

# Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en deformaciones finitas. Modelos degradables

M. Dolores G. Pulido

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en Ingeniería  
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña  
Campus Norte, Edificio C1, 08034 Barcelona, España  
Tel.: 34 93 401 64 73; Fax: 34 93 401 10 48  
e-mail: pulido@cimne.upc.edu

Javier Oliver

Departamento de Resistencia de Materiales y Estructuras en Ingeniería  
ETS de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos  
Universidad Politécnica de Cataluña  
Campus Norte, Edificio C1, 08034 Barcelona, España  
Tel.: 34 93 401 64 90; Fax: 34 93 401 10 48  
e-mail: oliver@cimne.upc.edu

## Resumen

Partiendo de la *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA)* como marco para modelar el fenómeno de localización de deformaciones y discontinuidades del campo de desplazamientos, el presente artículo extiende resultados previos obtenidos por los autores empleando cinemáticas de deformación infinitesimal a entornos de deformaciones finitas. Mediante el análisis de discontinuidad fuerte, y adoptando un modelo de daño continuo (tensión-deformación) isótropo, se deriva el modelo constitutivo discreto proyectado (vector tracción *versus* salto del campo de desplazamiento), junto con las condiciones de discontinuidad fuerte que restringen los estados tensionales en el régimen discontinuo. Se establece una comparación entre los modelos constitutivos discretos proyectados obtenidos con ambas cinemáticas (deformaciones infinitesimales y finitas). Al final del artículo se expone una serie de ensayos numéricos con objeto de corroborar la teoría del modelo propuesto y de enfatizar el papel que desempeña la cinemática de grandes deformaciones en los resultados obtenidos.

**Palabras clave:** *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes, fallo material, localización, fractura, daño, grandes deformaciones.*

## CONTRIBUTIONS TO MATERIAL FAILURE NUMERICAL SIMULATION IN FINITE DEFORMATION SETTINGS. DAMAGE MODELS

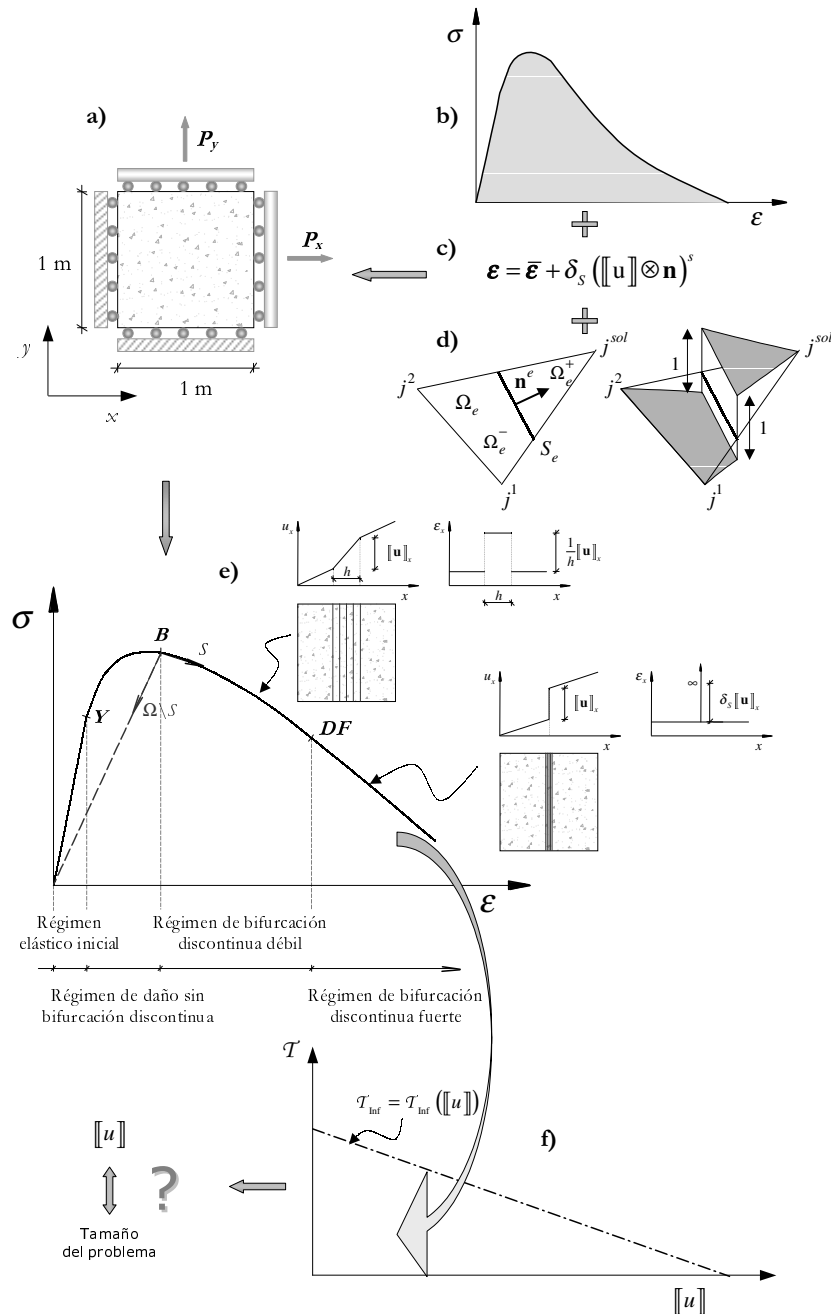
### Summary

Taking the *Continuum strong discontinuity approach (CSDA)* as a framework for modeling displacement discontinuities and strain localization phenomena, this work extends previous results of the authors, for infinitesimal strain settings, to finite deformation scenarios. By means of the strong discontinuity analysis, and for damage continuum (stress-strain) constitutive models, projected discrete (tractions-displacement jumps) constitutive models are derived, together with the strong discontinuity conditions which restrict the stress states at the discontinuous regime. The projected discrete constitutive models obtained for both strain settings (infinitesimal and large) are compared. Finally, some numerical experiments display the theoretical issues, and emphasize the role of the large strain kinematics in the obtained results.

**Keywords:** *Continuum strong discontinuity approach, material failure, localization, fracture, damage, finite strains.*

## INTRODUCCIÓN

El trabajo que se presenta se basa en la denominada *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA)* para modelar el fenómeno de localización de deformaciones y discontinuidades del campo de desplazamientos. Su análisis e implicaciones empleando una cinemática de deformación infinitesimal han sido analizados por los autores en el pasado<sup>5-7,14</sup>, extendiéndose aquí a un entorno de grandes deformaciones.



**Figura 1.** Aproximación continua de discontinuidades fuertes en entornos de deformaciones infinitesimales (CSDA)

El objeto de la investigación es, por tanto, explorar los requisitos y las consecuencias del empleo de dicha aproximación (*CSDA*) basada en una cinemática de deformaciones finitas, demostrando que la metodología y conceptos desarrollados en el caso infinitesimal son totalmente generalizables al caso finito.

En la Figura 1 se esquematizan los principales conceptos que construyen la aproximación de continuo de discontinuidades fuertes empleada (centrada en un modelo continuo de daño y deformaciones infinitesimales, pero extrapolable a cualquier otro modelo constitutivo continuo).

Para simular el comportamiento de materiales que puedan colapsar por fenómenos de localización (Figura 1a) se emplea, en la *CSDA*, un modelo constitutivo estándar (Figura 1b) junto a una cinemática capaz de representar discontinuidades fuertes (Figura 1c) y un elemento finito que capture dicha cinemática (Figura 1d) (Oliver<sup>7</sup> desarrolló una función de forma, para elementos triangulares lineales, que permite representar campos de desplazamientos discontinuos).

Con estos ingredientes, junto a los requisitos que el modelo constitutivo debe cumplir con objeto de dotarle de consistencia física y matemática al introducir la cinemática de discontinuidad fuerte, se obtiene una respuesta estructural capaz de reproducir los diferentes comportamientos constitutivos continuos (en términos tensión *versus* deformación) de la superficie o línea de discontinuidad y del resto del medio a lo largo de todo el proceso de carga (Figura 1e).

Si bien el comportamiento constitutivo de la discontinuidad queda determinado por la respuesta continua ( $\sigma - \epsilon$ ), puede deducirse teóricamente, a partir del modelo continuo de origen, el modelo discreto inducido por la cinemática de discontinuidad fuerte que gobierna el comportamiento de la discontinuidad (Figura 1f).

Y es al analizar los modelos discretos inducidos (que son deducidos teóricamente pero no introducidos de forma explícita en el algoritmo) cuando surge, de manera más nítida, la cuestión que ha centrado el contenido del trabajo de investigación presentado: ¿qué papel desempeña la cinemática de grandes deformaciones en la simulación numérica de fenómenos de localización, en concreto en la *CSDA*?<sup>1</sup>

Podría pensarse, en primera instancia, que por la propia definición de banda de localización (zona de alta concentración de deformación) se requeriría siempre el empleo de una cinemática de grandes deformaciones en la banda. Sin embargo, el término responsable de la concentración de deformaciones es la función Delta de Dirac,  $\delta_S$ , función de distribución que sólo cobra sentido al ser integrada en el dominio sobre el que actúa, desvaneciéndose su valor infinito y recuperando uno concreto finito en la banda de localización.

Se intuye que las grandes deformaciones, o la no linealidad geométrica, se desarrollarán cuando los saltos de la discontinuidad sean grandes en comparación con el tamaño del problema.

Por otro lado, al *proyectar* la cinemática de discontinuidad fuerte los modelos continuos empleados en la simulación en modelos discretos en la discontinuidad, surgen nuevas cuestiones relacionadas con el tipo de modelo discreto que se obtendrá en entornos de grandes deformaciones y su relación con el proyectado por la cinemática de deformación infinitesimal.

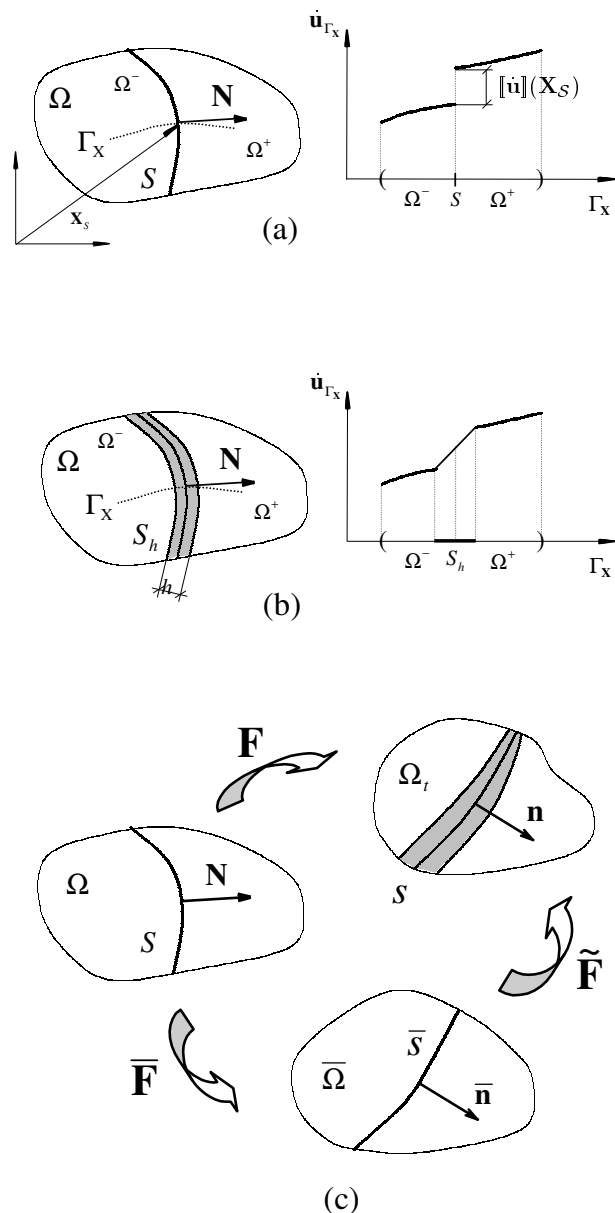
Las cuestiones comentadas argumentan la aproximación adoptada y su enfoque en el entorno de las grandes deformaciones en el presente trabajo.

---

<sup>1</sup>Las grandes deformaciones en régimen prebifurcación desempeñan un papel ampliamente analizado en la literatura, no constituyendo un aspecto central en la investigación del presente trabajo.

### CINEMÁTICA DE MEDIOS DISCONTINUOS

La descripción cinemática del problema en deformaciones finitas se centra, de modo similar al problema en deformaciones infinitesimales, en medios bidimensionales, resultando inmediata su extensión a medios tridimensionales. En el presente apartado sólo se analizarán las descripciones cinemáticas correspondientes a la discontinuidad fuerte y a su expresión regularizada, no desarrollándose la cinemática de discontinuidad débil (perfectamente caracterizada por la cinemática regularizada, como se detalló en el análisis del problema en deformaciones infinitesimales<sup>14</sup>.



**Figura 2.** a) Cinemática de discontinuidad fuerte; b) cinemática regularizada y c) descomposición multiplicativa

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  el dominio, en la configuración de referencia, de un sólido continuo (dominio abierto y acotado con contorno  $\partial\Omega$  suave) que exhibe una discontinuidad fuerte a través de la línea material de discontinuidad  $\mathcal{S} \subset \Omega$  (Figura 2a) con un salto en el campo de velocidad de la forma  $[[\dot{\mathbf{u}}]] = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_{\mathcal{S}^+}) - \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}_{\mathcal{S}^-})$ . El campo vectorial velocidad, para un punto material  $\mathbf{X}$  y un instante  $t$ , se define:

$$\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X}, t) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} [[\dot{\mathbf{u}}]](\mathbf{X}, t); \quad \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{X} \in \Omega^- \\ 1 & \forall \mathbf{X} \in \Omega^+ \end{cases} \quad (1)$$

donde  $\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{X})$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  son dos campos vectoriales de continuidad  $\mathcal{C}^0$  en  $\Omega$ ,  $\mathcal{H}_{\mathcal{S}}$  es la denominada función de Heaviside (función salto) y  $\Omega^-$  y  $\Omega^+$  son dos regiones disjuntas del dominio  $\Omega$  obtenidas por la división que produce la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  en el dominio  $\Omega$ .

El tensor tasa gradiente de la deformación resultante es:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) &= \text{GRAD}(\dot{\mathbf{u}}) \\ &= \underbrace{\text{GRAD}(\dot{\mathbf{u}}) + \mathcal{H}_{\mathcal{S}} \text{GRAD}([[\dot{\mathbf{u}}]])}_{\text{término acotado} = \dot{\mathbf{F}}} + \underbrace{\delta_{\mathcal{S}}([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{N})}_{\text{término no acotado}} \\ &= \dot{\mathbf{F}}(\mathbf{X}, t) + \delta_{\mathcal{S}}([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{N}) \end{aligned} \quad (2)$$

representando  $\mathbf{N}$  el vector unitario normal en un punto  $\mathbf{X}$  de la discontinuidad  $\mathcal{S}$  (Figura 2),  $\text{GRAD}(\cdot)$  el gradiente material de  $(\cdot)$ ,  $\delta_{\mathcal{S}}$  es la distribución delta de Dirac sobre  $\mathcal{S}$  obtenida de la derivación (en el sentido de las distribuciones) de la función Heaviside,  $\nabla \mathcal{H}_{\mathcal{S}}(\mathbf{X}) = \delta_{\mathcal{S}} \mathbf{N}$  y  $\dot{\mathbf{F}}$  un término acotado (regular).

Integrando la ecuación (2) a lo largo del tiempo se obtiene, para el instante  $t$ , el siguiente tensor gradiente de la deformación:

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{1} + \int_0^t \dot{\mathbf{F}} dt + \int_{t_{DF}}^t \delta_{\mathcal{S}}([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{N}) dt = \underbrace{\bar{\mathbf{F}}}_{\text{acotado}} + \delta_{\mathcal{S}}(\Delta[[\mathbf{u}]](\mathbf{X}, t) \otimes \mathbf{N}) \quad (3)$$

donde  $t_{DF}(\mathbf{X})$  representa el instante de inicio del modo de discontinuidad fuerte en el punto material  $\mathbf{X}$ ,  $\Delta[[\mathbf{u}]](\mathbf{X}, t)$  el salto en el desplazamiento entre los instantes  $t$  y  $t_{DF}$  y donde se ha considerado el carácter material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  ( $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ ):

$$\begin{aligned} \Delta[[\mathbf{u}]](\mathbf{X}, t) &= \mathbf{0}; & t < t_{DF} \\ \Delta[[\mathbf{u}]](\mathbf{X}, t) &= [[\mathbf{u}]]_t - [[\mathbf{u}]]_{t_{DF}}; & t \geq t_{DF} \end{aligned} \quad (4)$$

definiendo  $[[\mathbf{u}]]_{t_{DF}}$  como el salto aparente en el desplazamiento al final del régimen de discontinuidad débil ( $t = t_{DF}$ ) descrito en<sup>14</sup>. Conviene hacer notar que el término  $\bar{\mathbf{F}}$  de la ecuación (3) permanece acotado durante todo el proceso de deformación.

### Descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación

Para análisis posteriores es conveniente adoptar la siguiente descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación<sup>1</sup> (Figura 2c):

$$\mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}} \cdot \bar{\mathbf{F}} = [\mathbf{1} + \delta_{\mathcal{S}}(\Delta[[\mathbf{u}]] \otimes \bar{\mathbf{n}})] \cdot \bar{\mathbf{F}}; \quad \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} \quad (5)$$

que introduce el concepto de configuración intermedia *regular*  $\bar{\Omega}$ , descrita mediante una aplicación en  $\mathbb{R}^3$  cuyo gradiente de deformación es regular y viene definido por el tensor

$\bar{\mathbf{F}}$ . De acuerdo con la ecuación (5)  $\bar{\mathbf{n}}$ , vector normal a la superficie  $\mathcal{S}$  en la configuración intermedia, no es un vector unitario ( $\bar{\mathbf{F}} \neq \mathbf{1}$ ).

