

Hans-Jürgen Zimmermann

**Operations Research**

**Aus dem Programm**  
**Mathematik**  
**für Wirtschaftswissenschaftler**

**Mathematik für Wirtschaftsingenieure**  
**Band 1 und 2**

von Norbert Henze und Günter Last

**Fuzzy Methoden in der Wirtschaftsmathematik**

von Hubert Frank

**Ökonometrie**

von Jörg-Uwe Löbus

**Einführung in die Spieltheorie**

von Walter Schlee

**Einführung in die angewandte Wirtschaftsmathematik**

von Jürgen Tietze

**Einführung in die Finanzmathematik**

von Jürgen Tietze

**Finanzmathematik für Einsteiger**

von Moritz Adelmeyer und Elke Warmuth

**Finanzderivate mit MATLAB®**

von Ansgar Jüngel und Michael Günther

**Derivate, Arbitrage und Portfolio-Selection**

von Wilfried Hausmann, Kathrin Diener und Joachim Käsler

**Optionsbewertung und Portfolio-Optimierung**

von Ralf und Elke Korn

**Zinsderivate**

von Stefan Reitz, Willi Schwarz und Marcus R. W. Martin

**vieweg**

Hans-Jürgen Zimmermann

# **Operations Research**

**Methoden und Modelle.  
Für Wirtschaftsingenieure,  
Betriebswirte, Informatiker**



Bibliografische Information Der Deutschen Bibliothek  
Die Deutsche Bibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliografie;  
detaillierte bibliografische Daten sind im Internet über <<http://dnb.ddb.de>> abrufbar.

**Prof. Dr. Hans-Jürgen Zimmermann**  
RWTH Aachen  
Institut für Wirtschaftswissenschaften  
Operations Research  
Templergraben 64  
52062 Aachen

E-Mail: [zi@or.rwth-aachen.de](mailto:zi@or.rwth-aachen.de)

1. Auflage März 2005

Alle Rechte vorbehalten

© Springer Fachmedien Wiesbaden 2005

Ursprünglich erschienen bei Friedr. Vieweg & Sohn Verlag/GWV Fachverlage GmbH,  
Wiesbaden 2005

Lektorat: Ulrike Schmickler-Hirzebruch / Petra Rußkamp  
[www.vieweg.de](http://www.vieweg.de)



Das Werk einschließlich aller seiner Teile ist urheberrechtlich geschützt. Jede Verwertung außerhalb der engen Grenzen des Urheberrechtsgesetzes ist ohne Zustimmung des Verlags unzulässig und strafbar. Das gilt insbesondere für Vervielfältigungen, Übersetzungen, Mikroverfilmungen und die Einspeicherung und Verarbeitung in elektronischen Systemen.

Umschlaggestaltung: Ulrike Weigel, [www.CorporateDesignGroup.de](http://www.CorporateDesignGroup.de)

Gedruckt auf säurefreiem und chlorfrei gebleichtem Papier.

ISBN 978-3-528-03210-4

ISBN 978-3-322-93906-7 (eBook)

DOI 10.1007/978-3-322-93906-7

# Vorwort

Die Meinungen darüber, was unter „Operations Research“ zu verstehen ist, gehen – vor allem in Deutschland – auseinander. Es gibt Vertreter der Auffassung, dass „Operations Research“ weitgehend aus den meist mathematischen Modellen, Methoden und Theorien bestehe, die im Laufe der Zeit auf diesem Gebiete entwickelt worden sind. Andere meinen, dass zum „OR“ mehr gehöre, nämlich die Art wie man Probleme angehe, der interdisziplinäre Arbeitsstil, die Modellierung von Problemen auf verschiedenen Gebieten und unter Umständen sogar die eigentlich in die Informatik gehörende optimale Implementierung von Algorithmen in „tools“ oder auf elektronischen Rechenanlagen jeder Art. In Kapitel 1 wird mehr über die verschiedenen Auffassungen gesagt werden. Für dieses Buch ist die Diskussion um das Selbstverständnis des OR von sekundärer Bedeutung, da es sich mit Methoden und Modellen und nicht mit dem Prozess des OR befasst, also mit dem Teil des ORs, der unbestritten ist.

