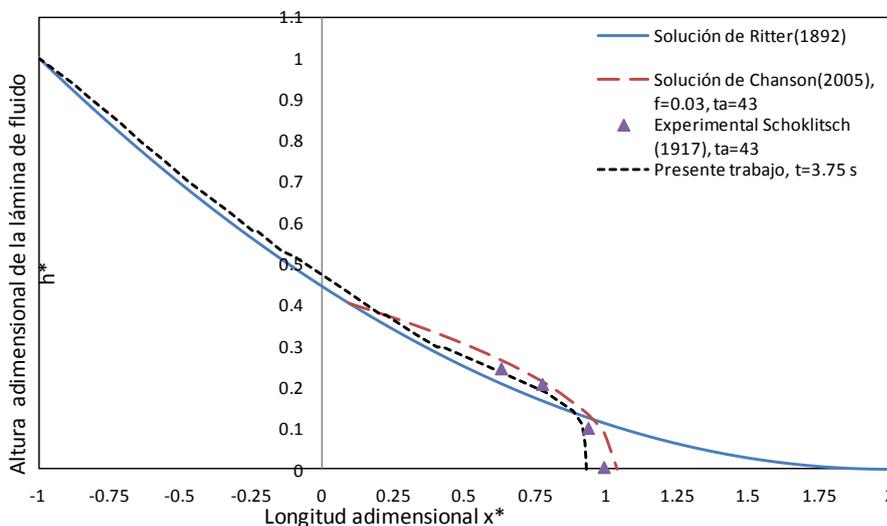


Figura 6.16. Flujo de agua debido a la rotura de presa. Comparación de la ubicación de la superficie libre con los datos experimentales de Schoklitsch (Schoklitsch, 1917), la solución analítica de Ritter (Ritter, 1892) y la de Chanson (Chanson, 2005).  $t=3.75$  s.

En la Figura 6.17 se muestra la superficie libre del flujo de aceite debido de la rotura de la presa en el canal horizontal para diferentes instantes de tiempo. Puede verse que el fluido se desplaza aguas abajo por efecto de la gravedad como consecuencia del rompimiento de la presa repentinamente; para los primeros instantes de tiempo,  $t = 2, 2.75$  s, el flujo se desplaza mucho más rápido que para los siguientes pasos  $t = 3, 4$  s; para  $t = 6$  s el flujo está prácticamente detenido.

En la Figura 6.18 se muestra la superficie libre del flujo de aceite debido de la rotura de la presa en el canal en pendiente para diferentes instantes de tiempo. Se observa también que para los primeros instantes de tiempo,  $t = 2, 2.75$  s, el flujo se desplaza mucho más rápido que para los siguientes pasos  $t = 3, 4, 4.96$  s; para  $t = 4.96$  s el flujo alcanza el lateral derecho del canal. La pendiente contribuye al aumento de la velocidad del flujo; por tanto, el frente del flujo alcanza mayor desplazamiento en el canal en pendiente que en el canal horizontal. La superficie libre es una línea suave.

En la Figura 6.19 se muestra el desplazamiento del frente del flujo desde la ubicación de la presa en un canal horizontal y en pendiente para diferentes instantes de tiempo. Se observa que el frente del flujo en el canal en pendiente avanza más rápido que el flujo en el canal horizontal. Los resultados numéricos de la distancia del frente del flujo para diferentes instantes de tiempo comparan bien con los resultados experimentales de Jelapayan (Jelapayan et al., 1983) para el canal horizontal (Figura 6.19 a)) y para el canal en pendiente (Figura 6.19 b)).

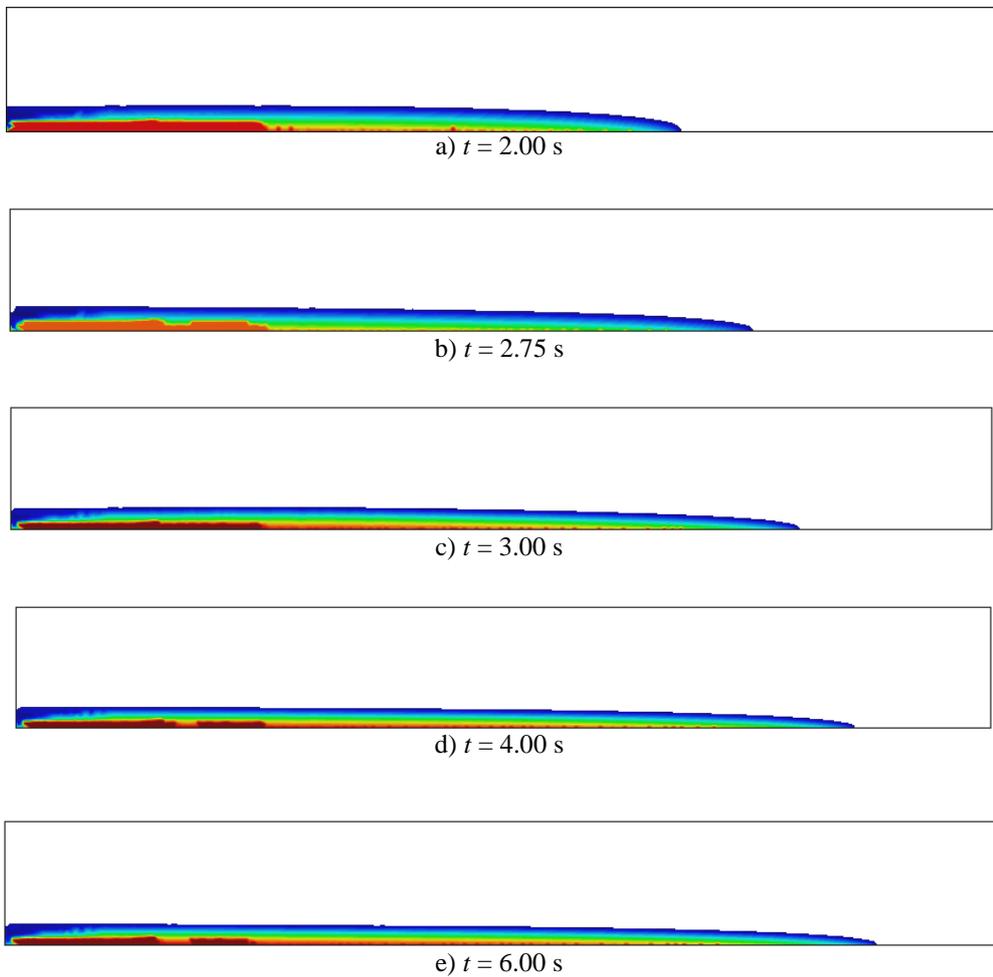


Figura 6.17. Flujo de aceite debido a la rotura de presa. Superficie libre del flujo de aceite en el canal horizontal para diferentes instantes de tiempo.

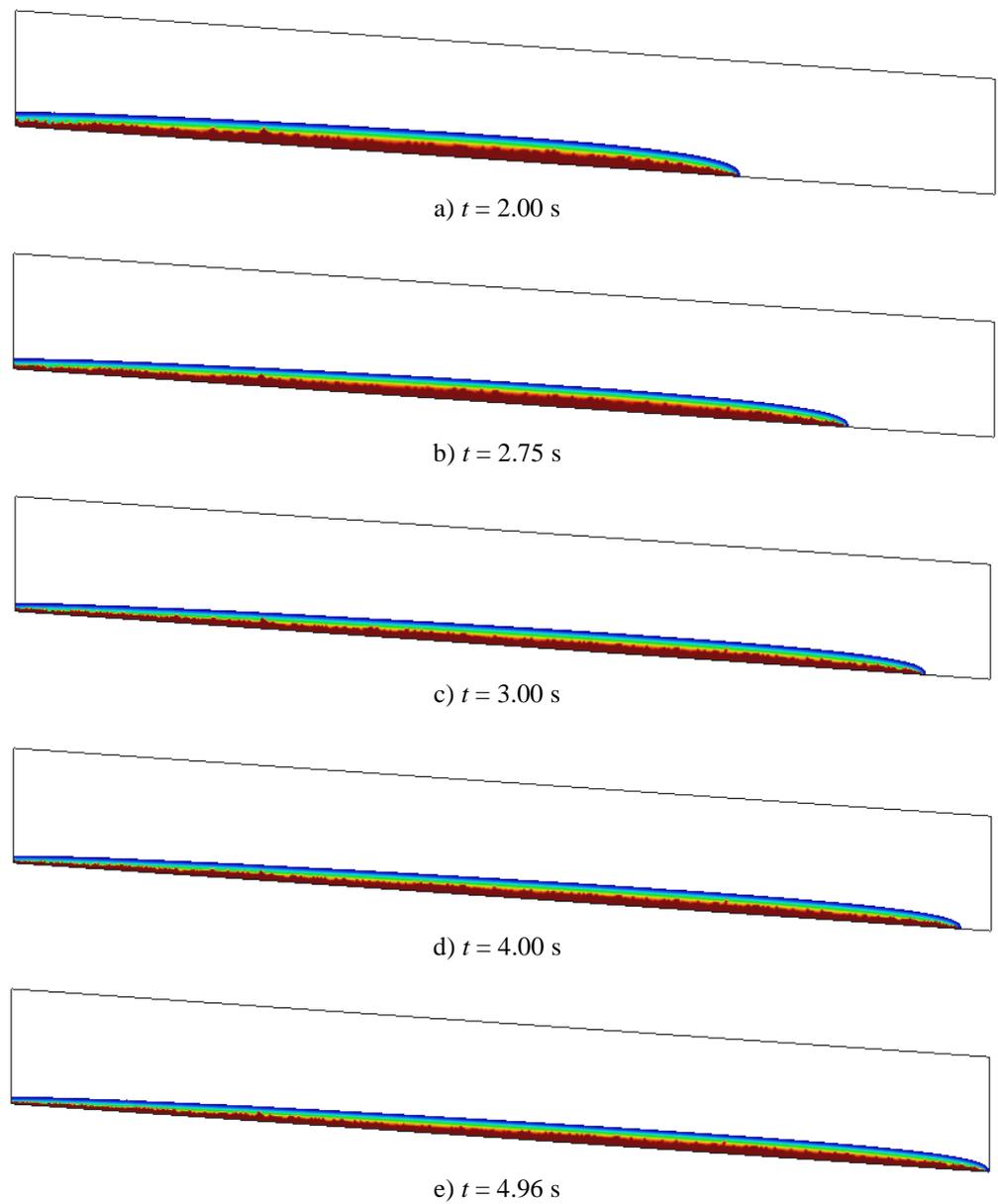


Figura 6.18. Flujo de aceite debido a la rotura de presa. Superficie libre del flujo de aceite en el canal inclinado para diferentes instantes de tiempo.

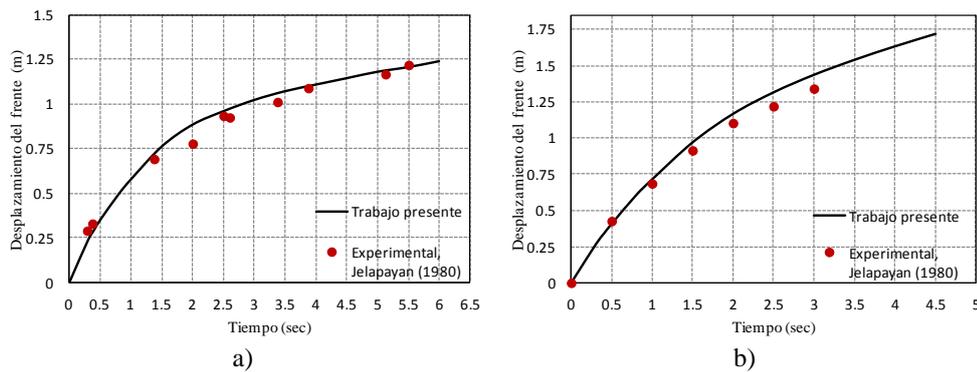


Figura 6.19. **Flujo de aceite debido a la rotura de presa.** Comparación de los resultados numéricos de la distancia del frente del flujo con los resultados experimentales para diferentes instantes de tiempo. a) Canal horizontal. b) Canal en pendiente.