Con objeto de realizar simulaciones numéricas que involucren este tipo de cinemática se emplea una versión regularizada de la función delta de Dirac mediante la definición de una rebanada del dominio,  $\mathcal{S}_h$ , de espesor  $h$  (Figura 2b), que contiene la superficie  $\mathcal{S}$  ( $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}_h$ ). Considérese la sucesión de funciones de distribución regularizadas siguiente:

$$\delta_S^h = \frac{\mu_S}{h}; \quad \mu_S = \begin{cases} 0 & \forall \mathbf{X} \notin \mathcal{S}_h \\ 1 & \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}_h \end{cases} \quad (6)$$

tal que en el límite, cuando  $h \rightarrow 0$ , se verifica que  $\delta_S^h \rightarrow \delta_S$ .

Empleando esta regularización, y tras algunas operaciones algebraicas, se obtienen las identidades:

$$\dot{\mathbf{F}}^h = \dot{\bar{\mathbf{F}}} + \frac{\mu_S}{h}([\dot{\mathbf{u}}] \otimes \mathbf{N}) \quad (7)$$

$$\mathbf{F}^h = \bar{\mathbf{F}} + \frac{\mu_S}{h}(\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N}) = \underbrace{\left( \mathbf{1} + \frac{\mu_S}{h}(\Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) \right)}_{\tilde{\mathbf{F}}^h} \cdot \bar{\mathbf{F}} = \tilde{\mathbf{F}}^h \cdot \bar{\mathbf{F}} \quad (8)$$

$$\mathbf{F}^{h^{-1}} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot (\tilde{\mathbf{F}}^h)^{-1} = \bar{\mathbf{F}}^{-1} \cdot \left( \mathbf{1} - \frac{\mu_S}{h + \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}}}(\Delta[\mathbf{u}] \otimes \bar{\mathbf{n}}) \right) \quad (9)$$

$$J^h = \det(\mathbf{F}^h) = \det(\bar{\mathbf{F}}) \left( 1 + \frac{\mu_S}{h} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) = \bar{J} \tilde{J}^h \quad (10)$$

$$\bar{J} = \det(\bar{\mathbf{F}}); \quad \tilde{J}^h = \det(\tilde{\mathbf{F}}) = \left( 1 + \frac{\mu_S}{h} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \quad (11)$$

Se define  $\mathbf{n}$  como el vector normal a  $\mathcal{S}$  en la configuración actual (Figura 2c), cuyo módulo no tiene por qué presentar valor unitario:

$$\mathbf{n} = \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} = \tilde{\mathbf{F}}^{h^{-T}} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \frac{\bar{\mathbf{n}}}{\tilde{J}^h} \quad (12)$$

donde se han tenido en cuenta las ecuaciones<sup>II</sup> (5), (8) y (11).

Nótese que, al igual que en la cinemática estudiada en el problema en deformaciones infinitesimales<sup>14</sup>, dependiendo del valor que adopte el parámetro de regularización  $h$ , la ecuación (7) puede caracterizar tanto la cinemática de discontinuidad fuerte ( $h \rightarrow 0$ )<sup>III</sup> como la de discontinuidad débil ( $h \neq 0$ ).

## DEFINICIÓN DEL PROBLEMA. ECUACIONES DE GOBIERNO

Sea  $\Omega \in \mathbb{R}^2$  la configuración de referencia de un sólido y  $\partial\Omega$  su contorno con normal hacia fuera  $\mathbf{V}$  (Figura 3).  $\Gamma_u \subset \partial\Omega$  y  $\Gamma_\sigma \subset \partial\Omega$  ( $\Gamma_u \cup \Gamma_\sigma = \partial\Omega$ ,  $\Gamma_u \cap \Gamma_\sigma = \emptyset$ ) representan subconjuntos de  $\partial\Omega$  donde se prescriben las condiciones de contorno esenciales y naturales, respectivamente. La línea material de discontinuidad  $\mathcal{S}$ , con normal unitaria  $\mathbf{N}$ , divide al sólido en dos partes,  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ .

<sup>II</sup>Por simplicidad, de aquí en adelante el superíndice  $(\cdot)^h$ , que representa la versión regularizada (h) de la entidad  $(\cdot)$ , será omitido.

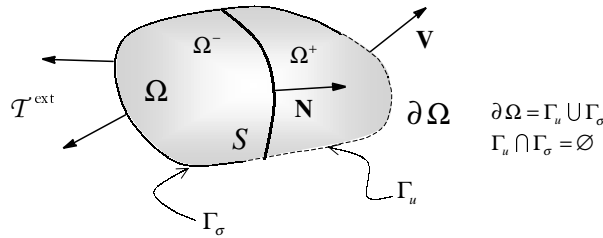
<sup>III</sup>Excepto en la situación  $h \rightarrow 0$ , el campo de deformaciones (7) no es cinemáticamente compatible con (1), pues  $\nabla \mathcal{H}_S(\mathbf{X}) = \delta_S \mathbf{N} \neq \mu_S \frac{1}{h} \mathbf{N}$ .

El equilibrio local del cuerpo se describe mediante las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P} \cdot \nabla_{\mathbf{X}} + \rho_0 \bar{\mathbf{B}} &= \mathbf{0} & \forall (\mathbf{X}, t) \in \Omega \setminus S \times [0, T] & \quad (a) \\
 \mathbf{u} &= \mathbf{u}^* & \forall (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_u \times [0, T] & \quad (b) \\
 \mathbf{P} \cdot \mathbf{V} &= \mathcal{T}^{\text{ext}} & \forall (\mathbf{X}, t) \in \Gamma_\sigma \times [0, T] & \quad (c) \\
 \mathbf{P}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{N} &= \mathbf{P}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{N} & \forall (\mathbf{X}, t) \in S \times [0, T] & \quad (d) \\
 \mathcal{T} &= \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N} = \mathbf{P}_{\Omega^+} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{P}_{\Omega^-} \cdot \mathbf{N} & \forall (\mathbf{X}, t) \in S \times [0, T] & \quad (e)
 \end{aligned} \tag{13}$$

donde  $\bar{\mathbf{B}}$  representa las fuerzas másicas,  $\rho_0$  la densidad en la configuración de referencia,  $\mathbf{P}$  el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff,  $\mathbf{u}^*$  y  $\mathcal{T}^{\text{ext}}$  los valores prescritos de los desplazamientos y tracciones, respectivamente, en el contorno,  $\mathcal{T}$  el vector tracción y  $[0, T]$  el intervalo de tiempo de interés.

En el contexto de las discontinuidades fuertes y de la cinemática regularizada presentada en la sección *Descomposición multiplicativa del tensor gradiente de la deformación* se extiende, como hipótesis *ad hoc*, la ecuación (13d) al interior de la interfaz de discontinuidad  $\mathcal{S}_h$ , obteniéndose la expresión (13e), donde  $\mathbf{P}_S = \mathbf{P}(\mathbf{X}, t)|_{\mathbf{X} \in S}$  es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff evaluado en  $S$ . Esta hipótesis se sustenta en la percepción física de que si existen puntos materiales entre  $\Omega^+$  y  $\Omega^-$ , la continuidad del vector tracción (equilibrio) debería aplicarse también a dichos puntos.



**Figura 3.** Problema de contorno en un medio que exhibe una discontinuidad fuerte

La condición de continuidad del vector tracción (13d) exige el carácter acotado del tensor de tensiones de Cauchy en el interior de la interfaz de discontinuidad,  $\sigma_S$ , así como de la derivada temporal  $\dot{\sigma}_S$ . Dichos requerimientos emergen de razonamientos muy sencillos<sup>IV</sup>, detallándose de modo más exhaustivo en el apartado *Análisis de discontinuidad fuerte*.

Por tanto, el carácter acotado de  $\sigma_S$  y  $\dot{\sigma}_S$  garantiza la naturaleza acotada de  $\mathcal{T}$  y  $\dot{\mathcal{T}}$  (exigida desde un punto de vista físico). El principal objetivo del análisis de discontinuidad fuerte (desarrollado en la sección *Análisis de discontinuidad fuerte*) es, precisamente, determinar los ingredientes que deben introducirse en un modelo constitutivo continuo con objeto de garantizar dicho carácter acotado *incluso en presencia de deformaciones no acotadas*.

<sup>IV</sup>Puesto que la deformación en  $\Omega \setminus S$  viene determinada por  $\bar{\mathbf{F}}$  (tensor acotado por definición, según la ecuación (3)), los tensores  $\mathbf{P}_{\Omega^+}(\bar{\mathbf{F}})$  y  $\mathbf{P}_{\Omega^-}(\bar{\mathbf{F}})$  deben ser acotados en cualquier instante del análisis y, por tanto, también el vector tracción  $\mathcal{T}$  (ecuación (13e)), pues  $\mathbf{N}$  es acotado ( $|\mathbf{N}| = 1$ ). Reescribiendo la ecuación (13e) en términos del tensor de tensiones de Cauchy  $\sigma_S$  se obtiene la expresión:  $\mathcal{T} = \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N} = J \sigma_S \cdot \mathbf{n} = J \sigma_S \cdot \bar{\mathbf{n}}$ , donde se han tenido en cuenta las ecuaciones (10) y (12). Al ser  $J$  y  $\bar{\mathbf{n}}$  entidades acotadas, si todas las componentes de  $\sigma_S$  lo fueran, también lo serían las combinaciones lineales  $\mathcal{T}_{ij} = J (\sigma_S)_{ij} \cdot \bar{n}_j$ . Argumentos similares, aplicados ahora sobre las tasas de diversas entidades, exigen el carácter acotado de  $\dot{\sigma}_S$ .

Del mismo modo que en teoría infinitesimal<sup>14</sup>, para definir completamente el problema se necesitan establecer las ecuaciones constitutivas y las relaciones cinemáticas en todo el dominio. La relación constitutiva adoptada en la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  es la misma que la empleada en el resto del sólido  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ .

## MODELO CONSTITUTIVO DE DAÑO CONTINUO ISÓTROPO

El modelo constitutivo hiperelástico de daño continuo isótropo detallado en la referencia 14 puede extenderse, de modo sencillo, a grandes deformaciones, considerando la función de energía libre elástica,  $\Psi^0$ , apropiada.

Se adoptará como expresión de  $\Psi^0$  la siguiente función<sup>18</sup>:

$$\begin{aligned}\Psi^0(\mathbf{b}) &= \frac{1}{4}\lambda (J^2 - 1) - \left(\frac{\lambda}{2} + \mu\right) \log J + \frac{1}{2}\mu (tr \mathbf{b} - 3) \geq 0 \\ \Psi(\mathbf{b}, r) &= (1 - d)\Psi^0(\mathbf{b}) = \frac{q}{r} \Psi^0(\mathbf{b})\end{aligned}\quad (14)$$

donde  $\Psi$  es la función de energía libre total correspondiente,  $\mathbf{F}(\mathbf{X})$  el tensor gradiente de deformación,  $\mathbf{b}(\mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$  es el tensor izquierdo de deformación de Cauchy-Green,  $J = \det \mathbf{F}$ ,  $\lambda$  y  $\mu$  los parámetros de Lamé,  $r$  representa una variable interna tipo deformación,  $d$  la variable interna de daño, definida en términos de la variable de endurecimiento  $q(r)$  que, a su vez, evoluciona en función del parámetro de endurecimiento/ablandamiento  $\mathcal{H}^V$ .

Los diferentes tensores de tensiones pueden derivarse de (14) de la forma:

$$\begin{aligned}\bar{\boldsymbol{\tau}} &= 2\mathbf{b} \cdot \partial_{\mathbf{b}} \Psi^0 = \frac{1}{2} \lambda (J^2 - 1) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b} - \mathbf{1}) \\ \bar{\boldsymbol{\sigma}} &= \frac{1}{J} \bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{1}{2} \lambda (J - \frac{1}{J}) \mathbf{1} + \mu \frac{1}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{1}) \\ \boldsymbol{\tau} &= (1 - d) \bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{q}{r} \bar{\boldsymbol{\tau}} = \frac{q}{r} \left[ \lambda \frac{(J^2 - 1)}{2} \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b} - \mathbf{1}) \right] \\ \boldsymbol{\sigma} &= (1 - d) \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{q}{r} \bar{\boldsymbol{\sigma}} = \frac{q}{r} \left[ \frac{\lambda}{2} (J - \frac{1}{J}) \mathbf{1} + \mu \frac{1}{J} (\mathbf{b} - \mathbf{1}) \right]\end{aligned}\quad (15)$$

donde  $\bar{\boldsymbol{\tau}}$  y  $\bar{\boldsymbol{\sigma}}$  representan, respectivamente, los tensores de tensiones efectivos de Kirchhoff y de Cauchy y  $\boldsymbol{\tau}$  y  $\boldsymbol{\sigma}$  los tensores de tensiones totales, respectivamente, de Kirchhoff y de Cauchy.

El modelo constitutivo presentado se complementa, del mismo modo que el modelo analizado en teoría lineal, con la ecuación de evolución de la variable interna  $r$ , la variable interna de daño  $d$ , el criterio de daño, las condiciones de carga-descarga, la condición de persistencia y la ley de endurecimiento que se exponen a continuación:

$$\dot{r} = \gamma, \quad r|_{t=0} = r_0 > 0, \quad r \in [r_0, \infty), \quad r_0 = \frac{\sigma_u}{\sqrt{E}} \quad (16)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) \equiv \tau_{\boldsymbol{\sigma}} - q, \quad \tau_{\boldsymbol{\sigma}} = (1 - d)\sqrt{2} \Psi^0 \quad (17)$$

$$\gamma \geq 0, \quad f \leq 0, \quad \gamma f = 0 \quad (18)$$

$$\gamma \dot{f} = 0 \quad (19)$$

<sup>V</sup>Salvo que se especifique lo contrario, se considera un parámetro  $\mathcal{H} \leq 0$ , es decir, sólo se analizan casos con ablandamiento por deformación.



$$\dot{q} = \mathcal{H}(r) \dot{r}, \quad \mathcal{H} = \frac{\partial q(r)}{\partial r}, \quad q_0 = r_0, \quad q_0 \geq q \geq 0 \quad (20)$$

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (0 \leq d \leq 1) \quad (21)$$

donde el parámetro  $\gamma$  es el multiplicador de daño involucrado en las condiciones de carga-descarga;  $f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0$  define la superficie de daño en el espacio de tensiones, acotando el dominio elástico ( $\mathbf{E}_\sigma := \{(\boldsymbol{\sigma}, q); f(\boldsymbol{\sigma}, q) \equiv \tau_\sigma - q \leq 0\}$ ), en función de la norma  $\tau_\sigma$  y de la variable de endurecimiento  $q$  y  $r_0$  determina el dominio elástico inicial, caracterizado en función del límite elástico uniaxial  $\sigma_u$  y del módulo de Young  $E$ .

Los tensores constitutivos espaciales elástico y tangente de daño,  $\mathbf{c}^e$  y  $\mathbf{c}^d$ , respectivamente, se pueden expresar, en los casos sometidos a estados de deformación plana, de la forma:

$$\mathcal{L}_v \bar{\boldsymbol{\tau}} = \mathbf{c}^e : \mathbf{d}, \quad \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} = \mathbf{c}^d : \mathbf{d} \quad (22)$$

$$\mathbf{c}^e = \lambda J^2 (\mathbf{1} \otimes \mathbf{1}) + 2\mu \left[ 1 + \frac{\lambda}{2\mu} (1 - J^2) \right] \mathbf{I} \quad (23)$$

$$\mathbf{c}^d = \frac{q}{r} \mathbf{c}^e + \frac{(\mathcal{H} r - q)}{r^3} \bar{\boldsymbol{\tau}} \otimes \bar{\boldsymbol{\tau}} \quad (24)$$

donde  $\mathcal{L}_v(\cdot)$  representa la derivada Lie de  $(\cdot)$  y  $\mathbf{d}$  el tensor velocidad de deformación.

Se puede demostrar fácilmente que el modelo propuesto en el presente apartado colapsa en el detallado en la referencia 14 cuando se consideran las hipótesis que definen la cinemática de deformaciones infinitesimales.

### Integración de la ecuación constitutiva

Una característica importante del modelo constitutivo que se analiza es la posibilidad de integración analítica cerrada en términos de deformación, definiendo para ello la norma  $\tau_\boldsymbol{\varepsilon}$  siguiente:

$$\tau_\boldsymbol{\varepsilon} \stackrel{def}{=} \sqrt{2} \Psi^0 \quad (25)$$

Considerando la ecuación (17) se deduce la siguiente relación:

$$\tau_\sigma = (1 - d) \tau_\boldsymbol{\varepsilon} \quad (26)$$

Se demuestra la total equivalencia de ambos criterios de daño:

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \implies \tau_\sigma - q = (1 - d) \tau_\boldsymbol{\varepsilon} - q = (1 - d) \tau_\boldsymbol{\varepsilon} - (1 - d) r = 0 \quad (27)$$

$$f(\boldsymbol{\sigma}, q) = 0 \iff g(\boldsymbol{\varepsilon}, r) = (\tau_\boldsymbol{\varepsilon} - r) = 0 \quad (28)$$

La integración de la variable interna  $r$  en (16) puede realizarse ahora de modo directo aplicando la condición de persistencia (19) de la forma:

$$\left. \begin{array}{l} \dot{r} = \gamma \geq 0 \\ \dot{r} > 0 \implies f = 0 \iff g = 0 \iff r = \tau_\boldsymbol{\varepsilon} \\ r_{t=0} = r_0 \end{array} \right\} \implies r = \max_{s \in (0, t)} \{r_0, \tau_\boldsymbol{\varepsilon}^t\} \quad (29)$$

coincidiendo con el resultado clásico obtenido para este tipo de familia de modelos constitutivos en función de la norma  $\tau_\boldsymbol{\varepsilon}^{11}$ . Nótese que una vez determinado el valor de  $r$ , mediante la ecuación (29), las variables restantes  $(d, \boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\tau})$  se obtienen de modo trivial.