Operations Research oder auch Unternehmensforschung, wie dieses Gebiet in Deutschland auch genannt wird, war seit den 50iger Jahren in Deutschland weitgehend eine Disziplin mit der man sich primär in der Betriebswirtschaft und später in der Mathematik beschäftigte. Seit geraumer Zeit gewinnt OR auch für Ingenieure, Informatiker, ja selbst Mediziner an Bedeutung. Dies vor allem weil die elektronische Datenverarbeitung in diesen Gebieten Einzug gehalten hat und sich immer stärker zum notwendigen Werkzeug entwickelt. Um aber EDV Anlagen benutzen zu können muss man vorher die relevanten Probleme und Abläufe formal modellieren, und dabei kann OR sehr hilfreich sein.

Eine wichtige Rolle spielt das OR ferner bei der Bewältigung der durch die fortschreitende Globalisierung immer größer werdende Komplexität der der Entscheidungsfällung unterliegenden Systeme. Diese Systeme sind nur noch mit großen EDV-Systemen abzubilden, die gewöhnlich große Datenbanken (evtl. auch Warehouses), Transaktionssysteme und intelligente entscheidungsvorbereitende Module enthalten. Vor allem für die letzteren ist der Einsatz von OR Verfahren fast eine „conditio sine qua non“. Hier liegt sicher auch eine der zukünftigen Chancen und Herausforderungen für das OR: Während in den Anfangsstadien des OR die Hauptprobleme bei der Anwendung von OR im Mangel von EDV-lesbaren Daten, leistungsfähiger Hard- und Software lagen, ist es heute oft der Überfluss solcher Daten, der Probleme bereitet. Hierdurch sind im OR ganz neue Problemstellungen – wie z. B. im Data-Mining – entstanden, auf die leider in diesem Buch nicht eingegangen werden kann.

Auf ein wichtiges Merkmal des OR, das inzwischen sicher nicht mehr auf das OR beschränkt ist, aber dort wohl zuerst bewusst angewandt wurde, soll noch kurz eingegangen werden: Die interdisziplinäre Zusammenarbeit. Man kann sich sicher

vorstellen, dass ein Algorithmus oder eine neue Modellform von einer qualifizierten Einzelperson entwickelt werden kann. Hier sind offensichtlich primär Mathematiker gefragt. Will man OR jedoch praktisch anwenden, so ist auf eine interdisziplinäre Zusammenarbeit nicht zu verzichten. Zu einem solchen Team gehören sicher Experten aus dem Bereich aus dem das zu lösende Problem stammt bzw. die später mit dem entwickelten System arbeiten müssen. Dazu sollten Personen kommen, die mit den vorhandenen OR Algorithmen vertraut sind oder sie weiterentwickeln können bzw. die eingesetzten OR-„Tools“ genügend kennen. Darüber hinaus sind unverzichtbar Informatiker, die die benutzten OR-Verfahren optimal implementieren oder in das bestehende EDV-Umfeld integrieren können. Dies ist vielleicht auch einer der Unterschiede zwischen Wissenschaft oder Algorithmenentwicklung und Anwendung. Obwohl auch in wissenschaftlichen Veröffentlichungen der Anteil der Beiträge mit mehreren Autoren zunimmt, kann man hier doch noch eine beträchtliche Zahl von Einautorenbeträgen finden. Bei größeren praktischen Anwendungen von OR ist m. E. die Teamarbeit unverzichtbar. Dies macht auch die gute Lehre von OR schwierig: Algorithmen lassen sich relativ einfach in Vorlesungen vermitteln. Modellieren, Implementieren und in interdisziplinären Teams kommunizieren erfordert sicher besondere Lehrformen.