### 6.3.6. Conclusiones

Se ha estudiado el flujo Newtoniano de agua y aceite debido a la rotura de presa. Se ha obtenido apropiadamente la superficie libre del flujo y la forma del frente del flujo. La altura de la lámina de agua en cada punto del canal horizontal se ajusta muy bien a los resultados analíticos y experimentales. En el flujo de aceite se ha obtenido adecuadamente la distancia de inundación en la que se ubica el frente del flujo para diferentes instantes de tiempo tanto en el canal horizontal como en el canal inclinado. A mayor pendiente mayor desplazamiento del frente del flujo. Los resultados obtenidos tanto para un canal horizontal como para un canal en pendiente comparan bien con los resultados experimentales.

## **6.4. Flujo de Bingham debido a la rotura de una balsa minera. Caso real**

### **6.4.1. Descripción del problema**

Los flujos debidos a la rotura de presa pueden también estar compuestos de fluidos no-Newtonianos. Los fluidos de estos flujos pueden estar formados por una mezcla de material sólido proveniente de material geológico, industrial o minero y de fluido inter-granular (Delinger and Iverson, 2004). Son los llamados flujos de detritos. Los modelos viscoplásticos de Bingham o de Herschel-Bulkley se ajustan a una gran parte a estos materiales, especialmente en lodos y materiales semi-granulares.

Los flujos compuestos de material geológico pueden considerarse como uno de los más frecuentes y más destructivos de todos los procesos geomorfológicos. Los flujos de residuos mineros pueden tener el mismo impacto que estos procesos geomorfológicos.

Los flujos de residuos mineros desplazados pueden producir desastres catastróficos dependiendo de la ubicación y la zona en que tiene lugar el evento, entre otros factores. Ejemplo de ello es la falla de la presa de residuos yesíferos en Texas, Estados Unidos, en el año 1966, en la cual no hubo afectación considerable por su ubicación, el desplazamiento del material no alcanzó grandes distancias. En otros casos como la falla de la presa para residuos de fluorita en Val di Stava, en el año 1985, produjo 268 muertes (Figura 6.20 a)); la rotura de la presa para residuos de materiales pesados en Los Frailes, Aznalcóllar, España, en el año 1998, afectó a tierras agrícolas, cosechas y pozos de agua (Figura 6.20 b)). La falla de la presa para residuos de manganeso ocurrida en la ciudad de Mianyang, China, en el año 2011, como consecuencia de fuertes lluvias, afectó a 272 personas que tuvieron que dejar el lugar y un total de 200.000 personas quedaron sin reservas de agua.

El objetivo principal del estudio del problema del flujo debido a la rotura de presa es predecir la ruta de desplazamiento del flujo y la extensión de la zona de inundación. Con esta información pueden prepararse mapas de inundación y establecer planes de emergencia con el fin de tomar medidas de prevención, como por ejemplo, alerta temprana, e incluso medidas de mitigación con el fin de disminuir los efectos que trae consigo el desplazamiento de los materiales vertidos.

En esta sección, se estudia la falla de la presa en el este de Texas, Estados Unidos, en el año 1966, cuyo depósito está conformado por residuos de yeso. La presa falla como consecuencia de las presiones intersticiales en el pie del talud. Se realiza un análisis numérico 2D y 3D para estudiar este problema real con el fin de determinar la superficie libre del material liberado a medida que se desplaza sobre el terreno y las distancias en la que se encuentra el frente de flujo, en diferentes instantes de tiempo. También se determina, el tiempo de paralización total del flujo y la velocidad media del flujo en todo su recorrido. Los resultados se comparan con datos de campo del evento.



Figura 6.20. a) Rotura de la presa para residuos mineros en Stava, Italia, <http://www.stava1985.it>, y b) Presa para residuos de metales pesados en Aznalcóllar, España, <http://www.wise-uranium.org>.

#### 6.4.2. Geometría y condiciones de contorno

La geometría y las condiciones de contorno usadas para el análisis bidimensional como el tridimensional del flujo se describen a continuación.

El embalse de residuos mineros ubicado en el este de Texas, Estados Unidos, tenía planta rectangular. Una vez que la presa se rompe, los flujos se desplazaron aguas abajo a una distancia considerable de 300 m según las observaciones de campo. En la Figura 6.21 se muestra el flujo de los residuos de yeso después del desastre. En la Figura 6.22 se presenta el dominio de análisis para el problema tridimensional del flujo con una altura total de  $h_0 = 16$  m.

En la Figura 6.23 se muestra la planta del embalse y la zona donde se desplazaron los residuos. El embalse se encuentra ubicado en el lado izquierdo. La distancia  $D = 140$  m corresponde a la anchura de rotura de la presa.

El fondo del canal tiene una longitud de  $D = 600$  m, la distancia longitudinal inicial del depósito del material es de  $D = 200$  m y la distancia longitudinal a considerar para determinar el desplazamiento del flujo en el análisis numérico es de  $D = 400$  m. La presa se ubica en  $x=0$  m.

En la Figura 6.24 se muestra la posición inicial de la superficie libre en el análisis tridimensional, que coincide con la superficie de los residuos mineros antes de que se inicie el flujo de estos materiales. La altura inicial de los residuos es de  $h_0 = 11$  m, altura de la presa. En el fondo del dominio se impone condición de no deslizamiento, el techo y los laterales mostrados en Figura 6.24 tienen condiciones naturales. A los nodos en el fondo del depósito se les asigna velocidad nula.

Para el problema del flujo bidimensional se toma una sección longitudinal AB, en el centro de la rotura de la presa del dominio tridimensional, véase la Figura 6.23. Se estudia el flujo como un fluido viscoplástico de Bingham que inicialmente se encuentra en reposo y al producirse la rotura instantánea de la presa se desplaza a lo largo del canal por efecto de la gravedad.

En Figura 6.25 se muestran la geometría y las condiciones de contorno, sección AB, usadas en el análisis numérico 2D. Es un canal horizontal. La superficie libre (línea roja) coincide con el reservorio de los residuos. La altura inicial de los residuos mineros es de

$h_o = 11$  m, altura de la presa. En el lateral derecho y en el lado superior no se imponen condiciones (salida ( $x = 400$  m)); en el resto de los contornos se impone condición de deslizamiento. La esquina que intercepta el lateral derecho con el fondo del canal y el lateral superior se deja con condiciones naturales. En el resto de las esquinas se fija velocidad nula. En el fondo del canal se impone condición de no deslizamiento.

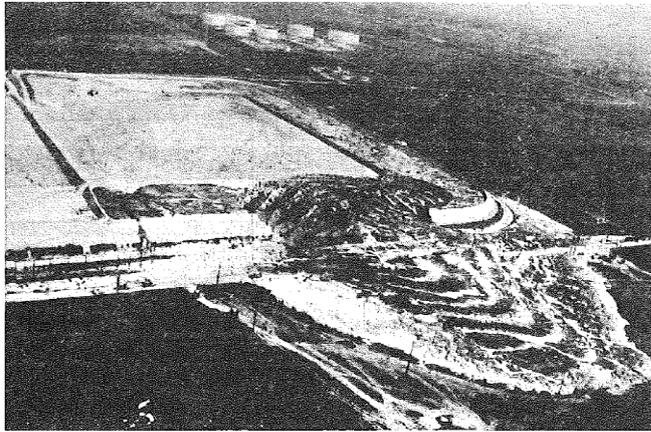


Figura 6.21. Flujo de residuos licuados de yeso, Texas, Estados Unidos. Foto tomada de Jeyapalan (1983).

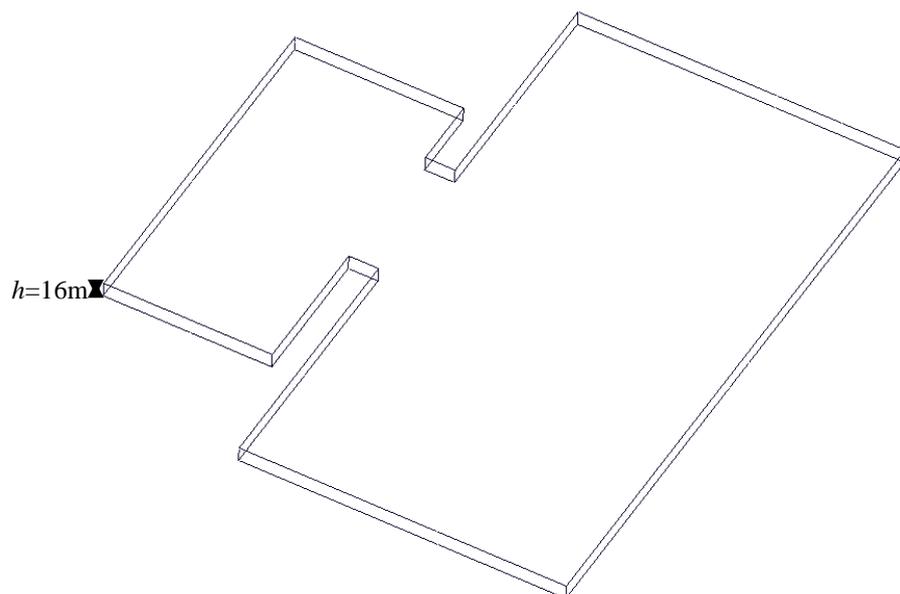


Figura 6.22. Geometría 3D del embalse y dominio aguas abajo de la presa donde ocurre el desplazamiento del flujo.

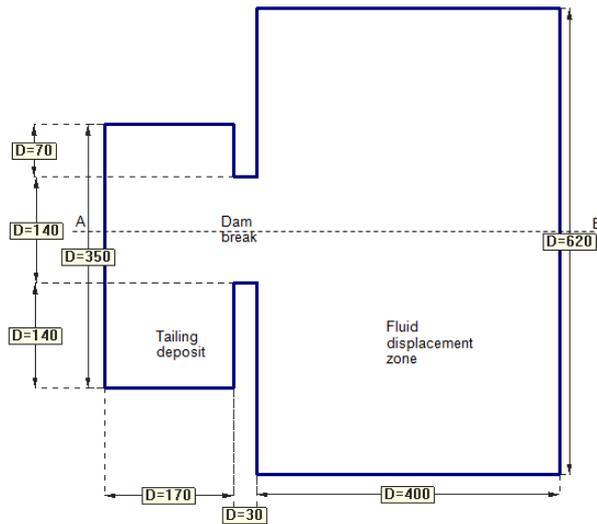


Figura 6.23. Geometría en planta del embalse y dominio aguas abajo de la presa donde ocurre el desplazamiento del flujo.

