

Determinación de parámetros modales a través del ajuste global de la respuesta

Luis Manuel Villa García

Dpto. de Construcción e Ingeniería de Fabricación
Universidad de Oviedo, Campus de Gijón, 33203 Gijón, España
Tel.: 34 98 518 1930; Fax: 34 98 518 2055
email: villa@uniovi.es

Resumen

El presente trabajo, desarrolla la aplicación de técnicas de optimización, a través de la utilización del Ajuste Global de la Respuesta, para la determinación de parámetros modales por el método de identificación, en el caso general de amortiguamiento histerético o estructural. Se abre un nuevo camino para la resolución del problema inverso en análisis modal, que permite determinar el modelo modal a partir de la respuesta del sistema. Se propone un método de descomposición, para trabajar con magnitudes complejas en operaciones matriciales producto, que admite tratar separadamente la parte real e imaginaria; así como un ejemplo del mismo para la implementación en programas comerciales de optimización. El algoritmo propuesto alcanza una estimación global de parámetros (frecuencias naturales, coeficientes de pérdida por amortiguamiento y matriz modal); mediante un proceso iterativo de cálculo, creando un modelo de funciones de respuesta en frecuencia artificiales, ligado a la totalidad de grados de libertad del sistema bajo estudio. De este modo es posible obtener un conjunto de soluciones único y consistente de estas propiedades procesando toda la información simultáneamente.

Palabras clave: *dinámica Estructural, análisis Modal, identificación, optimización.*

DETERMINATION OF MODAL PARAMETERS BY MEANS OF THE OVERALL ADJUSTMENT OF THE RESPONSE

Summary

The present study develops the application of optimization techniques via the use of Overall Adjustment of the Response to determine modal parameters for the identification method in the general case of hysteretic or structural damping. A new approach to solving the inverse problem in modal analysis is presented which enables the modal model to be determined from the system response. A decomposition method is proposed for working with complex magnitudes in product-matrix operations that allows the real and the imaginary parts to be dealt with separately. In addition, an example of this method is presented for its implementation in commercial optimization programmes. The proposed algorithm achieves a global estimation of parameters (natural frequencies, damping coefficients and the modal matrix) by means of an iterative calculation process, creating a model of artificial frequency response functions related to the total degrees of freedom of the system under study. It is thus possible to obtain a set of unique, consistent solutions for these properties simultaneously processing all the information.

Keywords: *structural dynamics, modal analysis, identification, optimization.*

INTRODUCCIÓN

El definir adecuadamente el movimiento de un sistema mecánico o estructural, trae consigo el manejar un gran volumen y complejidad de datos que, en general, se recogen como funciones de respuesta en frecuencia a partir de las cuales se estiman los parámetros modales. Dado el alto número de parámetros a considerar, las técnicas de optimización aportan considerables ventajas en tiempo y precisión (fiabilidad).

En el presente trabajo, se desarrolla la aplicación de técnicas de optimización a través de la utilización del Ajuste Global de la Respuesta, para la determinación de parámetros modales por el método de identificación, que se ciñen exclusivamente a: sistemas con amortiguamiento histerético o estructural, niveles de amortiguamiento bajos (generalmente menores de un 10% que son los que se presentan en las grandes estructuras), y métodos que trabajan en el dominio de la frecuencia.

El algoritmo que se presenta aborda la determinación de parámetros modales en varias etapas. Estas comprenden la *generación de un modelo artificial de funciones de respuesta en frecuencia y el ajuste de la respuesta*, para posteriormente centrarse en la *imposición de las condiciones de simetría a los residuos de las receptancias*, así como en la *obtención de las componentes de la matriz modal a partir de los residuos*, para finalmente formular la *imposición de las condiciones de ortogonalidad al modelo dinámico*.

Hay diferentes técnicas que permiten deducir las características modales de un sistema dado desde el modelo de respuesta obtenido experimentalmente. El procedimiento es conocido como "identificación modal"^{1,2}.

El ejemplo aplicado que se añade al final del trabajo, ha sido ejecutado mediante el lenguaje de programación GAMS (General Algebraic Modeling System), que permite el modelado, resolución y análisis de diversos problemas de optimización^{3,4}.

Entre las características básicas del mismo cabe destacar que:

- Permite pasar de resolver problemas de pequeñas dimensiones (unas pocas variables y restricciones) a problemas mayores (miles de variables y restricciones) sin variar significativamente el código. En consecuencia es posible escribir de manera compacta restricciones similares -a través del manejo eficiente de sus índices- mediante una sola restricción.
- Una vez que se tiene una formulación consistente del problema, expresada en la notación de GAMS, el mismo software elige algún optimizador de los que dispone, para alcanzar su solución. De esta manera, el proceso de resolución del problema está separado del proceso de modelado; el usuario puede cambiar el modelo para mejorarlo o completarlo en un entorno agradable de manejar, ya que no se tiene que preocupar del funcionamiento del algoritmo interno que necesita para resolverlo.
- El aprendizaje del código GAMS resulta fácil para usuarios con conocimientos previos de optimización, debido a que, la forma en que GAMS presenta el problema, coincide prácticamente con la descripción matemática del mismo.

Los datos numéricos de partida se obtienen analíticamente, a partir de la resolución del problema directo; esto es, a partir de un modelo espacial dado ($[M]$, $[K]$ y $[D]$), el problema directo se resuelve al objeto de obtener el modelo modal $(\omega_r, \eta_r, [\Phi])$ con lo que la respuesta (desplazamiento), en cada grado de libertad, en el dominio de la frecuencia (que se utiliza en la determinación de parámetros modales a través del *Ajuste Global de la Respuesta*), se determina utilizando la expresión $\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\}^2$, en la que necesariamente se ha de introducir el vector de cargas $\{F\}$ en el dominio de la frecuencia.

En el ejemplo ilustrativo mostrado mas adelante, dicho vector de cargas se corresponde con el método polyreference o multi input - multi output (MIMO) que corresponde a la tipología de excitación más complicada, de las dos indicadas en el Apartado 2. En todos y cada uno de los grados de libertad considerados, se introduce una excitación que responde a una función coseno (en fase con las demás) de amplitud constante y frecuencia variable (en todo el intervalo de frecuencias de interés evidentemente); para tratar de simular analíticamente el efecto de unos excitadores de masa.

En el campo del análisis modal operacional, para ensayos con excitación ambiental, se supone que las fuerzas desconocidas se aplican simultáneamente. Además se supone que la fuerza de entrada es un ruido blanco, es decir, no es una función de la frecuencia y tiene un espectro con un valor medio constante para cada frecuencia⁵. Lo cual se aplica en el proceso que se utiliza.

En esta aportación se emplean las técnicas de optimización descritas en^{10,12} para la determinación de parámetros modales a partir de las funciones de respuesta en frecuencia y el cálculo de la matriz modal de un sistema dinámico a partir de las constantes modales utilizando técnicas de optimización.

La aplicación fundamental del método propuesto es la resolución del problema inverso, desde el modelo de respuesta, hasta el modelo modal. Sin embargo, su objetivo es el mismo que en^{10,12}, la determinación de parámetros modales; pero a partir de datos diferentes, en donde no se conoce la relación existente entre la respuesta de la estructura y la excitación aplicada entre los distintos grados de libertad (es decir, se desconocen o no hay posibilidad de determinar las funciones de respuesta en frecuencia).