In den letzten Jahrzehnten ist der Fundus an OR-Verfahren stetig erweitert worden. Bestehende Algorithmen sind verbessert und verfeinert worden, neue Gebiete sind hinzu gekommen und neue, aus der Praxis angeregte, Modellformen sind entstanden. Auch in der Praxis sind neue Schwerpunkte entstanden, die zu speziell dafür geeigneten Verfahren geführt haben. So sind z. B. die Gebiete der Multi Criteria Analyse, wissensbasierte Ansätze, Fuzzy Set-Theorie basierte Methoden und andere Ansätze in der Theorie zu großen Gebieten gewachsen. Heuristiken sind wesentlich verbessert worden. Aber auch exakt optimierende Verfahren, vor allem auf dem Gebiet der Mathematischen Programmierung, sind so erheblich verbessert worden, dass heute auch sehr große Modelle exakt optimiert werden können für die man vor 10 Jahren noch auf Heuristiken zurückgreifen musste. Als ein Gebiet der Praxis, das in den letzten 10 Jahren erheblich in Umfang und Wichtigkeit zugenommen hat, kann z. B. die Logistik gelten. Es ist erfreulich zu beobachten, dass auch kommerzielle Programmsysteme (wie z. B. APO von SAP) in zunehmendem Maße Operations Research Verfahren enthalten. Es ist daher auch nicht überraschend, dass in den letzten 10 Jahren viele gute Bücher erschienen sind, die sich auf den neuesten Stand sehr spezieller Algorithmen (z. B. in der kombinatorischen Optimierung) oder spezieller Modelltypen (z. B. in der Logistik) konzentrieren. Allerdings setzen diese Werke sehr oft die Vertrautheit des Lesers mit klassischen OR-Gebieten, wie z. B. des Linearen Programmierens, voraus.

Dieses Lehrbuch soll Studenten der Informatik, des Ingenieurwesens, der Betriebswirtschaft und anderer am Operations Research interessierter Gebiete den Zugang zum Instrumentarium des OR erleichtern. Dafür werden Grundkenntnisse in der linearen Algebra, der Differentialrechnung und der Stochastik vorausgesetzt. Da heutzutage Operations Research und Informatik, insbesondere Wirtschaftsinformatik, sehr eng miteinander verknüpft sind, soll die Einführung in einer entsprechenden

Weise erfolgen, ohne jedoch direkt Algorithmen in Form von Programmen zu beschreiben. Hierzu existieren spezielle Bücher. Hier werden jedoch in Form von Nassi-Shneidermann-Diagrammen die Grundstrukturen skizziert, so dass das Verständnis von derartigen EDV-Programmen erleichtert werden dürfte. Darüber hinaus wird in Abschnitt 3.13 speziell auf die Benutzung von OR-Software eingegangen werden.

Die Zielgruppe des Buches sind also, neben Praktikern, die es vielleicht als Nachschlagewerk benutzen möchten, primär Studenten der Informatik, des Ingenieurwesens und der Wirtschaftswissenschaften, die mit dem Studium des Operations Research beginnen. Es ist als ein Grundlehrbuch gedacht, das für eine zweisemestrige Einführungsvorlesung besonders geeignet ist. Im Vordergrund steht die Darstellung der Grundlagen aller der Bereiche, die man heute zum Kern der OR-Verfahren und Modelle rechnen kann. Manche relevanten Gebiete, wie z. B. das der Wissensbasierten Systeme, das Constraint-Programming etc. konnten leider nicht aufgenommen werden, da sie den Rahmen des Buches gesprengt hätten. Der gebotene Stoff wurde bewusst auf das eingeschränkt, was ein Student in einer zweisemestrigen Vorlesung erlernen kann. Bei manchen Gebieten (wie z. B. der Netzplantechnik) lässt sich in diesem Rahmen der heutige Stand der Technik darstellen. Bei anderen Gebieten (wie z. B. der Mathematischen Programmierung) musste aufgrund des Umfangs der heute existierenden Literatur auf Referenzen verwiesen werden, die den heutigen Stand des Wissens darstellen. Didaktische Erwägungen genossen insgesamt den Vorrang vor dem Streben nach mathematischer Finesse. Um dem Leser den Zugang zu weiterführender Literatur zu erleichtern, ist am Ende jedes Kapitels Literatur genannt, die für ein vertieftes Studium zu empfehlen ist. Der Student findet an gleicher Stelle Übungsaufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zusammengefasst sind.

Die im Buch benutzte Symbolik stellt einen Kompromiss dar: Auf der einen Seite wurde angestrebt, Symbole möglichst durchgängig mit der gleichen Bedeutung zu verwenden; auf der anderen Seite sollten die benutzten Symbole weitgehend denen entsprechen, die sich in den einzelnen Gebieten allgemein durchgesetzt haben. Teilweise widersprechen sich diese Ziele. Deshalb wurde eine Teilmenge der Symbole durchgängig benutzt. Diese sind im Symbolverzeichnis zusammengefasst. Alle anderen Symbole werden jeweils kapitelweise in der Form definiert, wie sie gebräuchlich sind.