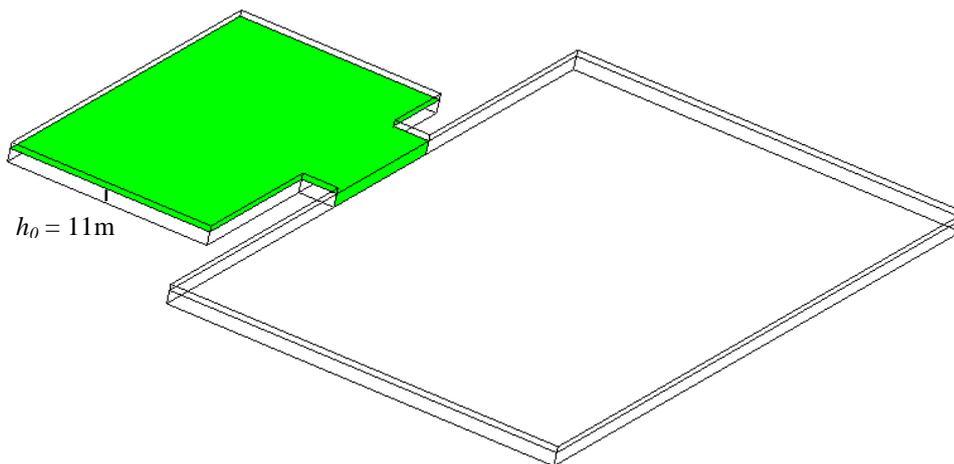


Figura 6.24. Ubicación inicial de la superficie libre para el caso 3D.

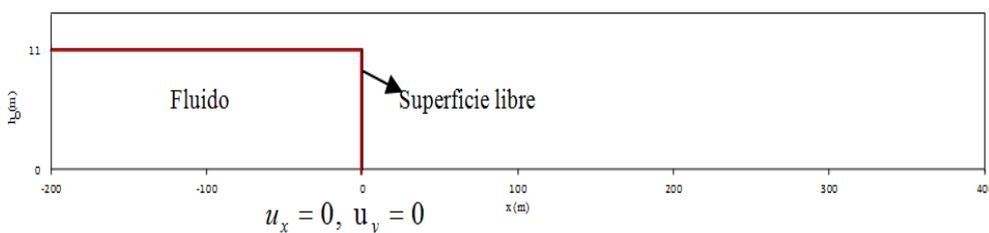


Figura 6.25. Geometría y condiciones de contorno para el caso 2D y 3D. Sección longitudinal AB.

### 6.4.3. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización

El material involucrado en el flujo tiene las características de un limo no plástico, con un diámetro de partícula de  $D_{50} \approx 0.07\text{mm}$ , un coeficiente de uniformidad de alrededor de 3, la densidad de las partículas es alrededor de  $2450\text{ kg/m}^3$  y un contenido medio de agua de alrededor de 30%. Jelapayan et al. (Jelapayan et al., 1982) suponen una densidad de  $1400\text{ kg/m}^3$  y con un análisis de estabilidad en pendiente determinó una tensión de fluencia de aproximadamente  $1000\text{ Pa}$ . Utilizando una correlación entre la viscosidad plástica del material y el contenido de agua obtuvo una viscosidad plástica probable del material de  $50\text{ Pa}$ . Se ha utilizado el valor de  $48\text{ Pa}$  con el fin de comparar con los resultados obtenidos por Herreros (Herreros, 2004) para este problema.

En la Tabla 6.5 se presentan las propiedades constitutivas y el parámetro de regularización usadas en el problema de la rotura de presa usadas para el caso 2D y 3D..

<b>Propiedades constitutivas</b>		
Modelo del fluido	Bingham-DV	Aire
Viscosidad $\mu$ [Pa.s]	48	1E-06
Densidad $\rho$ [ $\text{kg/m}^3$ ]	1400	0.5
Tensión de fluencia $\tau_y$ [Pa]	1000	-
<b>Regularización</b>		
Parámetro de regularización, $m$ [s]	1000	-

Tabla 6.5. Propiedades constitutivas y parámetro de regularización para el flujo de residuos de yeso debido a la rotura de la presa, Texas, Estados Unidos.

### 6.4.4. Discretización

En la Figura 6.26 se muestra la malla M1 usada en el caso 3D de elementos tetrahédricos P1-P1. La malla tiene 1.54 millones de nodos y 8.69 millones de elementos. En la Figura 6.27 se detalla la malla M1 (cuadro rojo de la Figura 6.26).

En la Figura 6.28 se presenta la malla M2 usada para el caso 2D de elementos triangulares P1-P1.

En la Tabla 6.2 se indican el número de nodos y elementos para las mallas no estructuradas M1 y M2. Se refinó en el fondo del canal con el fin de facilitar el desplazamiento del flujo.

No estructurada	Número de nodos	Número de elementos
Malla M1	1543680	8690163
Malla M2	78536	149480

Tabla 6.6. Número de nodos y elementos para la malla no estructurada M1 y M2.

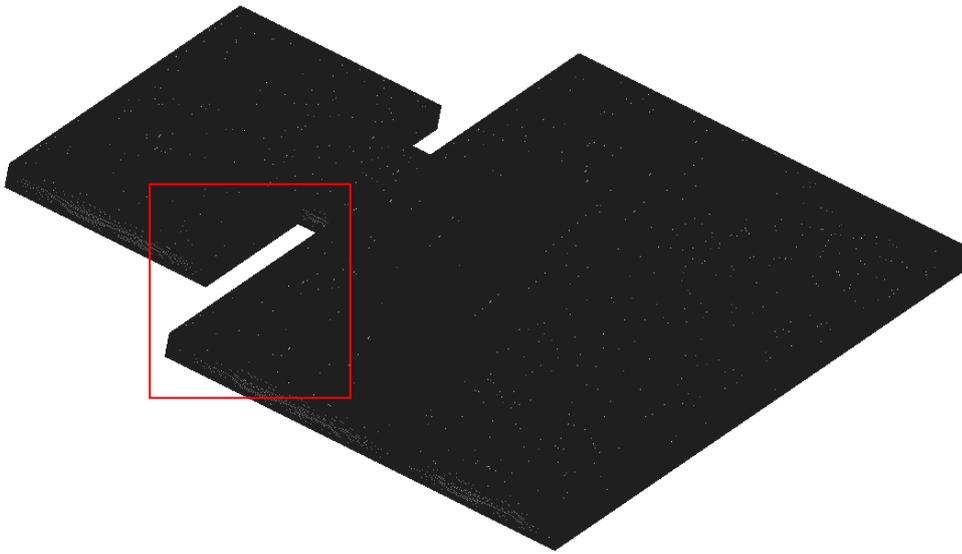


Figura 6.26. Malla no estructurada M1 de elementos tetrahédricos.

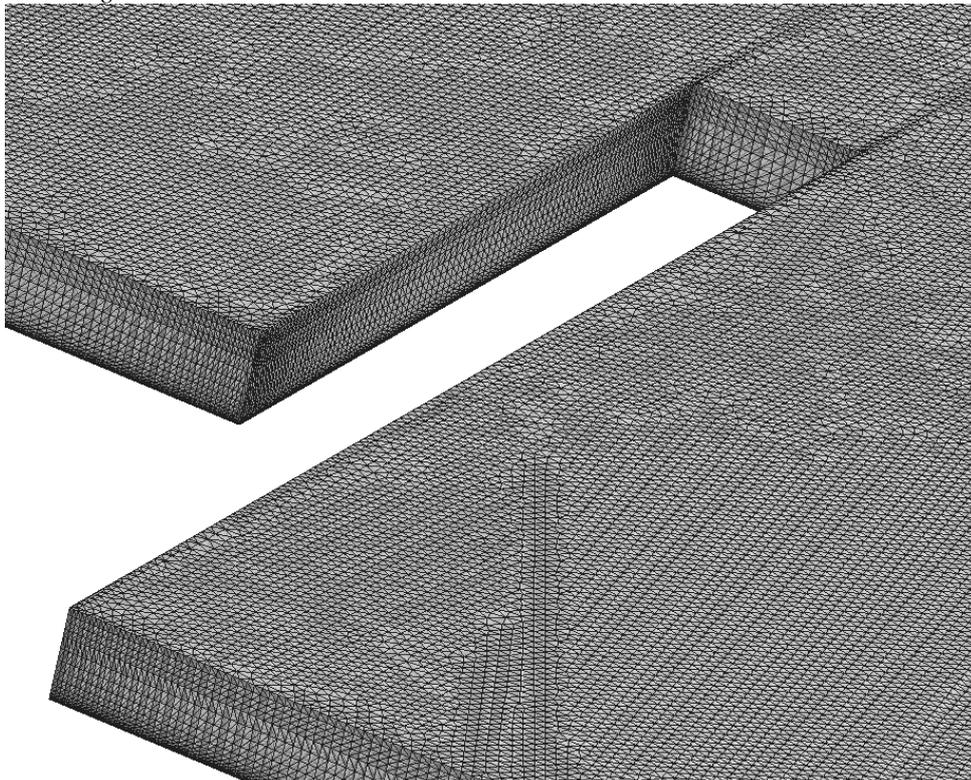


Figura 6.27. Detalle de la malla no estructurada M1.

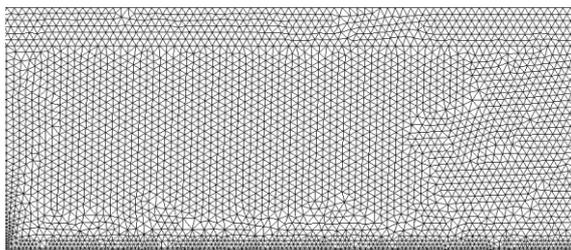


Figura 6.28. Malla no estructurada M2 de elementos triangulares. Dominio entre  $x=0$  m y  $x=30$  m.

#### 6.4.5. Ubicación de la superficie libre y distancia de inundación. Caso 2D

En la Figura 6.29 se presenta la ubicación de la superficie libre para diferentes instantes de tiempo,  $t = 0, 8, 30, 60, 87$  s. En la Figura 6.29 a),  $t = 0$  s, el flujo se encuentra en su estado inicial de reposo. Una vez que el material es liberado, comienza a moverse primero el material en el frente y, poco a poco, el material que se encuentra en la superficie de la presa aguas arriba de ésta. El material que se pone en movimiento se dirige hacia aguas abajo de la presa; para  $t = 8$  s puede verse el frente del flujo desplazándose sobre el canal que inicialmente se encontraba seco, el fluido pasa de la condición de no fluencia a la condición de fluencia, la tensión superan la tensión de fluencia,  $\tau_y$ . La superficie libre del flujo presenta un perfil suave y con pendientes pronunciadas.

En la Figura 6.29 c),  $t = 30$  s, el frente de flujo ha alcanzado prácticamente la mitad del desplazamiento total. El desplazamiento es más rápido en los primeros instantes de tiempo. En la Figura 6.29 d),  $t = 60$  s, el frente ha alcanzado la mayor parte del desplazamiento, y la velocidad es menor. El desplazamiento se hace muy lento y el material comienza a detenerse poco a poco hasta alcanzar su paralización completa en  $t = 87$  s, Figura 6.29 e). Las fuerzas gravitacionales no logran superar la tensión de fluencia del fluido. El flujo ha alcanzando un desplazamiento máximo o distancia de inundación de  $x_f = 318$  m y una altura de lámina máxima  $h_0 = 6.718$  m en el lateral izquierdo del canal. Esta altura máxima indica que la superficie libre se ubica por debajo de su posición inicial y todo el material superficial se puso en movimiento hasta la distancia longitudinal de  $x = -200$  m (desde la ubicación de la presa hacia aguas arriba de ésta). En las observaciones de campo, el fluido superficial que se encontraba inicialmente en el depósito del embalse se movilizó hasta  $x = -110$  m y la distancia del frente de flujo alcanzó  $x_f = 300$  m desde la ubicación de la presa.

En la Tabla 6.7 se presentan la velocidad media del flujo y la distancia final de inundación en el instante de tiempo final o tiempo de paralización total del flujo. Se muestran los datos de campo, resultados analíticos y con el programa TFLOW obtenidos por Jelapayan et al. y los resultados numéricos obtenidos en el presente trabajo.