La estimación de dichos parámetros es global (frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y matriz modal $\omega_r, \eta_r, [\Phi]$). Durante el proceso iterativo de cálculo, el algoritmo del ajuste global de la respuesta, crea un modelo de FRFs artificiales ligado a la totalidad de grados de libertad del sistema bajo estudio. Es posible obtener un conjunto de soluciones único y consistente con estas propiedades procesando toda la información simultáneamente. En principio, esto es preferible a las formas de promediado de los resultados de varios análisis independientes a partir -por ejemplo- de una colección de FRFs⁸.

De esta manera, asumiendo que: la excitación tiene un espectro con un valor medio constante para cada frecuencia, y el conocimiento de la respuesta del sistema; es posible entonces utilizar las metodologías que se aplican en^{10,12} para tratar problemas de análisis modal clásico al objeto de crear un modelo de FRFs virtuales.

Dado que -como se mencionará en los apartados siguientes- la excitación puede ser única o múltiple, se agrupan las ventajas e inconvenientes de cada una de ellas, según la tipología que se utilice para su descripción. La excitación única se puede conseguir con un martillo de impacto o un vibrador⁶, mientras que la múltiple, utilizando varios vibradores simultáneamente, en varios grados de libertad. Ahora bien, en ambos casos ya existiría entonces un conocimiento de la excitación aplicada⁷.

AJUSTE GLOBAL DE LA RESPUESTA

La técnica de optimización, que a continuación se describe, para el cálculo de parámetros modales a partir del modelo de respuesta, trata de la determinación de los mismos a través del ajuste global de la respuesta.

Su característica fundamental, consiste en que permite determinar -incluso midiendo únicamente la respuesta- los modos de vibración normalizados respecto de la matriz de masa, es decir, la obtención de la matriz modal $[\Phi]$ en la situación general de amortiguamiento estructural, de esta forma se soluciona el problema inverso, desde las mediciones experimentales del modelo de respuesta, hasta el modelo modal ($\omega_r, \eta_r, [\Phi]$), lo que supone una ventaja frente a otros procedimientos, que sólo permiten la determinación de valores

proporcionales de la respuesta, entre cada uno de los d.o.f. considerados que componen cada uno de los modos de vibración (matriz $[\Psi]$).

El resto de las características principales del método, son las siguientes:

- Trabaja en el dominio de la frecuencia.
- Se trata de un método indirecto, que determina el modelo modal a partir de la respuesta.
- Es aplicable a sistemas MDOF.
- Como método multi output (MO), se puede aplicar en los casos de:
 - global o single input - multi output (SIMO).
 - polyreference o multi input - multi output (MIMO).

Es decir, la excitación puede ser única (en un grado de libertad), o múltiple (en varios grados de libertad), respectivamente.

- La estimación de parámetros modales es global .
- Trabaja con modos de vibración complejos, si bien, esto depende de los datos de partida; si los mismos se corresponden con un caso de amortiguamiento proporcional, los modos de vibración serían evidentemente reales (idénticos a la situación sin amortiguamiento).
- No es necesario cálculo previo alguno para estimar los valores iniciales de los parámetros modales; ya que no hace falta suministrar buenas estimaciones iniciales para que el proceso converja.

Obtención de parámetros modales

El algoritmo que se presenta para la obtención de parámetros modales, corresponde al caso general de amortiguamiento histerético o estructural, -como se ha mencionado- al efectuar una estimación de parámetros global (frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y matriz modal $\omega_r, \eta_r, [\Phi]$). Durante el proceso iterativo de cálculo, el algoritmo del ajuste global de la respuesta, crea un modelo de FRFs artificiales ligado a la totalidad de grados de libertad del sistema bajo estudio; de esta manera se obtiene un conjunto de soluciones único y consistente con estas propiedades, procesando toda la información simultáneamente.

La resolución del mismo comprende varias etapas, como son:

- El ajuste de la respuesta en cada grado de libertad considerado.
- Generación de un modelo de receptancias $\alpha_{jk}(\omega)$ de dimensión igual al producto de los grados de libertad ($N \times N$) bajo estudio.
- Imposición de las condiciones de simetría a los residuos de las receptancias.
- Obtención de las componentes de la matriz modal a partir de los residuos.
- Imposición de las condiciones de ortogonalidad para la obtención de la matriz modal normalizada respecto de la masa.

A continuación se desarrollan cada una de las mismas.

a) *Generación de un modelo artificial de FRF y ajuste de la respuesta*

El conjunto de datos, está constituido por la parte real e imaginaria de la respuesta en cada uno de los grados de libertad considerados

- a) dato_{Rij} : magnitud de la componente real de la respuesta (desplazamiento) en el d.o.f. j , a la frecuencia i
- b) dato_{Iij} : magnitud de componente imaginaria de la respuesta (desplazamiento) en el d.o.f. j , a la frecuencia i

A pesar de que -como es sabido- en el dominio del tiempo la respuesta solo presenta parte real, al aplicar la transformada de Fourier de la misma, surgen componentes real e imaginaria⁹

- c) F_{Rk} : componente real de la fuerza de excitación en el d.o.f. k
- d) F_{Ik} : componente imaginaria de la fuerza de excitación en el d.o.f. k

Dentro del conjunto de variables, que entran en juego en las diferentes etapas, en algunos casos son aplicables las mismas definiciones utilizadas para la determinación de parámetros modales a través de FRFs¹⁰, debido a aspectos comunes de los problemas planteados. Este es el caso de las frecuencias naturales, comprendidas dentro de cada uno de los intervalos identificados manualmente, donde se encuentran cada uno de los modos que se pretenden estimar (picos de las curvas).

- e) ω_r : frecuencia natural para el modo r
- f) η_r : coeficiente de pérdida por amortiguamiento para el modo r
- g) ${}_r A_{Rjk}$: componente real del residuo o cte. modal
- h) ${}_r A_{Ijk}$: componente imaginaria del residuo o cte. modal
- i) X_{Rj} : estimación de la respuesta (desplazamiento) en el d.o.f. j (parte real)
- j) X_{Ij} : estimación de la respuesta (desplazamiento) en el d.o.f. j (parte imaginaria)
- k) ε_{Rij} : error asociado con el dato i (parte real), para el desplazamiento en el d.o.f. j
- l) ε_{Iij} : error asociado con el dato i (parte imaginaria), para el desplazamiento en el d.o.f. j

- m) z : función objetivo

debido a la metodología del análisis de regresión efectuado, ε_{Rij} y ε_{Iij} son siempre positivos.

Centrando la atención en la respuesta forzada de sistemas MDOF, omitiendo la parte transitoria de la respuesta completa y considerando solamente la componente permanente²

$$\{X\} = [\alpha(\omega)]\{F\} \quad (1)$$

o bien

$$X_j = \sum_k \alpha_{jk} F_k \quad (2)$$

donde $[\alpha(\omega)]$ es la matriz de receptancia del sistema de dimensión $N \times N$, que contiene toda la información sobre las características dinámicas del mismo, en la que cada elemento α_{jk} representa una función de respuesta en frecuencia (FRF) individual, describiendo la relación entre la respuesta en una coordenada j y una única fuerza de excitación aplicada en la coordenada k .