Die Struktur des Buches orientiert sich an der Vorstellung, dass einer der zentralen Begriffe im Operations Research der der „Entscheidung“ ist. Daher widmet sich Kapitel 2 zunächst der Modellierung von Entscheidungen in verschiedenen Situationen und aus verschiedenen Sichten. Die Kapitel 3 bis 7 behandeln Verfahren zur Bestimmung optimaler oder guter Lösungen, wobei zunächst die optimierenden und dann die heuristischen Verfahren behandelt werden. Modelle mehr darstellenden Charakters findet der Leser in den Kapiteln 8 und 9.

Der Student sollte sich darüber im Klaren sein, dass er nach dem Lesen dieses Buches kein versierter Operations Researcher ist. Er wird jedoch in der Lage sein, gängige Methoden selbst anzuwenden. Er sollte darüber hinaus einen Überblick über

die anderen Gebiete des Operations Research haben, der es ihm erlaubt, die neuere Literatur zu verfolgen, selbst vertiefte Studien durchzuführen oder weitergehenden Lehrveranstaltungen folgen zu können.

Dieses Buch entstand aus der über dreißigjährigen Lehrtätigkeit an der RWTH Aachen, sowohl in dem seit 1975 bestehenden viersemestrigen Aufbaustudium für Operations Research und Wirtschaftsinformatik, zu dem Studenten zugelassen werden, die ein Studium der Mathematik, der Informatik, der Ingenieur- oder Wirtschaftswissenschaften absolviert haben, als auch in Praktikerseminaren und Lehrveranstaltungen in anderen Studiengängen. Die vertretenen Meinungen sind sicher auch durch eine umfangreiche praktische Tätigkeit auf dem Gebiet des Operations Research beeinflusst.

Bei der Erstellung des Manuskriptes dieses Buches durfte ich die Kooperation verschiedener Personen genießen. Ich darf mich dafür herzlich bei Herrn Kollegen Univ.-Prof. Hans-Jürgen Sebastian bedanken, der den Abschnitt 4.3 beisteuerte und mir auch in vielen anderen Hinsichten die Arbeit erleichterte, bei Herrn Dr. Stefan Irnich, der Abschnitt 3.13 schrieb und mich auch sonst in vielerlei Hinsicht unterstützte und bei Herrn Stefan Buhr, der unermüdlich an einem Manuskript in  $\text{\LaTeX}$  arbeitete, die Zeichnungen erstellte und auch in anderen Weisen stets meine Autorenwünsche verwirklichte, selbst wenn ich dies nicht für möglich hielt. Ohne die Kooperation dieser Kollegen hätte das Buch nicht entstehen können.

Aachen 2004

Hans-Jürgen Zimmermann



# Inhaltsverzeichnis

<b>Vorwort</b>	<b>V</b>
<b>Inhaltsverzeichnis</b>	<b>IX</b>
<b>Symbolverzeichnis</b>	<b>XIII</b>
<b>Einführung</b>	<b>1</b>
<b>1 Die Geschichte des Operations Research</b>	<b>6</b>
1.1 Der Ursprung im militärischen Bereich . . . . .	6
1.2 Weiterentwicklung im zivilen Bereich . . . . .	8
1.3 Literatur zur Geschichte des Operations Research . . . . .	11
<b>2 Entscheidungs- und Spieltheorie</b>	<b>12</b>
2.1 Entscheidungstheoretische Richtungen . . . . .	12
2.2 Grundmodelle der Entscheidungslogik . . . . .	14
2.2.1 Das Grundmodell der Entscheidungsfällung . . . . .	14
2.2.2 Entscheidungssituationen . . . . .	15
2.2.3 Rationale Nutzenfunktionen bei Sicherheit . . . . .	18
2.2.4 Rationalität von Ungewissheitsentscheidungen . . . . .	21
2.2.5 Entscheidungen bei mehreren Zielkriterien . . . . .	28
2.3 Grundmodelle der Spieltheorie . . . . .	33
2.3.1 Spielsituationen und Spielmodelle . . . . .	33
2.3.2 Zweipersonen-Nullsummenspiele . . . . .	34
2.3.3 Zweipersonen-Nichtnullsummenspiele . . . . .	39
2.3.4 N-Personenspiele (Theorie der Koalitionsbildung) . . . . .	45
2.4 Deskriptive Entscheidungstheorie . . . . .	48
2.5 Entscheidungen in schlecht strukturierten Situationen . . . . .	52
2.5.1 Einführung . . . . .	52
2.5.2 Zadeh's Min/Max-Theorie der Unscharfen Mengen . . . . .	53
2.5.3 Unscharfe Entscheidungen . . . . .	55
2.5.4 Alternative Systeme . . . . .	60
2.6 Aufgaben zu Kapitel 2 . . . . .	65
2.7 Ausgewählte Literatur zu Kapitel 2 . . . . .	67
<b>3 Lineares Programmieren</b>	<b>68</b>
3.1 Einführung . . . . .	69
3.2 Grundlegende Theorie . . . . .	72
3.3 Das Simplex-Verfahren . . . . .	77
3.3.1 Elemente des Simplex-Algorithmus . . . . .	77