## ANÁLISIS DE DISCONTINUIDAD FUERTE

Como se analizó en teoría infinitesimal<sup>14</sup>, mediante el análisis de discontinuidad fuerte se obtienen las condiciones que deben verificar las ecuaciones constitutivas estándar (tensión-deformación) con objeto de hacerlas compatibles con la cinemática de discontinuidad fuerte, es decir, las condiciones para las cuales la expresión (3) presente consistencia física y matemática cuando  $h \rightarrow 0$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$  (discontinuidad fuerte).

Junto a dicha cinemática, la teoría de discontinuidad fuerte se basa en diversas hipótesis e ingredientes, algunos de los cuales se relacionan con aspectos físicos asociados a la formación de discontinuidades en el campo de desplazamientos y otros a aspectos de naturaleza más matemática. En secciones posteriores se detallan dichas hipótesis y sus implicaciones.

Como ya se comentó someramente en el apartado *Definición del problema. Ecuaciones de gobierno*, las hipótesis de partida consideradas en el análisis de discontinuidad fuerte son la continuidad del vector tracción (y de su derivada temporal) a través de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  (las cuales emergen del principio de conservación del momento de la cantidad de movimiento), aplicadas explícita o implícitamente en los trabajos pioneros<sup>1,17</sup>.

Debido a las diferentes cinemáticas involucradas en estados de deformación plana (caso particular tridimensional) y de tensión plana, se realizan a continuación los análisis de discontinuidad fuerte específicos para cada caso.

### Análisis de discontinuidad fuerte en estados de deformación plana

Tras ciertas operaciones algebraicas, el vector tracción y su derivada temporal se expresan, en teoría de grandes deformaciones, de la siguiente forma:

$$\mathcal{T}(\mathbf{X}, t) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{N} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \underbrace{\tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N}}_{\bar{\mathbf{n}}} = J \boldsymbol{\sigma} \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (30)$$

$$\dot{\mathcal{T}}(\mathbf{X}, t) = \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} = [\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}] \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} = [\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}] \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (31)$$

donde  $\mathcal{T}$  es el vector tracción,  $\mathbf{P}$  representa el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\mathbf{N}$  es el vector normal unitario a la línea de discontinuidad en la configuración de referencia (material). Imponiendo la continuidad del vector tracción a través de la interfaz de discontinuidad, en cualquier instante  $t \in [t_{DD}, \infty)$ , se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{J_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{\mathcal{T}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}} = \bar{J} \boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= \underbrace{J_S \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \tilde{\mathbf{F}}_S^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{\mathcal{T}_S} = \bar{J} \tilde{J}_S \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \tilde{\mathbf{F}}_S^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (32)$$

representando  $\boldsymbol{\sigma}_S$  el tensor tensiones de Cauchy en un punto material situado en la línea de discontinuidad y  $\boldsymbol{\sigma}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$  en un punto material próximo al anterior situado sobre la parte continua del dominio  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ . Operando de forma análoga con la derivada temporal de  $\mathcal{T}$  se deduce:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{T}}(\mathbf{X}, t) &= \underbrace{\left[ \mathcal{L}_v \tau_{\Omega \setminus \mathcal{S}} + \mathbf{l}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \tau_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \right]}_{\dot{\mathcal{T}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} = \left[ \mathcal{L}_v \tau_{\Omega \setminus \mathcal{S}} + \bar{\mathbf{l}} \cdot \tau_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \right] \cdot \bar{\mathbf{n}} \\
&= \underbrace{\left[ \mathcal{L}_v \tau_s + \mathbf{l}_s \cdot \tau_s \right]}_{\dot{\mathcal{T}}_s} \cdot \tilde{\mathbf{F}}_s^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}
\end{aligned} \tag{33}$$

Las ecuaciones (32) y (33) pueden reescribirse de la forma:

$$\left. \begin{aligned}
\llbracket \mathcal{T} \rrbracket(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0} &= \mathcal{T}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} - \mathcal{T}_s \\
\llbracket \dot{\mathcal{T}} \rrbracket(\mathbf{X}, t) = \mathbf{0} &= \dot{\mathcal{T}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} - \dot{\mathcal{T}}_s
\end{aligned} \right\} \forall \mathbf{X} \in \mathcal{S}, \forall t \in [t_{DD}, \infty) \tag{34}$$

Partiendo del conjunto de ecuaciones (34), se deducen las siguientes conclusiones:

1. El carácter regular del tensor  $\mathbf{F}$  en el dominio  $\Omega \setminus \mathcal{S}$  (presenta una naturaleza acotada) determina el carácter también acotado del tensor tensiones de Cauchy en dicho dominio,  $\sigma_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$ , y, por tanto, el del vector tracción  $\mathcal{T}$  (téngase en cuenta que  $\bar{\mathbf{n}} = \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N}$  también es acotado). De (34) se establece, por tanto, la naturaleza acotada del vector tracción  $\mathcal{T}(\mathbf{X}, t)$  en cualquier punto material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ , como se detalla a continuación:

$$\mathcal{T}_s = \mathcal{T}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \text{ (acotado)} \implies \mathcal{T}_s = \bar{J} \sigma_s \cdot \underbrace{\tilde{J}_s \tilde{\mathbf{F}}_s^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}}}_{\bar{\mathbf{n}}} = \bar{J} \sigma_s \cdot \bar{\mathbf{n}} \text{ (acotado)} \tag{35}$$

Tomando como base de referencia  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  la constituida por las direcciones principales de  $\sigma_s$  se obtiene

$$\mathcal{T}_s = \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J} \sigma_{1s} n_1 \text{ (acotado)} \\ \bar{J} \sigma_{2s} n_2 \text{ (acotado)} \\ \bar{J} \sigma_{3s} n_3 \text{ (acotado)} \end{bmatrix} \tag{36}$$

2. De la ecuación (35) se deduce el carácter acotado de las tensiones principales  $(\sigma_{1s}, \sigma_{2s}, \sigma_{3s})$  y, en conclusión, el carácter acotado de todo el tensor de tensiones  $\sigma_s$  en cualquier sistema de referencia, a pesar de exhibir el dominio  $\mathcal{S}$  tensores de deformación no acotados.
3. El mismo proceso deductivo puede aplicarse a la derivada temporal del vector de tracción,  $\dot{\mathcal{T}}$ , estableciéndose acotado el tensor derivada temporal de la tensión  $\dot{\sigma}_s$ , como se demuestra a continuación:

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{T}}_s &= [\mathcal{L}_v \tau_s + \mathbf{l} \cdot \tau_s] \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} = [\dot{\tau}_s - \tau_s \cdot \mathbf{l}^T] \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} \\
&= \left[ J \dot{\sigma}_s + \dot{J} \sigma_s - J \sigma_s \cdot \mathbf{l}^T \right] \cdot \tilde{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \bar{\mathbf{n}} \\
&= \bar{J} \dot{\sigma}_s \cdot \bar{\mathbf{n}} + \bar{J} (\text{tr } \mathbf{d}) \sigma_s \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{J} \sigma_s \cdot \mathbf{l}^T \cdot \bar{\mathbf{n}} \\
&= \bar{J} \dot{\sigma}_s \cdot \bar{\mathbf{n}} + \bar{J} (\text{tr } \bar{\mathbf{d}}) \sigma_s \cdot \bar{\mathbf{n}} - \bar{J} \sigma_s \cdot \bar{\mathbf{l}}^T \cdot \bar{\mathbf{n}}
\end{aligned} \tag{37}$$

Al ser  $\dot{\mathcal{T}}_S$  un vector acotado, así como los términos  $\bar{J}$ ,  $\bar{\mathbf{n}}$ ,  $\bar{\mathbf{d}}$  y  $\bar{\mathbf{l}}$  del lado derecho de la ecuación (37)<sub>4</sub>, se deduce el carácter acotado del tensor  $\dot{\boldsymbol{\sigma}}_S$ .

4. La norma  $\tau_\sigma$  definida en (17) es acotada al considerar el carácter acotado de  $q$  ( $0 \leq q \leq q_0 = r_0$ ). La función que expresa  $q$  a lo largo del tiempo es acotada y continua, por lo que su derivada temporal  $\dot{q}$  también lo será, estableciéndose el carácter acotado de  $\dot{\tau}_\sigma$ .

**Ecuación constitutiva discreta. Ley de ablandamiento discreto**

Para un punto material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ , el tensor de tensiones de Cauchy, según la ecuación (15)<sub>4</sub>, se expresa de la forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_S = (1-d)\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S = \frac{q(r_S)}{r_S}\bar{\boldsymbol{\sigma}}_S = \frac{q(r_S)}{r_S}\left[\frac{\lambda}{2}\left(J_S - \frac{1}{J_S}\right)\mathbf{1} + \mu\frac{1}{J_S}(\mathbf{b}_S - \mathbf{1})\right] \quad (38)$$

y considerando en la expresión del vector tracción en régimen de discontinuidad fuerte ( $t \geq t_{DF} \Rightarrow h \equiv k \rightarrow 0$ ) de (35) la ecuación (38), procedente de la cinemática empleada, se obtienen la siguientes igualdades

$$\begin{aligned} \mathcal{T} = \bar{J}\boldsymbol{\sigma}_S \cdot \bar{\mathbf{n}} &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q_S}{r_S} \left[ \frac{\lambda}{2} \frac{(J_S^2 - 1)}{J_S} \mathbf{1} + \mu \frac{1}{J_S} (\mathbf{b}_S - \mathbf{1}) \right] \cdot \underbrace{\bar{\mathbf{n}} \bar{J}}_{\hat{\mathbf{n}}} \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{q_S}{h r_S} \left[ \frac{\lambda}{2} \frac{h^2 (J_S^2 - 1)}{h J_S} \mathbf{1} + \mu \frac{h^2}{h J_S} (\mathbf{b}_S - \mathbf{1}) \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \right] \\ &= q_S \left[ \frac{\lambda}{2} (\Delta[\mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{1} + \mu \frac{\Delta[\mathbf{u}] \otimes \Delta[\mathbf{u}]}{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}}} \right] \cdot \hat{\mathbf{n}} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h r_S} \right) \\ &= q_S \underbrace{\left( \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \mu \mathbf{1} \right)}_{\mathbf{Q}^e} \cdot \Delta[\mathbf{u}] \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h r_S} \right) \\ &= \underbrace{q_S \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]}_{\text{término acotado}} \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h r_S} \right) \end{aligned} \quad (39)$$

donde  $\mathbf{Q}^e = \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \mu \mathbf{1}$  es un tensor de carácter definido positivo<sup>VI</sup> y el vector  $\hat{\mathbf{n}}$  se define como  $\bar{\mathbf{n}} \bar{J}$ . Analizando las expresiones (39), donde el vector tracción es acotado y el término  $q_S \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]$  distinto de cero<sup>VII</sup> (excepto en el caso  $\Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$ , correspondiente a la situación de no desarrollo de la discontinuidad fuerte), se deduce, por consistencia matemática, el valor acotado del término  $\lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{1}{h r_S} \right)$  y, por tanto:

$$\lim_{h \rightarrow 0} (h r_S) \neq 0 \quad \forall \Delta[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0} \quad (40)$$

Con objeto de imponer dicha condición, y siguiendo la metodología establecida en el problema en teoría infinitesimal<sup>14</sup>, se define la siguiente ley de evolución de la variable interna  $r_S$ :

$$\dot{r}_S = \frac{1}{h} \dot{\alpha} \quad \forall t \geq t_{DD} \quad \text{con } \bar{\alpha}|_{t=t_{DD}} = 0 \quad (41)$$

<sup>VI</sup>El tensor  $\mathbf{Q}^e$  es definido positivo pues su determinante es estrictamente mayor que cero:  $\det \mathbf{Q}^e = \frac{\lambda}{2} \bar{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{n}} + \mu > 0$ .

<sup>VII</sup>La situación  $\mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] = \mathbf{0}$  con  $\Delta[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$  no se produce debido al carácter no singular de  $\mathbf{Q}^e$ .

siendo  $\bar{\alpha}$  una variable acotada (así como  $\dot{\bar{\alpha}}$ ) denominada *variable interna discreta*.

Integrando (41) para un tiempo  $t \geq t_{DF}$  (régimen de discontinuidad fuerte) se obtiene la expresión:

$$r_S = r_{DF} + \frac{1}{h} \Delta \bar{\alpha} \quad (42)$$

siendo

$$\begin{aligned} \Delta \bar{\alpha}_t &= \bar{\alpha}_t - \bar{\alpha}_{t_{DF}} \in [t_{DD}, \infty) \\ r_{DD} &= r_S|_{t=t_{DD}} \\ r_{DF} &= r_S|_{t=t_{DF}} \end{aligned} \quad (43)$$

por lo que la expresión (40) se puede reescribir de la forma:

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow 0} (h r_S) &= \lim_{h \rightarrow 0} (h r_{DF} + h \frac{1}{h} \Delta \bar{\alpha}) = \lim_{h \rightarrow 0} (k r_{DF} + k \frac{1}{k} \Delta \bar{\alpha}) = \\ &= \Delta \bar{\alpha} \neq 0 \end{aligned} \quad (44)$$

pues  $\lim_{k \rightarrow 0} (k r_{DF}) = 0$  al ser  $r_{DF}$  un término acotado.

Una vez demostrado que la expresión propuesta como ley de evolución de la variable interna  $r_S$  es consistente con la ecuación (40) y permite obtener un valor acotado del vector tracción cuando  $\Delta[\mathbf{u}] \neq \mathbf{0}$ , el vector tracción  $\mathcal{T}$  de la ecuación (39) se transforma en:

$$\mathcal{T} = \frac{q_S}{\Delta \bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \quad \forall t \geq t_{DF} \quad (45)$$

Se resalta que la relación (45) emerge “*de modo natural*” de la relación constitutiva de continuo de daño isótropo en régimen de discontinuidad fuerte, no siendo necesaria la obtención, de forma explícita, de dicha relación discreta ni su implementación en el modelo numérico empleado en la simulación de la discontinuidad fuerte. Tanto el comportamiento de la parte continua del dominio  $\Omega$  como el de la interfaz producida al generarse la discontinuidad pueden describirse mediante una única relación constitutiva de continuo (tensión *versus* deformación).

La ecuación (45) constituye la *ecuación constitutiva discreta*, estableciendo el valor del vector tracción  $\mathcal{T}$  en los puntos materiales de la discontinuidad en función del vector salto  $\Delta[\mathbf{u}]$ .

La imposición de la ley de evolución para  $r_S$  en (41) puede hacerse mediante la ley de evolución de la variable de endurecimiento  $q$ . Partiendo de (20) y (41) se tiene, para una partícula situada en  $\mathcal{S}$  y sometida al régimen de discontinuidad fuerte, la siguiente expresión:

$$\dot{q}_S = \mathcal{H}(r_S) \dot{r}_S = \mathcal{H} \frac{1}{h} \dot{\bar{\alpha}} \quad (46)$$

donde tanto  $\dot{q}_S$  como  $\dot{\bar{\alpha}}$  son términos de naturaleza acotada, deduciéndose, por consistencia matemática de (46), la relación:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mathcal{H} \frac{1}{h} = \text{valor acotado y constante} \stackrel{def}{=} \bar{H} \quad (47)$$

denominando al parámetro  $\bar{H} < 0$  *parámetro de ablandamiento intrínseco o discreto* (considerado propiedad del material), en contraposición al parámetro de ablandamiento continuo  $\mathcal{H}$  de la ecuación (20).

Con objeto de satisfacer (47), se define  $\mathcal{H}$  como:

$$\boxed{\mathcal{H}(t) = h(t) \bar{H} \quad \forall t \geq t_{DD}} \quad (48)$$

obteniendo los mismos resultados que los deducidos al aplicar la teoría infinitesimal.

La expresión (48) se define tanto en régimen de discontinuidad fuerte (denominada entonces *condición de regularización del parámetro de ablandamiento*<sup>4,6</sup> como en régimen de discontinuidad débil.

La integración de (46) a lo largo del tiempo, considerando la ecuación (48), permite obtener la siguiente *ley discreta de ablandamiento*:

$$\bar{q}(\Delta\bar{\alpha}) = q_{DF} + \bar{H} \Delta\bar{\alpha} \neq 0 \quad (49)$$

donde se constata la relación directa entre la variable de endurecimiento  $\bar{q}$  y la variable interna discreta  $\Delta\bar{\alpha}$  en la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ . La imposibilidad de adoptar valores negativos en  $q$  reside en la propia definición de la variable interna de daño  $d$ , ecuación (21), donde se limitan sus valores entre  $0 \leq d \leq 1$ .

La ecuación constitutiva discreta (45) puede escribirse de la forma:

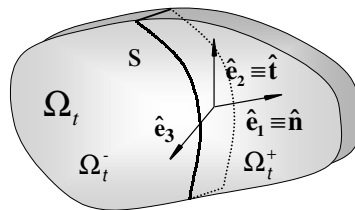
$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= \frac{q_S}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] = \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\ &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \quad \forall t \geq t_{DF} \end{aligned} \quad (50)$$

$$\omega(\Delta\bar{\alpha}) = 1 - \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} l \quad \begin{cases} \Delta\bar{\alpha} \in [0, \infty) \\ \omega \in (-\infty, 1] \end{cases}$$

entendiendo el término  $\omega(\Delta\bar{\alpha})$  como una *variable discreta de daño* cuyo rango de valores varía de  $\omega = -\infty$  (para  $\Delta\bar{\alpha} = 0$ ) en el instante inicio de la discontinuidad fuerte a  $\omega = 1$  (para  $\Delta\bar{\alpha} = \infty$ )<sup>VIII</sup>. Se observa que la ecuación constitutiva discreta (50) y el modelo constitutivo continuo detallado en (15) y (21) exhiben la misma estructura, con la correspondencia entre variables discretas y continuas detallada en la Tabla I.