Dado que la ecuación anterior, constituye un producto de magnitudes reales e imaginarias, para llevar a cabo el proceso de cálculo con la consiguiente optimización, es necesario particionarla, mediante una transformación similar a la indicada en¹⁰. Para ello se descompone la respuesta, la receptancia y la fuerza de excitación aplicada (X_j , α_{jk} y F_k), en sus componentes reales e imaginarias, quedando la expresión anterior de la forma

$$(X_{Rj} + X_{Ij}i) = \sum_k \left(\underbrace{\alpha_{Rjk}}_a + \underbrace{\alpha_{Ijk}}_b i \right) \left(\underbrace{F_{Rk}}_c + \underbrace{F_{Ik}}_d i \right) \quad (3)$$

Asimismo, y según la transformación mencionada, si se consideran dos magnitudes complejas, $a + bi$ y $c + di$, el producto de las mismas resulta ser agrupando términos reales y complejos

$$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad - bc)i \quad (4)$$

análogamente, identificando términos a ambos lados de la igualdad anterior, se obtiene:

$$\begin{aligned} X_{Rj} &= \sum_k \alpha_{Rjk} F_{Rk} - \sum_k \alpha_{Ijk} F_{Ik} \\ X_{Ij} &= \sum_k \alpha_{Rjk} F_{Ik} + \sum_k \alpha_{Ijk} F_{Rk} \end{aligned} \quad (5)$$

lo que ya constituye la partición buscada. Nótese sin embargo que de las tres magnitudes representadas (X_j , α_{jk} y F_k) son también funciones de la frecuencia, por lo que debe incorporarse a las mismas un tercer subíndice que hace referencia a ella

$$\begin{aligned} X_{Rij} &= \sum_k \alpha_{Rijk} F_{Rk} - \sum_k \alpha_{Iijk} F_{Iki} \\ X_{Iij} &= \sum_k \alpha_{Rijk} F_{Ik} + \sum_k \alpha_{Iijk} F_{Rki} \end{aligned} \quad (6)$$

Por otra parte, la receptancia α_{jk} ya ha sido también particionada en¹⁰ para el caso general de amortiguamiento estructural, presentando la forma

$$\begin{aligned} \alpha_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \frac{r \bar{A}_{jk}}{\omega_r^2 - \omega^2 + i \eta_r \omega_r^2} \\ &= \sum_{r=1}^N \frac{[r A_{Rjk}(\omega_r^2 - \omega^2) + r A_{Ijk}(\eta_r \omega_r^2)] + [r A_{Ijk}(\omega_r^2 - \omega^2) - r A_{Rjk}(\eta_r \omega_r^2)]i}{(\omega_r^2 - \omega^2)^2 + (\eta_r \omega_r^2)^2} \\ &= \text{Re } \alpha_{jk} + \text{Im } \alpha_{jk}(\omega) \end{aligned} \quad (7)$$

por consiguiente, acorde con la nomenclatura utilizada

$$\begin{aligned} \alpha_{Rijk} &= \sum_{r=1}^N \frac{r A_{Rjk}(\omega_r^2 - \omega_i^2) + r A_{Ijk}(\eta_r \omega_r^2)}{(\omega_r^2 - \omega_i^2)^2 + (\eta_r \omega_r^2)^2} \\ \alpha_{Iijk} &= \sum_{r=1}^N \frac{r A_{Ijk}(\omega_r^2 - \omega_i^2) - r A_{Rjk}(\eta_r \omega_r^2)}{(\omega_r^2 - \omega_i^2)^2 + (\eta_r \omega_r^2)^2} \end{aligned} \quad (8)$$

Para ajustar la respuesta de todos y cada uno de los d.o.f., se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto¹¹

$$\sum_{i=1}^N |X_{Rij} - dato_{Rij}| + \sum_{i=1}^N |X_{Iij} - dato_{Iij}| \quad (9)$$

La estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \sum_j \sum_i (\varepsilon_{Rij} + \varepsilon_{Iij}) + \dots \quad (10)$$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen el conjunto de soluciones admisibles

$$\left. \begin{array}{l} X_{Rij} - dato_{Rij} \leq \varepsilon_{Rij} \\ dato_{Rij} - X_{Rij} \leq \varepsilon_{Rij} \\ \varepsilon_{Rij} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte real} \quad \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, N \end{array} \quad (11)$$

$$\left. \begin{array}{l} X_{Iij} - dato_{Iij} \leq \varepsilon_{Iij} \\ dato_{Iij} - X_{Iij} \leq \varepsilon_{Iij} \\ \varepsilon_{Iij} \geq 0 \end{array} \right\} \text{ parte imaginaria}$$

donde n es el número de muestras o de puntos en los que se ha medido la respuesta.

El conjunto de estas dos últimas expresiones representa la contribución de esta etapa a la función objetivo y al conjunto de restricciones del problema total, respectivamente.

b) Imposición de las condiciones de simetría a los residuos de las receptancias

En la presente etapa, se sabe que los residuos verifican la siguiente condición de simetría ${}_r\bar{A}_{jk} = {}_r\bar{A}_{kj}$, debido a que la matriz de receptancias del sistema es simétrica (principio de reciprocidad)

$$\alpha_{jk} = \frac{X_j}{F_k} = \alpha_{kj} = \frac{X_k}{F_j} \quad (12)$$

El conjunto de nuevas variables involucradas en el problema, que van a aparecer durante el desarrollo de esta etapa b , son las siguientes

- n) $\varepsilon_{R_{Sim}{}^rjk}$: error asociado a la simetría del residuo ${}_r\bar{A}_{jk}$ (parte real)
- o) $\varepsilon_{I_{Sim}{}^rjk}$: error asociado a la simetría del residuo ${}_r\bar{A}_{jk}$ (parte imaginaria)

debido a la metodología del análisis de regresión efectuado $\varepsilon_{R_{Sim}{}^rjk}$ y $\varepsilon_{I_{Sim}{}^rjk}$ son siempre positivas.

Para ajustar las condiciones de simetría de los residuos de las receptancias (relacionados a través de sus subíndices con cada una de las coordenadas), se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto¹¹

$$\sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{Rjk} - {}_rA_{Rkj}| + \sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{Ijk} - {}_rA_{Ikj}| \quad (13)$$

De esta forma, la contribución de esta etapa en la función objetivo, para la estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \dots + \sum_r \sum_j \sum_k (\varepsilon_{R_{Sim}rjk} + \varepsilon_{R_{Sim}rjk}) + \dots \quad (14)$$

en el que se pueden plantear para los residuos, el siguiente grupo de restricciones

$$\begin{aligned} {}_r A_{Rjk} - {}_r A_{Rkj} &\leq \varepsilon_{R_{Sim}rjk} \\ {}_r A_{Rkj} - {}_r A_{Rjk} &\leq \varepsilon_{R_{Sim}rjk} \\ \varepsilon_{R_{Sim}rjk} &\geq 0 \end{aligned} \quad (15)$$

para la parte real, y para la imaginaria

$$\begin{aligned} {}_r A_{Ijk} - {}_r A_{Ikj} &\leq \varepsilon_{I_{Sim}rjk} \\ {}_r A_{Ikj} - {}_r A_{Ijk} &\leq \varepsilon_{I_{Sim}rjk} \\ \varepsilon_{I_{Sim}rjk} &\geq 0 \end{aligned} \quad (16)$$

que se pueden escribir de forma más conveniente como:

$$\left. \begin{aligned} {}_r A_{Rjk} &\leq {}_r A_{Rkj} + \varepsilon_{R_{Sim}rjk} \\ {}_r A_{Rjk} &\geq {}_r A_{Rkj} - \varepsilon_{R_{Sim}rjk} \\ \varepsilon_{R_{Sim}rjk} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ parte real} \quad j, k = 1, \dots, N \quad (17)$$

$$\left. \begin{aligned} {}_r A_{Ijk} &\leq {}_r A_{Ikj} + \varepsilon_{I_{Sim}rjk} \\ {}_r A_{Ijk} &\geq {}_r A_{Ikj} - \varepsilon_{I_{Sim}rjk} \\ \varepsilon_{I_{Sim}rjk} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ parte imaginaria}$$

que representan la contribución a la totalidad del problema, del conjunto de restricciones para la presente etapa.