3.3.2	Erweiterungen des Simplex-Algorithmus . . . . .	86
3.4	Dualität im Linearen Programmieren . . . . .	92
3.4.1	Dualitätstheorie . . . . .	92
3.4.2	Die duale Simplex-Methode . . . . .	101
3.5	Postoptimale Analysen . . . . .	104
3.5.1	Sensitivitätsanalysen . . . . .	104
3.5.2	Parametrisches Programmieren . . . . .	106
3.6	Ganzzahliges Lineares Programmieren . . . . .	111
3.6.1	Einführung . . . . .	111
3.6.2	Das Schnittebenen-Verfahren von Gomory . . . . .	115
3.7	Vektormaximummodelle . . . . .	120
3.7.1	Grundmodell . . . . .	120
3.7.2	Lösungswege . . . . .	122
3.8	Stochastisches und Unscharfes Lineares Programmieren . . . . .	127
3.8.1	Stochastisches Lineares Programmieren . . . . .	128
3.8.2	Unscharfes Lineares Programmieren . . . . .	132
3.9	Spezielle Strukturen . . . . .	138
3.10	Lineares Programmieren und Spieltheorie . . . . .	147
3.11	Dantzig-Wolfe'sche Dekomposition und Column Generation . . . . .	150
3.11.1	Problemstellung und Theorie . . . . .	150
3.11.2	Der Dekompositionsalgorithmus von Dantzig und Wolfe . . . . .	153
3.11.3	Dantzig-Wolfe'sche Dekomposition und Column Generation . . . . .	162
3.12	Nicht-Simplex Verfahren zur Lösung Linearer Programme . . . . .	163
3.12.1	Das Grundverfahren von Karmarkar . . . . .	163
3.12.2	Stärken und Schwächen von Interior Point Verfahren. . . . .	174
3.13	Lineares Programmieren und Software . . . . .	176
3.14	Aufgaben zu Kapitel 3 . . . . .	182
3.15	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 3 . . . . .	187
<b>4</b>	<b>Nichtlineare Programmierung</b> . . . . .	<b>188</b>
4.1	Einführung . . . . .	188
4.2	Optimierung ohne Nebenbedingungen . . . . .	189
4.2.1	Grundlegende Begriffe und Konzepte . . . . .	189
4.2.2	Gradienten-Verfahren . . . . .	194
4.2.3	Das Newton- und die Quasi-Newton-Verfahren . . . . .	197
4.3	Konvexe Programmierung und Kuhn-Tucker-Theorie . . . . .	203
4.4	Quadratisches Programmieren . . . . .	208
4.4.1	Grundlagen . . . . .	208
4.4.2	Der Algorithmus von Wolfe . . . . .	210
4.5	Separables Konvexes Programmieren . . . . .	214
4.5.1	Grundlagen . . . . .	214
4.5.2	$\lambda$ - und $\delta$ -Methoden des Separablen Programmierens . . . . .	217
4.6	Strafkostenverfahren . . . . .	220
4.6.1	Penalty-Verfahren . . . . .	221
4.6.2	Barriere-Verfahren . . . . .	222