Modelo Continuo	$\boldsymbol{\sigma}$	$\mathbf{F}$	$d$	$r$	$q(r)$
Modelo Discreto	$\mathcal{T}$	$\Delta[\mathbf{u}]$	$\omega$	$\Delta\bar{\alpha}$	$\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})$

**Tabla I.** Correspondencia entre variables del modelo continuo y discreto



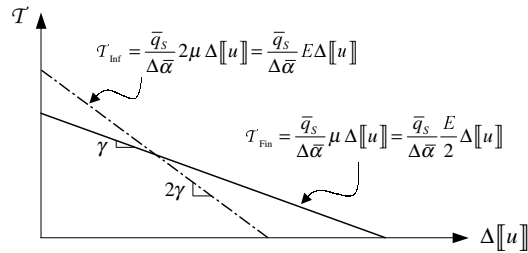
**Figura 4.** Base ortonormal en la superficie de discontinuidad

<sup>VIII</sup>El parámetro  $l$  desempeña, aquí, el papel de cualquier longitud, con el objetivo de proporcionar a  $\frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} l$  un carácter adimensional.

Si se considera la base ortonormal  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  de la Figura 4, donde el vector  $\hat{\mathbf{e}}_1$  coincide con con la dirección del vector  $\hat{\mathbf{n}}$  (normal a un punto material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  en la configuración espacial),  $\hat{\mathbf{e}}_2$  con el vector unitario  $\hat{\mathbf{t}}$  (tangente a un punto material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  en la configuración espacial) y  $\hat{\mathbf{e}}_3$  con el vector unitario perpendicular al plano definido por  $\hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2$ ; la ecuación constitutiva discreta (50) se expresa como:

$$\begin{aligned} \mathcal{T} &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] = (1 - \omega) \frac{1}{l} \left[ \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} + \mu \mathbf{1} \right] \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\ \mathcal{T} &= \begin{bmatrix} \mathcal{T}_1 \\ \mathcal{T}_2 \\ \mathcal{T}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1 - \omega) \frac{1}{l} \left( \frac{\lambda}{2} |\hat{\mathbf{n}}|^2 + \mu \right) \cdot \Delta[u]_1 \\ (1 - \omega) \frac{1}{l} \mu \cdot \Delta[u]_2 \\ (1 - \omega) \frac{1}{l} \mu \cdot \Delta[u]_3 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (51)$$

En la Figura 5 se pueden apreciar las ecuaciones constitutivas discretas inducidas por la cinemática de discontinuidad fuerte en un caso unidimensional, tanto para la cinemática de deformaciones infinitesimales como finita. Para el caso de grandes deformaciones, la curva a obtener sería, según la ecuación (51),  $\mathcal{T}_{Fin} = \frac{\bar{q}_s}{\Delta\bar{\alpha}} \mu \Delta[u] = \frac{\bar{q}_s}{\Delta\bar{\alpha}} \frac{E}{2} \Delta[u]$ , y para la situación de deformaciones infinitesimales (ecuación (47)),  $\mathcal{T}_{Inf} = \frac{\bar{q}_s}{\Delta\bar{\alpha}} 2\mu \Delta[u] = \frac{\bar{q}_s}{\Delta\bar{\alpha}} E \Delta[u]$ . Se constata la relación lineal  $\mathcal{T} - \Delta[u]$  de ambas curvas, así como la pendiente doble que exhibe la curva correspondiente al régimen de deformaciones infinitesimales frente a la de grandes deformaciones.



**Figura 5.** Curvas tracción-salto para un problema unidimensional en deformación infinitesimal y finita

### Energía libre discreta

Considérese la función de energía libre total  $\Psi$ , ecuación (14), particularizada para una partícula perteneciente a la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ :

$$\Psi(\mathbf{C}, r)|_{\mathbf{X} \in \mathcal{S}} = \Psi_{\mathcal{S}}(\mathbf{C}_{\mathcal{S}}, r_{\mathcal{S}}) = (1 - d_{\mathcal{S}}) \Psi_{\mathcal{S}}^0(\mathbf{C}_{\mathcal{S}}, r_{\mathcal{S}}) = \frac{q_{\mathcal{S}}}{r_{\mathcal{S}}} \Psi_{\mathcal{S}}^0(\mathbf{C}_{\mathcal{S}}, r_{\mathcal{S}}) \quad (52)$$

donde la energía libre elástica  $\Psi^0$ , según (14), vendría definida por la expresión:

$$\begin{aligned} \Psi_{\mathcal{S}}^0(\mathbf{C}_{\mathcal{S}}, r_{\mathcal{S}}) &= \frac{1}{4} \lambda (J_{\mathcal{S}}^2 - 1) - \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \log J_{\mathcal{S}} + \frac{1}{2} \mu (tr \mathbf{C}_{\mathcal{S}} - 3) \geq 0 \\ &= \frac{1}{4} \lambda \left[ \bar{J}^2 \left( 1 + \frac{1}{h} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \right)^2 - 1 \right] \\ &\quad - \left( \frac{\lambda}{2} + \mu \right) \log \left[ \bar{J} \left( 1 + \frac{1}{h} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} \mu \left[ tr \left( \left( \bar{\mathbf{F}}^T + \frac{\mathbf{N} \otimes \Delta[\mathbf{u}]}{h} \right) \cdot \left( \bar{\mathbf{F}} + \frac{\Delta[\mathbf{u}] \otimes \mathbf{N}}{h} \right) - 3 \right) \right] \end{aligned} \quad (53)$$

Dentro del régimen de discontinuidad fuerte ( $t \geq t_{DF} \rightarrow h \equiv k = \text{constante}$ ) se define la energía libre discreta  $\varphi$  de la forma:

$$\begin{aligned}
\varphi &\stackrel{def}{=} \lim_{h \rightarrow 0} (h \Psi_S) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( h \frac{q_S}{r_S} \Psi_S^0 \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{q_S}{hr_S} h^2 \Psi_S^0 \right) \\
&= (1 - \omega) \frac{1}{7} \left[ \frac{1}{4} \lambda \bar{J}^2 (\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}})^2 + \frac{1}{2} \mu |\Delta[\mathbf{u}]|^2 \right] \\
&= (1 - \omega) \frac{1}{7} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \frac{1}{2} \underbrace{\left[ \mu \mathbf{1} + \frac{1}{2} \lambda \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \right]}_{\mathbf{Q}^e} \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\
&= (1 - \omega) \frac{1}{7} \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]
\end{aligned} \tag{54}$$

donde se han tenido en cuenta las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
\lim_{h \rightarrow 0} (h^2 J_S^2) &= \bar{J}^2 (\Delta[\mathbf{u}] \cdot \bar{\mathbf{n}})^2 \\
\lim_{h \rightarrow 0} (h^2 tr \mathbf{C}_S) &= |\Delta[\mathbf{u}]|^2 \\
\lim_{h \rightarrow 0} (h^2 \log J_S) &= 0
\end{aligned} \tag{55}$$

obteniéndose la denominada *energía libre de daño discreta*  $\varphi$  (se puede identificar como la energía libre por unidad de superficie<sup>IX</sup> de interfaz de discontinuidad  $\mathcal{S}$ ) y su correspondiente término elástico  $\varphi^0$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(\omega, \Delta[\mathbf{u}]) &= (1 - \omega) \frac{1}{7} \varphi^0(\Delta[\mathbf{u}]) = (1 - \omega) \frac{1}{7} \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\
\mathbf{Q}^e &= \left[ \mu \mathbf{1} + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \right]
\end{aligned} \tag{56}$$

Realizando ciertas operaciones algebraicas en el término  $\Psi_S$  se obtiene:

$$\frac{\partial \Psi_S}{\partial \Delta[\mathbf{u}]} \stackrel{not}{=} \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \Psi_S = \underbrace{\partial_{\mathbf{F}} \Psi_S}_{\mathbf{P}} \cdot \underbrace{\partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \mathbf{F}}_{\frac{1}{h} \mathbf{N}} = \frac{1}{h} \mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N} = \frac{1}{h} \mathcal{T}_S \tag{57}$$

$$\mathcal{T}_S = h \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \Psi_S$$

y considerando régimen de discontinuidad fuerte ( $t \geq t_{DF} \Rightarrow h \equiv k \rightarrow 0$ ) y la ecuación (50), el vector tracción se expresa de la forma:

$$\mathcal{T}_S = \lim_{h \rightarrow 0} \left( h \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \Psi_S \right) = \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \left[ \lim_{h \rightarrow 0} (h \Psi_S) \right] = \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \varphi \tag{58}$$

que corresponde a un modelo hiperelástico discreto.

<sup>IX</sup> Al ser  $\Psi$  la energía libre por unidad de volumen (densidad de energía libre), y considerando un volumen elemental  $dV$  en la línea de discontinuidad (correspondiente a una superficie de discontinuidad diferencial  $dS$  con un ancho de banda  $h$ ), se puede escribir  $dV = h dS$ . Por lo tanto, la energía libre asociada a este volumen diferencial es  $d\Psi = \Psi dV = \Psi h dS$  y la energía libre por unidad de superficie de discontinuidad resulta  $\varphi = \frac{d\Psi}{dS} = h \Psi$ .



Aplicando la ecuación (56) en (58) se deduce la siguiente expresión para el vector tracción:

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_S = \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \varphi &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \left[ \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \right] \\ &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}] \\ &= (1 - \omega) \frac{1}{l} \left[ \mu \mathbf{1} + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \right] \cdot \Delta[\mathbf{u}]\end{aligned}\quad (59)$$

que coincide con la ecuación (51).

La ecuación (58) pone en evidencia una consecuencia crucial al considerar una cinemática de discontinuidades fuertes en deformación finita en modelos continuos (tensión-deformación): la proyección de dichos modelos continuos en modelos discretos (tracción-salto de desplazamiento). De hecho, la energía libre discreta  $\varphi$ , obtenida como la correspondiente energía libre del continuo  $\Psi$  en la superficie de discontinuidad, se convierte en un potencial del vector tracción  $\mathcal{T}$ , con relación al salto incremental de desplazamiento  $\Delta[\mathbf{u}]$ . Todo ello sugiere que puede derivarse de la energía libre discreta un modelo constitutivo discreto y, por tanto, de la inclusión de una cinemática de discontinuidad fuerte en el modelo continuo original. Esto se demuestra en los siguientes apartados.

### Condiciones de discontinuidad fuerte

De modo similar al llevado a cabo en teoría infinitesimal, el análisis de discontinuidad fuerte se basa en el carácter acotado del vector tracción  $\mathcal{T}$ . Como se analizó en el apartado *Análisis de discontinuidad fuerte*, no sólo  $\mathcal{T}$  sino también  $\boldsymbol{\sigma}_S$  (tensor de tensiones de Cauchy en la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ ) presentan naturaleza acotada.

Considerando esta última característica de  $\boldsymbol{\sigma}_S$ , junto a las ecuaciones (15), (21), (42) y (49), se obtiene, en régimen de discontinuidad fuerte, la siguiente expresión de  $\boldsymbol{\sigma}_S$ :

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma}_S &= \frac{q(r_S)}{r_S} \frac{1}{J_S} \left[ \frac{\lambda}{2} (J_S^2 - 1) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b}_S - \mathbf{1}) \right] \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{r_{DF} + \frac{1}{h} \Delta\bar{\alpha}} \frac{1}{J_S} \left[ \frac{\lambda}{2} (J_S^2 - 1) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b}_S - \mathbf{1}) \right] \right] \\ &= \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} \left[ \frac{\lambda}{2} (\Delta[\mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}}) \mathbf{1} + \mu \frac{1}{(\Delta[\mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}})} \Delta[\mathbf{u}] \otimes \Delta[\mathbf{u}] \right]\end{aligned}\quad (60)$$

denominando a la expresión (60)<sub>3</sub> *ecuación de discontinuidad fuerte*<sup>5-7</sup>. Empleando la base ortonormal  $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$  de la Figura 4, donde el vector  $\hat{\mathbf{e}}_1$  coincide con la dirección del vector  $\hat{\mathbf{n}}$  (normal a un punto material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  en la configuración espacial),  $\hat{\mathbf{e}}_2$  con el vector unitario  $\hat{\mathbf{t}}$  (tangente a un punto material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  en la configuración espacial) y  $\hat{\mathbf{e}}_3$  con el vector unitario perpendicular al plano definido por  $\hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\hat{\mathbf{e}}_2$ , la ecuación de discontinuidad fuerte puede expresarse de la forma:

$$\begin{aligned}\sigma_{11_S} &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}\|} \left[ \frac{\lambda}{2} \|\hat{\mathbf{n}}\|^2 + \mu \right] \Delta[u]_1 \\ \sigma_{12_S} &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}\|} \mu \Delta[u]_2 \\ \sigma_{22_S} &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \frac{1}{\|\hat{\mathbf{n}}\|} \left[ \frac{\lambda}{2} \|\hat{\mathbf{n}}\|^2 \Delta[u]_1 + \mu \frac{\Delta[u]_2^2}{\Delta[u]_1} \right]\end{aligned}\quad (61)$$

y, tras algunas operaciones algebraicas, se obtiene la siguiente relación:

$$\sigma_{11_S} \sigma_{22_S} = \frac{\tilde{\lambda}}{\frac{\tilde{\lambda}}{2} + \mu} \sigma_{11_S}^2 + \frac{\tilde{\lambda} + \mu}{\mu} \sigma_{12_S}^2 \quad (62)$$

$$\tilde{\lambda} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda \|\hat{\mathbf{n}}\|^2 = \lambda \bar{J}_S^2 \|\bar{\mathbf{n}}\|^2$$

donde  $\sigma_{11_S} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$ ,  $\sigma_{12_S} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\sigma_{22_S} = \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \boldsymbol{\sigma}_S \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$ ,  $\Delta[[u]]_1 = \Delta[[\mathbf{u}]] \cdot \hat{\mathbf{e}}_1$  y  $\Delta[[u]]_2 = \Delta[[\mathbf{u}]] \cdot \hat{\mathbf{e}}_2$  en la base seleccionada.

Nótese que, a diferencia del caso de deformaciones infinitesimales, la componente regular de la deformación interviene tanto en la condición de discontinuidad fuerte como en la ecuación constitutiva discreta a través de los términos  $\bar{J}_S(\bar{\mathbf{F}})$  y  $\|\bar{\mathbf{n}}(\bar{\mathbf{F}})\|$ , resultando acoplada la ecuación discreta con el modelo continuo, excepto en aquellas situaciones donde  $\lambda = 0$  ( $\nu = 0$ ), desacoplándose ambos modelos.

**Observación 1.** *El sistema de ecuaciones (61) representa las condiciones de discontinuidad fuerte<sup>5-7</sup> que imponen restricciones cruciales al estado tensional en el instante de inicio de formación de la discontinuidad fuerte. De no verificarse dichas condiciones en el momento de bifurcación del campo de deformaciones<sup>12,16</sup>, instante que representa el comienzo de la formación de la discontinuidad, se imposibilitará el desarrollo de una discontinuidad fuerte ( $h \rightarrow 0$ ), induciéndose, por tanto, una discontinuidad débil ( $h \neq 0$ ).*

#### Ejemplo

Como ejemplo donde analizar y constatar la verificación de las condiciones de discontinuidad fuerte, se somete una probeta cuadrada a un estado tensional en régimen de deformación plana (Figura 6) imponiendo un desplazamiento vertical constante  $u_y$  en la cara superior y un incremento gradual del desplazamiento horizontal  $u_x$  en la cara derecha de la probeta.

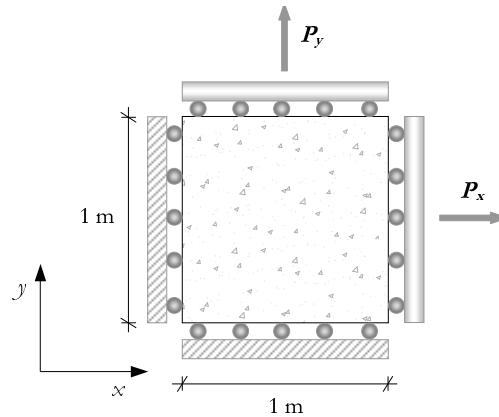
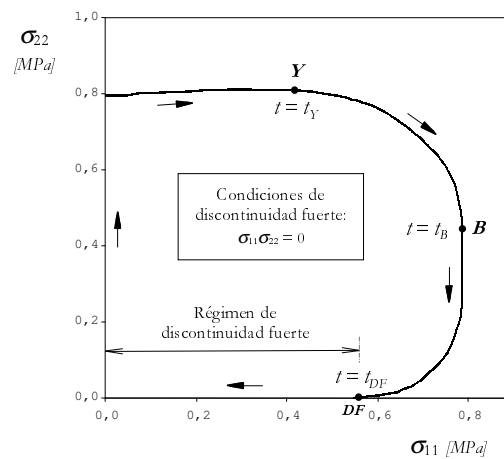
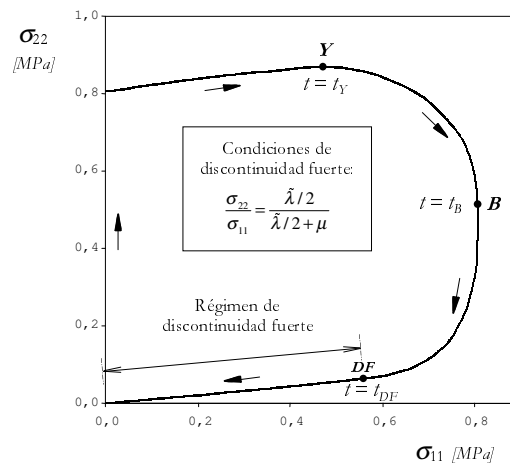


Figura 6. Probeta sometida a una sollicitación biaxial

En las Figuras 7 y 8 se muestran las curvas  $\sigma_{22} - \sigma_{11}$  en un punto de la superficie material de discontinuidad de dicha probeta para valores del coeficiente de Poisson de  $\nu = 0$  y  $\nu = 0,1$ , respectivamente. Los puntos de estas curvas marcados con la etiqueta  $Y$  representan el instante en el que se supera el dominio elástico inicial ( $t = t_Y$ ). El comportamiento de la probeta desde ese instante hasta el instante  $t = t_B$  (zonas de las curvas entre los puntos  $Y$  y  $B$ ) viene caracterizado por régimen de daño sin bifurcación discontinua. En el instante  $t_B$  se produce la bifurcación discontinua del campo tensorial de las deformaciones, experimentando una bifurcación discontinua débil, hasta el instante en el que el estado tensional en la discontinuidad verifica las condiciones de discontinuidad fuerte ( $t = t_{DF}$ ).