c) *Obtención de las componentes de la matriz modal a partir de los residuos*

El proceso seguido para la obtención y ajuste de las componentes de la matriz modal $[\Phi]$, a partir de todos y cada uno de los residuos ${}_r \bar{A}_{jk}$, es similar al mostrado en¹² para la determinación de la matriz modal. Por lo que aquí solamente se resumen brevemente los pasos fundamentales del mismo, con la nomenclatura propia del presente apartado, al objeto de no perder la continuidad en la explicación del proceso de resolución a través del método para el ajuste global de la respuesta. En todo caso, se puede consultar¹² para ver con más detalle alguno de los pasos mostrados en esta tercera etapa.

El conjunto de nuevas variables involucradas en el problema, que van a aparecer durante el desarrollo de esta etapa c, son las siguientes:

- p) Φ_{Rjr} : componente real de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r
- q) Φ_{Ijr} : componente imaginaria de la matriz modal para la fila j y columna (modo) r
- r) $\varepsilon_{\Phi_{Rrjk}}$: error asociado con el modo r en la receptancia virtual α_{jk} (parte real) para la matriz modal
- s) $\varepsilon_{\Phi_{Irk}}$: error asociado con el modo r en la receptancia virtual α_{jk} (parte imaginaria) para la matriz modal

debido a la metodología del análisis de regresión efectuado, las variables $\varepsilon_{\Phi_{Rrjk}}$ y $\varepsilon_{\Phi_{Irk}}$, son siempre positivas.

Por definición, cada residuo es el resultado del producto de dos componentes de una misma columna de la matriz modal

$${}_r\bar{A}_{jk} = \Phi_{jr} \Phi_{kr} \tag{18}$$

Descomponiendo los residuos y las componentes de la matriz modal, en sus componentes real e imaginaria, en la expresión anterior se tiene que

$$({}_rA_{Rjk} + {}_rA_{Ijk}i) = \left(\underbrace{\Phi_{Rjr}}_a + \underbrace{\Phi_{Ijr}}_b i \right) \left(\underbrace{\Phi_{Rkr}}_c + \underbrace{\Phi_{Ikr}}_d i \right) \tag{19}$$

y según la transformación realizada en la primera etapa, para el presente caso se obtiene

$$({}_rA_{Rjk} + {}_rA_{Ijk}i) = (\Phi_{Rjr}\Phi_{Rkr} - \Phi_{Ijr}\Phi_{Ikr}) + (\Phi_{Rjr}\Phi_{Ikr} + \Phi_{Ijr}\Phi_{Rkr})i \tag{20}$$

con lo cual, identificando términos a ambos lados de la igualdad anterior resulta

$$\begin{aligned} {}_rA_{Rjk} &= (\Phi_{Rjr}\Phi_{Rkr} - \Phi_{Ijr}\Phi_{Ikr}) \\ {}_rA_{Ijk}i &= (\Phi_{Rjr}\Phi_{Ikr} + \Phi_{Ijr}\Phi_{Rkr})i \end{aligned} \tag{21}$$

Para ajustar cada una de las componentes de la matriz modal, se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto¹¹

$$\sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{Rjk} - \Phi_{Rjr}\Phi_{Rkr}| + \sum_r \sum_j \sum_k |{}_rA_{Ijk} - \Phi_{Ijr}\Phi_{Ikr}| \tag{22}$$

La estimación de las mismas, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal (contribución de la presente etapa en la función objetivo para la totalidad del problema)

$$\text{Minimizar } z = \dots + \sum_r \sum_j \sum_k (\varepsilon_{\Phi_{Rrjk}} + \varepsilon_{\Phi_{Irjk}}) + \dots \tag{23}$$

El conjunto de restricciones no lineales del problema, viene dado por

$$\left. \begin{aligned} &\left\{ \begin{aligned} &{}_rA_{Rjk} - \Phi_{Rjr}\Phi_{Rkr} \leq \varepsilon_{\Phi_{Rrjk}} \\ &\Phi_{Rjr}\Phi_{Rkr} - {}_rA_{Rjk} \leq \varepsilon_{\Phi_{Rrjk}} \\ &\varepsilon_{\Phi_{Rrjk}} \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ parte real} \\ &\left\{ \begin{aligned} &{}_rA_{Ijk} - \Phi_{Ijr}\Phi_{Ikr} \leq \varepsilon_{\Phi_{Irjk}} \\ &\Phi_{Ijr}\Phi_{Ikr} - {}_rA_{Ijk} \leq \varepsilon_{\Phi_{Irjk}} \\ &\varepsilon_{\Phi_{Irjk}} \geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ parte imaginaria} \end{aligned} \right\} \tag{24}$$

que representa la contribución de la presente etapa en las mismas, para la totalidad del problema.

d) Imposición de las condiciones de ortogonalidad

Finalmente se introducen las propiedades de ortogonalidad, en el método del ajuste global de la respuesta. En la situación general de amortiguamiento hysterético o estructural -escritas en forma matricial- aquellas se reducen a

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] &= [I] \\ [\Phi]^T [[K] + i[D]] [\Phi] &= [\lambda_r^2] \end{aligned} \quad (25)$$

Más adelante, se verá que la segunda de estas ecuaciones resulta redundante, ya que si los parámetros del modelo modal son conocidos (frecuencias naturales, coeficientes de pérdida por amortiguamiento y matriz modal ω_r , η_r , $[\Phi]$), el cálculo de la rigidez $[[K] + i[D]]$ es directo.

Por otra parte, la primera ecuación representa el producto de tres matrices con magnitudes reales e imaginarias, que debe particionarse en dos ocasiones a lo largo de todo el proceso, para lograr efectuar el mismo. El procedimiento para realizar el producto de las matrices modales y de masa, ha sido verificado aparte, por lo que aquí solo se expone el algoritmo final.

El conjunto de nuevas variables involucradas en el problema, que van a aparecer durante el desarrollo de esta última etapa *d*, son las siguientes

- t) m_{Rkj} : componente real de la matriz de masa concentrada
- u) I_{Rrs} : componente real de la matriz identidad
- v) I_{Irs} : componente imaginaria de la matriz identidad
- w) aux_{Rkr} : variable auxiliar (parte real), para el cálculo de $[M][\Phi]$
- x) aux_{Ikr} : variable auxiliar (parte imaginaria), para el cálculo de $[M][\Phi]$
- y) ε_{IdRrs} : error en el ajuste (parte real), de cada componente de la matriz identidad $[I]$
- z) ε_{IdIrs} : error en el ajuste (parte imaginaria), de cada componente de la matriz identidad $[I]$

Antes de proceder con la metodología empleada, respecto a las variables utilizadas se debe indicar que:

- A todas las masas que no pertenecen a la diagonal principal se les asigna el valor cero, mientras que las que pertenecen a la diagonal principal se definen como variables positivas (y conocidas).
- La parte imaginaria de la matriz de masa es siempre nula, evidentemente.
- Como es sabido, la matriz identidad $[I]$, está formada por términos unidad en la diagonal principal y por términos nulos en el resto. Sin embargo al conjunto de variables constituido por cada una de las componentes de la misma, no se les aplica ninguna restricción, al objeto de comprobar la idoneidad del cálculo realizado.