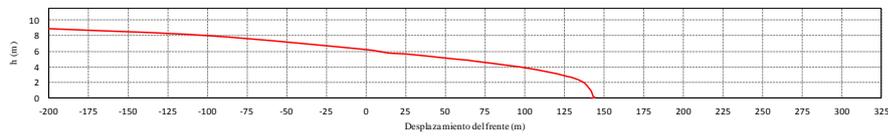
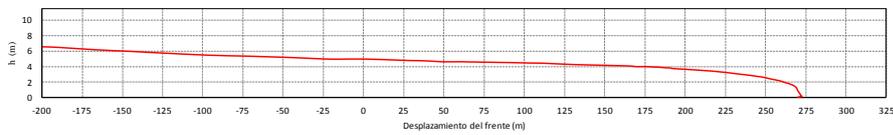
a)  $t = 0$  s.b)  $t = 8$  s.c)  $t = 30$  s.d)  $t = 60$  s.e)  $t = 87$  s.

Figura 6.29. Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa 2D. Desplazamiento progresivo de la superficie libre para varios instantes de tiempo.

Los resultados obtenidos en el presente trabajo discrepan con los resultados analíticos de Jeyapalan et al. (Jeyapalan et al., 1983) y con los resultados numéricos obtenidos con el programa TFLOW usado por este autor excepto para el tiempo de paralización del flujo. Sin embargo, los resultados del presente trabajo se correlacionan muy bien con los datos de campo del evento real. La diferencia entre el resultado para la distancia final de inundación del presente trabajo con el dato de campo es pequeña, considerando la distancia recorrida. Esta diferencia puede deberse a las propiedades del flujo usadas, ya que el comportamiento del flujo depende en gran medida del valor de la viscosidad plástica y la tensión de fluencia estimadas. Además, el análisis numérico se realiza para un flujo bidimensional y los desplazamientos laterales o esparcimiento del material han sido obviados.

En la Tabla 6.8 se presentan las máximas alturas de la lámina de residuos y los desplazamientos del frente del flujo para cada instante de tiempo. La altura máxima final del material es similar a los resultados encontrados por Herreros. En el trabajo de Herreros se usó un modelo integrado en profundidad donde se ignora la velocidad vertical y además se utilizó un fluido friccional con un mecanismo de disipación de presiones intersticiales. Como puede verse en la Tabla, el desplazamiento final encontrado en el presente trabajo es de 318 m, muy similar a los de 310 m que obtuvo Herrero (Herreros, 2004); ambos resultados concuerdan con las observaciones de campo de 300 m.

Características del flujo	Valores observados	Resultados analíticos de Jeyapalan	Resultados Jeyapalan (TFLOW)	Resultados presente trabajo (ZEPHYR)
Distancia de inundación, $x_f$ (m)	300	550	470	318
Velocidad media (m/s)	2.5-5.0	4.2	5.5	3.7
Tiempo de paralización total (s)	60-120	132	85	87

Tabla 6.7. *Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa. Comparación de los resultados del presente trabajo con valores observados en campo, resultados analíticos y numéricos con el programa TFLOW (Jeyapalan, 1983).*

Tiempo $t$ (seg.)	$h_{max}$ (m)	Desplazamiento máximo, $x_f$ (m)
0	11	0
8	11	30.12
30	8.908	132.5
60	6.542	264.6
87	6.608	318.0

Tabla 6.8. *Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa. Alturas máximas de la lámina y desplazamiento máximo del frente del flujo de residuos para diferentes instantes de tiempo.*

#### 6.4.6. Ubicación de la superficie libre y distancia de inundación. Caso 3D

En la Figura 6.30 se presenta la ubicación de la superficie libre en la sección AB (ver Figura 6.23) para diferentes instantes de tiempo,  $t = 0, 8, 30, 60, 87$  s en la simulación 3D. En la Figura 6.30 a),  $t = 0$  s, el flujo se encuentra en su estado inicial de reposo. Una vez que el material es liberado, comienza a moverse primero el material en el frente y poco a poco el material que se encuentra en la superficie de la presa hacia aguas arriba de ésta, de forma similar a lo que ocurre en la simulación 2D. El material que se pone en movimiento se dirige hacia aguas abajo de la presa; para  $t = 8$  s, Figura 6.30 b), puede verse el frente del flujo desplazándose sobre el canal que inicialmente se encontraba seco; la distancia de inundación alcanza prácticamente el doble de la encontrada para el caso 2D. La superficie libre del flujo presenta un perfil suave y con pendientes pronunciadas.

En la Figura 6.30 c),  $t = 30$  s, el frente de flujo ha alcanzado aproximadamente la mitad del desplazamiento total. Puede verse también que el material superficial ubicado en el depósito se ha puesto completamente en movimiento a lo largo de la sección AB. El desplazamiento es más rápido en los primeros instantes de tiempo. En la Figura 6.30 d),  $t = 60$  s, el frente ha alcanzado la mayor parte del desplazamiento, y la distancia de inundación es menor que para el caso 2D. El desplazamiento se hace muy lento y el material comienza a detenerse poco a poco hasta alcanzar su paralización completa. El análisis tridimensional muestra que en los primeros instantes de tiempo el desplazamiento es más rápido para el caso 3D que para el caso 2D y luego es más lento el desplazamiento lateral del flujo para el caso 3D. Este comportamiento del flujo es correcto debido a la consideración del desplazamiento lateral del material o esparcimiento del mismo.

En la Tabla 6.9 se muestran las diferentes alturas máximas de la lámina de los residuos en el lateral izquierdo y el desplazamiento máximo del frente del flujo. Puede observarse que las alturas máximas de la lámina de residuos en cada instante de tiempo tienen comportamiento similar al obtenido en el análisis en 3D de acuerdo, además, con la distancia de inundación o desplazamiento del frente.

Tiempo $t$ (seg.)	$h_{max}$ (m)	Desplazamiento máximo, $xf$ (m)
0	11	0
8	11	60.95
30	9.466	173.65
60	8.533	252.64
62	8.257	255.40

Tabla 6.9. *Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa 3D. Alturas máximas de la lámina y desplazamiento máximo del frente del flujo de residuos, para diferentes instantes de tiempo.*

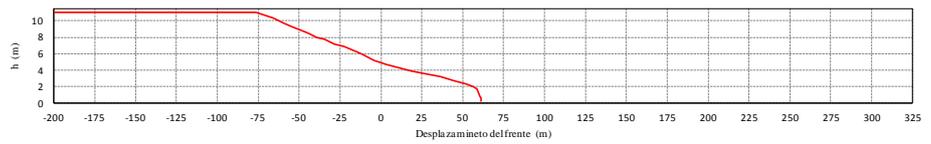
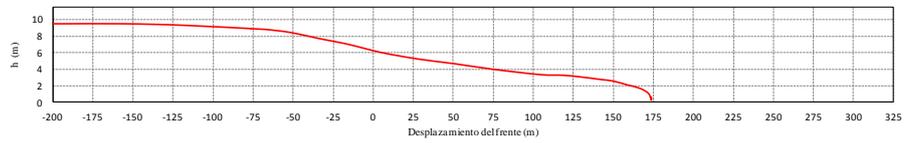
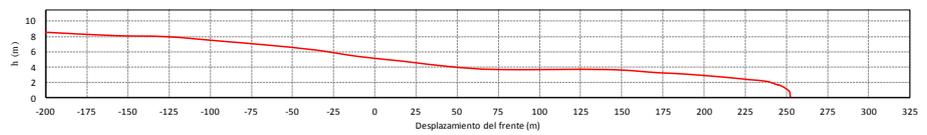
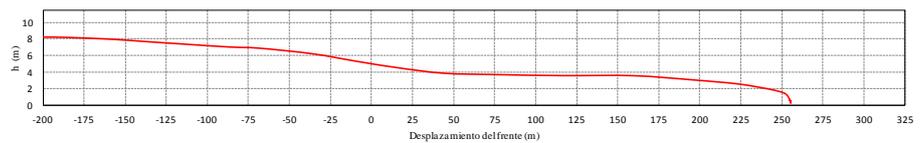
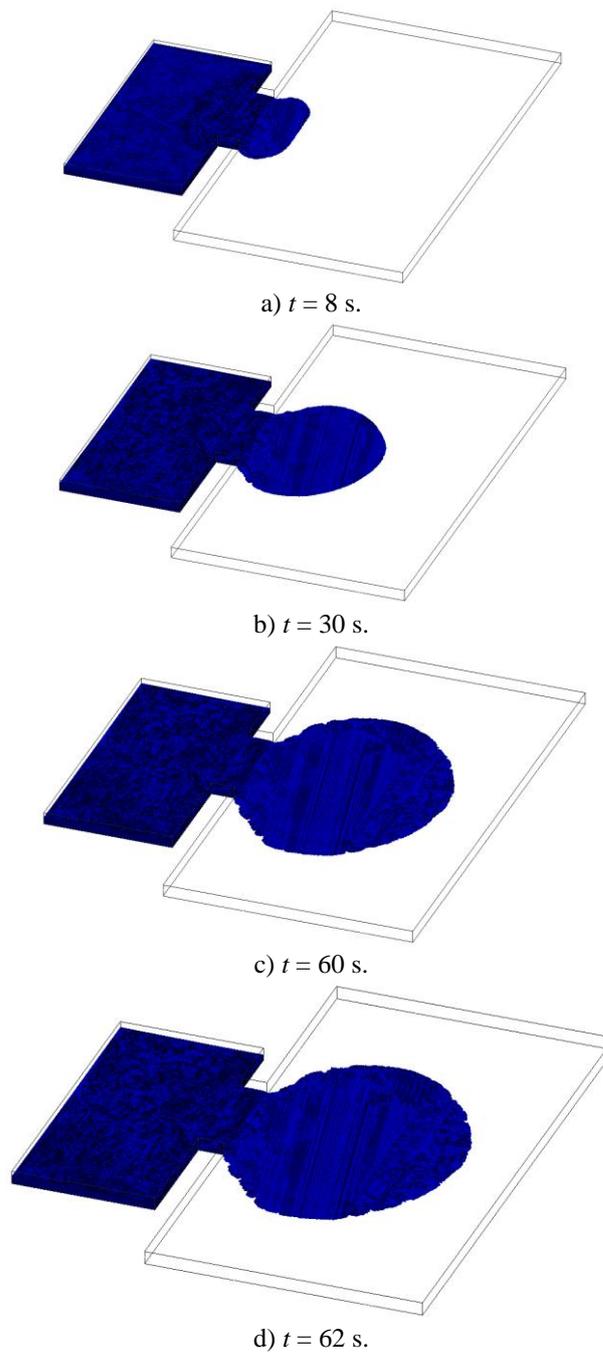
a)  $t = 0$  s.b)  $t = 8$  s.c)  $t = 30$  s.d)  $t = 60$  s.e)  $t = 62$  s.

Figura 6.30. Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa 3D. Desplazamiento progresivo de la superficie libre para varios instantes de tiempo.

En las Figura 6.31 y Figura 6.32 se muestran el desplazamiento tridimensional del flujo para los diferentes instantes de tiempo en una vista isométrica y en planta, respectivamente. La forma del depósito aguas arriba de la rotura define la manera en que el material se pone en movimiento dentro de éste. Puede observarse que para  $t = 8$  s el material del depósito no se ha movilizado completamente y para  $t = 30$  s, en la esquina inferior izquierda del depósito aún queda material superficial en reposo. Estas áreas en el depósito se identifican mejor en las Figura 6.32 a) y b) con el color azul claro. El área de inundación (aguas abajo de la presa rota) es aproximadamente simétrica respecto de la sección AB.