**Figura 7.** Trayectoria de equilibrio en el plano de las tensiones  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$ , en un punto de la superficie de discontinuidad  $S$ , en régimen de deformación plana y deformación finita ( $\nu = 0$ )



**Figura 8.** Trayectoria de equilibrio en el plano de las tensiones  $\sigma_{11}$  y  $\sigma_{22}$ , en un punto de la superficie de discontinuidad  $S$ , en régimen de deformación plana y deformación finita ( $\nu = 0,1$ )

Las condiciones de discontinuidad fuerte, ecuación (62), a verificar en el primer caso ( $\nu = 0$ ) serían, considerando  $\lambda = 0$  y teniendo en cuenta que durante todo el proceso de carga la tensión  $\sigma_{12_S} = 0$  por el tipo de sollicitación, las siguientes:

$$\sigma_{11_S} \sigma_{22_S} = 0 \quad (63)$$

tal como se constata en la Figura 7.

Para el caso de valor del coeficiente de Poisson  $\nu = 0,1$  la tensión  $\sigma_{12_S}$  sigue resultando nula, obteniéndose la siguiente condición de discontinuidad fuerte a cumplir:

$$\frac{\sigma_{22_S}}{\sigma_{11_S}} = \frac{\tilde{\lambda}}{\frac{\tilde{\lambda}}{2} + \mu} ; \quad \tilde{\lambda} = \lambda \bar{J}_S^2 \|\bar{\mathbf{n}}\|^2 \quad (64)$$

La superficie de discontinuidad que se obtiene para la sollicitación de la probeta es un plano vertical, con normal material  $\mathbf{N} = [1, 0, 0]^T$ , y el tensor gradiente de la deformación

$\mathbf{F}$  resultante es un tensor diagonal con  $F_{33} = 1$ , luego  $\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} = [F_{11}^{-1}, 0, 0]^T$ , y  $\bar{J}_S = F_{11} F_{22}$ . La expresión final de la ecuación (64) sería:

$$\frac{\sigma_{22S}}{\sigma_{11S}} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\frac{\lambda}{2} + \mu} = \frac{\bar{F}_{22}^2}{\bar{F}_{22}^2 + \frac{1-2\nu}{\nu}} = \frac{\bar{F}_{22}^2}{\bar{F}_{22}^2 + 8} \quad (65)$$

### Normas discretas. Criterios de daño

La norma del continuo  $\tau_{\sigma}$ , definida en (17), ve afectada su estructura en la superficie de discontinuidad  $\mathcal{S}$  debido a la cinemática que en ella se desarrolla y a las restricciones sobre el estado tensional que ésta implica de la forma:

$$\begin{aligned} \tau_{\sigma_S} &= \frac{q(r_S)}{r_S} \sqrt{2 \Psi_S^0} = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{r_{DF} + \frac{1}{h} \Delta\bar{\alpha}} \sqrt{2 \Psi_S^0} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left( \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{2 h^2 \Psi_S^0} \right) \\ &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{\frac{\lambda}{2} (\Delta[\mathbf{u}] \cdot \hat{\mathbf{n}})^2 + \mu |\Delta[\mathbf{u}]|^2} \\ &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \underbrace{\left[ \mu \mathbf{1} + \frac{1}{2} \lambda \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}} \right]}_{\mathbf{Q}^e} \cdot \Delta[\mathbf{u}]} = \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \sqrt{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]} \end{aligned} \quad (66)$$

donde se han empleado las ecuaciones (14), (42), (55) y (56)<sub>2</sub>.

La ecuación (66) se reescribe, al considerar la ecuación constitutiva discreta (45) ( $\Delta[\mathbf{u}] = \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathcal{T}$ ) como:

$$\tau_{\sigma_S} = \sqrt{\mathcal{T}_S \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathcal{T}_S} = \|\mathcal{T}_S\|_{\mathbf{Q}^{e-1}} \stackrel{def}{=} \tau_{\mathcal{T}} \quad (67)$$

Por tanto, dentro de la interfaz de discontinuidad  $\mathcal{S}$  se proyecta la norma continua  $\tau_{\sigma}$  en la norma discreta de las tracciones  $\tau_{\mathcal{T}} = \|\mathcal{T}\|_{\mathbf{Q}^{e-1}}$  (en la métrica  $\mathbf{Q}^{e-1}$ ).

Se define una norma del vector salto de los desplazamientos  $\tau_{\Delta[\mathbf{u}]}$  en la interfaz de discontinuidad  $\mathcal{S}$  de la forma:

$$\tau_{\Delta[\mathbf{u}]} = \sqrt{\Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]} = \|\Delta[\mathbf{u}]\|_{\mathbf{Q}^e} \Rightarrow \tau_{\mathcal{T}} = \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \tau_{\Delta[\mathbf{u}]} \quad (68)$$

La expresión (68) representa la ecuación discreta de la relación (26) que se establece entre las normas  $\tau_{\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}}$  y  $\tau_{\sigma}$  del continuo.

Finalmente, el criterio de daño definido en (27) y las condiciones de carga-descarga detalladas en (18) y (19) corresponden en su versión discreta con:

$$f(\sigma_S, q) \equiv \tau_{\sigma_S} - q \equiv \tau_{\mathcal{T}} - \bar{q} \stackrel{def}{=} \Gamma(\mathcal{T}, \bar{q}) \quad (69)$$

$$\Gamma \leq 0, \quad \bar{\gamma} \geq 0, \quad \bar{\gamma} \Gamma = 0 \quad \bar{\gamma} \dot{\Gamma} = 0 \quad (70)$$

donde el multiplicador de daño discreto  $\bar{\gamma}$  emerge de las leyes de evolución (41), (43) y (16) de la forma:

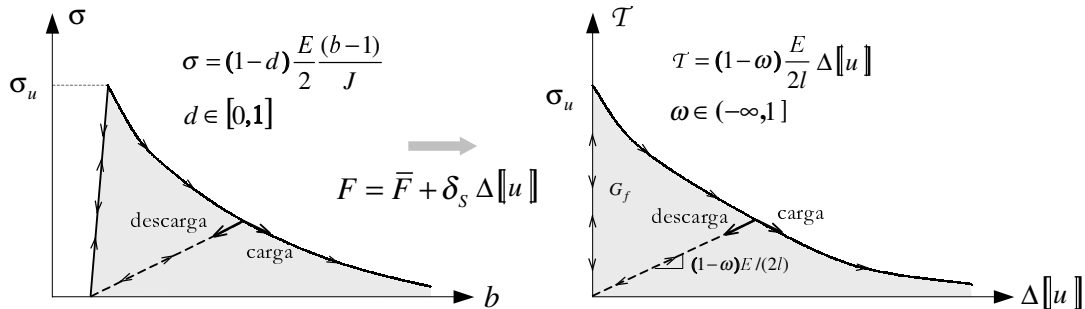
$$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\bar{\alpha}) = \dot{\bar{\alpha}} = h \dot{r}_S = h \gamma_S \stackrel{def}{=} \bar{\gamma} \geq 0 \quad (71)$$

**Modelo de daño discreto**

A continuación se resume el modelo constitutivo discreto de la interfaz  $\mathcal{S}$  obtenido en el análisis de discontinuidad fuerte, que emerge del modelo constitutivo continuo (apartado *Modelo constitutivo de daño continuo isótropo*) a través de la imposición de la cinemática de discontinuidad fuerte (ecuación (1)):

Energía libre	$\varphi = (1 - \omega) \frac{1}{l} \varphi^0$ $\varphi^0 = \frac{1}{2} \Delta[\mathbf{u}] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]$ $\mathbf{Q}^e = \mu \mathbf{1} + \frac{\lambda}{2} \hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}}$	(72)
Ecuación constitutiva	$\mathcal{T} = (1 - \omega) \frac{1}{l} \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[\mathbf{u}]$	
Variable de daño	$\omega = 1 - \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} l, \quad \omega \in (-\infty, 1]$	
Ley de evolución	$\frac{\partial}{\partial t}(\Delta\bar{\alpha}) = \dot{\bar{\alpha}} = \bar{\gamma}, \quad \Delta\bar{\alpha} \in [0, \infty)$	
Criterio de daño	$\Gamma(\mathcal{T}, \bar{q}) \equiv \tau_{\mathcal{T}} - \bar{q}, \quad \tau_{\mathcal{T}} = \ \mathcal{T}\ _{\mathbf{Q}^{e-1}}$	
Condiciones carga-descarga	$\Gamma \leq 0, \quad \bar{\gamma} \geq 0, \quad \bar{\gamma} \Gamma = 0, \quad \bar{\gamma} \dot{\Gamma} = 0$	
Ley de endurecimiento	$\dot{\bar{q}} = \bar{H}(\Delta\bar{\alpha}) \dot{\bar{\alpha}} \quad (\bar{H} = \mathcal{H}\frac{1}{h}), \quad \bar{q} \in (0, q_{DF}]$ $\bar{q} _{t=t_{DF}} = q_{DF}$	

El modelo constitutivo discreto (72) viene caracterizado por la variable de daño discreta  $\omega$  (función de la variable interna discreta  $\Delta\bar{\alpha}$ ) y el módulo constitutivo discreto secante (degradado)  $\mathbf{Q}^s = (1 - \omega) \mathbf{Q}^e$ . Como se detalló en (50),  $\omega$  varía entre  $-\infty$  ( $\Delta\bar{\alpha} = 0$ ) y 1 ( $\Delta\bar{\alpha} = \infty$ ), obteniéndose un valor inicial de  $\mathbf{Q}^s$  infinito ( $\mathbf{Q}^s = +\omega \mathbf{Q}^e$ ): el modelo discreto puede denominarse, por tanto, *modelo discreto de daño rígido*. En la Figura 9 pueden apreciarse los modelos constitutivos de daño continuo y discreto inducido, para un caso unidimensional, en régimen de deformación finita.



**Figura 9.** Modelos constitutivos de daño continuo y discreto inducido en grandes deformaciones para un caso unidimensional

Conviene resaltar, de acuerdo con los razonamientos previos, que el modelo constitutivo discreto (ecuación (72)) es inducido implícitamente por la introducción de la condición de

regularización del parámetro de ablandamiento (ecuación (48)) en el modelo constitutivo *continuo*, por la presencia de deformaciones no acotadas que se desarrollan en la interfaz de discontinuidad, según la ecuación (8), y por la imposición de la continuidad del vector tracción (ecuación (13e)).

Estos ingredientes específicos son los únicos introducidos por la aproximación de discontinuidad fuerte, junto a un modelo constitutivo continuo estándar.

### Análisis de discontinuidad fuerte en estados de tensión plana

El análisis de discontinuidad fuerte en régimen de tensión plana requiere un estudio específico debido a las peculiaridades que introduce en el modelo constitutivo la cinemática.

#### Condiciones de discontinuidad fuerte

Del mismo modo que en la situación de deformación plana en teoría de grandes deformaciones, el análisis de discontinuidad fuerte se basa en el carácter acotado del vector tracción  $\mathcal{T}$ . Como se analizó en el apartado *Análisis de discontinuidad fuerte*, no sólo  $\mathcal{T}$  sino también  $\sigma_S$  (tensor de tensiones de Cauchy en la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$ ) presentan naturaleza acotada.

Considerando esta última característica de  $\sigma_S$ , junto a las ecuaciones (15), (21), (42) y (49), se obtiene, en régimen de discontinuidad fuerte, la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
 \sigma_S &= \frac{q(r_S)}{r_S} \frac{1}{J_S} \left[ \frac{\lambda}{2} (J_S^2 - 1) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b}_S - \mathbf{1}) \right] \\
 &= \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{r_{DF} + \frac{1}{h} \Delta\bar{\alpha}} \frac{1}{J_S} \left[ \frac{\lambda}{2} (J_S^2 - 1) \mathbf{1} + \mu (\mathbf{b}_S - \mathbf{1}) \right] \right] \\
 &= \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} \lim_{h \rightarrow 0} \left[ \underbrace{h \frac{\lambda}{2} \frac{(J_S^2 - 1)}{J_S} \mathbf{1}}_{\text{acotado}} + \underbrace{\mu h \frac{1}{J_S}}_{\text{acotado}} \left( \mathbf{b}_{0S} + \frac{1}{h} \mathbf{b}_{1S} + \frac{1}{h^2} \mathbf{b}_{2S} \right) \right] \\
 &= \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} \left( \mathbf{b}_{1S} + \underbrace{\frac{1}{h} \mathbf{b}_{2S}}_{\text{no acotado}} \right) \\
 &= \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} \left( \mathbf{b}_{1S} + \frac{1}{h} \Delta[\mathbf{u}] \otimes \Delta[\mathbf{u}] \right) = \underbrace{\sigma_{0S}}_{\text{acotado}} + \underbrace{\frac{1}{h} \sigma_{1S}}_{\text{no acotado}}
 \end{aligned} \tag{73}$$

donde  $\mathbf{b}_{0S}$ ,  $\mathbf{b}_{1S}$  y  $\mathbf{b}_{2S}$  representan los términos del tensor  $\mathbf{b}_S$  que van multiplicados por los valores 1,  $\frac{1}{h}$ , y  $\frac{1}{h^2}$ , respectivamente, donde se ha tenido en cuenta el carácter acotado de  $J_S$  en casos de tensión plana y donde  $\sigma_{1S} = \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} \Delta[\mathbf{u}] \otimes \Delta[\mathbf{u}]$  y  $\sigma_{0S} = \frac{\bar{q}(\Delta\bar{\alpha})}{\Delta\bar{\alpha}} \mu \sqrt{\frac{\lambda}{\lambda + 2\mu}} \mathbf{b}_{1S}$ .

De la ecuación (73)<sub>5</sub> se deduce que el carácter acotado del tensor  $\sigma_S$  sólo puede obtenerse, por consistencia física y matemática, en aquellas situaciones donde el parámetro  $\lambda$  presente valor nulo ( $\lambda = 0 \Leftrightarrow \nu = 0$ ), es decir, cuando el problema de tensión plana coincida con el de deformación plana, o cuando el vector  $\Delta[\mathbf{u}] = 0$ , donde no se produce discontinuidad fuerte.

Por tanto, debido a las restricciones que la cinemática de discontinuidades fuertes impone sobre los procesos de deformación en continuos sometidos a régimen de tensión plana, no es posible la generación de dichas discontinuidades (salvo el caso particular  $\nu = 0$ ).

El no representar los casos de tensión plana una restricción a la generalidad del problema (como sí ocurre en deformación plana) permite suponer que en las situaciones reales (en tres dimensiones), de las que proceden las simulaciones realizadas, sí podrían producirse discontinuidades fuertes contenidas fuera del plano de estudio.

## CONDICIÓN DE LOCALIZACIÓN

Del mismo modo que en teoría infinitesimal, el análisis de localización, considerando grandes deformaciones, se basa en un análisis de bifurcación discontinua con el que se obtienen las condiciones de bifurcación de un campo de deformación inicialmente suave en uno de discontinuidad débil compatible con el equilibrio del cuerpo<sup>2,3,9,10,13,15,16,19</sup>. En el instante de bifurcación se inicia un campo tasa de la deformación no suave, descrito en la ecuación (7). Mediante el mencionado análisis se obtiene la dirección de propagación de la discontinuidad.

### Análisis de bifurcación discontinua

Siguiendo la metodología desarrollada para el caso de deformación infinitesimal<sup>14</sup>, se exponen a continuación los principales puntos que constituyen el análisis de bifurcación discontinua.

La condición de equilibrio (13e), a través de la superficie de discontinuidad  $\mathcal{S}$ , requiere que el salto de la tasa del vector tracción sea cero:

$$[[\dot{\mathcal{T}}]] = [[\dot{\mathbf{P}}]] \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (74)$$

representando  $[[\dot{\mathcal{T}}]]$  el salto del vector tracción (tasa) siguiente:

$$[[\dot{\mathcal{T}}]] = \dot{\mathbf{P}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \cdot \mathbf{N} - \dot{\mathbf{P}}_{\mathcal{S}} \cdot \mathbf{N} = \mathbf{0} \quad (75)$$

donde  $\dot{\mathbf{P}}_{\mathcal{S}}$  y  $\dot{\mathbf{P}}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}$  son el primer tensor de tensión de Piola-Kirchhoff (tasa) en la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  y en el dominio regular  $\Omega \setminus \mathcal{S}$ , respectivamente.

Tras algunas operaciones algebraicas, se deduce la expresión de  $\dot{\mathcal{T}}$  que se detalla a continuación:

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{T}} &= \dot{\mathbf{P}} \cdot \mathbf{N} = \left( \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{S}} + \dot{\mathbf{F}} \cdot \mathbf{S} \right) \cdot \mathbf{N} = (\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{F}^{-T}) \cdot \mathbf{N} \\ &= (\mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau}) \cdot \mathbf{F}^{-T} \cdot \mathbf{N} \end{aligned} \quad (76)$$

donde  $\mathbf{S}$  representa el segundo tensor de tensión de Piola-Kirchhoff y se ha considerado la naturaleza material de la línea de discontinuidad  $\mathcal{S}$  ( $\dot{\mathbf{N}} = \mathbf{0}$ ).