---

4.6.3	SUMT-Verfahren . . . . .	223
4.7	Aufgaben zu Kapitel 4 . . . . .	228
4.8	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 4 . . . . .	229
<b>5</b>	<b>Entscheidungsbaumverfahren</b>	<b>230</b>
5.1	Einführung . . . . .	230
5.2	Dynamisches Programmieren . . . . .	233
5.2.1	Grundlegende Theorie . . . . .	233
5.2.2	Verschiedene Formen der Stufenoptimierung . . . . .	238
5.2.3	Rechnerische Effizienz des Dynamischen Programmierens . . . . .	244
5.2.4	Stochastische Dynamische Programmierung . . . . .	245
5.3	Branch and Bound-Verfahren . . . . .	252
5.3.1	Grundlagen . . . . .	252
5.3.2	Branch and Bound zur Lösung eines Fertigungssteuerungsmodells . . . . .	254
5.3.3	Die Bestimmung globaler Optima im Separablen Programmieren . . . . .	260
5.4	Aufgaben zu Kapitel 5 . . . . .	267
5.5	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 5 . . . . .	270
<b>6</b>	<b>Heuristische Verfahren</b>	<b>271</b>
6.1	Komplexität von Algorithmen, Modellen und Problemen . . . . .	271
6.2	Eigenschaften und Arten heuristischer Verfahren . . . . .	272
6.3	Anwendungsbereiche heuristischer Verfahren . . . . .	277
6.4	Die Entwicklung heuristischer Verfahren . . . . .	279
6.4.1	Grundlagen des Verfahrensentwurfes . . . . .	279
6.4.2	Analyse und Synthese heuristischer iterativer Verfahren . . . . .	280
6.5	Die Qualität heuristischer Verfahren . . . . .	284
6.6	Beispiele heuristischer Verfahren . . . . .	288
6.6.1	Eröffnungsverfahren . . . . .	288
6.6.2	Verbesserungsverfahren . . . . .	297
6.7	Meta-Heuristiken: Tabu Search . . . . .	298
6.8	Aufgaben zu Kapitel 6 . . . . .	305
6.9	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 6 . . . . .	306
<b>7</b>	<b>Ganzzahlige Lineare Programmierung</b>	<b>307</b>
7.1	Ganzzahlige Operations Research Modelle . . . . .	307
7.2	Verfahren der Ganzzahligen Linearen Programmierung . . . . .	310
7.2.1	Schnittebenen-Verfahren . . . . .	310
7.2.2	Dekompositionsverfahren . . . . .	313
7.2.3	Heuristische Verfahren . . . . .	322
7.3	Aufgaben zu Kapitel 6 . . . . .	330
7.4	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 7 . . . . .	333
<b>8</b>	<b>Graphen, Bäume, Netze, Netzpläne</b>	<b>334</b>
8.1	Grundlagen der Graphentheorie . . . . .	334

8.1.1	Graphen . . . . .	334
8.1.2	Bäume und Gerüste . . . . .	343
8.1.3	Netze und Netzwerke . . . . .	345
8.2	Graphentheoretische Verfahren . . . . .	348
8.2.1	Die Ermittlung kürzester Wege in Netzwerken . . . . .	348
8.2.2	Die Ermittlung längster Wege . . . . .	353
8.2.3	Die Ermittlung maximaler Flüsse . . . . .	358
8.3	Netzpläne mit deterministischer Struktur . . . . .	363
8.3.1	Grundlagen . . . . .	363
8.3.2	Strukturplanung . . . . .	366
8.3.3	Zeitplanung . . . . .	370
8.3.4	Kapazitätsplanung . . . . .	375
8.3.5	Kostenplanung . . . . .	382
8.4	Netzpläne mit stochastischer Struktur . . . . .	388
8.5	Aufgaben zu Kapitel 8 . . . . .	393
8.6	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 8 . . . . .	396
<b>9</b>	<b>Theorie der Warteschlangen</b>	<b>397</b>
9.1	Grundstrukturen . . . . .	397
9.2	Klassifizierung und Beschreibung von Warteschlangenmodellen . . . . .	403
9.3	Einige stochastische Prozesse . . . . .	404
9.3.1	Die Beschreibung und Klassifizierung stochastischer Prozesse . . . . .	404
9.3.2	Markov-Prozesse . . . . .	407
9.3.3	Poisson-Prozesse . . . . .	410
9.3.4	Geburts- und Sterbeprozesse . . . . .	411
9.4	Die Modellierung von Warteschlangensystemen . . . . .	415
9.4.1	Das System M/M/1 . . . . .	415
9.4.2	Das System M/M/1/R . . . . .	421
9.5	Warteschlangenmodelle als Entscheidungshilfe . . . . .	422
9.6	Aufgaben zu Kapitel 9 . . . . .	427
9.7	Ausgewählte Literatur zu Kapitel 9 . . . . .	428
	<b>Lösungen der Aufgaben</b>	<b>429</b>
	<b>Index</b>	<b>450</b>
	<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>457</b>