*Figura 6.31. Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa 3D. Desplazamiento progresivo del material para varios instantes de tiempo. Vista isométrica.*

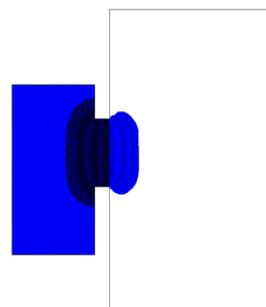
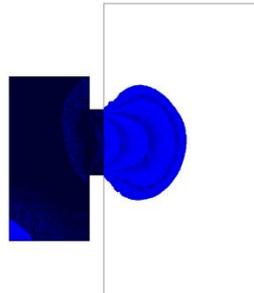
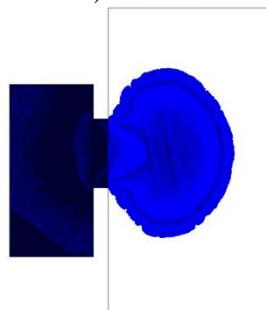
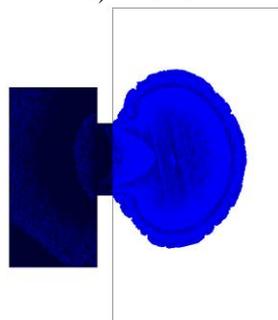
a)  $t = 8$  s.b)  $t = 30$  s.c)  $t = 60$  s.d)  $t = 62$  s.

Figura 6.32. Flujo viscoplástico debido a la rotura de presa 3D. Desplazamiento progresivo del material para varios instantes de tiempo. Vista en planta.

#### **6.4.7. Conclusiones**

Se ha estudiado el problema del flujo de residuos mineros debido a la rotura de la presa. Se ha realizado una simulación numérica bidimensional y otra tridimensional. Se han usado valores estimados de viscosidad plástica y tensión de fluencia. Se han logrado resultados satisfactorios en el caso 2D, aun sin tener en cuenta los efectos tridimensionales. En el caso 3D, el comportamiento del flujo se ajusta mejor al comportamiento real y, por tanto, el flujo se detiene mucho antes que en el caso 2D.

Los resultados obtenidos para la superficie libre y la distancia de ubicación del frente del flujo comparan muy bien con las observaciones de campo para el caso 2D y 3D. También comparan bien los resultados 2D obtenidos para la distancia de inundación final y altura máxima del flujo con los resultados obtenidos por Herreros con una formulación distinta.

## Capítulo 7

# Conclusiones, aportaciones y futuras líneas de investigación

### 7.1. Resumen y conclusiones

El resumen y las conclusiones de este trabajo de investigación se presentan para cada capítulo de este trabajo:

En el **Capítulo 1** se ha presentado la introducción, los objetivos, la motivación y la organización de este trabajo.

En el **Capítulo 2** se ha formulado el problema continuo para un flujo confinado y para un flujo con superficie libre usando las ecuaciones de Navier-Stokes. Se han descrito los modelos constitutivos para fluidos Newtonianos y no-Newtonianos. Se han tratado en detalle los fluidos viscoplásticos ideales y regularizados de Bingham y de Herschel-Bulkley. Se han propuesto nuevos modelos viscoplásticos regularizados para el fluido de Bingham y de Herschel-Bulkley. Se han obtenido las soluciones analíticas para flujos paralelos con el fluido Newtoniano, pseudoplástico, dilatante, de Bingham y de Herschel-Bulkley. Se han descrito también las soluciones analíticas para el problema de rotura de presa.

En el **Capítulo 3** se ha desarrollado el modelo discreto de elementos finitos estabilizados para flujos confinados y considerando la superficie libre. Los métodos de estabilización usados son el método de estabilización de subescalas algebraicas, ASGS, el método de subescalas ortogonales, OSS y el método de subescala ortogonales que desacopla la presión y el término convectivo de la solución, *split*-OSS. El modelo discreto se ha extendido a los modelos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley. Se ha desarrollado el modelo discreto para el problema de convección de la superficie libre con el método de superficie de nivel *level set*.

Se ha realizado un estudio de convergencia para examinar el comportamiento relativo de los métodos de estabilización ASGS y OSS en la solución del problema del flujo paralelo con los modelos viscoplásticos regularizado de Bingham y de Herschel-Bulkley. Se ha mostrado que el método de estabilización OSS presenta en todos los casos menor error que el método ASGS. En particular, se alcanza superconvergencia y valores nodales exactos para los modelos Newtoniano y el modelo regularizado de doble viscosidad de Bingham. Los modelos de doble viscosidad para el fluido de Bingham y de Herschel-Bulkley muestran menor error que los modelos regularizados usados comúnmente en la solución de flujos para estos materiales.

En el **Capítulo 4** se han presentado soluciones numéricas para un amplio conjunto de flujos confinados para fluidos de Bingham, la mayoría problemas *benchmark*. Se han estudiado para flujos no inerciales e inerciales. Se ha utilizado el modelo regularizado de Bingham-Papanastasiou para diferentes números de Bingham y el método de estabilización OSS; en algunos casos, también se ha utilizado el método ASGS. El método OSS presenta, en general, menor error que el método ASGS. Los modelos regularizados con altos valores del parámetro de regularización aproximan de forma satisfactoria el modelo ideal del fluido de Bingham.

A medida que aumenta el número de Bingham, el problema es más complejo de resolver. Se han obtenido adecuadamente las zonas de fluencia y no fluencia, las superficies de fluencia, las velocidades, las presiones y las tensiones en las soluciones de los problemas estudiados. Las superficies de fluencia se obtuvieron con una excelente definición y límites suaves.

A medida que aumenta el número de Bingham, aumenta el tamaño de las zonas de no fluencia y disminuye la velocidad del flujo. Para valores muy altos del número de Bingham, el fluido se comporta como quasi-sólido.

Para una tensión de fluencia dada, a medida que aumenta el número de Reynolds, los efectos viscoplásticos se reducen.

En la solución del problema de extrusión de un flujo perfectamente plástico se han determinado líneas de alta localización de la velocidad de deformación que se identifican con la solución de las líneas de deslizamiento para este problema. Estas líneas determinan el límite de la zona de fluencia.

En la solución del problema del flujo alrededor del cilindro se ha obtenido la tensión de fluencia adimensional crítica del material de  $\tau_{y\text{crit.}}^* = 0.128$  para el cual el cilindro permanece inmóvil dentro del fluido. Este valor está cerca del valor  $\tau_{y\text{crit.}}^* = 0.143$  obtenido por Beris para esferas. Para una separación fija de las placas paralelas, el coeficiente de arrastre del cilindro disminuye con el aumento del número de Bingham. Para un valor fijo del número de Bingham, el coeficiente de arrastre disminuye con el aumento de la separación entre las placas paralelas.

Los resultados obtenidos se ajustan excelentemente a las soluciones analíticas, numéricas y a los datos experimentales disponibles.

En el **Capítulo 5** se han obtenido soluciones numéricas para un amplio conjunto de flujos confinados de fluidos de Herschel-Bulkley, la mayoría problemas *benchmark*. Se han resuelto problemas que no han sido tratados con el fluido de Herschel-Bulkley anteriormente. Se han estudiado para flujos no inerciales e inerciales. Se ha utilizado el modelo regularizado de Herschel-Bulkley-Papanastasiou para diferentes números generalizados de Bingham y diferentes números del índice potencial. Se ha utilizado el método de estabilización OSS, en algunos casos, también se ha utilizado el método ASGS. El método OSS compara favorablemente con el método ASGS en todos los casos. Los modelos regularizados con altos valores del parámetro de regularización aproximan de forma satisfactoria el modelo ideal del fluido de Herschel-Bulkley.

El fluido de Herschel-Bulkley es más complejo de resolver que el fluido de Bingham y aún más a medida que el número generalizado de Bingham aumenta. Se han mostrado adecuadamente las zonas de fluencia y no fluencia, las superficies de fluencia, las velocidades, las presiones y las tensiones en las soluciones de los problemas estudiados. Las superficies de fluencia se obtuvieron con una excelente definición y límites suaves.

Para un valor dado del índice potencial  $n$ , a medida que aumenta el número generalizado de Bingham, aumenta el tamaño de las zonas de no fluencia y disminuye la velocidad del flujo. Para valores muy altos del número generalizado de Bingham el fluido se comporta como quasi-sólido.

Para una tensión de fluencia e índice potencial dados, a medida que aumenta el número de Reynolds, los efectos viscoplásticos se reducen.

Para un valor dado del número generalizado de Bingham, a medida que disminuye el índice potencial  $n$  aumenta la velocidad en el flujo. Por tanto, en un fluido de Herschel-Bulkley pseudoplástico las velocidades del flujo son mayores que en un fluido de Herschel-Bulkley dilatante.

En la solución del problema del flujo alrededor del cilindro en un medio infinito el coeficiente de arrastre es mayor a medida que aumenta el número generalizado de Bingham. El coeficiente de arrastre disminuye a medida que aumenta el índice potencial para un número generalizado de Bingham.

En la solución del problema del flujo alrededor de un cilindro que se desplaza y rota sobre su propio eje se han determinado las líneas de alta localización de la velocidad de deformación que se identifican de manera similar a la solución de las líneas de deslizamiento obtenidas por Adashi y Yoshioka con los teoremas del máximo y del mínimo para el fluido de Bingham. Se han determinado también las fuerzas de arrastre y de sustentación: a medida que aumenta la velocidad de rotación la fuerza de arrastre disminuye y la fuerza de sustentación aumenta.

Los resultados obtenidos se han ajustado excelentemente a las soluciones analíticas, numéricas y a los datos experimentales disponibles.

En el **Capítulo 6** se han presentado soluciones numéricas para flujos con superficie libre. Se ha estudiado el flujo extruido con superficie libre y el flujo debido a la rotura de presa. El primero se ha estudiado en un flujo no inercial y el segundo en flujos transitorios. En la solución de los flujos con superficie libre se ha usado la formulación euleriana simplificada. Esta formulación ha resuelto el problema de una manera más simple al desacoplar el fluido del aire. Para la ubicación de la superficie libre se ha utilizado el método de superficie de nivel *level set* y el método de estabilización ASGS.

En la solución del problema del flujo extruido con superficie libre se han obtenido adecuadamente las zonas de fluencia y no fluencia para diferentes números de Bingham. A medida que aumenta el número de Bingham, aumenta el tamaño de las zonas de no fluencia.

El flujo debido a la rotura de presa se ha simulado en 2D y 3D. Se ha utilizado el modelo de doble viscosidad Bingham-DV y el método de estabilización *split-OSS*.

En la solución del flujo debido a la rotura de presa se ha obtenido correctamente la posición de la superficie libre, la altura de la lámina de fluido en cualquier punto de la trayectoria del flujo y la distancia de inundación, que muestra la ubicación del frente de flujo desde la ubicación de la presa. La mayor fricción entre el fluido y el lecho ocurre en el frente del flujo.

Los resultados obtenidos para el flujo con superficie libre 2D y 3D en el evento real de la falla de la presa en Texas han sido satisfactorios al aproximarse los datos de la solución numérica a los datos de campo.

En el estudio tridimensional del flujo de detritos compuesto de residuos mineros se ha determinado la ruta de desplazamiento, la zona de inundación y la distancia del frente del flujo, logrando así un importante avance en el estudio de los flujos de detritos.

Los resultados obtenidos se ajustan excelentemente a las soluciones analíticas, numéricas y a los datos experimentales y de campo disponibles.

Como conclusión, en este trabajo se ha formulado y validado una metodología para la resolución de las ecuaciones de Navier-Stokes para los flujos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley usando elementos finitos mixtos estabilizados. Se ha desarrollado una herramienta computacional capaz de tratar con los problemas de estos fluidos viscoplásticos de forma eficiente y que ha mostrado robustez y precisión en la solución de los problemas estudiados.