- Debido a la metodología del análisis de regresión efectuado, $\varepsilon_{Id_{Rrs}}$ y $\varepsilon_{Id_{Irs}}$ son siempre positivas.

Como ya se ha mencionado, una variable auxiliar va a ser utilizada para recoger temporalmente el valor del producto $[M][\Phi]$

$$\text{aux}_{kr} = \sum_j m_{kj} \Phi_{jr} \quad (26)$$

tanto para la parte real como para la imaginaria

$$(\text{aux}_{Rkr} + \text{aux}_{Rkr}i) = \sum_j \left(\underbrace{m_{Rkj}}_a + \underbrace{m_{Ikj}}_b \right) \left(\underbrace{\Phi_{Rjr}}_c + \underbrace{\Phi_{Ijr}}_d i \right) \quad (27)$$

dado que la parte imaginaria de la masa, debe ser siempre nula, resulta

$$\begin{aligned} \text{aux}_{Rkr} &= \sum_j m_{Rkj} \Phi_{Rjr} \\ \text{aux}_{Ikr} &= \sum_j m_{Rkj} \Phi_{Ijr} \end{aligned} \quad (28)$$

la primera partición buscada, identificando términos reales e imaginarios a ambos lados de la igualdad anterior. Una vez que se tiene la solución para todas y cada una de las componentes del producto $[M][\Phi]$, se procede al cálculo del producto del resultado del mismo por la matriz modal traspuesta $[\Phi]^T[\text{aux}]$

$$I_{rs} = \sum_j \Phi_{jr} \text{aux}_{js} \quad (29)$$

A partir de cuya expresión, mediante la partición ya utilizada en otras ocasiones, y en particular al principio de este apartado (etapa a)

$$(I_{Rrs} + I_{Rrs}i) = \sum_j \left(\underbrace{\Phi_{Rjr}}_a + \underbrace{\Phi_{Ijr}}_b i \right) \left(\underbrace{\text{aux}_{Rjs}}_c + \underbrace{\text{aux}_{Ijs}}_d i \right) \quad (30)$$

se obtiene, identificando términos reales e imaginarios, la segunda partición

$$\begin{aligned} I_{Rrs} &= \sum_j \Phi_{Rjr} \text{aux}_{Rjs} - \sum_j \Phi_{Ijr} \text{aux}_{Ijs} \\ I_{Irs} &= \sum_j \Phi_{Rjr} \text{aux}_{Ijs} + \sum_j \Phi_{Ijr} \text{aux}_{Rjs} \end{aligned} \quad (31)$$

Finalmente, para culminar esta última etapa, se procede al ajuste de la matriz identidad; para ajustar la solución de todas y cada una de las componentes de la ecuación que constituye la primera condición de ortogonalidad $[\Phi]^T[M][\Phi] = [I]$, se utiliza un análisis de regresión, según el método de estimación del mínimo valor absoluto¹¹

$$\sum \left| [\Phi]^T[M][\Phi] - [I] \right|_R + \sum \left| [\Phi]^T[M][\Phi] - [I] \right|_I \quad (32)$$

La estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\text{Minimizar } z = \sum_r \sum_s \cdots + (\varepsilon_{Id_{Rrs}} + \varepsilon_{Id_{Irs}}) \quad (33)$$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen -junto con las de las restantes etapas- el conjunto de soluciones admisibles

$$\begin{aligned} [\Phi]^T [M] [\Phi] - [I] &\leq [\varepsilon_{Id}] \\ [I] - [\Phi]^T [M] [\Phi] &\leq [\varepsilon_{Id}] \\ [\varepsilon_{Id}] &\geq 0 \end{aligned} \quad (34)$$

tanto para la parte real como para la imaginaria. Por consiguiente, según la nomenclatura utilizada, se reducen a

$$\left. \begin{aligned} &\left. \begin{aligned} I_{Rrs} - \varepsilon_{Id_{Rrs}} &\leq 1 \\ I_{Rrs} + \varepsilon_{Id_{Rrs}} &\geq 1 \\ \varepsilon_{Id_{Rrs}} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ para } r = s \\ &\left. \begin{aligned} I_{Rrs} - \varepsilon_{Id_{Rrs}} &\leq 0 \\ I_{Rrs} + \varepsilon_{Id_{Rrs}} &\geq 0 \\ \varepsilon_{Id_{Rrs}} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ para } r \neq s \end{aligned} \right\} \text{ parte real} \\ &\left. \begin{aligned} I_{Irs} - \varepsilon_{Id_{Irs}} &\leq 0 \\ I_{Irs} + \varepsilon_{Id_{Irs}} &\geq 0 \\ \varepsilon_{Id_{Irs}} &\geq 0 \end{aligned} \right\} \text{ parte imaginaria} \end{aligned} \quad (35)$$

El conjunto de estas últimas expresiones (35), junto con (33), representa la contribución de esta última etapa d , al conjunto de restricciones y a la función objetivo del problema total, respectivamente.

La función objetivo completa y el conjunto total de restricciones se recogen a continuación. Las variables que componen las mismas, satisfacen las definiciones que se han mostrado en las etapas previas. Así pues, la estimación de los parámetros modales, se puede obtener a través de la resolución del siguiente problema de programación no lineal

$$\begin{aligned} \text{Minimizar } z = &\sum_j \sum_i (\varepsilon_{Rij} + \varepsilon_{Iij}) + \sum_r \sum_j \sum_k (\varepsilon_{R_{Sim}rjk} + \varepsilon_{R_{Sim}rjk}) + \\ &+ \sum_r \sum_j \sum_k (\varepsilon_{\Phi_{R}rjk} + \varepsilon_{\Phi_{I}rjk}) + \sum_r \sum_s (\varepsilon_{Id_{Rrs}} + \varepsilon_{Id_{Irs}}) \end{aligned} \quad (36)$$

sujeto al siguiente conjunto de restricciones no lineales del problema, que definen el