# Symbolverzeichnis

$<, \leq$	kleiner, kleiner oder gleich
$>, \geq$	größer, größer oder gleich
$a \gg b$	$a$ wesentlich größer als $b$
$a \prec b$	$a$ schlechter als $b$
$a \sim b$	$a$ gleichwertig zu $b$
$a \succ b$	$a$ besser als $b$
$a \gtrsim b$	$a$ besser oder gleichwertig zu $b$
$a \lesssim b$	$a$ ungefähr gleich $b$ oder möglichst nicht kleiner als $b$
$\lceil a \rceil$	kleinste ganze Zahl größer oder gleich $a$
$\lfloor a \rfloor$	größte ganze Zahl kleiner oder gleich $a$
$\in$	Element von
$\notin$	nicht Element von
$A \subset B$	$A$ ist Teilmenge von $B$
$A \subseteq B$	$A$ ist enthalten in oder gleich $B$
$A \cup B$	Vereinigung von $A$ und $B$
$A \uplus B$	disjunkte Vereinigung von $A$ und $B$
$A \cap B$	Schnittmenge von $A$ und $B$
$\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^-$	Menge der positiven, negativen reellen Zahlen
$(a; b)$	offenes Intervall von $a$ bis $b$ , $a < b$
$[a; b]$	abgeschlossenes Intervall von $a$ bis $b$ , $a < b$
$\{x \mid \dots\}$	Menge aller $x$ , für die gilt ...
$n!$	$n$ Fakultät mit $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ , $n \in \mathbb{N}$ ; $0! := 1$
$\prod_{i=1}^n a_i$	$a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n$
$\sum_{i=1}^n a_i$	$a_1 + a_2 + \dots + a_n$
$\int_a^b$	bestimmtes Integral in den Grenzen $a$ und $b$

---

$\frac{\partial F}{\partial x}$	Ableitung von $F$ nach $x$
$\lim_{h \rightarrow 0} x_n$	Limes von $x_n$ für $h$ gegen 0
$ a $	Betrag von $a$ mit $a := \begin{cases} a, & \forall a \geq 0 \\ -a, & \forall a < 0 \end{cases}$
$\odot^h$	Zuweisung, wobei $h$ die Reihenfolge der Zuweisung bestimmt
$x/y/z$	3-Tupel
$\mathbb{R}^n$	$n$ -dimensionaler euklidischer Raum
$P(A B)$	Wahrscheinlichkeit, dass Ereignis $A$ eintritt, wenn Ereignis $B$ bereits eingetreten
$E(x)$	Erwartungswert der Zufallsvariablen $x$
$h_i; h_{ij}$	nicht negativer gebrochener Anteil, $0 \leq h_i, h_{ij} < 1$
$B$	Basis
$B^{-1}$	Basisinverse
$N$	Nichtbasismatrix
$Z^*$	aktuelle Zielfunktionswerte einer Basis $B$
$z^0$	optimale Zielfunktionswerte einer primal und dual zulässigen, optimalen Basis $B^0$
$I$	Einheitsmatrix
$x_j; \bar{x}_j$	primale Struktur-/Schlupfvariable
$y_i; \bar{y}_i$	duale Struktur-/Schlupfvariable
$\Delta z_j$	Kriteriumselement
$H_i$	Hilfsvariable
$\mathbf{0}$	Nullvektor
$\square$	Ende Beispiel
$\blacksquare$	Ende Beweis