Finalmente, el método de los elementos finitos mixtos con la adecuada estabilización OSS o *split* OSS es una herramienta adecuada para la resolución de flujos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley utilizando elementos con interpolación lineal tanto para la velocidad como para la presión.

## 7.2. Aportaciones de la investigación

La aportación principal de este trabajo es una metodología robusta, precisa y eficiente plasmada en una herramienta computacional que permite estudiar los fluidos viscoplásticos de Bingham y de Herschel-Bulkley confinados y con superficie libre.

Otras aportaciones, estructuradas por capítulos, han sido:

En el **Capítulo 2** se han propuesto modelos de doble viscosidad para fluidos de Bingham y de Herschel-Bulkley como alternativa a los modelos regularizados usados comúnmente. Para el flujo paralelo de Poiseuille y de Couette se han obtenido las soluciones analíticas para el modelo Newtoniano, pseudoplástico, dilatante, de Bingham y de Herschel-Bulkley.

En el **Capítulo 3** se ha realizado un estudio de convergencia para evaluar el comportamiento relativo de los métodos de estabilización ASGS y OSS en un flujo paralelo con los modelos viscoplásticos regularizado de Bingham y de Herschel-Bulkley que demuestra que los modelos de doble viscosidad para estos fluidos muestran menor error que los modelos regularizados usados regularmente.

En el **Capítulo 4** se ha realizado un amplio estudio de un conjunto de flujos confinados de fluidos de Bingham. Se han propuesto un conjunto de problemas *benchmark* para flujos con fluidos viscoplásticos de Bingham. Se ha evaluado el correcto funcionamiento del modelo regularizado de Bingham. Se ha realizado la comparación entre los métodos de estabilización OSS y ASGS. Se han obtenido las zonas de fluencia y no fluencia en todas las soluciones. Se han obtenido soluciones de las líneas de deslizamiento con la alta localización de la velocidad de deformación. Se ha determinado el valor de la tensión de fluencia adimensional para el cual un cilindro moviéndose en el fluido de Bingham permanece inmóvil.

En el **Capítulo 5** se ha realizado un amplio estudio de un conjunto de flujos confinados de fluidos de Herschel-Bulkley. Se han propuesto un conjunto de problemas *benchmark* para flujos confinados con fluidos viscoplásticos de Herschel-Bulkley. Se ha evaluado el correcto funcionamiento del modelo regularizado de Herschel-Bulkley. Se ha realizado la comparación entre los métodos de estabilización OSS y ASGS. Se han obtenido las zonas de fluencia y no fluencia en todas las soluciones. Se han obtenido soluciones de las líneas de deslizamiento con la alta localización de la velocidad de deformación.

En el **Capítulo 6** se ha aplicado el modelo regularizado de doble viscosidad. Se ha usado el método euleriano simplificado para la solución del flujo junto al método de superficie de nivel para la ubicación adecuada de la superficie libre. Se han realizado las simulaciones tridimensionales para el flujo de Bingham debido a la rotura de presa.

### 7.3. Futuras líneas de investigación

Considerando los objetivos logrados en este trabajo, se propone un conjunto de líneas de investigación para su futuro desarrollo. Estas líneas de investigación son las siguientes:

En la definición del problema continuo:

Para flujos confinados:

- Obtención de la solución analítica con el modelo de Casson.
- Obtención de soluciones analíticas en problemas más complejos.
- Flujos no isotérmicos. Incorporación de la temperatura en los modelos constitutivos (derivados de la caña de azúcar, hidrocarburos).

Para flujos debidos a la rotura de presas:

- Estudio de los modelos para flujos granulares.
- Incorporación de una ley de pared (fricción) considerando un modelo granular.
- Incorporación del cálculo de la erosión del terreno.

En la definición del problema discreto:

- Desarrollo de una versión del modelo discreto para elementos finitos mixtos con una formulación de tres campos que involucre la presión, la velocidad y la tensión desviadora.
- Estudio de convergencia en problemas más complejos.
- Uso de elementos de alto orden.

En las soluciones numéricas para el flujo de Bingham:

- Modelización de los flujos tratados en 3D.
- Estudio de estos flujos para un rango más amplio de número de Reynolds.
- Modelización de flujos no isotérmicos.

En las soluciones numéricas para el flujo de Herschel-Bulkley:

- Modelización los flujos tratados en 3D.
- Estudio de estos flujos para un rango más amplio de valores del índice potencial y número de Reynolds.
- Modelización de flujos no isotérmicos.

En las soluciones numéricas para flujos debidos a la rotura de presas:

- Modelización de los flujos de detritos en pendiente.
- Análisis de flujos para materiales granulares.
- Modelización de los flujos considerando la erosión del terreno.

- Modelización de estos flujos considerando una ley de pared para materiales granulares.
- Incorporación de geometrías reales del terreno por medio del tratamiento de los archivos de información geográfica *shapefile*.
- Determinación de las fuerzas de impacto sobre estructuras ubicadas en las zonas de inundación.

## Referencias

- ABDALI, S. & MITSOULIS, E. 1992. "Entry and exit flows of Bingham fluids". *J. Rheology*, 36(2).
- AHMED, A. & ALEXANDROU, A. 1994. "Processing of semi-solid materials using a shear-thickening Bingham fluid model". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, ASME publication No. FED-179, 83-89.
- ALEXANDER, J. 1961. "On complete solution for frictionless extrusion in plane strain". *Q. J. Applied Mathematic*, 19, 31-40.
- ALEXANDROU, A., MCGILVREAY, T. & BURGOS, G. 2001. "Steady Herschel–Bulkley fluid flow in three-dimensional expansions". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 100, 77-96.
- ALLEBORN, K., NANDAKUMAR, K., RASZILLIER, H. & DURST, F. 1997. "Further contributions on the two-dimensional flow in a sudden expansion". *J. Fluid Mechanical*, 330, 169-188.
- ANDRES, V. 1960. "Equilibrium and motion of a sphere in a viscoplastic fluid". *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 133, 777-780.
- ANSLEY, R. & SMITH, T. 1967. "Motion of spherical particules in a Bingham plastic". *J. A I Ch E*, 13, 1193-1196.
- ATAPATTU, D., CHHABRA, R. & UHLHERR, P. 1990. "Wall effect for spheres falling at small reynolds number in a viscoplastic medium". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 38, 31-42.
- ATAPATTU, D., CHHABRA, R. & UHLHERR, P. 1995. "Creeping sphere motion in Herschel–Bulkley fluids: flow field and drag". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 59, 245-265.
- AZOUZ, U., SHIRAZI, S. & AZAR, J. 1993. "Numerical simulation of laminar flows of yield-power law fluids in conduits of arbitrary cross-section". *J. Fluid Engineering*, 115, 710-716.
- BADÍA, S. & CODINA, R. 2009. "Unified satbilized finite elemnt formulation for the Stokes and Darcy problems". *SIAM J. Numerical analysis*, 47, 1971-2000.
- BAGNOL, R. 1954. "Experiment on a gravity free dispersión of large solid spheres in a newtonian fluid under shear". *Proceeding of the Royal Society of London.*, A 225, 49-63.
- BARNES, H. "The yield stress myth? Revisited". *In: MOLDENAERS & KEUNINGS, P. A., eds. Proc. XIth Int. Congr. Rheology, 1992 Brussels, Belgium. Elsevier, Amsterdam, 576-578.*
- BARNES, H. 1997. "Thixotropy-a review". *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 70, 1.
- BARNES, H. & WALTERS, K. 1985. "The yield stress myth?". *Rheology Acta* 24.
- BATCHELOR, J. & HORSFALL, F. 1973. "Die swell in elastic and viscous fluids". *Research Report No. 189. Rubber and Plastic Research Assoc. of Grain Britain.*
- BEAULNE, M. & MITSOULIS, E. 1997. "Creeping motion of a sphere in tubes filled with Herschel–Bulkley fluids". *J. Non-Newtonian fluid mechanics*, 72, 55-71.

- BERCOVIER, M. & ENGELMAN, M. 1980. "A finite-element method for incompressible non-Newtonian flows". *J. Computational Physics*, 36, 313-326.
- BERIS, A. N., TSAMOPOULOS, J. A., ARMSTRONG, R. C. & BROWN, R. A. 1985. "Creeping motions of sphere through a Bingham Plastic". *J. Fluid Mechanical*, 158, 219-244.
- BHARTI, R., CHHABRA, R. & ESWARAN, V. 2006. "Steady flow of power law fluids across a circular cylinder". *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 84, 406-421.
- BINGHAM, E. 1922. *"Fluidity and plasticity"*, New York, McGraw-Hill.
- BIRD, R., ARMSTRONG, R. & HASSAGER, O. 1987. *"Dynamics of polymeric liquids"*, Wiley.
- BIRD, R., DAI, G. & YARUSSO, B. 1983. "Rheology and flow of viscoplastic materials". *Reviews Chemical Engineering*, 1, 1-70.
- BLACKERY, J. & MITSOULIS, E. 1997. "Creeping motion of a sphere in tubes filled with a Bingham plastic material". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 70, 59-77.
- BOTELLA, O. & PEYRET, R. (eds.) 1998. *"Benchmark spectral results on the lid driven cavity flow"*, Great Britain: Elsevier.
- BOZKUS, Z. & KASAP, A. 1998. "Comparison of physical and numerical dam-break simulations". *Tr. J. Engineering and Environmental Science*, 22, 429-443.
- BREZZI, F. & FORTIN, M. 1991. *"Mixed and Hybrid Finite Element Methods"*, Springer Verlag.
- BREZZI, F. & PITKÄRANTA, J. 1984. "On the stabilization of finite element approximations of Stokes equations". In: HACKBUSH, W. (ed.) *Efficient Solution of Elliptic Systems*. Vieweg, Braunschweig.
- BROOKS, A., HUGHES, T. & RUSSO, A. 1982. "Streamlines Upwind/Petrov-Galerkin Formulations for Convection Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equation". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 32, 199-259.
- BURGOS, G. & ALEXANDROU, A. 1999. "Flow development of Herschel-Bulkley fluid in a sudden three-dimensional square expansion". *J. Rheology*.
- CASSON, N. 1959. *"Rheology of disperse system"*, New York, Ed. C. C. Mill, Pergamon Press.
- CERVERA, M. & CHIUMENTI, M. 2009. "Size effect and localization in J2 plasticity". *Int. J. Solids and Structures*, 46(17), 3301-3312.
- CERVERA, M., CHIUMENTI, M. & CODINA, R. 2010a. "Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics. Part I: Formulation". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 46 (17), 3301-3312.
- CERVERA, M., CHIUMENTI, M. & CODINA, R. 2010b. "Mixed stabilized finite element methods in nonlinear solid mechanics. Part II: Strain localization". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 199 (37-40), 2571-2589.
- CERVERA, M., CHIUMENTI, M. & CODINA, R. 2011. "Mesh objective modeling of cracks using continuous linear strain and displacement interpolations". *Int. J. Numerical Methods in Engineering*, 87 (10), 962-987.
- CERVERA, M., CHIUMENTI, M. & DE SARACIBAR, A. 2004a. "Shear band localization via local J2 continuum damage mechanics". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193, 849-880.