conjunto de soluciones admisibles

$$\left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 X_{Rij} - dato_{Rij} \leq \varepsilon_{Rij} \\
 dato_{Rij} - X_{Rij} \leq \varepsilon_{Rij} \\
 \varepsilon_{Rij} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte real} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 X_{Iij} - dato_{Iij} \leq \varepsilon_{Iij} \\
 dato_{Iij} - X_{Iij} \leq \varepsilon_{Iij} \\
 \varepsilon_{Iij} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte imaginaria}
 \end{array} \right\} \text{Generación modelo artificial de FRF y} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 rA_{Rjk} \leq_r A_{Rkj} + \varepsilon_{RSim,rjk} \\
 rA_{Rjk} \geq_r A_{Rkj} - \varepsilon_{RSim,rjk} \\
 \varepsilon_{RSim,rjk} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte real} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 rA_{Ijk} \leq_r A_{Ikj} + \varepsilon_{ISim,rjk} \\
 rA_{Ijk} \geq_r A_{Ikj} - \varepsilon_{ISim,rjk} \\
 \varepsilon_{ISim,rjk} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte imaginaria}
 \end{array} \right\} \text{Imposición cond. simetría a residuos} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 rA_{Rjk} - \Phi_{Rjr} \Phi_{Rkr} \leq \varepsilon_{\Phi_R,rjk} \\
 \Phi_{Rjr} \Phi_{Rkr} - rA_{Rjk} \leq \varepsilon_{\Phi_R,rjk} \\
 \varepsilon_{\Phi_R,rjk} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte real} \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 rA_{Ijk} - \Phi_{Ijr} \Phi_{Ikr} \leq \varepsilon_{\Phi_I,rjk} \\
 \Phi_{Ijr} \Phi_{Ikr} - rA_{Ijk} \leq \varepsilon_{\Phi_I,rjk} \\
 \varepsilon_{\Phi_I,rjk} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte imaginaria}
 \end{array} \right\} \text{Obtención comp. matriz modal a} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 I_{Rrs} - \varepsilon_{Id_{Rrs}} \leq 1 \\
 I_{Rrs} + \varepsilon_{Id_{Rrs}} \geq 1 \\
 \varepsilon_{Id_{Rrs}} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{para } r = s \\
 \\
 \left. \begin{array}{l}
 I_{Rrs} - \varepsilon_{Id_{Rrs}} \leq 0 \\
 I_{Rrs} + \varepsilon_{Id_{Rrs}} \geq 0 \\
 \varepsilon_{Id_{Rrs}} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{para } r \neq s
 \end{array} \right\} \text{parte real} \\
 \left. \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l}
 I_{Irs} - \varepsilon_{Id_{Irs}} \leq 0 \\
 I_{Irs} + \varepsilon_{Id_{Irs}} \geq 0 \\
 \varepsilon_{Id_{Irs}} \geq 0
 \end{array} \right\} \text{parte imaginaria}
 \end{array} \right\} \text{Imposición condiciones de} \\
 \hspace{15em} \text{ortogonalidad}
 \end{array} \right\} \tag{37}$$

para $i = 1, \dots, n$ donde n es el número de muestras o de puntos, en los que se ha recogido la respuesta.

EJEMPLO

La exposición de la metodología analizada se complementa con un ejemplo aplicado, que implementa el algoritmo, al objeto de:

- indicar cómo se realiza la traducción del lenguaje matemático utilizado, al correspondiente a un software de optimización comercial (GAMS)³.

- que el lector verifique por si mismo, que se alcanza la solución del problema inverso, es decir que partiendo del modelo de respuesta se puede llegar al modelo espacial del sistema, a través de la determinación previa del modelo modal.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos para un sistema de 6 grados de libertad, utilizando la metodología expuesta. El modelo espacial empleado para la generación de datos, es:

$$[M] = \begin{bmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \quad (38)$$

$$[K] + i[D] = 10^3 = \begin{bmatrix} 2 + 0,3i & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (39)$$

En la Figura 1 se muestran los modelos -ambos de 6 grados de libertad- de edificio simple y su equivalente de masas concentradas y resortes; correspondientes al modelo espacial citado.

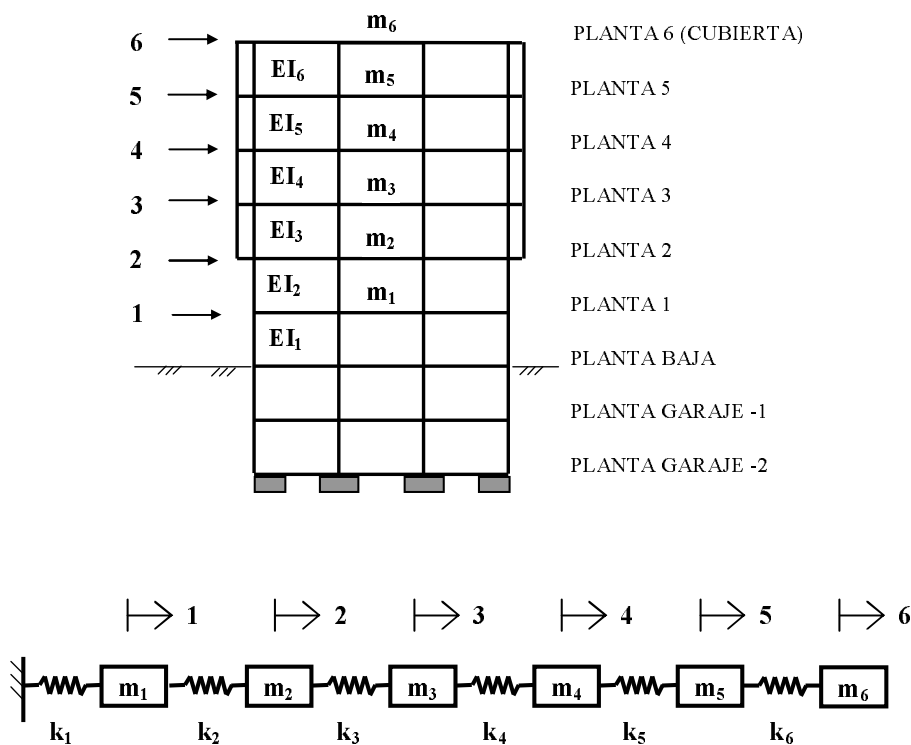


Figura 1. Modelos de edificio simple, de vano, y de masas concentradas y resortes