En el instante de inicio de la bifurcación,  $t_B$ , la cinemática exhibe las propiedades  $\Delta[[\mathbf{u}]] = \mathbf{0}$  y  $[[\dot{\mathbf{u}}]] \neq \mathbf{0}$ , verificándose las siguientes identidades:

$$t = t_B \iff \begin{cases} \mathbf{F}_{\mathcal{S}}^{-T} = \mathbf{F}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^{-T} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \\ \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{S}} = \boldsymbol{\tau}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} \\ \mathbf{l}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \bar{\mathbf{l}} \\ \mathbf{l}_{\mathcal{S}} = \bar{\mathbf{l}} + \frac{1}{h} [[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n} \\ \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \mathbf{c}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^d : \mathbf{d}_{\Omega \setminus \mathcal{S}} = \mathbf{c}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^d : \bar{\mathbf{d}} \\ \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau}_{\mathcal{S}} = \mathbf{c}_{\mathcal{S}}^d : \mathbf{d}_{\mathcal{S}} = \mathbf{c}_{\mathcal{S}}^d : \left[ \bar{\mathbf{d}} + \frac{1}{h} ([[\dot{\mathbf{u}}]] \otimes \mathbf{n})^s \right] \end{cases} \quad (77)$$

Suponiendo condiciones de carga en la discontinuidad  $\mathcal{S}$  y carga neutra en el dominio  $\Omega \setminus \mathcal{S}$  (un análisis previo demuestra que esta situación determina la primera posible bifurcación<sup>16</sup>), se verifica la igualdad  $\mathbf{c}_{\Omega \setminus \mathcal{S}}^d = \mathbf{c}_{\mathcal{S}}^d = \mathbf{c}^d$ , donde  $\mathbf{c}^d$  es el tensor constitutivo espacial tangente, reescribiéndose la ecuación (75) de la forma:

$$\begin{aligned} \llbracket \dot{\mathcal{T}} \rrbracket &= \llbracket \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} + \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} \rrbracket \cdot \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} = (\llbracket \mathcal{L}_v \boldsymbol{\tau} \rrbracket + \llbracket \mathbf{l} \cdot \boldsymbol{\tau} \rrbracket) \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= \left( \frac{1}{h} \mathbf{c}^d : (\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \bar{\mathbf{n}}) + \frac{1}{h} \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \otimes \bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \right) \cdot \bar{\mathbf{n}} \\ &= \frac{1}{h} \underbrace{[\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^d \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}]}_{\mathbf{Q}^L} \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \frac{1}{h} \mathbf{Q}^L \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (78)$$

Como se demostró en el apartado *Análisis de discontinuidad fuerte*, el vector tracción (y su tasa) presentan naturaleza acotada, deduciéndose la siguiente relación:

$$\mathbf{Q}^L \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket = \mathbf{0} \quad (79)$$

donde  $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  pertenece al núcleo de la transformación  $\mathbf{Q}^L \cdot \llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket$  inducida por el tensor  $\mathbf{Q}^L = \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{c}^d \cdot \bar{\mathbf{n}} + (\bar{\mathbf{n}} \cdot \boldsymbol{\tau} \cdot \bar{\mathbf{n}}) \mathbf{1}$ . Por analogía al análisis de localización en teoría infinitesimal, se denomina a  $\mathbf{Q}^L$  *tensor de localización*.

El criterio para determinar el inicio de la bifurcación se basa en la detección de la singularidad del tensor de localización  $\mathbf{Q}^L$ , obteniéndose una solución no trivial para el vector velocidad del salto de desplazamientos ( $\llbracket \dot{\mathbf{u}} \rrbracket \neq \mathbf{0}$ ) en la ecuación (79):

$$\det [\mathbf{Q}^L(\bar{\mathbf{n}}, \mathcal{H}_B)] = 0 \quad \text{para } t = t_B \quad (80)$$

que constituye la denominada *condición de localización*, representando  $\mathcal{H}_B$  un valor del módulo de ablandamiento compatible con la ecuación (80). El instante en el que dicha ecuación se verifica por primera vez, para un punto material dado, determina el instante de bifurcación  $t_B$  para ese punto, además de permitir obtener el vector normal  $\bar{\mathbf{n}}$ , el cual define la dirección de propagación de la interfaz de la discontinuidad  $\mathcal{S}$ . El valor del parámetro de ablandamiento en el instante de bifurcación es el máximo de todos los valores  $\mathcal{H}_B$  posibles<sup>16</sup>.

De entre todos los valores  $\mathcal{H}_B$ , el máximo de ellos,  $\mathcal{H}_{cr}$ , determinará la dirección de propagación de la discontinuidad<sup>16</sup>,  $\mathbf{N}_{cr} = \bar{\mathbf{F}}^T \cdot \bar{\mathbf{n}}_{cr}$ .

De acuerdo con lo expuesto, el análisis de bifurcación puede formularse de la siguiente manera:

$$\det \mathbf{Q}^L(\mathcal{H}, \bar{\mathbf{n}}) = 0 \Rightarrow \mathcal{H}_{cr} = \max[\mathcal{H} \in \mathcal{P}] \quad (81)$$

donde  $\mathcal{P}$  es el conjunto constituido por todos los valores del parámetro  $\mathcal{H}$  que verifican las siguientes condiciones

$$\mathcal{P} = \left\{ \mathcal{H} \in \mathbb{R} \mid \exists \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}; \|\mathbf{N}\| = 1; \det \mathbf{Q}^L(\mathcal{H}, \bar{\mathbf{n}}) = 0; \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} \right\} \quad (82)$$

y  $n_{\text{dim}}$  la dimensión del problema objeto de estudio.

Resulta interesante remarcar la posibilidad de obtener dos valores diferentes de la dirección de propagación de la discontinuidad que maximicen  $\mathcal{H}_B$ .

Si el conjunto  $\mathcal{P}$  es no vacío, las direcciones  $\mathbf{N}_{cr}$  que cumplen  $\det(\mathbf{Q}^L) = 0$  para  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cr}$  se corresponden con las posibles orientaciones de la banda de localización:

$$\mathbf{N}_{cr} \in \left\{ \mathbf{N} \in \mathbb{R}^{n_{\text{dim}}}; \|\mathbf{N}\| = 1; \det [\mathbf{Q}^L(\mathcal{H}_{cr}, \bar{\mathbf{n}})] = 0; \bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{F}}^{-T} \cdot \mathbf{N} \right\} \quad (83)$$



## FORMACIÓN DE DISCONTINUIDAD FUERTE. TRANSICIÓN ENTRE DISCONTINUIDAD DÉBIL Y FUERTE

De modo similar a lo analizado en deformaciones infinitesimales<sup>14</sup>, los modelos constitutivos de daño continuo isótropo detallados en el apartado *Modelo constitutivo de daño continuo isótropo*, junto a la cinemática de grandes deformaciones expresada en (3), permiten simular el comportamiento de sólidos sometidos a procesos de carga exhibiendo bifurcación discontinua. Las diferentes etapas que pueden presentarse a lo largo de todo el proceso de carga son las siguientes: régimen elástico inicial, régimen de daño sin bifurcación discontinua, régimen de bifurcación discontinua débil y régimen de bifurcación discontinua fuerte. Las características de cada etapa se detallan a continuación (Figura 10):

### 1. Régimen elástico inicial

El comportamiento del sólido será elástico hasta que se supere el dominio elástico inicial (instante  $t = t_Y$ ), una vez el valor de la variable interna  $r$  iguale al parámetro umbral  $r_0$  (función del límite elástico uniaxial  $\sigma_u$  y del módulo de Young  $E$ ). El valor de la variable interna de daño  $d$  es nulo en toda esta etapa.

El final del régimen elástico inicial viene representado por el punto Y de las gráficas a) y d) de la Figura 10.

### 2. Régimen de daño sin bifurcación discontinua

Alcanzada la superficie de daño, la variable interna de daño  $d$  (función de las variables de endurecimiento  $q$  e interna  $r$ , ecuación (21)) evoluciona conforme avanza el proceso de carga, así como el parámetro de ablandamiento  $\mathcal{H}$  (ecuación (20)), como se aprecia en la Figura 10. La cinemática empleada será la estándar (no exhibiendo salto en el campo de desplazamientos).

### 3. Régimen de bifurcación discontinua débil

El instante de inicio de la bifurcación ( $t = t_B$ ) se obtiene mediante la comparación del valor del parámetro de ablandamiento  $\mathcal{H}$  de la ecuación (20) y el valor de  $\mathcal{H}_{cr}$ . La bifurcación discontinua se produce en el instante en el que  $\mathcal{H} = \mathcal{H}_{cr}$ , prolongándose la discontinuidad según la dirección  $\mathbf{N}_{cr}$ , relacionada con  $\mathcal{H}_{cr}$  (Figura 10c).

Si en el instante de la bifurcación ( $t = t_B$ ), el estado tensional del medio continuo no verifica las condiciones de discontinuidad fuerte (ecuación (62)), se requerirá la cinemática representativa de discontinuidad débil, es decir, una cinemática donde el parámetro de regularización presente un valor finito mayor que cero ( $h \rightarrow 0$ ). La fase de transición entre el régimen de discontinuidad débil y el de discontinuidad fuerte viene caracterizada por una ley de variación del parámetro  $h$  y por el valor inicial del mismo en el instante de bifurcación ( $h_B$ ). Por consistencia entre la ley de evolución del parámetro de ablandamiento  $\mathcal{H}$  una vez producida la bifurcación (ecuación (48)) y la ley de variación del ancho de banda  $h$  se obtiene el siguiente valor de  $h_B$ :

$$\mathcal{H}_{cr}|_{t=t_B} = \mathcal{H}|_{t=t_B} = \mathcal{H}_{BIF} = h_B \bar{H} \Rightarrow h_B = \left| \frac{\mathcal{H}_{BIF}}{\bar{H}} \right| \quad (84)$$

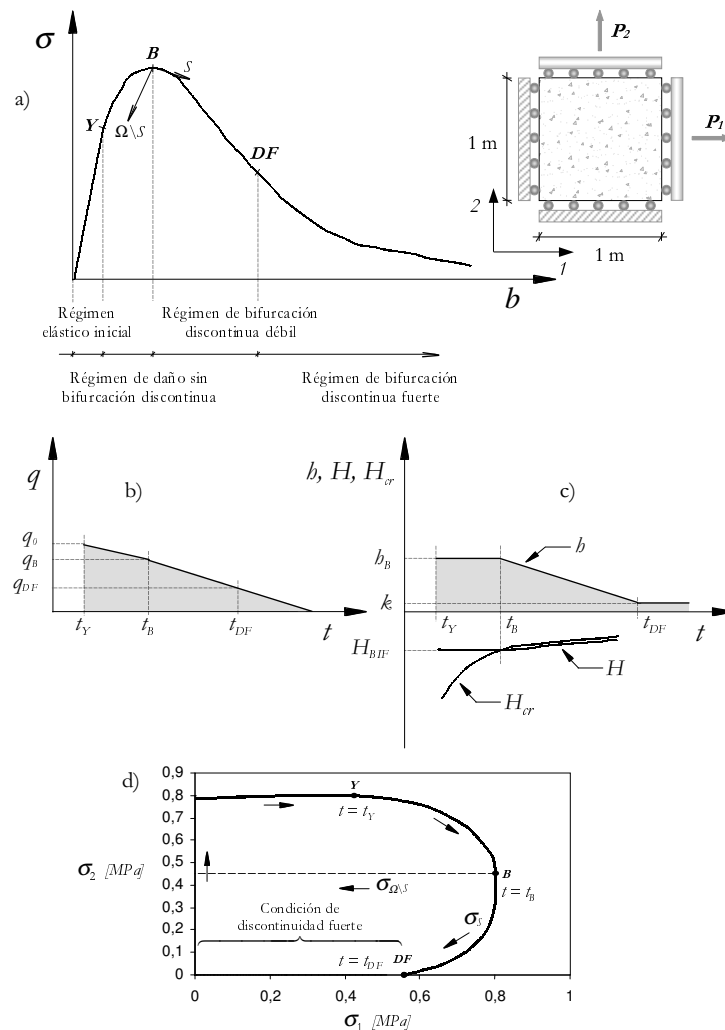
donde  $\mathcal{H}_{BIF}$  representa el valor del parámetro de ablandamiento  $\mathcal{H}$  en el instante de la bifurcación.

El símbolo de valor absoluto empleado en la ecuación (84) en la definición de  $h_B$  pretende reafirmar el valor positivo del mismo, aunque no resultaría necesario teniendo en cuenta que tanto  $\bar{H}$  como  $\mathcal{H}_{cr}$  presentan valores negativos.

En la Figura 10d se observan las diferentes trayectorias de equilibrio (bifurcación) que siguen los dominios regular y de discontinuidad.

#### 4. Régimen de bifurcación discontinua fuerte

La verificación de las condiciones de discontinuidad fuerte a lo largo del proceso de carga constituye la fase final del régimen de bifurcación discontinua exhibiendo discontinuidad débil. Una vez que el estado tensional del medio continuo verifica dichas condiciones, el parámetro de regularización  $h$  adopta el valor constante  $k$  ( $h \equiv k \rightarrow 0$ ), permaneciendo inalterable el parámetro de ablandamiento continuo  $\mathcal{H} = k\bar{H}$  (Figuras 10c y 10d).



**Figura 10.** a) Curva  $\sigma - b$  para un medio continuo que exhibe discontinuidades fuertes con cinemática de grandes deformaciones y probeta ensayada; b) variación del parámetro de endurecimiento  $q$  a lo largo del proceso de carga (tiempo); c) variación del ancho de banda  $h$ , del parámetro de ablandamiento  $\mathcal{H}$  y de  $\mathcal{H}_{cr}$  con el tiempo y d) trayectoria de equilibrio, en el plano de las tensiones principales, en los dominios  $S$  y  $\Omega/S$

### Modelos de ancho de banda variable

La estructura del módulo de ablandamiento continuo  $\mathcal{H}$  viene definida, como se expuso en (48), de la forma:

$$\mathcal{H} = h\bar{H} \quad \text{con} \quad \bar{H} \leq 0 \quad (85)$$

donde el parámetro de ablandamiento intrínseco  $\bar{H}$  se considera una propiedad del material.

En aquellos casos donde el estado tensional en el instante de la bifurcación no contemple las condiciones de discontinuidad fuerte ( $\mathcal{H}_{BIF} \neq \mathcal{H}_{DF}$ ,  $h \rightarrow 0$ ), el ancho de banda en el inicio de la localización,  $h_B$ , debe exhibir un valor finito mayor que cero, requiriéndose una fase de transición entre la bifurcación en régimen de discontinuidad débil y el inicio de la discontinuidad fuerte. Las diversas opciones que se pueden emplear en la variación del ancho de banda en la fase de transición coinciden con las descritas en el análisis de transición de discontinuidad débil a fuerte con cinemática infinitesimal<sup>14</sup>. En los ejemplos numéricos que se detallan al final del artículo se emplean estos modelos de ancho de banda.

### DISIPACIÓN. ENERGÍA DE FRACTURA

De modo similar a lo analizado en teoría de deformaciones infinitesimales<sup>14</sup>, se considerará la energía consumida en la formación de una discontinuidad material durante el intervalo de tiempo  $(0, t_\infty]$ , donde  $t_\infty$  representa el instante en el que tiene lugar la total decohesión de la fisura o discontinuidad.

En virtud del teorema de la fuerzas vivas, y considerando un problema cuasiestático donde la energía cinética puede despreciarse frente a la potencia tensional, la potencia introducida en un sistema por las fuerzas externas es equivalente a la potencia tensional<sup>8</sup>:

$$\mathcal{P}^{ext} = \mathcal{P}^{int} = \int_{\Omega} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} \, d\Omega \quad (86)$$

donde  $\mathbf{P}$  es el primer tensor de tensiones de Piola-Kirchhoff y  $\dot{\mathbf{F}}$  el tensor tasa gradiente de la deformación.

Definiendo la fracción de la potencia externa consumida en la formación del salto  $[[\dot{\mathbf{u}}]]$  en la superficie de discontinuidad  $\mathcal{S}$  como  $\mathcal{P}_S^{int}$ , la energía total consumida en la formación de la discontinuidad fuerte,  $\mathcal{W}_S$ , se puede expresar como:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{P}_S^{int} \, dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \mathbf{P}_S : ([[ \dot{\mathbf{u}} ]] \otimes \mathbf{N}) \, d\mathcal{S} \, dt \quad (87)$$

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \underbrace{(\mathbf{P}_S \cdot \mathbf{N})}_{\mathcal{T}_S} \cdot [[ \dot{\mathbf{u}} ]] \, d\mathcal{S} \, dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \mathcal{T}_S \cdot [[ \dot{\mathbf{u}} ]] \, d\mathcal{S} \, dt \quad (88)$$

siendo  $\mathcal{T}_S$  el vector tracción en la superficie de discontinuidad.

Considerando el modelo hiperelástico discreto (tracción-salto de desplazamiento) inducido al considerar una cinemática de discontinuidad fuerte de grandes deformaciones en modelos continuos (tensión-deformación) de la ecuación (72),  $\mathcal{W}_S$  podrá expresarse de la forma:

$$\begin{aligned} \varphi(\Delta[[\mathbf{u}]], \Delta\bar{\alpha}) &= \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \varphi^0 = \frac{1}{2} \frac{\bar{q}}{\Delta\bar{\alpha}} \Delta[[\mathbf{u}]] \cdot \mathbf{Q}^e \cdot \Delta[[\mathbf{u}]] \\ &= \frac{1}{2} \mathcal{T}_S \cdot \Delta[[\mathbf{u}]] = \frac{1}{2} \frac{\Delta\bar{\alpha}}{\bar{q}} \mathcal{T}_S \cdot \mathbf{Q}^{e-1} \cdot \mathcal{T}_S = \frac{1}{2} \bar{q} \Delta\bar{\alpha} \end{aligned} \quad (89)$$

donde  $\varphi (\Delta[\mathbf{u}], \Delta\bar{\alpha})$  es la denominada *energía libre de daño discreta* y se ha empleado la ecuación (67) que define la norma discreta de las tracciones en la métrica  $\mathbf{Q}^{e^{-1}}$ :

$$\dot{\varphi} = \underbrace{\partial_{\Delta[\mathbf{u}]} \varphi \cdot [\dot{\mathbf{u}}]}_{\mathcal{T}_s} + \partial_{\Delta\bar{\alpha}} \varphi \cdot \dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \Delta\bar{\alpha} + \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\bar{\alpha}} \quad (90)$$

y considerando las ecuaciones (89) y (68) se obtiene:

$$\partial_{\Delta\bar{\alpha}} \varphi \cdot \dot{\bar{\alpha}} = \frac{1}{2} \dot{\bar{q}} \Delta\bar{\alpha} - \frac{1}{2} \bar{q} \dot{\bar{\alpha}} \quad (91)$$

Sustituyendo (91) en (90):

$$\boxed{\mathcal{T}_s \cdot [\dot{\mathbf{u}}] = \bar{q} \dot{\bar{\alpha}}} \quad (92)$$

La energía consumida en la formación de una unidad de área de discontinuidad fuerte, energía de fractura  $G_f$ , viene definida por la expresión:

$$G_f = \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{T}_s \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \bar{q} \dot{\bar{\alpha}} dt = \int_{t_{DF}}^{\infty} \bar{q} \frac{\dot{\bar{q}}}{\bar{H}} dt = \int_{\bar{q}_{DF}}^0 \frac{\bar{q}}{\bar{H}} d\bar{q} \quad (93)$$

donde se ha considerado la ley de endurecimiento de la ecuación (72).