- CERVERA, M., CHIUMENTI, M. & DE SARACIBAR, A. 2004b. "Softening, localization and stabilization: capture of discontinuous solutions in J2 plasticity". *Int. J. for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics*, 28, 373-393.
- CERVERA, M., CHIUMENTI, M. & DI CAPUA, D. 2012. "Benchmarking on bifurcación and localization in J2 plasticity for plane strain conditions". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 241-244, 206-224.
- CERVERA, M., CHIUMENTI, M., VALVERDE, Q. & DE SARACIBAR, A. 2003. "A mixed linear/linear simplicial elements for incompressible elasticity and plasticity". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192 (49-50), 5253-5264.
- CODINA, R. 2000a. "On stabilized finite element methods for linear systems of convection-diffusion-reaction equations". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 188, 61-82.
- CODINA, R. 2000b. "Stabilization of incompressibility and convection through orthogonal sub-scales in finite element methods". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 1579-1599.
- CODINA, R. 2000c. "Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal subscale". *CIMNE*.
- CODINA, R. 2001. "A stabilized finite element method for generalized stationary incompressible flows". *J. Compu. Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 190, 2681-2706.
- CODINA, R. 2002. "Stabilized finite element approximation of transient incompressible flows using orthogonal scale". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 4295-4321.
- CODINA, R. & BLASCO, J. 1997. "A finite element formulation for the Stokes problem allowing equal velocity-pressure interpolation". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 143, 373-391.
- CODINA, R., HOUZEAUX, G., COPPOLA-OWEN, H. & BAIGE, J. 2009a. "The fixed-mesh ALE approach for the numerical approximation of flow in moving domains". *J. Computational Physics*. Elsevier.
- COPPOLA-OWEN, H. 2009b. "A fine element model for free surface and two fluid flows on fixed meshes". Ph. D, Universidad Politécnica de Cataluña.
- COPPOLA-OWEN, H. & CODINA, R. 2005. "An improved level-set approach using finite elements with discontinuous gradient pressure shape functions". In: BERGAN P., G. J., OÑATE E., KVAMSDAL (ed.) *International Conference on Computational Methods in Marine Engineering MARINE 2005*.
- COVEY, G. & STANMORE, B. 1981. "Use of parallel-plate plastometer for the characterization of viscous fluid with a yield stress". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 8, 249-260.
- CROCHET, M. & KEUNINGS, R. 1982. "On numerical die swell calculation". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*.
- CHANSOON, H. 2004b. "Environmental hydraulic of open channel flows", Oxford, UK, Elsevier Butterworth-Heinemann.
- CHANSOON, H. 2005a. "Applications of the saint-venant equations and method of characteristic to the dam break wave problem".
- CHANSOON, H. "Analytical solution of dam break wave with flow resistance. Application to tsunami surges". In: B. H. JUN, S. I. L., I. W. SEO Y G. W. CHOI. EDITORS, ed.

- Proc. 31th Biennial IAHR Congress, 2005b Seoul, Korea. Theme D1, Paper 0137, pp. 3341-3353.
- CHHABRA, R. 1986. "Steady Non-Newtonian flow about a rigid sphere". *Encyclopedia of fluid mechanics*. Houston: Gulf: In N. P. Cheremisinoff (Ed.)
- CHHABRA, R. (ed.) 1993. *"Bubbles, drops and particles in Non-Newtonian fluid"*, Boca Raton, FL: CRC Press.
- CHHABRA, R., RAMI, K. & UHLHERR, P. 2001. "Drag on cylinder in shear thinning viscoelastic liquids". *J. Chemical Engineering Science*, 56, 2221-2227.
- CHHABRA, R. & RICHARSON, J. 2008. *"Non-Newtonian flow and applied rheology. Engineering applications"*, Institute of Chemical Engineering.
- CHHABRA, R. & UHLHERR, P. 1988. "Static equilibrium and motion of spheres in viscoelastic liquid". *Encyclopedia of fluid mechanics*. Houston: Gulf: In N. P. Cheremisinoff (Ed.).
- CHIUMENTI, M., CERVERA, M. & CODINA, R. 2013. "A mixed three-field FE formulation for stress accurate analysis including the incompressible limit". *Submitted to J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- CHIUMENTI, M., VALVERDE, Q., AGELET, C. & CERVERA, M. 2002. "A stabilized formulations for incompressible elasticity using linear displacement and pressure interpolations". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191, 5253-5264.
- DALL'ONDER DOS SANTOS, D., FREY, S., NACCACHE, M. & MENDES, P. R. D. S. 2011. "Numerical approximations for flow of viscoplastic fluid in a lid-driven cavity". *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 166, 667-679.
- DE ALMEIDA, B. & FRANCO, B. 1994. *"Modeling of dam-break flow", computer modeling of free-surface and pressurized flows"*.
- DE SARACIBAR, A., CHIUMENTI, M., VALVERDE, Q. & CERVERA, M. 2006. "On the orthogonal subgrid scale pressure stabilization of finite deformation J2 plasticity". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195 (9-12), 1224-1251.
- DE WAELE, A. 1923. "Viscometry and plastometry". *J. Oil Color Chemists' Assoc.*, 6 (38), 33-88.
- DEGLO, D. B., MAGNIN, B. & JAY, P. 2003. "Viscoplastic flow around a cylinder in an infinite medium". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 115, 27-49.
- DELINGER, R. & IVERSON, R. 2004. "Granular avalanches across irregular three-dimensional terrain: Theory and computation". *J. Geophysical Research*, 109.
- DIEZ, M. & GODOY, L. 1991. "Flujo viscoplástico incompresible de materiales con fricción y cohesión. Aplicación a problemas bidimensionales". *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo en Ingeniería*".
- ELLINGWOOD, B., COROTIS, R., BOLAND, J. & JONES, N. 1993. "Assessing cost of dam failure". *J. Water Resources Planning and Management, ASCE*, Vol. 119, No.1.
- ELLWOOD, K., GEORGIU, G., PAPANASTASIOU, T. & WILKES, J. 1990. "Laminar jets of Bingham-Plastic liquids". *J. Rheology*, 34, 6.
- FAURE, J. & NAHAS, N. 1961. "Etude numérique et expérimentale d'intumescences à forte courbure du front". *J. La Houille Blanche*, No. 5, 576-586.
- FAXÉN, O. 1946. "Forces exerted on a rigid cylinder in a viscous fluid between two parallel fixed planes". *Proceeding of the Royal Swedish academy of Engineering and Science*, 187, 1-13.

- FORTIN, M. 1972. "Calcul numérique des écoulements des fluides de Bingham et des fluides newtoniens incompressibles par la méthode des éléments finis". Tese de Doutorado, l'Université de Paris VI.
- FREY, S., FILIPE, S. & ZINANI, F. 2010. "Stabilized mixed approximations for inertial viscoplastic fluid flows". *J. Mechanical Research Communications*, 37, 145-152.
- GHIA, U., GHIA, K. & SHIN, C. 1982. "High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multigrid method". *J. Computational Physics*, 48, 387-411.
- GÓMEZ-ARIAS, E., ANDAVERDE, J., SANTOYO, E. & URQUIZA, G. 2009. "Determinación de la viscosidad y su incertidumbre en fluidos de perforación usados en la construcción de pozos geotérmicos: aplicación en el campo de Los Humeros". *Revista Mexicana de Ciencias Geológicas. Puebla, México*, 26, núm. 2, 516-529.
- GOREN, S. & WRONSKI, J. 1965. "The shape of low-speed capillary jets of Newtonian liquids". *J. Fluid mechanics*.
- GRAY, D. 1974. "Safety of dams-bureau of reclamation". *J. Hydraulics Division, ASCE*, Vol.100, No. HY2.
- GRILLET, A., YANG, B., KHOMAMI, B. & SHAQFEH, E. 1999. "Modeling of viscoelastic lid driven cavity flow using finite element simulations". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 88, 99-131.
- GUASH, O. & CODINA, R. 2007. "An algebraic subgrid scale finite element method for the convected Helmholtz equation in two dimensions with applications in aeroacoustics". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*.
- GUO, J. 2011. "Motion of spheres falling through fluids". *J. Hydraulics Research*, 49, No. 1, 32-41.
- HAMMAD, K. & VRADIS, G. 1996. "Creeping flow of Bingham plastic through axisymmetric sudden contractions with viscous dissipation". *Int. J. Heat Mass Transfer*, 39, No. 8, 1555-1567.
- HAMMAD, K., VRADIS, G. & ÖTÜGEN, M. 2001. "Laminar flow of a Herschel-Bulkley fluid over an axisymmetric sudden expansion". *J. Fluid Engineering*, 123, 588-594.
- HÄNDLE FRANK (ED) 2007. "Extrusion in ceramic", Springer.
- HAPPEL, J. & BRENNER, H. (eds.) 1973. "Low Reynolds hydrodynamics", Leyden, The Netherlands: Noordhoff International Publishing.
- HENCKY, H. 1924. "Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern"
- HERREROS, M. 2004. "Desarrollo de modelos numéricos aplicados a hidráulica ambiental". Ph. D., Universidad Complutense de Madrid.
- HERSCHEL, W. & BULKLEY, R. 1926. "Measurement of consistency as applied to rubber-benzene solutions. *Proceeding of American Society of Testing Material*, 26, part. II, 621-633.
- HILL, R. 1948. *J. Iron Steel Institute*, 158, 177.
- [HTTP://WWW.COVENPRE.ORG.VE/PRESAS/ELGUAPO.HTM](http://www.covenpre.org.ve/presas/elguapo.htm).
- HUANG, X., LIU, C. & GUNG, H. 1997. "A viscoplastic flow modeling of ceramic tape casting". *Material and Manufacturing Process*, 12, N° 5, 935-943.
- HUGHES, T., FEIJÓO, G., MAZZEI, L. & QUINCY, J. 1998. "The variational multiscale method—a paradigm for computational mechanics". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 166, 3-24.

- HUGHES, T., FRANCA, L. & HULBERT, G. 1986. "A new finite element formulations for computational fluid dynamics: VIII. The Galerkin/least-square method for advective-diffusive equations". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 73, 173-89.
- JAY, P., MAGNIN, A. & PIAU, J. 2001. "Viscoplastic fluid flow through a sudden axisymmetric expansion". *J. AIChE*, 47, No. 10, 2155-2166.
- JELAPAYAN, J., DUNCAN, J. & SEED, H. 1982. "Analyses of flow failure of mine tailing dams". *J. Geotechnical Engineering*.
- JELAPAYAN, J., DUNCAN, J. & SEED, H. 1983. "Investigation of flow failure of tailings dams". *J. Geotechnical Engineering*, 109, 172-189.
- JIN, M. & FREAD, D. 1997. "One-dimensional routing of mud/debris flows using NWS FLDWAV". *1st International Conference on Debris Flow Hazard Mitigation*, 687-696.
- JOHNSON, A. 1970. "Physical processes in geology". San Francisco: Freeman Cooper.
- JOSSIC, L. & MAGNIN, A. 2001. "Drag and stability of objects in a yield stress fluid". *J. AIChE* 47, 2666-2672.
- KELESSIDIS, V., MAGLIONE, R., TSAMANTAKI, C. & ASPIRTAKIS, Y. 2006. "Optimal determination of rheological parameters for Herschel–Bulkley drilling fluids and impact on pressure drop, velocity profiles and penetration rates during drilling". *J. Petroleum Science and Engineering*, 53, 203-224.
- LARESE DE TETTO, A. 2012. "A coupled eulerian-PFEM model for the simulation of overtopping in rockfilldams". Ph. D, Universidad Politécnic de Cataluña
- LEE, E. 1984. "Finite deformation effects in plasticity analysis. In numerical analysis of forming processes", Chichester, U. K, Wiley.
- LIU, B. T., MULLER, SUSAN J., DENN, MORTON M. 2002. "Convergence of a regularization method for creeping flow of a Bingham material about a rigid sphere". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 102, 179-191.
- LUBLINER, J. 1990. "Plasticity theory", New York, NY, Macmillan Publishing Company.
- MANDEL, J. 1962. "Ondes plastiques dans un milieu indéfini à trois dimensions". *J. Mechanics*, 1, 30.
- MANGENEY, A., HEINRICH, P. & ROCHE, R. 2000. "Analytical solution for Testing Debris Avalanche Numerical Models". *J. Pure and Applied Geophysics*, 157(6), 1081-1096.
- MASUD, A. & KWACK, J. 2011. "A stabilized mixed finite element method for the incompressible shear-rate dependent non-Newtonian fluids: Variational Multiscale framework and consistent linearization". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 200, 577-596.
- MERKAK, O., JOSSIC, L. & MAGNIN, A. 2006. "Spheres and interactions between spheres moving at very low velocities in a yield stress fluid". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 133, 99-108.
- MISES, R. 1913. "Mechanik der festen Körper im plastisch deformablen Zustand". *Gottinger Nachr, math-phys Kl*, 582–592.
- MISSIRLIS, K., ASSIMACOPOULOS, D., MITSOULIS, E. & R., C. 2001. "Wall effect for motion of spheres in power-law fluids". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 96, 459-471.
- MITSOULIS, E. 1998. "Three-dimensional non-Newtonian computation of extrudate swell the finite element method". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180, 333-344.