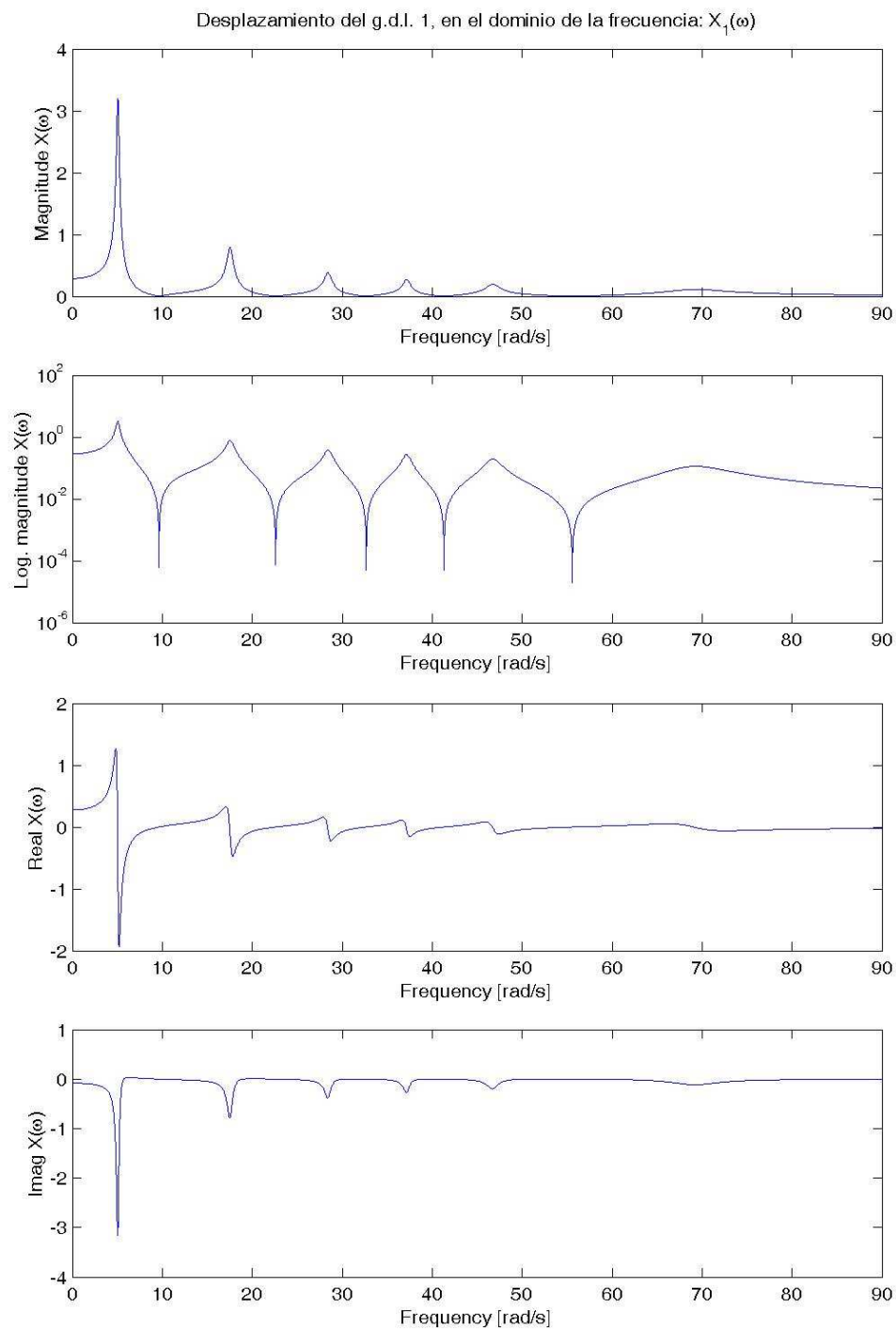


Figura 2. Desplazamiento -en el dominio de la frecuencia- para el g.d.l. 1

Los datos de partida para alimentar el algoritmo de resolución, han sido elaborados a partir del modelo espacial, según se describe en el Apartado 1. Al objeto de evitar ocupar un espacio excesivo, en la Figura 2, solamente se representa la respuesta (desplazamiento), en el dominio de la frecuencia, de uno de los grados de libertad medidos.

1.1	1.24189292	0.05710553	1.2	0.49606051	-0.05623586
2.1	-0.47267294	0.06721136	2.2	0.46428905	0.07967067
3.1	0.09087085	-0.02620906	3.2	-0.57741002	0.00721980
4.1	-0.01164141	0.00499246	4.2	0.27657094	-0.02539778
5.1	0.00111151	-0.00063913	5.2	-0.08333710	0.01254411
6.1	-0.00007799	0.00005625	6.2	0.01486710	-0.00284277
1.3	0.31991805	-0.05505933	1.4	0.27865073	-0.05506126
2.3	0.43450747	0.01890679	2.4	0.46047118	-0.00759749
3.3	-0.05060089	0.05321653	3.4	0.26967123	0.03498076
4.3	-0.42836224	-0.02038987	4.4	-0.24704509	0.02542939
5.3	0.37619988	-0.01096854	5.4	-0.36291297	-0.01342172
6.3	-0.11942441	0.00703735	6.4	0.25424372	-0.00339960
1.5	0.20178585	-0.04342861	1.6	0.07477067	-0.01741261
2.5	0.38522876	-0.02091246	2.6	0.15379002	-0.01223657
3.5	0.44967771	0.00314879	3.6	0.22883973	-0.00701807
4.5	0.30629995	0.01717444	4.6	0.29505888	-0.00213573
5.5	-0.02544489	0.01282140	5.6	0.34612132	0.00181377
6.5	-0.33717664	-0.00060141	6.6	0.37497818	0.00411823

Tabla I. Partes real e imaginaria, de todas y cada una de las componentes de la matriz modal $[\Phi]$

Modo	ω_r [rad/s]	$\Delta\omega_r$ [%]	η_r	$\Delta\eta_r$ [%]
1	68.95390405	-1.45025E-08	0.09612912	-1.04027E-05
2	46.77391502	-2.13794E-08	0.03352524	-2.98283E-05
3	37.16899036	-2.69041E-08	0.02254924	0
4	28.43976461	-3.5162E-08	0.02961704	0
5	17.55565901	-5.69617E-08	0.04127203	-2.42295E-05
6	5.06669900	-1.97367E-07	0.06881535	0

Tabla II.

Como se ha mencionado en la introducción, una de las características del lenguaje de programación GAMS (General Algebraic Modeling System), radica en que una vez que se tiene una formulación consistente del problema, expresada en la notación de GAMS, el mismo software elige algún optimizador de los que dispone, para alcanzar su solución. De esta manera, el proceso de resolución del problema está separado del proceso de modelado; el usuario puede cambiar el modelo para mejorarlo o completarlo en un entorno agradable de manejar, ya que no se tiene que preocupar del funcionamiento del algoritmo interno que necesita para resolverlo³.

Seguidamente, se indican los resultados alcanzados para el modelo modal: matriz modal normalizada $[\Phi]$ respecto de la masa del sistema (Tabla I), así como las frecuencias naturales ω_r y los factores de amortiguamiento η_r (Tabla II).

Para los parámetros modales estimados (frecuencias naturales, factores de amortiguamiento y modos de vibración) se obtienen los mismos resultados que se pueden conseguir a través de la resolución del correspondiente problema directo.

El porcentaje de error cometido en la identificación de las frecuencias naturales $\Delta\omega_r$ y de los factores de amortiguamiento $\Delta\eta_r$ se muestran en la Tabla II. La influencia del número de iteraciones en la función objetivo z se representa en la Figura 3, la misma, alcanza un valor de 5.6000E-9 después de 37405 iteraciones.