Es necesario resaltar que la energía de fractura así obtenida sólo contempla el desarrollo del régimen de discontinuidad fuerte, no considerando la energía consumida en la parte de discontinuidad débil de su régimen de formación.

Para el caso concreto de parámetro de ablandamiento discreto lineal,  $\bar{H} = cte.$ , y considerando que la discontinuidad fuerte se produce desde el instante de bifurcación (no se produce discontinuidad débil), coincidiendo este último con el instante final del régimen elástico, la energía de fractura se expresa de la forma:

$$G_f|_{\bar{H}=cte} = \int_{\bar{q}_{DF}}^0 \frac{\bar{q}}{\bar{H}} d\bar{q} = \frac{1}{2} \frac{\bar{q}_{DF}^2}{\bar{H}} = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{\bar{H}} \quad (94)$$

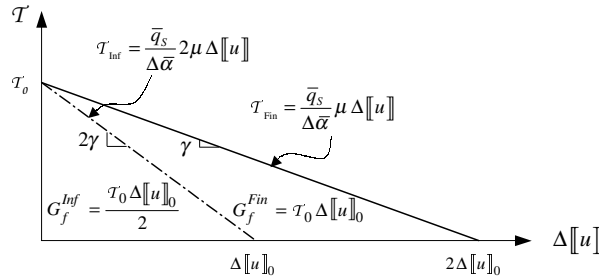
La energía total consumida en la formación de toda la discontinuidad fuerte,  $\mathcal{W}_S$ , se puede formular, por tanto, de la forma:

$$\mathcal{W}_S = \int_{t_{DF}}^{\infty} \int_S \mathcal{T}_s \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dS dt = \int_S G_f dS = \int_S \int_{\bar{q}_{DF}}^0 \frac{\bar{q}}{\bar{H}} d\bar{q} dS \quad (95)$$

En la Figura 11 se puede apreciar gráficamente el concepto de energía disipada en la formación de una discontinuidad fuerte en un caso unidimensional, tanto para la cinemática de grandes deformaciones como de deformación infinitesimal, a través de las curvas vector tracción-salto en la discontinuidad. Se ha supuesto un parámetro de ablandamiento discreto lineal,  $\bar{H} = cte.$ , y que la discontinuidad fuerte se produce desde el instante de bifurcación, coincidiendo con el instante final del régimen elástico. Para la cinemática de grandes deformaciones, la curva a obtener sería, según la ecuación (51),  $\mathcal{T}_{Fin} = \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} \mu \Delta[u] = \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} \frac{E}{2} \Delta[u]$ , y para la de deformaciones infinitesimales<sup>14</sup>,  $\mathcal{T}_{Inf} = \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} 2\mu \Delta[u] = \frac{\bar{q}_S}{\Delta\bar{\alpha}} E \Delta[u]$ . La energía disipada en la formación de una discontinuidad fuerte resultante se expresaría de la forma:

$$\begin{aligned} G_f^{Fin} &= \int_{t_{DF}}^{\infty} \mathcal{T}_s \cdot [\dot{\mathbf{u}}] dt = \frac{1}{2} \mathcal{T}_0 \cdot 2 \Delta[u]_0 = \mathcal{T}_0 \cdot \Delta[u]_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{H_{Fin}} \\ G_f^{Inf} &= \frac{1}{2} \mathcal{T}_0 \cdot \Delta[u]_0 = \frac{1}{2} \frac{q_0^2}{H_{Inf}} \end{aligned} \quad (96)$$

Tomando la energía de fractura  $G_f$  como propiedad del material, si se quisiera simular el comportamiento de un sólido considerando ambas cinemáticas, pero un único material (misma energía disipada en la formación de discontinuidades fuertes), debería emplearse un valor del parámetro de ablandamiento discreto lineal  $\bar{H}_{Fin}$  igual a la mitad del valor  $\bar{H}_{Inf}$ .



**Figura 11.** Energía de fractura disipada en la formación de una discontinuidad fuerte para un problema unidimensional en grandes deformaciones e infinitesimales

## EJEMPLOS NUMÉRICOS

En el presente apartado se describen simulaciones numéricas de diferentes problemas en los que se desarrollan discontinuidades fuertes, considerando el modelo constitutivo de daño continuo isótropo descrito en apartados previos.

El principal objetivo es mostrar que los resultados numéricos obtenidos constatan el comportamiento predicho por los análisis teóricos expuestos, así como resaltar el papel que la cinemática de grandes deformaciones desempeña en los resultados en comparación con los obtenidos con el modelo de daño en régimen de deformaciones infinitesimales<sup>14</sup>.

### Probeta sometida a sollicitación biaxial

Con el presente ensayo numérico se pretende destacar la importancia que desempeña el modelo de ancho de banda variable<sup>14</sup> (ver sección *Modelos de ancho de banda variable*) en los resultados obtenidos.

Se somete una probeta cuadrada a un estado tensional biaxial imponiendo un desplazamiento  $u_y$  constante y un incremento de desplazamiento  $u_x$  gradualmente sobre los lados superior y derecho de la probeta, respectivamente (Figura 12a).

Como el cambio total en la geometría de la pieza durante el ensayo es pequeño<sup>X</sup>, puede considerarse que la tensión  $\sigma_{yy}$  permanece constante.

El material empleado viene caracterizado por los siguientes parámetros: coeficientes de Lamé  $\lambda = 0$  MPa,  $\mu = E/2 = 10^4$  MPa, parámetro de ablandamiento continuo  $\mathcal{H} = -0,125$ , parámetro de ablandamiento discreto  $\bar{H} = -0,125$  cm<sup>-1</sup> y tensión última  $\sigma_u = 1,0$  MPa.

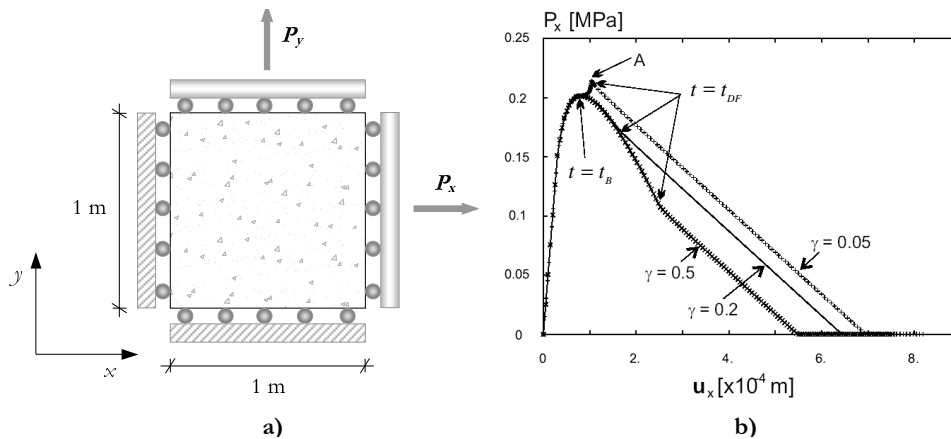
El análisis de bifurcación determina la siguiente normal a la interfaz de discontinuidad:  $\mathbf{N} = (1, 0)^T$ , y la condición de discontinuidad fuerte  $\sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{xy}^2 = 0$ . Debido tanto a la simetría de la geometría de la probeta como de las condiciones de carga,  $\sigma_{xy} = 0$ , por lo que la condición de discontinuidad fuerte se verifica durante el régimen de discontinuidad fuerte se transforma en la expresión  $\sigma_{yy} = 0$ , la cual no se verifica claramente en el instante de bifurcación  $t_B$ . Por tanto, la bifurcación se produce en régimen de discontinuidad

<sup>X</sup>Incluso aunque los cambios en la geometría de la probeta sean pequeños y, por tanto, se suponga que el comportamiento de la pieza será el correspondiente al de una cinemática de deformaciones infinitesimales, la cinemática de grandes deformaciones aplicada a la interfaz de discontinuidad producirá diferentes resultados comparados con el caso infinitesimal.

débil, requiriéndose la introducción de una transición del régimen de discontinuidad débil al fuerte mediante una ley de ancho de banda variable  $h(q)$ . La ley empleada se detalla a continuación<sup>14</sup>:

$$\begin{aligned} h &= h_0 = 1 ; & t &\leq t_B & (q > q_B) \\ h &= k + \frac{h_0 - k}{q_B - q_{DF}} q ; & t_B &< t < t_{DF} & (q_{DF} < q < q_B) \\ h &= k ; & t &> t_{DF} & (q < q_{DF}) \end{aligned} \quad (97)$$

donde  $q_B$  y  $q_{DF}$  representan los valores de la variable interna tipo tensión  $q$  en los instantes de bifurcación,  $t_B$ , y de inicio del régimen de discontinuidad fuerte,  $t_{DF}$ , respectivamente. El valor  $q_{DF}$  se define de la forma:  $q_{DF} = (1 - \gamma) q_B$ ,  $\gamma \in [0, 1]$ . Por tanto, el factor de transición  $\gamma$  determina el tamaño del intervalo de discontinuidad débil  $[q_{DF}, q_B]$ . Un valor del factor nulo,  $\gamma = 0$ , representa la no existencia de régimen de discontinuidad débil ( $q_{DF} = q_B$ ), bifurcando el campo de deformaciones bajo la forma de discontinuidad fuerte. Por otro lado, un valor  $\gamma = 1$ , es decir,  $q_{DF} = 0$ , significa que toda la fase de posbifurcación se llevará a cabo dentro del régimen de discontinuidad débil, no alcanzándose el régimen de discontinuidad fuerte en ningún instante.



**Figura 12.** Probeta sometida a sollicitación biaxial: a) geometría y cargas aplicadas y b) carga aplicada  $P_x$  versus desplazamiento lateral  $u_x$

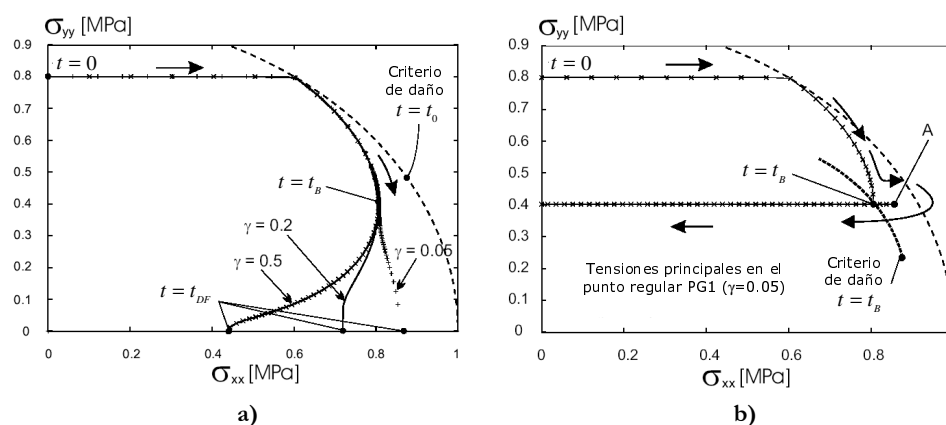
Como ejemplo, en las Figuras 12b y 13c se muestran resultados obtenidos para simulaciones con diferentes valores del parámetro de transición  $\gamma$ :

- Para un régimen de transición muy corto<sup>XI</sup>, determinado por un factor de transición muy pequeño ( $\gamma = 0,05$ ), se produce una inesperada "carga" (*reloading*), en términos de respuesta  $P_x - u_x$ , inmediatamente después de la bifurcación (ver punto A en la Figura 12b), seguida por la respuesta de descarga regular esperada. Este hecho podría explicarse de la siguiente forma: al imponerse algorítmicamente, tras la bifurcación, un comportamiento elástico incremental en el dominio  $\Omega \setminus S$ , como se deduce del análisis teórico de bifurcación, la violación de las condiciones de discontinuidad fuerte provoca que las tensiones en ese dominio infrinjan el criterio de daño conforme tiene lugar la evolución del proceso de carga (Figura 13b). Ello provoca una carga elástica artificial

<sup>XI</sup>A efectos prácticos, sería equivalente a una bifurcación que se produzca directamente en régimen de discontinuidad fuerte.

en esa parte del cuerpo<sup>XII</sup> responsable del comportamiento observado en la Figura 12b en el punto A, donde la condición de discontinuidad fuerte  $\sigma_{yy} = 0$  es verificada en  $S$  (Figura 13a). Más allá de este punto tiene lugar el régimen de discontinuidad fuerte, produciéndose descarga elástica en el dominio  $\Omega \setminus S$  (Figura 13b), resultante en la rama de descarga de la curva  $P_x - u_x$  en la Figura 12b.

- Para transiciones más largas (más lentas), determinadas, por ejemplo, por valores del factor de transición  $\gamma = 0,2$  ó  $\gamma = 0,5$ , esta carga artificial (*reloading*) ya no se observa y la transición desde la bifurcación hasta el régimen de discontinuidad fuerte tiene lugar de un modo suave, como puede apreciarse en la Figura 12b, manteniéndose la descarga elástica teórica en  $\Omega \setminus S$ .



**Figura 13.** Probeta sometida a sollicitación biaxial: a) trayectoria de equilibrio, en el plano de las tensiones principales, para un punto en  $S$  (punto de Gauss PG2) y b) trayectoria de equilibrio, en el plano de las tensiones principales, para un punto en  $\Omega/S$  (punto de Gauss PG1)

Estos resultados confirman que, como se predijo teóricamente en los apartados anteriores, la cinemática de discontinuidad fuerte no puede imponerse inmediatamente después de producirse la bifurcación, sino después, tras un régimen de transición de discontinuidad débil necesario para inducir suavemente las condiciones de discontinuidad fuerte.

En la Figura 12b puede observarse que las pendiente finales de las curvas  $P_x - u_x$  son las mismas en todos los casos. Ello podría esperarse del hecho de que esa parte de la respuesta estructural viene gobernada por la ecuación constitutiva discreta (relación vector tracción - salto de desplazamientos) que, como se analizó en la sección *Análisis de discontinuidad fuerte en estados de deformación plana*, es independiente de la longitud del régimen de transición.

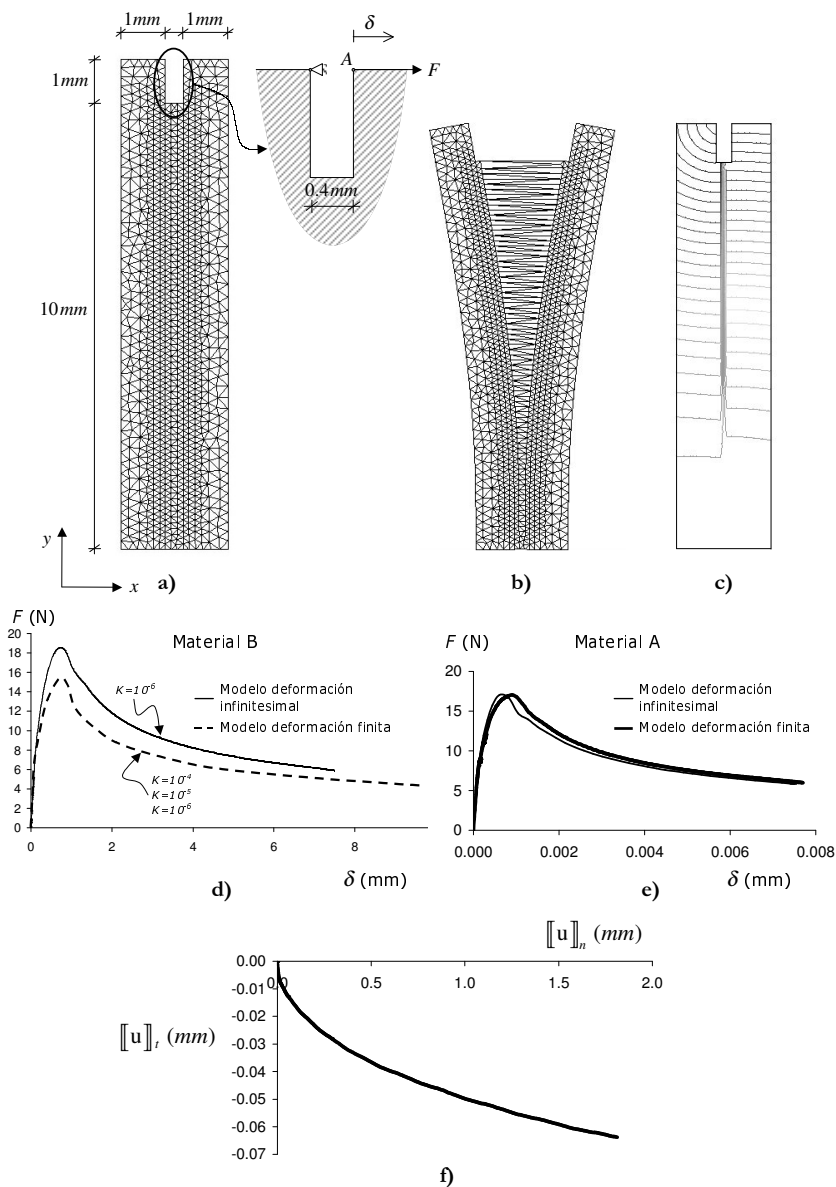
### Ensayo de decohesión: propagación de fisura modo I

Con este ensayo numérico se pretende mostrar la influencia que la cinemática seleccionada (deformaciones infinitesimales o finitas) en el modelo de daño continuo isótropo tiene sobre la respuesta estructural obtenida en la aproximación de discontinuidades fuertes.