- MITSOULIS, E. 2004. "On creeping drag flow of a viscoplastic fluid past a circular cylinder: wall effects". *J. Chemical Engineering Science*, 59, 789-800.
- MITSOULIS, E. 2007. Annular extrudate swell of pseudoplastic and viscoplastic fluids. *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 141, 138-147.
- MITSOULIS, E. & GALAZOULAS, S. 2009. "Simulation of viscoplastic flow past cylinders in tubes". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 158, 132-141.
- MITSOULIS, E. & HUILGOL, R. 2003. "Entry flows of Bingham plastic in expansions". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanic.*, 122, 45-54.
- MITSOULIS, E. & ZISIS, T. 2001. "Flow of Bingham plastics in a lid-driven square cavity". *J. Non-Newtonian fluid mechanics*, 101, 173-180.
- NEOFYTOU, P. (ed.) 2005. "A 3rd order upwind finite volume method for generalized Newtonian fluid flow".
- NICKELL, R. & TANNER, R. 1974. "The solution of viscous incompressible jet and free-surface flows using finite-element methods". *J. Fluid mechanics*, 65, part 1, 189-206.
- OLDROYD, J. 1947. "Proc. Camb. Philos.", Soc.
- OÑATE, E. 1980. "La formulación del flujo viscoplastico y sus diversas aplicaciones prácticas por el método de los elementos finitos". *Revista de Obras Públicas*, Febrero-Marzo, 115-129.
- OSTWALD, W. 1925. "Ueber die geschwindigkeitsfunktion derviskosität disperser systeme. (The velocity function of viscosity of disperse systems)". *Kolloid Z*, 36, 99-117.
- PAKDEL, P., SPIEGELBERG, S. & MCKINLEY, G. 1997. "Cavity flows of elastic liquids: two-dimensional flows". *J. Physics fluids*, 9, 3123-3140.
- PANDA, S. & CHHABRA, R. 2010. "Laminar flow of power-law fluids past a rotating cylinder". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 165, 1442-1461.
- PAPANASTASIOU, T. 1987. "Flow of material with yield". *Jl Rheology*, 36, 389-407.
- PARI, H., MARTINS-COSTA, M., FONSECA, C. & FREY, S. 2010. "A numerical investigation of inertia flows of Bingham-Papanastasiou fluids by extra stress-pressure-velocity Galerkin least-squares method". *Editor: Mónica Feijo Naccache*, XXXII, No. 5.
- PASTOR, M., QUECEDO, M., M., H., MERODO, J., FERNANDEZ, J. & MIRA, P. 2004. "Simple approximation to bottom friction for Bingham fluid depth integrated models". *J. Hydraulic Engineering*, 130, núm. 2, 149-155.
- PERIĆ, D. & SLIJECPČEVIĆ, S. 2001. "Computational modelling of viscoplastic fluids based on a stabilised finite element method". *In: PRESS, M. U. (ed.) Engiennering computations*.
- PHAN-THIEN, N. & DOU, H. 1999. "Viscoelástico flow past a cylinder: Drag coefficient". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 180, 243-266.
- PIAU, J. 2002. "viscoplastic boundary layer". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 102, 193-208.
- PIERSON, T. & COSTA, J. 1987. "A rheological classificaton of subaerial sediment-water flows". *Review in Engineering Geology*. American Geological Society.
- PLANAS, R., BADÍA, S. & CODINA, R. 2011. "Aproximation of the inductionless MHD problem using a stabilized finite element method". *J. Computational Physics*, 230 (2011), 1281-1303.
- PRAGER, W. 1961. "Introduction to mechanics of continua", Boston, Ginn.
- PRANDTL, L. 1920. "Über die härte plastischer Körper. . *Göttinger Nachrichten*, 74-85.
- PRINCIPE, J. 2008. "Subgrid scale stabilizad finite elements for low speed flows". Universitat Politècnica de Catalunya.

- PUTZ, A., BURGHELEA, T. & MARTINEZ, D. 2008. "Settling of an isolated spherical particle in a yield stress shear thinning fluid". *J. Physics of fluids*, 20.
- REDDY, K. & TANNER, R. 1977. "Finite Element approach to die-swell problem of non-Newtonian fluids". *Fluid Mechanics Conference*. Australia.
- REINER, E. 1958. "*Handbuch der Physik*", Berlin, Springer-Verlag.
- REYNOLDS, O. 1985. "On the dilatancy of media composed of rigid particles in contact". *Philos. Mag.*.
- RITTER, A. (ed.) 1892. "*Die Fortpflanzung der Wasserwellen*".
- ROQUET, N. & SARAMITO, P. 2003. "An adaptive finite element method for Bingham fluid flows around a cylinder". *J. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 192, 3317-3341.
- SANJAY, M. & JAYARAMAN, K. 2002. "Asymmetric flows in planar symmetric channel with large expansion ratio". *Int. J. for Numerical Method in Fluids*, 38, 945-962.
- SAVAGE, S. & HUTTER, K. 1989. "The dynamic of avalanches of granular material down from initiation to runout". *J. Fluid Mech.*, 199, 177-215.
- SCOTT, P., MIRZA, F. & VLACHOPOULOS 1988. "Finite-element simulation of laminar viscoplastic flows with regions of recirculations". *J. Rheology*, 32, 387-400.
- SCHLICHTING, H. 1968. "*Boundary layer theory*", McGraw Hill.
- SCHOKLITSCH, A. 1917. "*Über dambruchwellen*", Vienna.
- SHAPIRA, M., DEGANI, D. & WEIHS, D. 1990. "Stability and existence of multiple solutions for viscous flow in suddenly enlarged channel". *Computers and Fluids*, 18, 239-258.
- SIVAKUMAR, P., BHARTI, R. & CHHABRA, R. 2006. "Effect of power-law index on critical parameter for power-law across an unconfined circular cylinder". *J. Chemical Engineering Science*, 61, 6035-6046.
- SIVAKUMAR, P., BHARTI RAM PRAKASH Y CHHABRA R. P. 2006. "Effect of power-law index on critical parameter for power-law across an unconfined circular cylinder". *Chemical Engineering Science*, 61, 6035-6046.
- SLIJECPČEVIĆ, S. & D., P. 2004. "Some aspects of computational modelling of non-Newtonian fluids based on stabilised finite element method". In: EDS., W. R. Y. P. L. Q. A. (ed.) *European Congress on Computational Methods in Applied Science and Engineering*. Jyväskylä: P. Neittaanmaki, T. Rossi, K. Majava, y O. Pironneau (eds.).
- SOUZA, M. P. R. & DUTRA, E. S. S. 2004. "Viscosity function for yield-stress liquids". *Appl. Rheol.*, 14, 296-302.
- STOKER, J. 1957. "*Water wave. The mathematical theory with applications*", New York, USA, Intersciences Publishers.
- STOKES, G. 1851  
"On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums". *Trans. Cambridge Philos. Soc.* 9, 8. Reprinted in G. Stokes, Larmor y J. Rayleigh, *Mathematical and Physical Papers* (Cambridge University Press, Cambridge
- TABUTEAU, H. & COUSSOT, P. 2007. "Drag force on a sphere in steady motion through a yield-stress fluid". *J. Rheology*, 5 (1), 125-137.
- TAKAHASHI, T. (ed.) 2007. "*Debris flow: Mechanics, prediction and countermeasures*", London, UK: Taylor & Francis Group.
- TANG, G., WANG, S. & TAO, W. 2011. "Bingham fluid simulation with the incompressible lattice Boltzmann model". *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 166, 145-151.
- TANNER, R. (ed.) 1988. "*Engineering Rheology*": Oxford University Press.

- TANNER, R. 1992. *"Engineering rheology"*, Oxford, Oxford Science Publications.
- TANNER, R. 1993. "Stoke paradox for power-law fluid around cylinder". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanic*, 50, 217-224.
- TANNER, R. 2000. *"Engineering rheology"*, Oxford University Press.
- TANNER, R. & MILTHORPE 1983. "Numerical simulation of flow fluids with yield stress", Num. meth. lam. turb. flow". In: EDS. C. TAYLOR, J. A. J. A. W. R. S. (ed.) *Proc. 3rd Int. Conf., Scattle*. Swasea, UK: Pineridge Press.
- VALENTIC, L. & EWHITMORE, R. 1965. "The terminal velocity of sphere in Bingham plastics". *Brit. J. Applied Physic*, 16, 1197-1203.
- VAN DYKE, M. (ed.) 1964. *"Perturbation methods in fluid mechanics"*, New York: Academic Press.
- VOELLMY, A. 1955. "Über die Zer störungskraft von Law inen". *Schweizerische Bauzeitung*, 73, 212-285.
- VOLA, D., BOSCARDIN, L. & LATCHÉ, J. 2003. "Laminar unsteady flows of Bingham fluids:a numerical strategy and some benchmark results". *J. Computational Physics*, 187, 441-456.
- VOLAROVICH, M. & GUTKIN, A. 1953. "Theory of flow in a viscoplastic medium". *J. Colloid*, 15, 153-159.
- WALTERS, K. & TANNER, R. 1992. "The motion of a sphere through an elastic liquid". *Transport processes in bubbles, drops and particles*. New York: Hemisphere: In R. P. Chhabra, y D. DeKee (Ed.).
- WEISSENBERG, K. 1949. *Proc. 1st Intern. Congr. Rheology, Amsterdam*.
- WESTERBERG, L., LUNDSTRÖM, T., HÖGLUND, E. & LUGT, P. M. 2010. "Investigation of grease flow in a rectangular channel including wall slip effects using microparticle image velocimetry". *Tribology Transaccions*.
- YANO, K. & DAIDO, A. 1965. "Fundamental study on mud.flow: Bull". *DPRI*, 69-83.
- YOSHIOKA, N. & ADACHI, K. 1971a. "On variational principles for a non-Newtonian fluid". *J. Chemical Engineering Japan*, 4, 217-220.
- YOSHIOKA, N., ADACHI, K. & ISHIMURA, H. 1971b. "On creeping flow of a viscoplastic fluid past a sphere". *Kagaku Kogaku*, 10, 1144-1152.
- ZIENKIEWICZ, O. & GODBOLE, P. 1975. *"Viscous, Incompresible Flow with Special Reference to Non-Newtonian (plastic) Fluids"*, from *Finite Element in fluids*.
- ZIENKIEWICZ, O., JAIN, P. & OÑATE, E. 1978. "Flow of solids during forming and extrusion: some aspect of numerical solutions". *Int. J. Solids Struct.*, 14, 15-38.
- ZISIS, T. & MITSOULIS, E. 2002. "viscoplastic flow around a cylinder kept between parallel plates". *J. Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 105, 1-20.