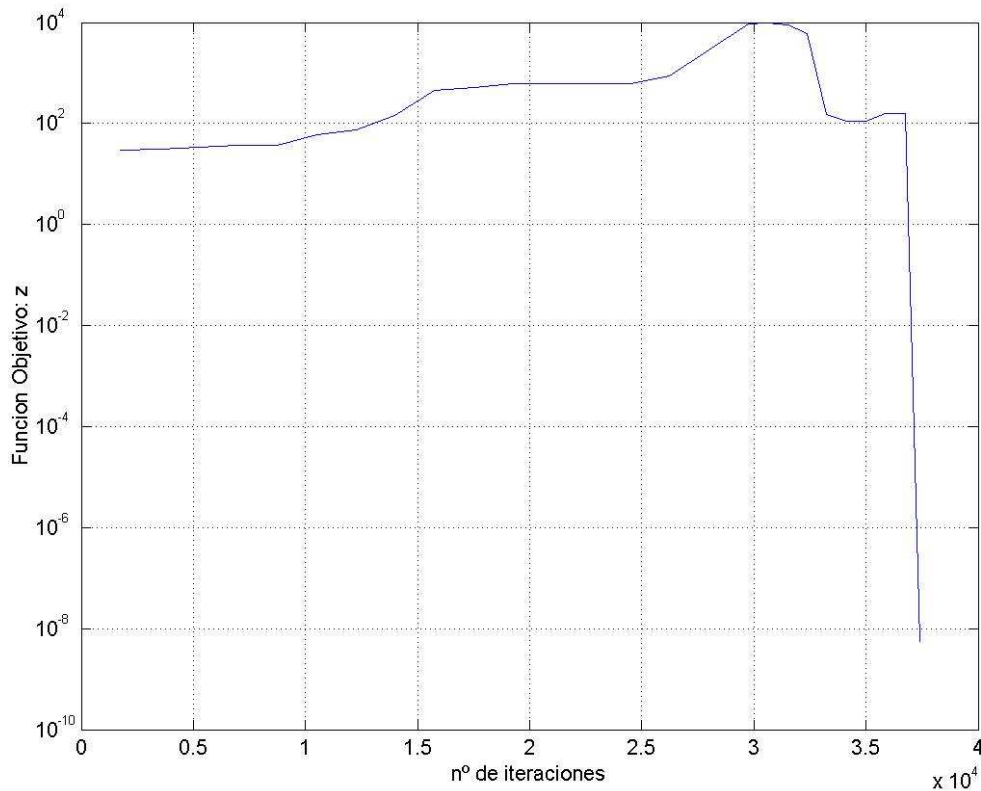


Figura 3. Influencia del número de iteraciones en la función objetivo z

En el caso de los autovectores, al objeto de valorar la precisión, resulta interesante comparar el grupo de modos de vibración identificados, con los que se pueden alcanzar teóricamente; a este respecto, es más preferible una representación numérica -por ser más objetiva y más fácilmente contrastable- que su análoga gráfica.

Ambos conjuntos de modos se corresponden perfectamente entre sí (Tabla III); este hecho se demuestra cuantitativamente por medio de las magnitudes de la matriz MAC (Modal Assurance Criterion), con valores de la diagonal principal que alcanzan el valor unidad.

El rango de aplicación del método expuesto a construcciones reales, pertenece al análisis modal de grandes estructuras civiles, en las que solo son de interés -en cada dirección- los primeros modos (por ejemplo 3 ó 4 en un edificio de gran altura), por lo que para definir tal número de modos en una gran construcción, es suficiente con unos pocos grados de libertad (véase por ejemplo las referencias 13, 14).

1.0000	0.0951	0.0438	0.0296	0.0144	0.0026
0.0951	1.0000	0.1172	0.0564	0.0231	0.0039
0.0438	0.1172	1.0000	0.1279	0.0352	0.0061
0.0296	0.0564	0.1279	1.0000	0.1168	0.0106
0.0144	0.0231	0.0352	0.1168	1.0000	0.0698
0.0026	0.0039	0.0061	0.0106	0.0698	1.0000

Tabla III. Matriz MAC entre los modos teóricos y los estimados

CONCLUSIONES

A continuación, se exponen las conclusiones generales más destacadas, que se pueden extraer de la exposición efectuada en los apartados previos:

- Se abre un nuevo camino para la resolución -a través de métodos de optimización y particularmente del programa GAMS- del problema inverso en análisis modal, que permite determinar el modelo modal a partir de la respuesta del sistema, utilizando la técnica del *Ajuste Global de la Respuesta*.
- Se proponen técnicas de descomposición para trabajar con magnitudes complejas, que permiten tratar separadamente la parte real e imaginaria, incluso en operaciones matriciales producto, así como ejemplos de las mismas para la implementación en programas comerciales de optimización, un requisito ineludible en la aplicación del programa GAMS.
- Y en particular, en lo que respecta a la técnica del Ajuste Global de la Respuesta, se concluye que:
 - Permite la determinación de los modos de vibración normalizados respecto de la matriz de masa en la situación general de amortiguamiento estructural, es decir, la obtención de la matriz modal $[\Phi]$, solucionando de esta forma el problema inverso, desde las mediciones experimentales del modelo de respuesta, hasta el modelo modal $\omega_r, \eta_r, [\Phi]$. Esto resulta evidentemente ventajoso, frente a otros procedimientos, que sólo consiguen la determinación de valores proporcionales de la respuesta, entre cada uno de los grados de libertad considerados, que componen cada uno de los modos de vibración (matriz $[\Psi]$).
 - Este algoritmo alcanza una estimación global de parámetros (frecuencias naturales, coeficientes de amortiguamiento y matriz modal $\omega_r, \eta_r, [\Phi]$). Mediante un proceso iterativo de cálculo, creando un modelo de funciones de respuesta en frecuencia artificiales, ligado a la totalidad de grados de libertad del sistema bajo estudio. De este modo es posible obtener un conjunto de soluciones único y consistente de estas propiedades procesando toda la información simultáneamente. Lo que, en principio, es preferible a las formas de promediado de los resultados de varios análisis independientes, como por ejemplo, de una colección de funciones de respuesta en frecuencia.

Referencias

- 1 N.M. Mendes Maia, J.M. Montalvao e Silva, J. He, N.A. John Lieven, R. Ming Lin, G. William Sklinge, W. To, A.P. Vale Urgueira, “*Theoretical and experimental modal analysis*”, Research Studies Press Ltd., (1997).
- 2 D.J. Ewins, “*Modal testing: Theory and practice*”, Research Studies Press Ltd., (1991).
- 3 E. Castillo, J.A. Conejo, P. Pedregal, R. García, N. Alguacil, “*Building and solving mathematical programming models in engineering and science*”, Research Studies Press Ltd., (2001).
- 4 A. Brooke, D. Kendrick, A. Meeraus, R. Raman, R.E. Rosenthal, “*Gams, a user’s guide*”, Gams Development Corporation, (1998).
- 5 D.E. Newland, “*Vibraciones aleatorias y análisis espectral*”, AC, (1983).
- 6 P. Avitabile, “Experimental modal analysis”, *Sound and Vibration*, pp. 20–31, January (2001).

- 7 R. Cantieni, "Experimental methods used in system identification of civil engineering structures", 2° Workshop: Problemi di vibrazioni nelle strutture civili e nelle costruzione meccaniche, Perugia, pp. 10-11, Giugno (2004).
- 8 W. Heylen, S. Lammens, P. Sas, "Modal analysis theory and testing", Katholieke Universiteit Leuven, (1999).
- 9 J. Hurtado, "Identificación de sistemas dinámicos", *Estructuras Sometidas a Acciones Dinámicas*, pp. 61–80, E. Car, F. López y S. Oller (Eds), Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería, (2000).
- 10 L.M. Villa García, "Aplicación de técnicas de optimización para la determinación de parámetros modales a través de las funciones de respuesta en frecuencia", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **23**, N° 4, pp. 395–414, (2007).
- 11 E. Castillo, A.S. Hadi, B. Lacruz, "Regresión diagnostic for the least absolute value and the minimax methods", *Communications in Statistics, Theory and Methods*, Vol. **30**, pp. 381-395, (2001).
- 12 L.M. Villa García, "Cálculo de la matriz modal de un sistema dinámico a partir de las constantes modales utilizando técnicas de optimización", *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, Vol. **24**, N° 1, pp. 13–23, (2008).
- 13 P. Paultre, J. Proulx, M. Talbot, "Dynamic testing procedures for highway bridges using traffic loads", *Journal of Structural Engineering*, Vol. **121**, N° 2, pp. 362–376, (1995).
- 14 E. Parloo, B. Cauberghe, F. Benedettini, R. Alaggio, P. Guillaume, "Sensitivity-based operational mode shape normalisation: Application to a bridg", *Mechanical Systems and Signal Processing*, Vol. **19**, pp. 43-55, (2005).