Con este propósito se emplean los modelos de daño isótropo descritos en el presente artículo, donde se contempla una cinemática de grandes deformaciones, y el detallado en la referencia 14, que constituye una particularización del modelo anterior en el entorno de las deformaciones infinitesimales.

<sup>XII</sup>Si esta carga elástica tiene lugar, se impone artificialmente por el algoritmo una ecuación constitutiva tipo "dos materiales" (elástico en  $\Omega \setminus S$  y de daño isótropo en  $S$ ).

La pieza a ensayar se describe en la Figura 14a. Se trata de un panel con una entalla en su borde superior. Mediante la fuerza  $F$  aplicada en el extremo superior derecho de la entalla (Figura 14a) se pretende dividir el panel en dos mitades, como resultado de la fisura vertical que se propaga desde la punta de la entalla hacia el borde inferior del panel (Figuras 14b y 14c).



**Figura 14.** Ensayo de decohesión: a) geometría, cargas aplicadas y malla de elementos finitos; b) malla deformada ampliada; c) líneas iso-desplazamientos; d) curvas carga aplicada  $F$  versus desplazamiento horizontal del punto A para el material tipo B; e) curvas  $F$  versus desplazamiento horizontal del punto A para el material tipo A y f) curva salto de desplazamiento tangencial versus salto de desplazamiento normal (a la superficie de discontinuidad) para el material A con cinemática de grandes deformaciones



Se simularán dos materiales diferentes, uno mucho más deformable que otro, con objeto de contrastar, en ambos casos, la influencia de la cinemática de deformaciones finitas e infinitesimales.

Para el caso del material menos deformable o más rígido (material A), sus características mecánicas son las siguientes: módulo de deformación  $E = 3 \times 10^3 \text{ MPa}$ , coeficiente de Poisson  $\nu = 0,15$ , tensión última  $\sigma_u = 30 \text{ MPa}$  y energía de fractura  $G_f = 7,5 \text{ N/m}$ . Se ha empleado el modelo de ancho de banda variable detallado en el ejemplo *Probeta sometida a sollicitación biaxial*, con un valor del factor de transición  $\gamma = 0,05$  (prácticamente no se produce régimen de transición de discontinuidad débil).

Se ha ensayado numéricamente el panel considerando este material A, empleando tanto la formulación de deformaciones infinitesimales como finita.

En la Figura 15a se pueden apreciar las curvas tensiones de Cauchy según el eje  $x$ ,  $\sigma_{xx}$ , a lo largo del eje longitudinal de la fisura (la izquierda del eje representa el final de la entalla y la derecha el borde inferior del panel), obtenidas en diferentes instantes del proceso de carga ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ), considerando la cinemática de grandes deformaciones. Las curvas que se obtienen para cada instante son similares, desplazándose hacia la derecha del eje conforme avanza el proceso de carga. Analizando detenidamente una de ellas, por ejemplo la correspondiente al instante  $t_4$ , se aprecian los puntos etiquetados como A, B, C y D. El punto A se corresponde con el punto del eje longitudinal de la fisura donde las tensiones  $\sigma_{xx}$  son nulas, no habiendo comenzado el material, en ese punto, a experimentar carga alguna. Desde el punto B hacia la derecha el material es considerado virgen (desde el punto de vista de la fisuración). Desde el punto A hasta el B, el material presenta tensiones, pero dentro del rango elástico, siendo B el punto donde se alcanza la superficie elástica (*yielding*). Desde B hasta C, el material comienza a dañarse, bifurcando prácticamente en el mismo instante en el que se produce la discontinuidad fuerte (punto C), debido al valor del factor de  $\gamma = 0,05$  tan pequeño empleado en el modelo de ancho de banda variable. El tramo BC se puede considerar, a efectos prácticos, como aquel en el que el material se encuentra dañado sin bifurcar. En el punto C, donde se alcanza la máxima tensión, el material fisura en régimen de discontinuidad fuerte. En el punto D la fisura no soporta ninguna tensión (se encuentra totalmente decohesionada). El tramo CD representa la porción de fisura que todavía puede soportar tensiones, mientras que desde D hacia la punta de la entalla la fisura se encuentra totalmente decohesionada.

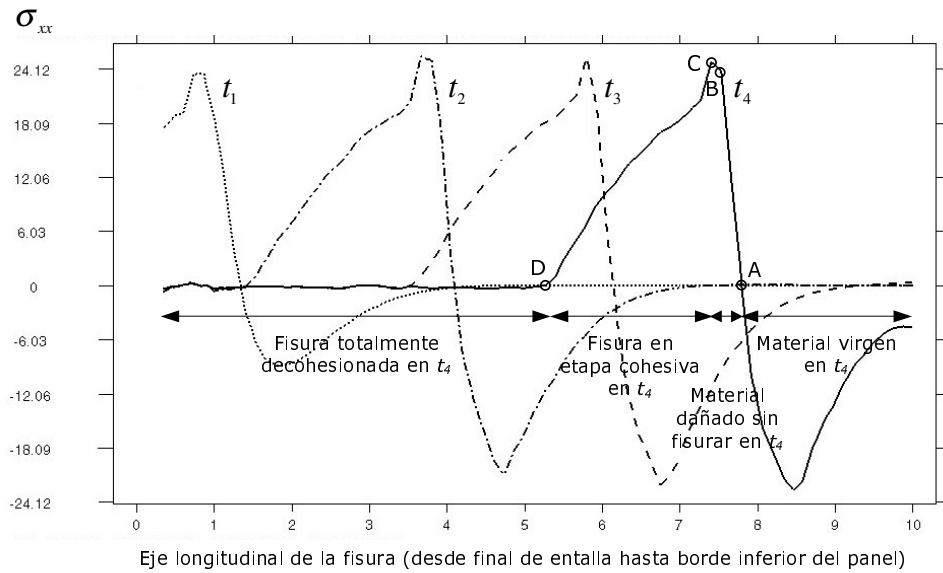
En la Figura 15b se observan las distribuciones de las tensiones  $\sigma_{xx}$  en el panel deformado para los cuatro instantes del proceso de carga mencionados. El avance del bloque de tensiones en los diferentes tiempos marca la evolución de la fisura. La Figura 14f muestra la relación salto de desplazamiento normal *versus* tangencial a la superficie de discontinuidad para un punto situado en la punta de la fisura en el instante  $t_4$ , constantándose el claro modo de fractura en modo I.

En la Figura 14e se exhiben las curvas fuerza aplicada,  $F$ , *versus* abertura de los extremos de la entalla,  $\delta$ , para el material tipo A; contemplando tanto la cinemática de grandes deformaciones como la infinitesimal. Debido a los desplazamientos tan pequeños obtenidos en la simulación (comparados con el tamaño de los elementos finitos empleados), no es posible percibir diferencias importantes entre ambos modelos.

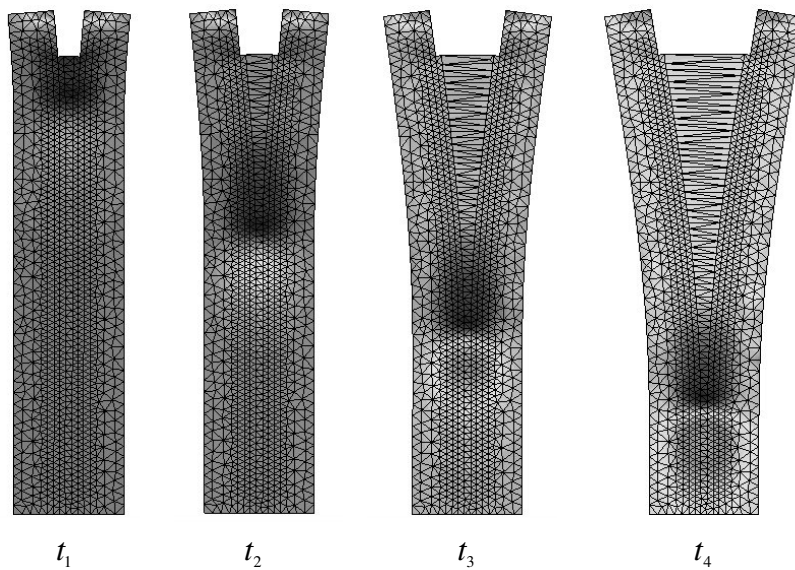
Con objeto de analizar la influencia de la cinemática en la respuesta numérica se han realizado ensayos con un segundo material mucho más deformable. Este segundo material, al que se denominará tipo B, presenta las mismas características mecánicas que el tipo A salvo su módulo de deformación (1000 veces menor) y su energía de fractura (1000 veces mayor). El factor de transición empleado en el modelo de ancho de banda ha sido  $\gamma = 0,3$ .

En la Figura 14d se exhiben las curvas  $F - \delta$  para este segundo material, contemplando ambas cinemáticas. Los elevados ratios desplazamiento-tamaño del elemento finito conseguidos activan las grandes deformaciones tanto en la zona de prebifurcación como en régimen

de discontinuidad débil y fuerte, obteniéndose respuestas estructurales diferentes según la cinemática empleada. En la misma curva se constata la independencia de los resultados, para la cinemática de grandes deformaciones, con relación al parámetro de regularización  $k$  utilizado ( $k = 10^{-4}$ ,  $k = 10^{-5}$  y  $k = 10^{-6}$ ).



a)



b)

**Figura 15.** Ensayo de decohesión para el material tipo A (grandes deformaciones): a) tensiones de Cauchy según el eje perpendicular a la dirección de la fisura,  $\sigma_{xx}$ , en diferentes instantes del proceso de carga ( $t_1 < t_2 < t_3 < t_4$ ) y b) distribución de tensiones  $\sigma_{xx}$  en el panel deformado (factor de amplificación de las deformadas de 1000 en  $t_1$  y 300 en el resto de instantes)

## CONCLUSIONES

A lo largo de las secciones previas se ha explorado la *Aproximación de continuo de discontinuidades fuertes (CSDA)* para un modelo de daño continuo isótropo en régimen de grandes deformaciones. Aunque esta aproximación ya había sido estudiada por los autores empleando una cinemática de deformación infinitesimal<sup>5-7,14</sup>, se han extendido aquí los resultados obtenidos al caso de grandes deformaciones. Como principal resultado se muestra que el análisis de discontinuidad fuerte empleado en el caso infinitesimal<sup>14</sup> puede extenderse al caso finito tan sólo considerando la cinemática de discontinuidad fuerte de deformación finita (ecuación (8)), obteniéndose las mismas conclusiones generales, a saber:

- La aproximación de continuo de discontinuidades fuertes constituye un método eficaz, desde el punto de vista computacional, en la simulación numérica de fenómenos de localización, considerando tanto la cinemática de deformaciones infinitesimales como la de deformaciones finitas.

Del análisis de discontinuidad fuerte se extrae información sobre los modelos discretos (tracción-salto desplazamiento) que gobiernan el comportamiento de la línea de discontinuidad. Estos modelos *emergen* de modo natural de los continuos de los que proceden al aplicar una cinemática de discontinuidad fuerte, pero no se implementan explícitamente en el algoritmo, constituyendo una característica específica frente a otro tipo de aproximaciones, pues un único modelo continuo, junto a la cinemática de discontinuidad fuerte, permite modelar el comportamiento de la totalidad del medio a lo largo de todo el proceso de carga. Por otro lado, la obtención de los modelos discretos puede resultar pesada en determinados modelos constitutivos continuos.

- El análisis de discontinuidad fuerte permite obtener todos los ingredientes necesarios para afirmar que los modelos discretos inducidos o proyectados por la cinemática de discontinuidad fuerte se constituyen en auténticos *modelos constitutivos*, heredando muchas de las propiedades del modelo continuo del que proceden. Es interesante resaltar una propiedad que no conservan: la isotropía del modelo continuo se transforma en anisotropía en el discreto, caracterizando el concepto direccional de la fisura o localización.
- El papel del tipo de cinemática empleada (infinitesimal o finita) se revela crucial en la aproximación de continuo de discontinuidades fuertes empleada, y es en los modelos discretos *proyectados* que gobiernan la línea de discontinuidad donde se constata de modo más claro.

Los modelos discretos degradables obtenidos, para un mismo modelo continuo del que proceden, son diferentes según la cinemática que se emplee, no colapsando el de grandes deformaciones en el de deformaciones infinitesimales cuando los saltos en el campo de desplazamientos son pequeños (al inicio del proceso de carga), es decir, son modelos diferentes independientemente de la relación entre los saltos de desplazamientos y el tamaño del problema.

Ello se constata claramente en aquellos problemas donde se obtienen saltos de desplazamientos importantes, en la línea de discontinuidad, en relación con el tamaño del problema, pues las curvas que expresan la respuesta estructural son completamente diferentes según la cinemática empleada.

Cuando los saltos son pequeños comparados con el tamaño del elemento, el comportamiento constitutivo de la discontinuidad sigue siendo diferente, pero puede no resultar perceptible en la respuesta estructural si la malla empleada es muy grande, ya que la

influencia de los elementos que exhiben discontinuidad es pequeña en proporción. Para el caso de mallas con pocos elementos se comprueba, de nuevo, la marcada diferencia en la respuesta.

Por todo lo analizado en el presente trabajo, se puede concluir que la aproximación de continuo de discontinuidades fuertes, basada en modelos degradables y en deformaciones finitas e infinitesimales, provee un marco consistente, robusto y computacionalmente eficaz para el análisis del fallo material en sólidos.

## REFERENCIAS

- 1 F. Armero y K. Garikipati, “An analysis of strong discontinuities in multiplicative finite strain plasticity and their relation with the numerical simulation of strain localization in solids”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **33**, N° (20-22). pp. 2863—2885, (1996).
- 2 R. Larsson, K. Runesson y S. Sture, “Embedded localization band in undrained soil based on regularized strong discontinuity theory and finite element análisis”, *Int. J. Solids and Structures*, Vol. **33**, N° (20-22), pp. 3081—3101, (1996).
- 3 J. Mandel, “Conditions de stabilité et postulat de drucker”. In J. Kravtchenko and P. Sirieys (Eds.), Springer, *Rheology and Soil Mechanics*, pp. 58—68, Berlin, (1966).
- 4 O. Manzoli, “Un modelo analítico y numérico para la simulación de discontinuidades fuertes en la mecánica de sólidos”, Tesis Doctoral, Dpto. de Resistencia de Materiales de la Universidad Politécnica de Cataluña, Barcelona, (1998).
- 5 J. Oliver, “Continuum modelling of strong discontinuities in solid mechanics using damage models”, *Computational Mechanics*, Vol. **17**, N° (1-2), pp.49—61, (1995).
- 6 J. Oliver, “Modelling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations”, Monografía de CIMNE, N° 28, Barcelona, (1995).
- 7 J. Oliver, “Modeling strong discontinuities in solid mechanics via strain softening constitutive equations. Part 1: Fundamentals”, *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. **39**, N° (21), pp. 3575—3600, (1996).
- 8 J. Oliver y C. Agelet, “*Mecánica de medios continuos para ingenieros*”. Edicions UPC, Barcelona, (2000).
- 9 J. Oliver, M. Cervera y O. Manzoli, “On the use of J2 plasticity models for the simulation of 2D strong discontinuities in solids”, In D. Owen, E. Onate and E. Hinton (Eds.), CIMNE, *Computational Plasticity*, pp. 38—55, (1997).
- 10 J. Oliver, M. Cervera y O. Manzoli, “*On the use of strain-softening models for the simulation of strong discontinuities in solids*”, R. de Borst and E. Van der Giessen, (1998).
- 11 J. Oliver, M. Cervera, S. Oller y J. Lubliner, “Isotropic damage models and smeared crack analysis of concrete”, In N. B. et al. Structures (Ed.), Pineridge Press, *SCIC Computer aided analysis and design of concrete structures*, pp. 945—957, Swansea, (1990).
- 12 N. S. Ottosen y K. Runesson, “Acceleration waves in elasto-plasticity”, *Int. J. Solids Struct.*, Vol. **28**, pp. 13—159, (1991).
- 13 G. Pijaudier-Cabot y A. Benallal, “Strain localitation and bifurcation in a nonlocal continuum”, *Int. J. Solids Structures*, Vol. **30**, N° 13, pp. 1761—1775, (1993).
- 14 M. Dolores G. Pulido y Javier Oliver. “Contribuciones a la simulación numérica del fallo material en deformaciones infinitesimales. Modelos de degradación y daño continuo”, *Revista Internacional Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **22**, N° 3, pp. 299—334, (2006).

- 15 J. R. Rice, “The localization of plastic deformation”, In W. T. Koiter (Ed.), North-Holland, Amsterdam, Theoretical and Applied Mechanics, *Proc. 14th IUTAM Congress*, pp. 207—220, Delft, The Netherlands, (1976).
- 16 K. Runesson, N. S. Ottosen y D. Peric, “Discontinuous bifurcation of elasticplastic solutions at plane stress and plane strain”, *Int. J. of Plasticity*, Vol. **7**, pp. 99—121, (1991).
- 17 J. Simó, J. Oliver y F. Armero, “An analysis of strong discontinuities induced by strain-softening in rate-independent inelastic solids”, *Comp. Mech.*, Vol. **12**, pp. 277—296, (1993).
- 18 J. C. Simó y T. J. R. Huges, “*Computational Inelasticity*”, Springer and Verlag, (1998).
- 19 K. C. Valanis, “On the uniqueness of solution of the initial value problem in softening materials”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. **52**, pp. 649—653, (1985).